Papeles de Enseñanza de la Matemática

# Traslaciones, Giros y Simetrías en el Plano

Por

Angel Gutiérrez Rodríguez

Adela Jaime Pastor

COLECCIÓN DE MONOGRAFÍAS / 2

# TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRÍAS EN EL PLANO

PAPELES DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

# TRASLACIONES, GIROS Y SIMETRÍAS EN EL PLANO

*Ángel Gutiérrez Rodríguez*

*Adela Jaime Pastor*

Escuela Universitaria del
Profesorado de E. G. B. - Valencia
1313
SEMINARIO N.º 1-A
BIBLIOTECA

*COLECCIÓN DE MONOGRAFÍAS. N.º 2*

ESCUELA UNIVERSITARIA DEL PROFESORADO
DE EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA

UNIVERSIDAD DE VALENCIA
1986

Miembros del Seminario Permanente de Didáctica de las Matemáticas de la E.U. de Formación del Profesorado de E.G.B. en el ICE de la Universidad Literaria de Valencia que editan esta publicación:

Fernando Cerdán Pérez
Alejandro Fernández Lajusticia
Eduardo Galán Peláez
Bernardo Gómez Alfonso
Ramón Granell Trenco
Gregoria Guillén Soler
Ángel Gutiérrez Rodríguez
Adela Jaime Pastor
Luis Puig Espinosa

© Ángel Gutiérrez Rodríguez y Adela Jaime Pastor, 1986

I.S.B.N. 84-600-4275-8
Depósito legal: V. 276 - 1986

Artes Gráficas Soler, S. A. - La Olivereta, 28 - 46018 Valencia - 1986

# ÍNDICE

## INTRODUCCION

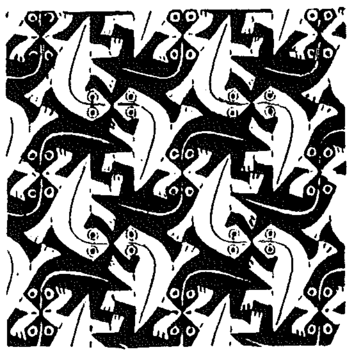
Es indudable la importancia que tiene la Geometría en la formación de los niños, pues permite un amplio abanico de posibilidades y de situaciones en las que investigar. Dentro de la Geometría, el estudio de los movimientos del plano es particularmente interesante debido a la variedad de sus aplicaciones en Matemáticas y en otros campos de la cultura, tales como Arte, Biología, Química, Ciencias Naturales, etc.

Con este libro iniciamos la presentación de una visión de los movimientos del plano en la que, por medio de actividades, iremos descubriendo sus propiedades; también realizaremos actividades con las cuales planteamos algunas líneas de trabajo que permiten afianzar y profundizar en el conocimiento de los movimientos, al mismo tiempo que muestran determinadas aplicaciones dentro del campo del arte. Las actividades han sido desarrolladas pensando en los alumnos de las Escuelas de Magisterio; por este motivo, parte de ellas abordan la teoría de los movimientos (es decir del grupo de las isometrías) del plano y otra parte propone métodos o técnicas de realización de movimientos. De esta forma, se ofrece a los estudiantes de Magisterio la posibilidad de adquirir conocimientos teóricos y técnicas didácticas que podrán aplicar en las aulas de E.G.B.

El material que hemos elaborado ha sido dividido en dos partes. La primera, que corresponde a este texto, está centrada en el estudio de las isometrías del plano; la segunda parte, que publicaremos en otro volumen, trata de la construcción de rosetones, frisos y mosaicos, mediante la aplicación de las ideas adquiridas en esta primera parte.

El presente libro está dividido en varios capítulos, que abordan diferentes unidades específicas. En los tres primeros se estudia cada uno de los movimientos fundamentales (traslación, giro y simetría); en cada caso, las actividades empiezan con una toma de contacto con el movimiento, para pasar desde su interpretación intuitiva a su caracterización formal. Después se descubren varias características y propiedades interesantes del movimiento y se practican algunas formas de realizarlo. No abordamos la simetría en deslizamiento ya que este movimiento no se estudia en E.G.B. y resulta complicado incluso para los alumnos de Magistero, como hemos podido observar en experiencias realizadas anteriormente.

Por lo que repecta al contenido de la segunda parte del texto, está dirigido a plantear actividades de afianzamiento y asimilación de los movimientos, consistentes en el uso de dichos movimientos en multitud de situaciones diferentes. La línea directriz es la construcción de rosetones, frisos y mosaicos, que presentan un terreno sumamente atractivo para los estudiantes, tanto de E.G.B. como de Magisterio. El último capítulo ofrece la posibilidad de aprender a construir mosaicos del tipo de los realizados por el artista holandés Mauricio Escher (véase la figura).



El material de trabajo que utilizaremos a lo largo de las actividades está formado por los elementos usuales de dibujo geométrico (regla, escuadra, transportador, compás, etc.) y por unas piezas de papel que emplearemos como vehículo con el que realizar físicamente los movimientos; también se usará algunas veces papel transparente. Pensamos que la mejor manera de comprender el significado de un movimiento es realizarlo, motivo por el cual ofrecemos a nuestros alumnos esta forma de trabajo; usarán estas piezas para efectuar las actividades propuestas y, una vez completadas, deberán pegarlas en hojas de papel con el fin de guardar los resultados y poder recordarlos.

Al final del libro se encuentran varias páginas en las que hay dibujadas algunas piezas de cada uno de los modelos que se van a usar en las actividades



(dibujadas en las dos posiciones simétricas). Para realizar las actividades, conviene fotocopiar esas páginas y luego recortar las fotocopias, para usarlas como hemos indicado antes, dejando las figuras originales para poder fotocopiar otra vez cuando sea necesario.

Las actividades que presentamos son el resultado de varias experimentaciones realizadas durante los últimos cursos en la Escuela de Magisterio de Valencia, y en particular de las derivadas de un Proyecto de Investigación aprobado en el Primer Plan de Investigación Educativa de la Comunidad Valenciana, financiado por la Consellería de Cultura, Educación y Ciencia durante el curso 1984-85.

A continuación ofrecemos una bibliografía, no exhaustiva, conteniendo algunos de los libros y artículos publicados en relación con este tema.

## BIBLIOGRAFIA

Bezuzska, S.; Kenney, M.; Silvey, L. (1977): Tessellations: The Geometry of Patterns. (Creative Publications: Palo Alto, CA, USA).

Bishop, T.D.; Fetters, J.K. (1976): Mathematical Reflections and Reflections on other Isometries, The Mathematics Teacher vol. 69 no. 5, pp. 404-407.

Boggild, J.K. (1980): Breeding Tessellations, Mathematics Teaching no. 90, pp. 31-37.

Bolster, L.C. (1973): Tessellations, The Mathematics Teacher vol. 66 no. 4, pp. 339-342.

Bool, F.H. y otros (1981): M. C. Escher. (Harry N. Abrams: N. York).

Boorman, P.; Dunn, J.A. (1971): More about Tessellating Hexagons, Mathematics Teaching vol. 69, pp. 22-24.

Bossard, Y. (1977,79): Rosaces, Frises et Pavages, 2 vols. (CEDIC: París).

Brand, T. (1978): Some "Isometric" Transformations, Mathematics in School vol. 7 no. 1, pp. 8-9.

Brieske, T. (1984): Visual Thinking with Translations, Half-Turns, and Dilations, The Mathematics Teacher

vol. 77 no. 6, pp. 466-469.
Budden, F.J. (1973): La fascination des groupes. (O.C.D.L.: París).
Coxeter, H.S.M. (1971): Fundamentos de geometría. (Limusa Wiley: México).
Coxeter, H.S.M.; Moser, C. (1980): Generators and Relations for Discrete Groups. (Springer Verlag: Berlín).
Edwards, C. (1973): Tiling Patterns, Mathematics Teaching no. 63, pp. 58-65.
Edwards, C. (1977): Wallcharts: Tessellations, Mathematics Teaching no. 78, pp. 14-17.
Eperson, D.B. (1977): Tessellations with Quadrilaterals, Mathematics in School vol. 6 no. 2, pp. 16 y 34.
Ernst, B. (1976): The Magic Mirror of M.C. Escher. (Ballantine Books: N. York).
Escher, M.C.; Locher, J.L. (1971): The world of M.C. Escher. (H.N. Abrams: N. York).
Esteban, A. (1984): Jugando con la Geometría Plana, Publicaciones de la Nueva Revista de EE.MM. no. 5, pp. 127-133.
Esteva, F. (1985): Sanefes i plegament i retallament de paper, L´Escaire no. 14, pp. 9-17.
Fielker, D.S. (1979 b): Strategies for Teaching Geometry to Younger Children, Educational Studies in Mathematics vol. 10, pp. 85-133.
Fortuny, J.M.; Almato, A. (1984): La geometría a través de las investigaciones de laboratorio. Los mosaicos, Actas de las III Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (Zaragoza, 10-12 Marzo 1983), pp. 337-343.
Freitag, R.A. (1978): Tiling, The Mathematics Teacher vol. 71 no. 3, pp. 199-202.
Gardner, M. (1975 a): More about Tiling the Plane: The possibilities of Polyominoes, Polyiamonds and Polyhexes, Scientific American vol. 233 no. 2, pp. 112-115.
Gardner, M. (1975 b): On Tessellating the plane with Convex Polygon Tiles, Scientific American vol. 233 no. 1, pp. 112-117.
Gutiérrez, A. (1983): An Experience with M.C. Escher and the Tessellations, Mathematics in School vol. 12 no. 2, pp. 17-21.
Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1982): Actividades de



isometrías con mosaicos. Col.lecció Eines de treball, Estudis i Recerques no. 13.(ICE de la U. Literaria: Valencia).
Haak, S. (1976): Transformation Geometry and the Artwork of M.C. Escher, The Mathematics Teacher vol. 69 no. 9, pp. 647-652.
Harris, I.; Fielker, D.S. (1974): Some Thoughts about Geometry, Mathematics Teaching no. 68, pp. 10-14.
Hatch, G.; Simonds, D.R. (1978): Tessellations with Equilateral Reflex Polygons, Mathematics Teaching no. 84, pp. 32-34.
Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1985 a): Semejanzas del plano, Epsilon no. 4, pp. 67-74.
Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1985 b): Estudio de las isometrías planas en las Escuelas de Magisterio. Los mosaicos, Actas de las X Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas (Murcia, 21-25 enero 1985).
Kuchemann, D. (1980 a): Children´s Difficulties with Single Reflections and Rotations, Mathematics in School vol. 9 no. 2, pp. 12-13.
Lindquist, M.M.; Dana, M.E. (1979): Wallpaper Caper, Arithmetic Teacher vol. 26 no. 6, pp. 4-9.
Lockwood, E.H.; Macmillan, R.H. (1978): Geometric Symmetry. (Cambridge U.P.: Londres).
MacGillavry, C. (1976): Fantasy and Symmetry. (H.N. Abrams: N. York).
Maletsky, E.M. (1974): Designs with Tessellations, The Mathematics Teacher vol. 67 no. 4, pp. 335-338.
Martin, G.E. (1982): Transformation Geometry. (Springer Verlag: Berlín).
Mold, J. (1972): Tessellations. (Cambridge U.P.: Londres).
N.C.T.M. (1972): Readings in Geometry from the Arithmetic Teacher. (N.C.T.M.: Reston, VA, USA).
O´Daffer, P.G.; Clemens, S.R. (1976): Laboratory Investigations in Geometry. (Addison Wesley: Menlo Park, CA, USA).
O´Daffer, P.G.; Clemens, S.R. (1977): Geometry: An Investigative Approach. (Addison Wesley: Menlo Park, CA, USA).
Oliver, J. (1979 a): Symmetry and Tessellations, Mathematics in School vol. 8 no. 1, pp. 2-5.
Oliver, J. (1979 b): Polysimmetrics; the Art of Making Geometric Patterns. (Tarquin: Norfolk).

Pedoe, D. (1979): La geometría en el arte. (Gustavo Gili: Barcelona).
Ranucci, E.R. (1971): Space-Filling in Two Dimensions, The Mathematics Teacher vol. 64, pp. 587-593.
Ranucci, E.R.; Teeters, J.L. (1977): Creating Escher-Type Drawings. (Creative Publications: Palo Alto, CA, USA).
Rosen, J. (1975): Symmetry Discovered. (Cambridge U.P.: Londres).
Sanok, G. (1978): Living in a World of Transformations, Arithmetic Teacher vol. 25 no. 7, pp. 36-40.
S.M.P. (1981): Pattern and Design. (Cambridge U.P.: Cambridge).
Teeters, J.L. (1974): How to draw Tessellations of the Escher Type, The Mathematics Teacher vol. 67 no. 4, pp. 307-310.
Troccolo, J.A. (1977): A Strip of Wallpaper, The Mathematics Teacher vol. 70 no. 1, pp. 55-58.
Walle, J.; Thompson, C.S. (1980): Concepts, Art, and Fun from Simple Tiling Patterns, Arithmetic Teacher vol. 28 no. 3, pp. 4-8.
Zurstadt, B.K. (1984): Tessellations and the Art of M.C.Escher, Arithmetic Teacher vol. 31 no. 5, pp. 54-55.



## TRASLACIONES

Si hablamos de trasladar un objeto, queremos decir que hay que moverlo **en línea recta.** Así, una **traslación** es el movimiento de un ascensor, de los esquiadores en un telesilla o de los niños en un tobogán. Sin embargo, el movimiento de un esquiador bajando por la nieve, de un columpio o de un coche desplazándose por la ciudad no corresponden a la idea de traslación, pues no son movimientos en línea recta.

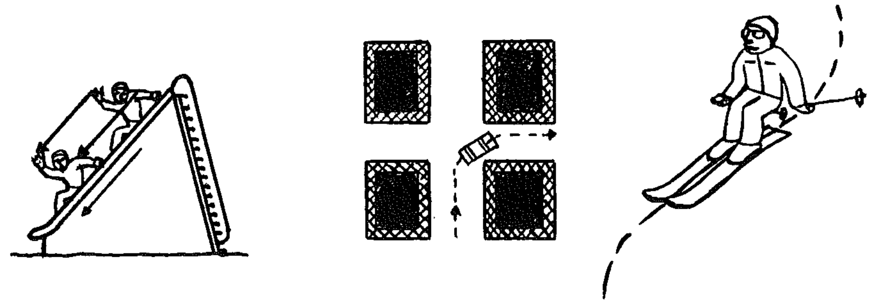
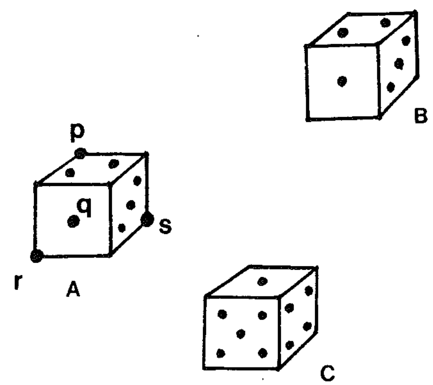


Figura 1

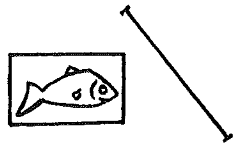
T-1. Indica algunos movimientos que correspondan a traslaciones y otros que no correspondan.

T-2. En la figura ves un dado (A) que ha sido trasladado hasta B. Dibuja el recorrido que ha hecho cada uno de los cuatro puntos marcados en el dado.



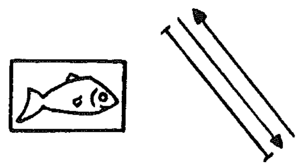

T-3. Como puedes observar, los cuatro puntos han recorrido segmentos similares: tienen la misma longitud y son paralelos. ¿Puedes mover el dado C por esa misma traslación? (Los segmentos que has dibujado en T-2 te ayudan).

T-4. Traslada el rectángulo de la figura usando el segmento que ves junto a él; sólo tienes que elegir algunos puntos del rectángulo y dibujar segmentos similares desde ellos, como en las actividades anteriores.



¿Por qué no has movido el rectángulo hacia el otro lado? Obviamente, un segmento indica la dirección de la traslación y su longitud, pero no da información sobre el sentido del movimiento. Por eso la actividad anterior tiene dos soluciones.

T-5. Traslada el rectángulo de la figura mediante cada una de las dos traslaciones que se obtienen del segmento que ves junto a él.



Como has observado, para poder realizar una traslación de un objeto se necesitan varios datos:

1) La **dirección**, que viene indicada por una recta sobre la que se desplaza el objeto. Esta recta sólo es una guía en la que apoyar el objeto que se mueve, luego no es única y puede sustituirse por cualquier otra recta paralela (fig. 2).

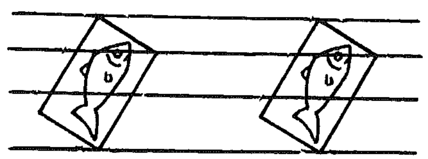


Figura 2

2) El **sentido** en el que se hará el movimiento, pues cualquier dirección lleva aparejados dos sentidos de movimiento (fig. 3).

Figura 3

3) El **módulo** o longitud del desplazamiento.

Estos tres datos se resumen en las tres componentes de un **vector**. Desde un punto de vista formal, una **traslación** $\mathbf{T_a}$ **de vector** $\vec{a}$ es un



movimiento del plano de forma que un punto p se mueve en línea recta hasta el punto p´ tal que $\overrightarrow{pp'} = \vec{a}$ (fig. 4).

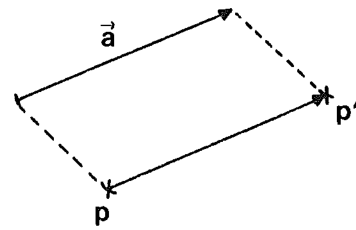



Figura 4

La forma más usual de representar una traslación es por medio del dibujo de su vector de traslación.
Pero como consecuencia de 1), una traslación se puede representar por infinidad de vectores, teniendo todos ellos iguales el módulo, la dirección y el sentido (cualquiera de los vectores de la figura 5 representa a la traslación que ha movido el triángulo). La elección de un vector u otro no depende más que de la situación del objeto que se tiene que mover y de nuestra comodidad, ya que para trasladar un punto, o una figura, debemos situar el vector de traslación con su origen sobre el punto, o la figura, y el final del vector indicará la posición de la imagen.

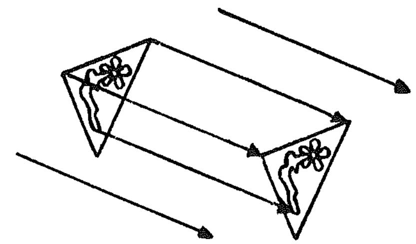
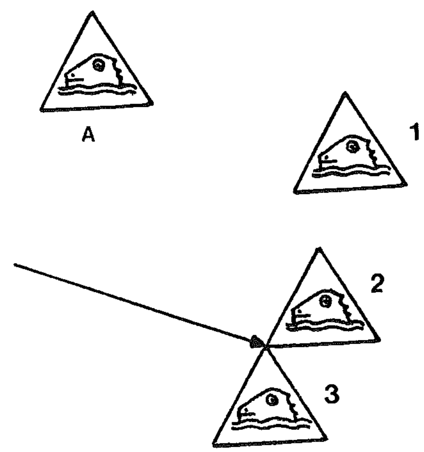
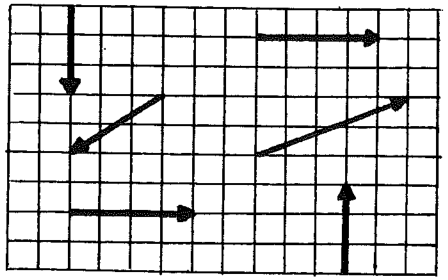


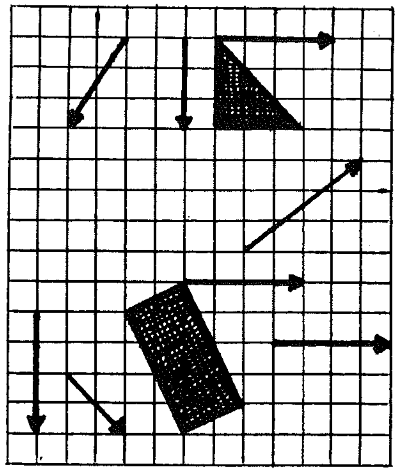
Figura 5

T-6. En la figura ves el vector de una traslación. ¿Cuál de los triángulos numerados es la imagen del triángulo A por esa traslación?



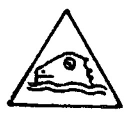
T-7. Coge un rectángulo y pégalo en una hoja de papel cuadriculado. Aplícale cada una de las traslaciones cuyos vectores se ven en la figura.



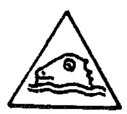


T-8. Repite la actividad anterior utilizando el triángulo y el rectángulo que ves a continuación.

T-9. La figura A ha sido trasladada hasta B, es decir $T_a(A) = B$. ¿Puedes dibujar el vector $\vec{a}$ de la traslación?



A



B

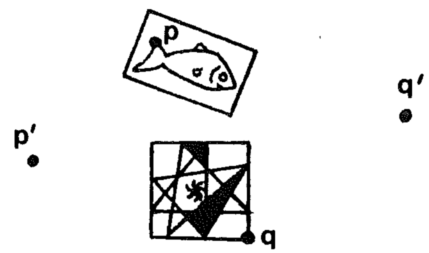
T-10. Elige un punto de la figura A anterior y dibuja el vector que va desde ese punto hasta su trasladado en B. ¿Qué vector se obtiene?

Haz lo mismo con otros puntos de la figura A. ¿Qué tienen en común esos vectores? ¿En qué se diferencian?

T-11. Los puntos p y q, de las figuras de la página siguiente, se han trasladado hasta p´ y q´ respectivamente mediante dos traslaciones.

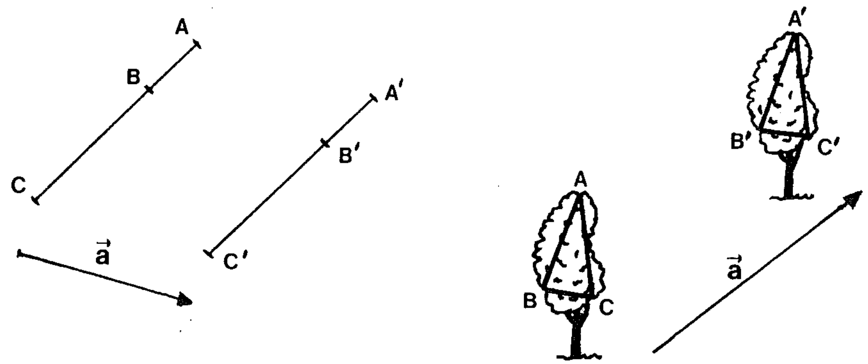


¿Podrías situar las figuras imagen, completas, por esas dos traslaciones?




T-12. Si quieres trasladar una figura, puedes hacerlo calculando las imágenes de puntos de la figura por la traslación. ¿Cuál es la cantidad mínima necesaria para poder trasladar la figura?

Como puedes observar en los resultados de T-7 y T-8, las traslaciones son movimientos que se caracterizan porque cambian la situación de los objetos en el plano pero mantienen constante su inclinación. En otras palabras, una traslación lleva un segmento hasta otro paralelo a él mismo (fig. 6-1), un polígono se mueve hasta otro con los lados paralelos a los del original y, en general, cualquier figura se queda en la misma posición relativa que la figura original (fig. 6-2).




- 1 - - 2 -

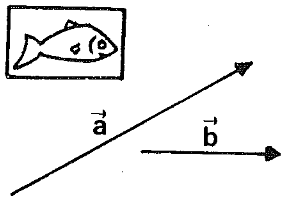
Figura 6

Así pues, teniendo en cuenta esta característica de las traslaciones, para trasladar un objeto, basta con conocer el lugar al que se desplaza uno de sus puntos.

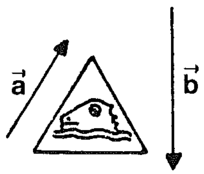
En las siguientes actividades vamos a estudiar la

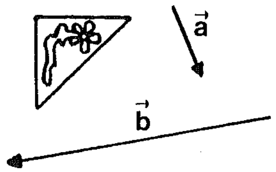
**composición de traslaciones:** moveremos cada objeto en dos pasos consecutivos, cada uno de los cuales es una traslación.

T-13. Mueve el rectángulo de la figura por medio de la composición $T_b \circ T_a$; para ello debes mover el rectángulo por $T_a$ y a continuación debes mover la imagen por medio de $T_b$.




T-14. Repite la actividad anterior con las figuras siguientes:

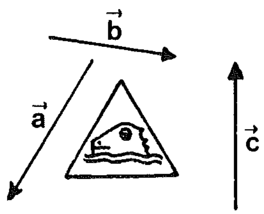



T-15. Observa el resultado de T-13. ¿Qué traslación permite llevar directamente (en un solo paso) la figura desde su posición inicial hasta la final? Dibuja su vector. Repite la actividad con las figuras de T-14.

T-16. Realiza ahora la composición $T_a \circ T_b$ con las tres figuras de las actividades 13 y 14 (ahora actúa en primer lugar $T_b$ y después $T_a$).
¿Qué traslación permite pasar directamente de la posición original a la final? Dibuja su vector. Compara los resultados con los obtenidos en la actividad T-15.

T-17. Realiza cada uno de los siguientes movimientos $T_c \circ T_b \circ T_a$, $T_c \circ T_a \circ T_b$ y






$T_a \circ T_c \circ T_b$ con el triángulo de la figura,
a) en tres pasos.
b) en un solo paso.
c) en dos pasos.

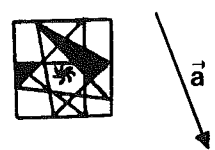
En las actividades T-13 a T-16 has visto que el resultado de componer $T_a$ y $T_b$, en cualquier orden, es la traslación cuyo vector es $\vec{a} + \vec{b}$; por lo tanto la composición de traslaciones es **conmutativa**: $T_a \circ T_b = T_b \circ T_a$.

No obstante, más adelante comprobaremos que esta propiedad no es válida para otras isometrías.

Después, en la actividad T-17, has comprobado que la propiedad **asociativa** se cumple en la composición de traslaciones. Recuerda que la composición de aplicaciones es asociativa y que las isometrías son casos particulares de aplicaciones, por lo que la composición de isometrías siempre es asociativa.

T-18. Dibuja un vector, pega una figura (F) en el papel y trasládala por medio de ese vector; llamaremos F´ al resultado de la traslación.
¿Con qué traslación podrías poner la figura F´ otra vez en su posición inicial F? ¿Qué relación hay entre la traslación original y este segundo movimiento? Indica en qué se parecen y en qué se diferencian el vector que lleva F hasta F´ y el que lleva F´ hasta F.

T-19. En la figura ves el vector $\vec{a}$ de una traslación y un cuadrado que ha sido movido por esa traslación. ¿Puedes colocar el cuadrado en su posición original?




Realizado un movimiento de unos objetos, existe otro movimiento que permite volver a colocarlos en su posición inicial; se dice que este segundo movimiento es el **inverso** del primero. Así, el movimiento inverso de la traslación $T_a$ es la traslación $T_{-a}$ cuyo vector es $-\vec{a}$, que tiene el mismo módulo y dirección que $\vec{a}$ pero el sentido contrario (fig. 7).

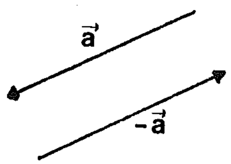


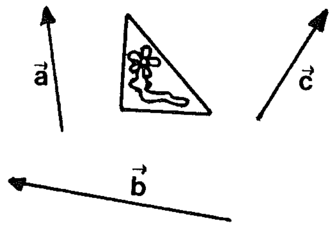

Figura 7

En el lenguaje general de las correspondencias, a la inversa de f se la denota por $f^{-1}$. Particularizando, podemos escribir $\mathbf{T_a^{-1} = T_{-a}}$.

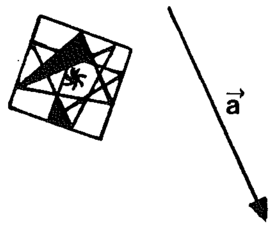
T-20. Realiza los siguientes movimientos con el triángulo de la figura:

$T_a \circ T_b^{-1} \circ T_c$, $T_b \circ T_a^{-1} \circ T_c^{-1}$,

$T_a \circ T_c^{-1} \circ T_b^{-1}$ y $T_a^{-1} \circ T_b \circ T_c^{-1}$.




T-21. Realiza los movimientos $T_a \circ T_{-a}$ y $T_{-a} \circ T_a$ con el cuadrado de la figura.




Efectivamente,
$\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$ y $T_a \circ T_{-a} = T_{-a} \circ T_a = T_0$, la traslación cuyo vector tiene longitud cero, que deja al cuadrado en la posición original. Ya sabes que al componer dos traslaciones se obtiene otra traslación, cuyo vector es la suma de los dos. En particular, $T_a \circ T_0 = T_a$, pues $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. Desde un punto de vista algebráico, esta propiedad indica que $T_0$ es el **elemento neutro** del conjunto de las traslaciones del plano con el producto de aplicaciones. Por otra parte, la recopilación de las propiedades que hemos deducido en las páginas anteriores muestran que este conjunto tiene estructura de **grupo abeliano** con el producto de aplicaciones.



## GIROS

El **giro** es, sin duda, el movimiento que más frecuentemente aparece en la vida cotidiana y del que se habla más a menudo. Las ruedas y el volante de los coches, los caballitos de la feria, el disco sobre el tocadiscos, los cientos de ruedas dentadas de las máquinas o las agujas del reloj son unos cuantos ejemplos de objetos que giran. Todos ellos tienen en común que realizan un movimiento circular, es decir **a lo largo de una circunferencia.**

Hay veces que se dice incorrectamente que un objeto gira, por ejemplo los planetas alrededor del sol, pues el movimiento de un planeta alrededor del sol no es circular sino que tiene forma de elipse (aunque los planetas sí giran alrededor de su eje).

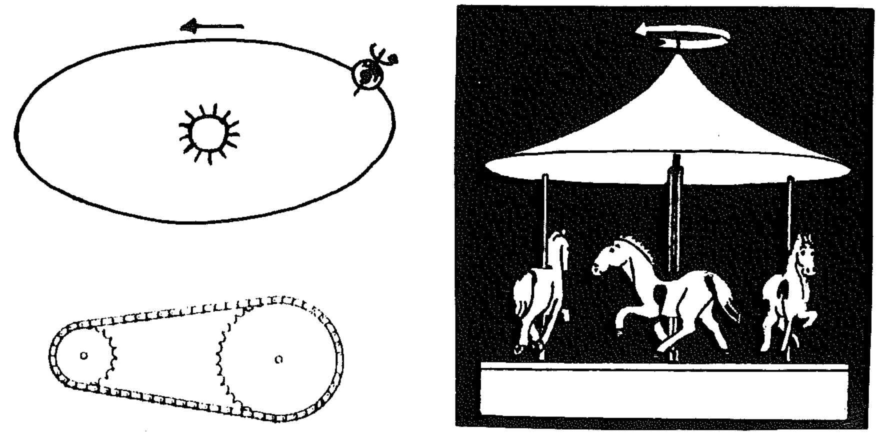


Figura 8

G-1. Indica algunos objetos que se muevan según un giro y otros cuyo movimiento no lo sea.

G-2. Toma un rectángulo, sujétalo con la aguja del compás y gíralo alrededor de ese punto. Pega en el papel varios rectángulos para recordar por dónde pasa el que estás moviendo.

Repite la actividad varias veces situando la aguja en distintos puntos y con varias figuras.

G-3. En la actividad anterior, has realizado giros alrededor de un punto de las figuras. Ahora intenta girarlas alrededor de puntos que estén fuera de ellas. Un palillo te puede ayudar (fig. 9).

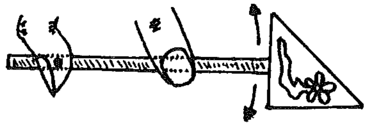
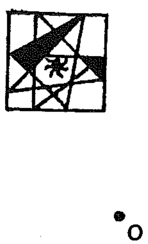


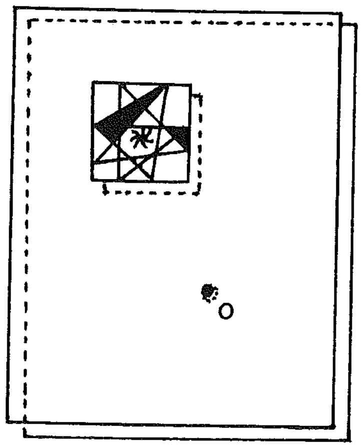
Figura 9

G-4. En esta actividad vamos a utilizar otro procedimiento para girar figuras; para realizar el giro usaremos dos hojas de papel transparente (acetato, vegetal, etc.). Si quieres girar el cuadrado de la figura -a- alrededor del centro O, calca el cuadrado y el centro de giro O en las dos hojas transparentes (figura -b-).

¿Cómo podrías tener, en una de las dos hojas, el cuadrado original y el girado?

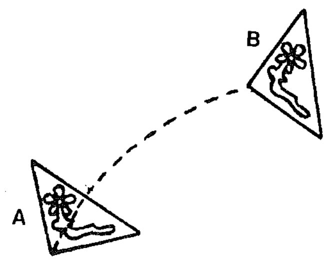



- a -




- b -

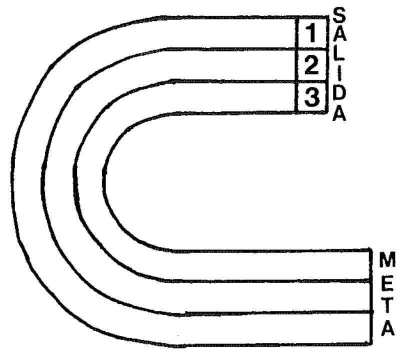
G-5. El triángulo A de la figura ha realizado un giro para ponerse en la posición B. ¿Puedes dibujar la circunferencia sobre la que se ha movido el vértice del ángulo recto? ¿Y las





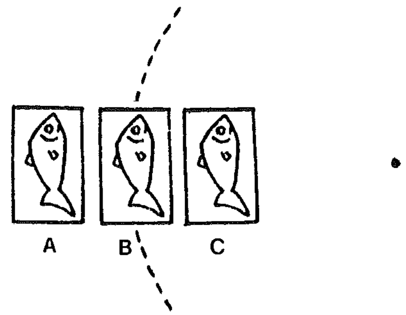

circunferencias recorridas por los otros dos vértices del triángulo?

G-6. Si tuvieras que correr en la pista de la figura, ¿qué calle elegirías? ¿Porqué?

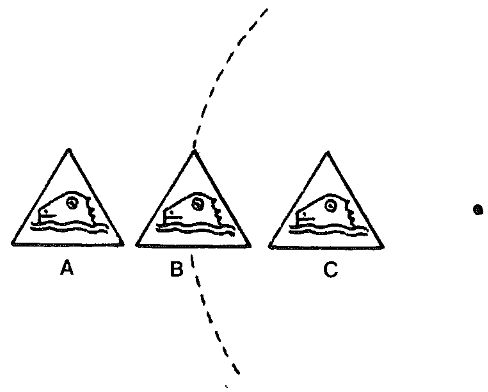



G-7. Los participantes en esta carrera realizan un giro cuando corren por la curva. ¿Realizan todos el mismo giro? ¿Porqué?

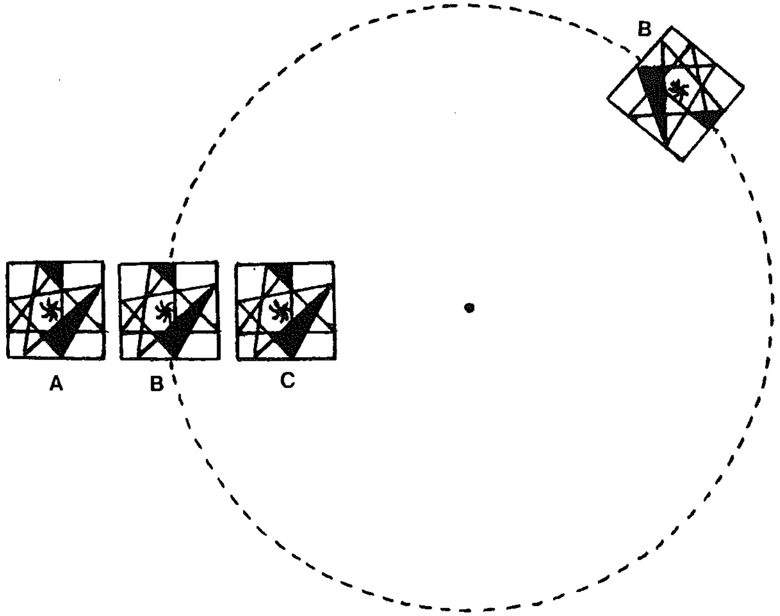
G-8. En la figura ves tres rectángulos. Realiza con cada uno de ellos un giro de 4 cm. de amplitud (dibuja las circunferencias de sus trayectorias y mueve los rectángulos hasta donde creas conveniente).




G-9. Ahora debes realizar con cada triángulo un giro de 110° de amplitud.




G-10. En la figura de la página siguiente ves tres cuadrados que deben realizar el mismo giro. El cuadrado B ya se ha movido, pero los otros dos no lo han hecho todavía. ¿Puedes moverlos? ¿Cómo mides este giro, en centímetros o en grados? ¿Porqué?




En las actividades precedentes hemos realizado el mismo giro con varios objetos y has descubierto que esos objetos se mueven sobre **circunferencias concéntricas**. El centro común de esas circunferencias se llama **centro de giro**. También has notado que la longitud recorrida por cada objeto es diferente y depende de lo alejado que se encuentre del centro de giro (fig. 10). Este es el motivo por el cual **los giros se miden en grados** y no en metros.

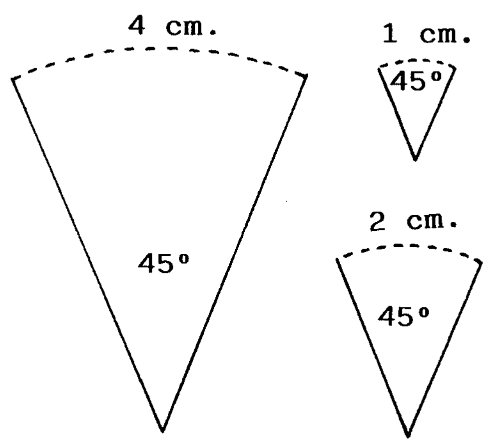
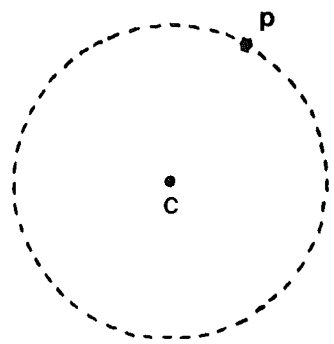



Figura 10



G-11. Realiza un giro de centro C y de 60° con el punto p de la figura. Para ello, sólo tienes que medir el ángulo con la ayuda del transportador.




G-12. ¿Podrías haber girado el punto p de la actividad anterior 60° hacia el otro lado? ¿Sería el mismo giro?

Al mover un punto sobre una circunferencia, hay dos posibilidades, dos sentidos de giro. Para distinguirlos, se utilizan ángulos positivos y ángulos negativos.
Vamos a seguir el acuerdo de tomar **ángulos positivos** para los giros en **sentido contrario al de las agujas del reloj** y **ángulos negativos** para los giros en el **sentido de las agujas del reloj** (fig. 11).

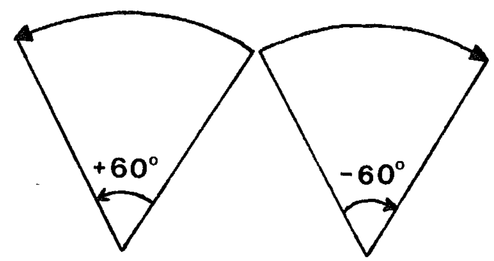
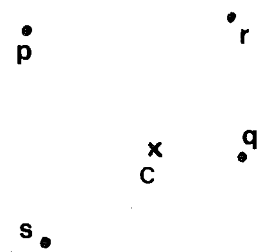


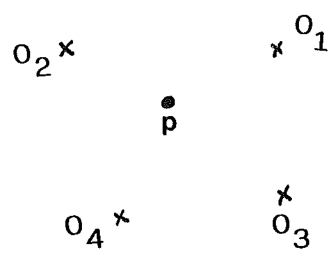

Figura 11

G-13. Realiza los siguientes movimientos:
- Giro con centro en C y ángulo de 45° del punto p.
- Giro con centro en C y ángulo de -60° del punto q.
- Giro con centro en C y ángulo de 120° del punto r.
- Giro con centro en C y ángulo de -90° del punto s.




G-14. Realiza los siguientes movimientos:
- Giro con centro en $O_1$ y ángulo de 45° del punto p.

- Giro con centro en $O_2$ y ángulo de 45° del punto p.
- Giro con centro en $O_3$ y ángulo de -100° del punto p.
- Giro con centro en $O_4$ y ángulo de 75° del punto p.




Para realizar un giro, necesitas conocer la circunferencia sobre la que se desplaza el objeto que vas a girar y para dibujarla es imprescindible saber dónde está su centro. Por lo tanto, el centro de giro y el ángulo son los datos que caracterizan a un giro:

El giro **G(C,a°) de centro en el punto C y ángulo de a°** es un movimiento del plano de forma que un punto p se mueve sobre una circunferencia, cuyo centro está en C, hasta el punto p´ tal que el ángulo $\widehat{pCp'}$ mide a° (fig. 12).

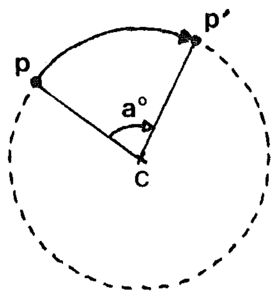
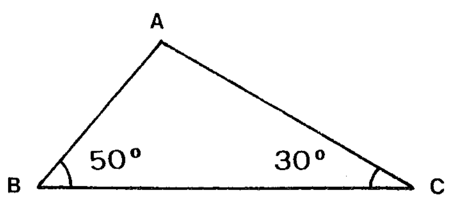


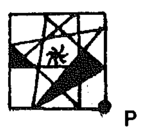

Figura 12

Es importante recordar que los ángulos se deben considerar siempre orientados, para evitar ambigüedades en cuanto al sentido del giro. Así, el ángulo $\widehat{ABC}$ de la figura es negativo y mide -50°, mientras que el ángulo $\widehat{CBA}$ mide +50°.

G-15. Indica el valor en grados de los ángulos $\widehat{BAC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CBA}$ y $\widehat{CAB}$.

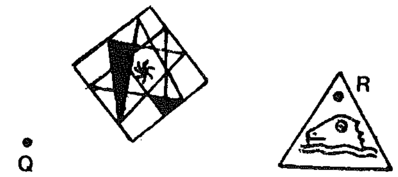



G-16. Aplícale al cuadrado giros con centro en P y ángulos de -90°, +180°, -290°, +100° y -60°.



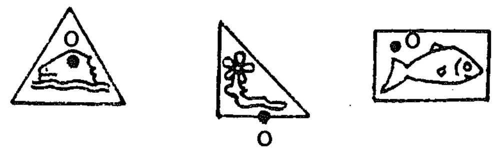



G-17. Aplícale a cada una de las figuras siguientes giros con centros en Q y R, respectivamente, de 45°, 250°, 30° y -30°.



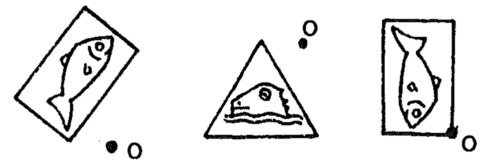

G-18. En los giros de G-16 y G-17, ¿qué puntos permanecen invariantes (es decir, no se han movido)?

G-19. Realiza giros con centro en O y ángulos de 180° con cada figura.

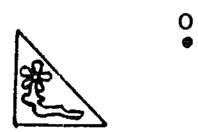



G-20. Con los mismos centros y figuras de la actividad anterior, realiza giros de -180°.

¿Notas algo de particular al comparar los resultados de G-19 y G-20? ¿Hay otros pares de ángulos que tengan esa misma particularidad?




G-21. Realiza con el triángulo de la figura giros con centro en O y ángulos de 40°, 300°, -320°, -260°, -60° y 100°. Compara las posiciones resultantes.




G-22. En las actividades anteriores has realizado varios giros de figuras con el mismo centro. A la vista de los resultados, completa las igualdades siguientes:

G(O,300°) = G(O,-60°) G(O,40°) = G(O, °)
G(O,180°) = G(O,70°) =
G(O,-85°) = G(O,a°) =

En general, si G(O,a°) = G(O,b°), ¿qué relación hay entre los ángulos de a° y b°?

Una vez que han sido descubiertas las características básicas de los giros, realizaremos actividades que pongan de relieve otras propiedades suyas, igualmente interesantes y que nos permitirán conocer más profundamente la estructura de este tipo de movimientos.

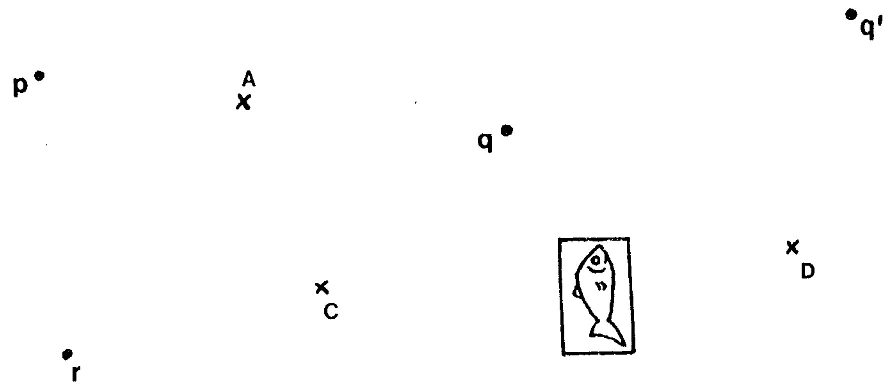
Hasta aquí siempre hemos realizado giros de forma directa, es decir a partir de un centro de giro, un ángulo y una figura que se desplazaba. Vamos a efectuar ahora el proceso contrario: Veamos cómo podemos obtener alguno de estos datos cuando no lo conozcamos.

G-23. Calcula la imagen por G(A,180°) del punto p.

Sabiendo que q´ = G(B,180°)(q), ¿dónde está el centro del giro B?

Calcula G(C,180°)(r) sin usar el transportador.

Calcula la imagen del rectángulo de la figura por G(D,180°) sin usar el transportador.



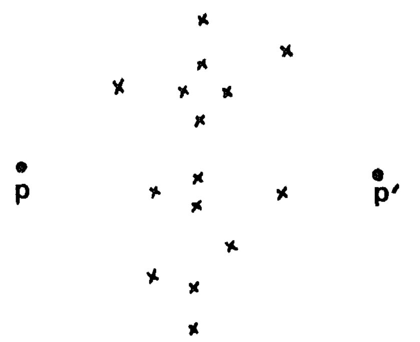

En la actividad anterior has comprobado que si un giro es de 180°, el centro de giro es el punto medio de cualquier segmento que une un punto con su imagen por el giro; pero, ¿cómo encontar el centro cuando el giro no es de 180°? Con las siguientes actividades, trataremos de contestar a esta pregunta.

G-24. En la figura de la página siguiente vemos el punto p y su imagen p´ por un determinado giro. ¿Cuáles de los puntos que ves marcados pueden ser centros de ese giro? Da tú otras soluciones.

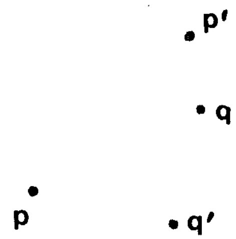
¿Qué línea obtienes al unir los posibles



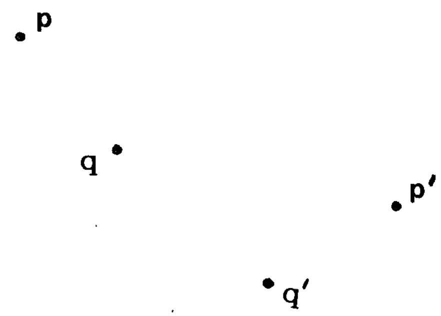
centros de giro? ¿Sabes qué particularidad tiene esa línea y qué nombre recibe? ¿A qué es debido este resultado?



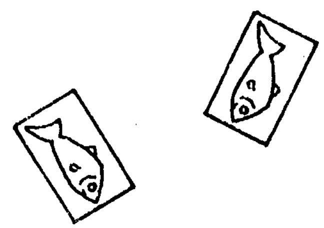

G-25. Ahora tenemos, en la figura -a-, dos puntos p y q y sus imágenes por un determinado giro p´ y q´. ¿Dónde está el centro del giro? (Utiliza la actividad anterior para encontrarlo). ¿Cuánto mide su ángulo de giro? Contesta a las mismas preguntas en los casos de -b- y -c-.




- a -

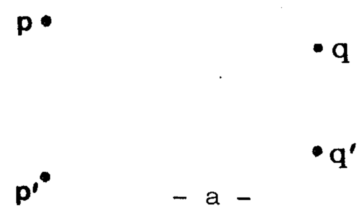



- b -

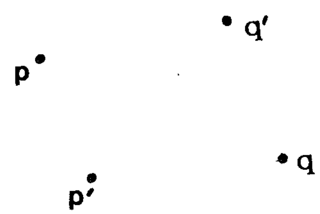


- c -

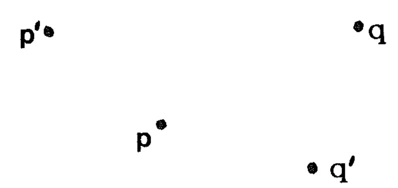
G-26. Repite la actividad anterior con los puntos de los cuatro casos siguientes:



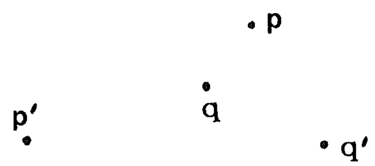

- a -




- b -




- c -




- d -

Como has observado en G-25, trazar mediatrices es un procedimiento que permite encontrar con facilidad el centro de un giro si se conocen dos punto (p y q) y sus imágenes por el giro (p´ y q´). Sin embargo el método no es perfecto y a veces no da la solución, como prueba el caso (a) de G-26, en el que las dos mediatrices coinciden.

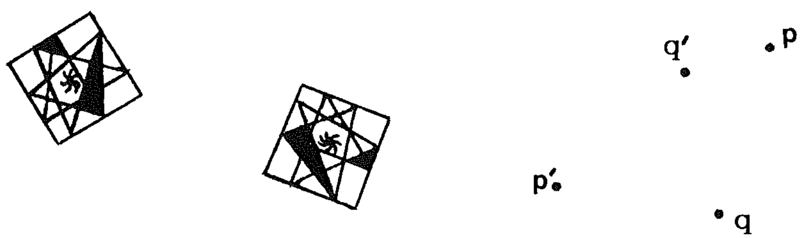
Los otros casos de G-26 nos enseñan que el procedimiento de las mediatrices no se debe aplicar a la ligera, ya que ninguno de ellos representa a puntos movidos por un solo giro:

Si las mediatrices no se cortan, caso (b), tendremos un centro de giro diferente para cada par de puntos (p,p´) y (q,q´).

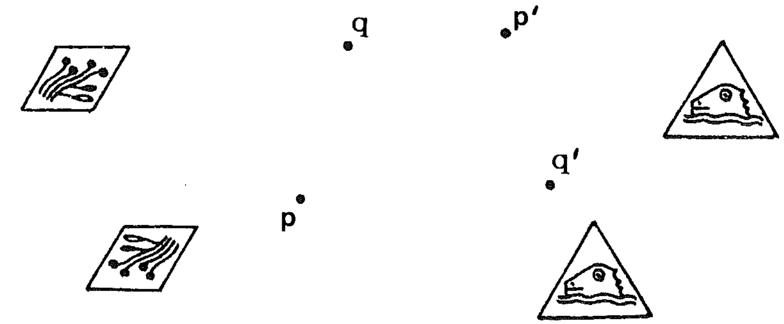
Tampoco puede ocurrir que un punto se mueva en sentido positivo y otro en sentido negativo por el mismo giro, aunque las mediatrices se corten, como en el caso (c).

Por último, el caso (d) de G-26 indica que es imprescindible verificar que los puntos, además de moverse en el mismo sentido, se muevan la misma cantidad de grados, ya que, en el ejemplo que comentamos, p y q se mueven por giros del mismo centro pero de diferente amplitud.

G-27. Repite la actividad G-25 en los 5 casos siguientes.






G-28. El punto p de la figura se ha movido hasta p´ por medio de $G(0,-70^\circ)$. ¿Dónde está el centro de giro O?


Vamos a estudiar la composición de giros en las actividades siguientes. Recuerda que para calcular la imagen de un punto p por la composición $g_{o}f$ hay que calcular primero la imagen de p por f y después aplicarle g a esa imagen (fig. 13).

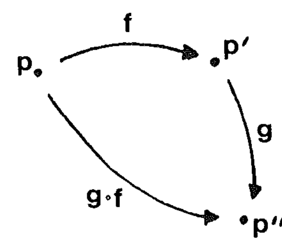
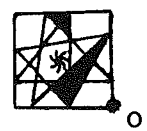


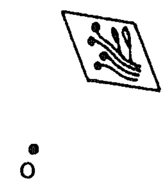

Figura 13

G-29. Mueve el cuadrado de la figura por medio de las siguientes composiciones de giros: $G(0,100^\circ)_{o}G(0,80^\circ)$, $G(0,50^\circ)_{o}G(0,225^\circ)_{o}G(0,-70^\circ)$ y $G(0,225^\circ)_{o}G(0,-150^\circ)_{o}G(0,-75^\circ)$.




¿Qué movimiento es equivalente a cada una de las composiciones anteriores?

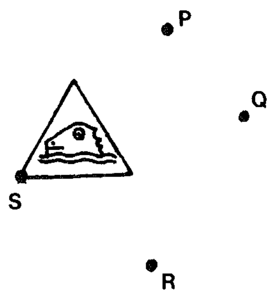
G-30. Realiza los siguientes movimientos con el rombo de la figura: $G(0,140^\circ)_{o}G(0,-60^\circ)$, $G(0,-120^\circ)_{o}G(0,90^\circ)_{o}G(0,70^\circ)$, $G(0,50^\circ)_{o}G(0,-225^\circ)_{o}G(0,175^\circ)$, $G(0,120^\circ)_{o}G(0,240^\circ)$.



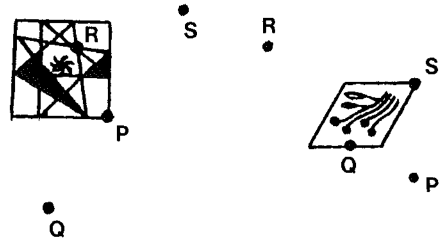

¿Qué movimiento es equivalente a cada una de las composiciones anteriores? Completa el enunciado de la propiedad que has aplicado: La composición de varios giros del mismo centro equivale a .........

G-31. Con el triángulo de la figura, realiza giros con centro en los puntos P, Q, R y S y ángulo de 110° en todos ellos.

¿Qué observas respecto de la posición de las imágenes? ¿Qué tipo de movimiento permite pasar de unas imágenes a otras?

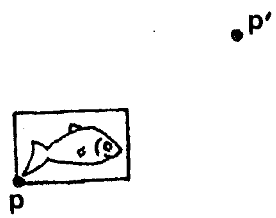



G-32. Repite la actividad anterior con el cuadrado de la figura, girándolo -45°, y con el rombo, girándolo 250°.



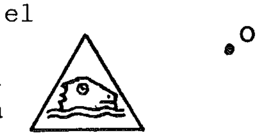

Esta característica de los giros permite conocerlos un poco mejor: Al girar una figura, cambia su posición en el plano y su inclinación respecto de la posición inicial. El cambio de posición depende del centro de giro y del ángulo, pero la inclinación depende solamente del ángulo de giro, tal como has comprobado con las actividades anteriores; por este motivo, el movimiento que, en esas actividades, permite pasar de una imagen a otra es una traslación. Vamos a aprovechar esta nueva información para desarrollar otra técnica con la que realizar giros cuyo centro está separado de la figura que debemos girar (que son los más difíciles de realizar).

G-33. El rectángulo de la figura ha sido movido por medio de un giro de -145°. Si p´ es la imagen de p por ese giro, ¿puedes situar el rectángulo imagen? (Sugerencia: Ten en cuenta las actividades G-31 y G-32).






G-34. Hasta ahora, para mover el triángulo de la figura según G(O,-120°), debías usar el compás y el transportador para calcular las imágenes de dos puntos del triángulo. Teniendo en cuenta G-33, es posible realizar el giro calculando sólo la imagen de un punto del triángulo.

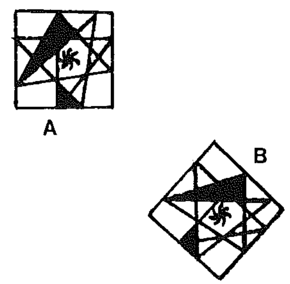



Realiza ese giro por el procedimiento que te hemos indicado:

a) Elige un punto del triángulo y calcula su imagen por G(O,-120°).

b) Realiza las manipulaciones igual que en G-33 (gira el triángulo alrededor de un punto cualquiera y trasládalo).

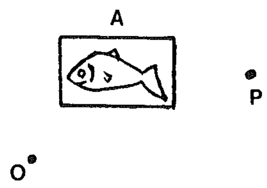
G-35. El cuadrado A de la figura se ha movido por medio de un giro. Para conocer el ángulo de giro puedes calcular antes el centro de giro, pero no es necesario trabajar tanto. Recuerda la actividad G-33 y averigua de cuántos grados es el giro.



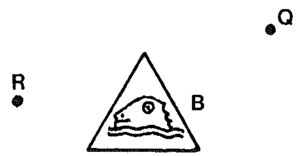

G-36. Seguramente, en la actividad anterior has trasladado una de las figuras para situarla sobre la otra y medir así el ángulo de giro. ¿Puedes calcular ese ángulo sin mover ninguna de las figuras?

En las actividades G-29 y G-30 hemos realizado composiciones de giros con el mismo centro. Para completar el tema, investigaremos acerca de la composición de giros con diferentes centros y descubriremos algunas de sus propiedades.

G-37. Realiza los siguientes movimientos:
$G(O,30^\circ)_o G(P,75^\circ)(A)$;
$G(P,75^\circ)_o G(O,30^\circ)(A)$;
$G(Q,-80^\circ)_o G(R,130^\circ)(B)$;
$G(R,130^\circ)_o G(Q,-80^\circ)(B)$.
¿Es conmutativa la composición de giros de distinto centro?

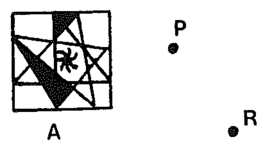



G-38. ¿Puedes reproducir los movimientos de la actividad anterior por medio de un solo giro? En caso afirmativo, indica los centros y los ángulos de giro.




G-39. Repite las actividades G-37 y G-38 con los siguientes movimientos:
$G(O,120^\circ)_o G(P,-120^\circ)(A)$; $G(P,-45^\circ)_o G(O,45^\circ)(A)$;
$G(Q,130^\circ)_o G(R,230^\circ)(B)$; $G(R,-60^\circ)_o G(Q,-300^\circ)(B)$.

G-40. Realiza los siguientes movimientos con los polígonos de la figura:
$G(P,50^\circ)_o G(Q,125^\circ)_o G(R,-175^\circ)(A)$;
$G(Q,-60^\circ)_o G(P,-180^\circ)_o G(Q,-120^\circ)(B)$;
$G(P,-60^\circ)_o G(R,215^\circ)_o G(Q,205^\circ)(A)$;
$G(P,60^\circ)_o G(Q,-100^\circ)_o G(P,90^\circ)(A)$;
$G(Q,-120^\circ)_o G(R,-45^\circ)_o G(P,60^\circ)(B)$.
¿Podrías indicar un movimiento simple equivalente a las composiciones anteriores?





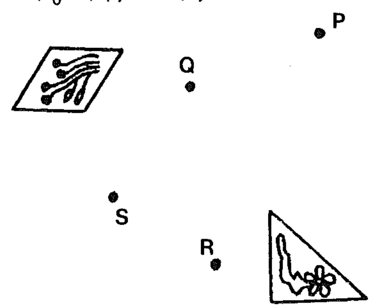
G-41. Resume los resultados de las actividades anteriores:
Al componer dos giros con el mismo centro, el resultado es ..........
Al componer dos giros con distinto centro, el resultado es ......... cuando ......... y es ......... cuando .........
Al componer un giro con una traslación, el resultado es ..........

En actividades anteriores hemos observado que, al girar una figura, el cambio en la inclinación



depende del ángulo de giro; si en vez realizar un giro movemos la figura por una composición de varios giros, la inclinación variará de acuerdo con la suma de los ángulos de los giros. Por tal motivo, si la suma de los ángulos es 0°, 360° u otro múltiplo suyo, la figura inicial y la final tendrán la misma inclinación y se puede pasar de una a la otra trasladándolas.

G-42. Calcula la imagen del triángulo de la figura por medio de
$G(P,70^\circ)_o G(Q,-30^\circ)_o G(R,-50^\circ)_o G(S,100^\circ)$ y
$G(R,60^\circ)_o G(Q,-100^\circ)_o G(P,-30^\circ)_o G(Q,70^\circ)$,
pero sin dibujar las posiciones intermedias (Sugerencia: Recordando G-33 y G-34, aplica los sucesivos giros a un punto del triángulo).
Haz los mismos movimientos con el rombo.




La estructura del conjunto de los giros es algo más compleja que la el conjunto de las traslaciones, debido principalmente a que al componer giros el resultado no siempre es un giro:

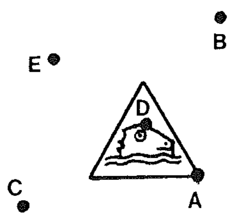
Si la composición está formada por **giros con el mismo centro**, el resultado es otro giro con el mismo centro, cuyo ángulo es la **suma de los ángulos** que intervienen en la composición.

Por el contario, si en la composición intervienen **giros con distinto centro**, el resultado es una **traslación cuando la suma de los ángulos es múltiplo de 360°** y es un **giro cuando la suma de los ángulo no es múltiplo de 360°**; en este caso el ángulo de giro de la composición es esa suma.

Tampoco hay suerte con la conmutatividad, pues, como se ha comprobado en G-37, la composición de giros **no es conmutativa**, aunque en el caso de que todos los giros tengan el mismo centro sí se verifica la conmutatividad.

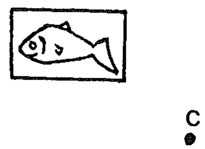
Como ya sabes, la traslación $T_0$ de vector 0 deja los objetos invariantes; del mismo modo, cualquier giro G(C,0°) con ángulo de giro de 0° deja los objetos invariantes, por no que este es el elemento **neutro** en el conjunto de los giros con el producto de aplicaciones.

G-43. Indica cuáles de los siguientes giros dejan al triángulo de la figura invariante: G(A,0°), G(B,360°), G(C,0°), G(D,180°), G(E,-360°), G(B,-720°) y G(D,120°).




¿Son iguales todos los giros que dejan el triángulo invariante? ¿Qué es necesario para que dos giros sean iguales?

G-44. Realiza el giro G(C,135°) con el rectángulo de la figura. ¿Qué giro puedes utilizar para mover el rectángulo de forma que vuelva a la posición inicial? ¿Es ése el único giro que lo hace? En caso negativo, ¿cuántos giros situarán el rectángulo otra vez en la posición inicial?




No debería sorprenderte el resultado de G-44, pues hemos descubierto antes (actividad G-22) que hay varios giros equivalentes, aunque tengan diferentes ángulos; en este caso, G(C,-135°) = G(C,225°) = G(C,-495°) = G(C,58°) = .... Por lo tanto podemos decir que el movimiento **inverso** del giro G(C,a°) es el giro G(C,-a°). Si utilizamos el mismo tipo de nomenclatura que con las traslaciones, escribiremos

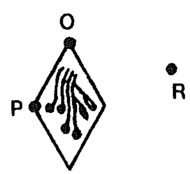
$$\mathbf{G(0,a°)^{-1} = G(0,-a°).}$$

G-45. Realiza los siguientes movimientos con el rombo de la figura:

$G(0,60°)_{o}G(P,90°)^{-1}{}_{o}G(R,-120°)^{-1}$,

$G(P,85°)^{-1}{}_{o}G(R,50°)_{o}G(0,-60°)^{-1}$ y

$G(P,-45°)^{-1}{}_{o}G(Q,90°)^{-1}{}_{o}G(0,-90°)^{-1}$.






## SIMETRIAS

La **simetría** es muy común en el arte, la naturaleza y la arquitectura; siempre aparece como resultado de esa tendencia de la naturaleza y de los hombres a construir seres y objetos equilibrados o, como solemos decir, simétricos: los cuerpos de los animales, las flores, los copos de nieve, las construcciones de la Grecia clásica, las catedrales, etc.

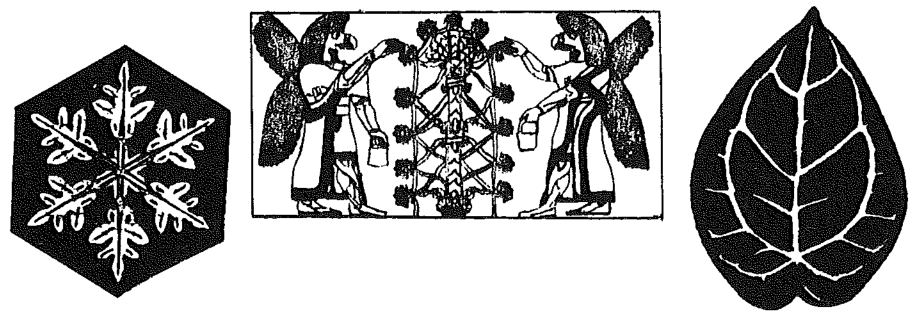
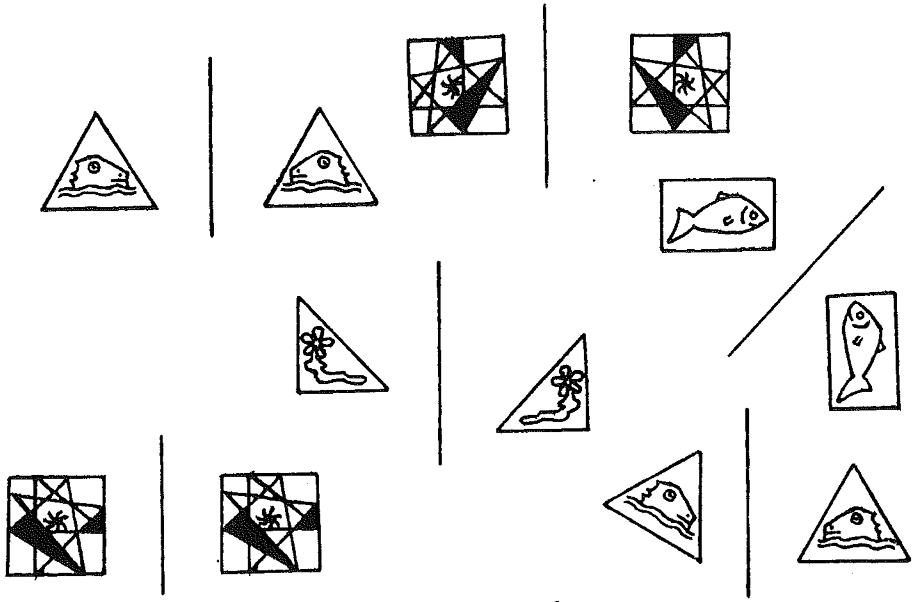


Figura 14

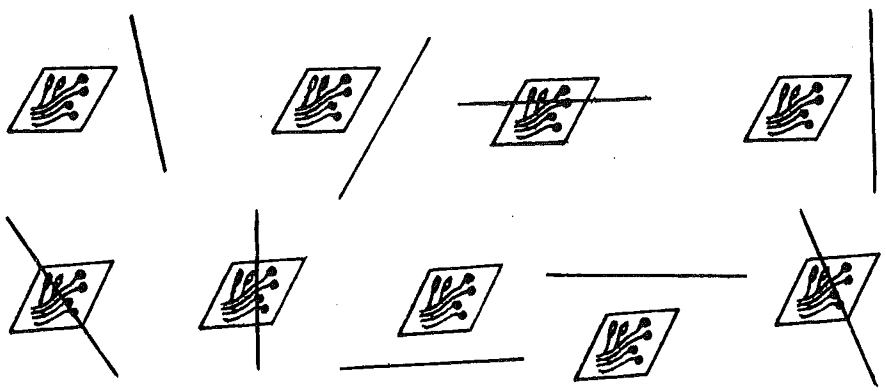
En todos estos ejemplos nos encontramos ante objetos divididos en dos mitades que concuerdan una con la otra, aunque suele haber detalles que las diferencian. La Geometría abstrae esta característica y la hace más precisa, obligando a que las dos mitades coincidan punto por punto, sin ninguna diferencia.

La otra visión usual que tenemos de la simetría es la que proporciona un espejo al reflejar los objetos puestos delante de él; en este caso, tenemos dos objetos que se corresponden punto por punto uno con el otro, lo cual se ajusta a la simetría geométrica más que los casos del párrafo anterior.

S-1. Observa los movimientos representados en las figuras de la página siguiente. Indica cuáles corresponden a simetrías y cuáles no, explicando el motivo en cada caso.



S-2. Realiza las siguientes simetrías.



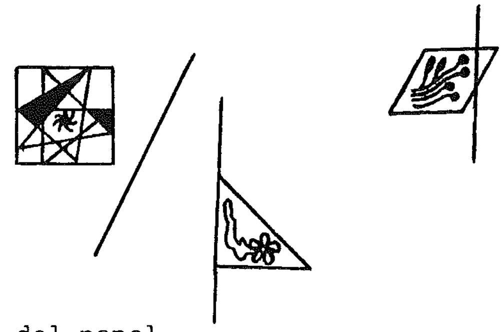
Como puedes observar, la característica fundamental de las simetrías es ese plano, o esa línea, que marca la frontera entre las dos mitades de la figura (o entre las dos figuras) simétricas. El espejo o el plano que divide a la flor o a la mariposa se llaman planos de simetría; cuando se trabaja sobre el papel, como va a ser nuestro caso, el plano deja su lugar al **eje de simetría.**

S-3. ¿Qué métodos conoces para dibujar la simétrica de una figura dada? Explica brevemente



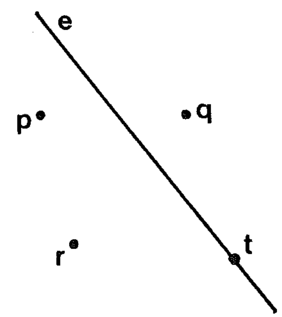
cómo utilizar cada método y haz un ejemplo de cada uno.

S-4. En la figura ves tres polígonos y tres rectas. Realiza la simetría de cada polígono respecto de su eje mediante plegado del papel.

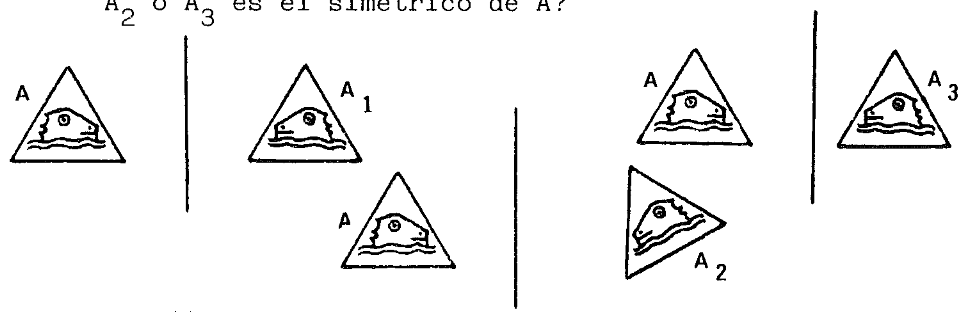


S-5. Realiza las simetrías anteriores sin doblar la hoja, sino con la ayuda de papel transparente (acetato, vegetal, etc.). ¿Qué manipulaciones necesitas hacer para tener la figura y su simétrica en la misma hoja?

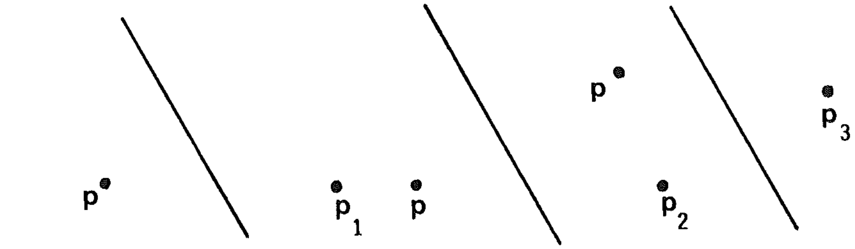
S-6. Calcula los simétricos de los puntos p, q, r y t respecto del eje e.



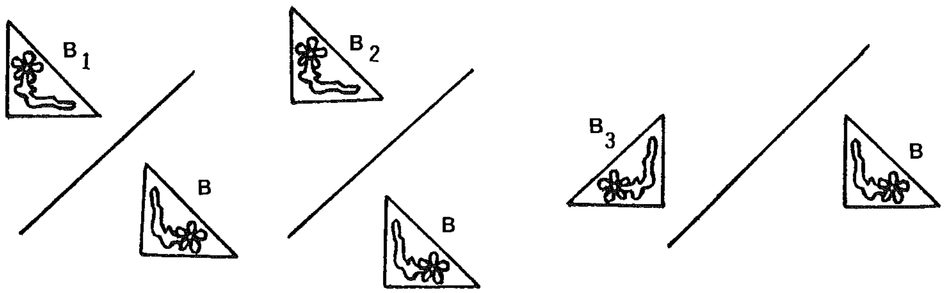

S-7. En las figuras hay un polígono A y un eje de simetría. ¿Cuál de los triángulos $A_1$, $A_2$ o $A_3$ es el simétrico de A?

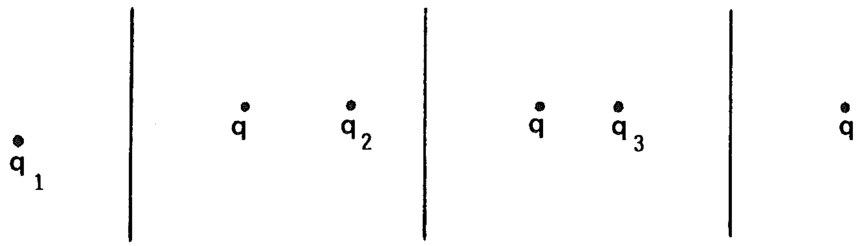



S-8. Repite la actividad S-7 con el punto p y los puntos $p_1$, $p_2$ y $p_3$ de la figura de la página siguiente.




S-9. Repite la actividad S-7 en estos dos casos.




La realización de las actividades anteriores te habrá dado una visión más detallada del concepto de simetría. Hay dos aspectos de las manipulaciones que has realizado que son importantes y que reflejan la visión intuitiva de las simetrías, visión que todos nosotros hemos experimentado con los espejos, pues todos los niños han jugado a poner la mano o la cara tocando el espejo y ver cómo, al separarse de él, el "otro niño" se separa también.

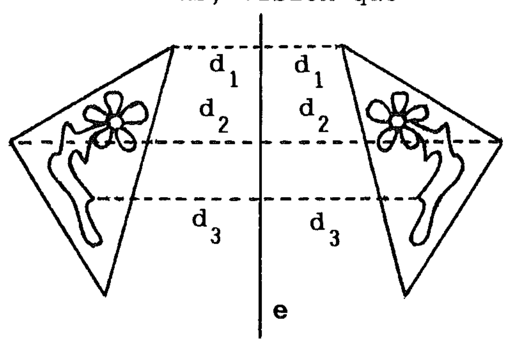



Figura 15

Geométricamente,



esta particularidad se traduce en que hay **la misma distancia entre el eje y los objetos simétricos** (fig. 15).

El otro aspecto a destacar está también presente en el juego del niño, ya que su reflejo está siempre "en frente" de él, aunque se mueva hacia los lados o hacia arriba; esto se traduce en que **los dos puntos simétricos están uno a cada lado del eje de simetría el segmento que los une es perpendicular al eje de simetría** (fig. 15). A modo de resumen, la definición de simetría puede ser la siguiente:

Una **simetría** $S_e$ **de eje la recta e** es un movimiento del plano que lleva a cada punto p hasta el punto p´ situado de manera que (fig. 16):

- El segmento $\overline{pp'}$ es perpendicular al eje de simetría e.
- La distancia entre el punto p y el eje de simetría es igual a la distancia entre el punto p´ y el eje, es decir que d(p,e) = d(p´,e).

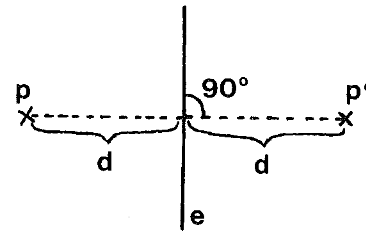
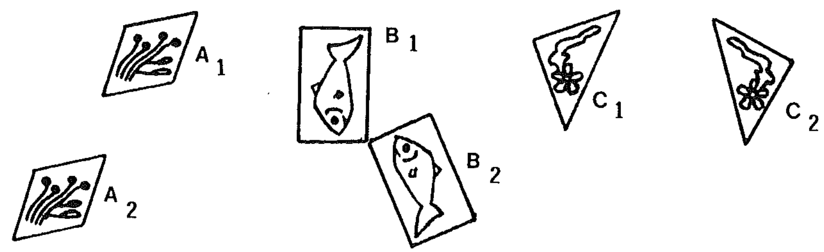



Figura 16

S-10. En la figura ves tres pares de polígonos que representan los tres movimientos que hemos estudiado hasta ahora.




Identifica la traslación que lleva $A_1$ hasta $A_2$ e identifica la que lleva $A_2$ hasta $A_1$.

Identifica el giro que lleva $B_1$ hasta $B_2$ e identifica el que lleva $B_2$ hasta

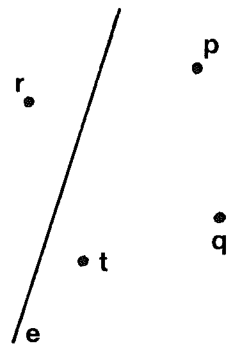
$B_1$.

Identifica la simetría que lleva $C_1$ hasta $C_2$ e identifica la que lleva $C_2$ hasta $C_1$.

S-11. Pon en el papel algunos pares de figuras que representen giros, traslaciones y simetrías, dales nombre ($D_1$ y $D_2$, etc.) y repite S-10 con ellas.

En las actividades S-10 y S-11 te habrá llamado la atención el hecho de que, en cada par de figuras, has utilizado dos traslaciones o dos giros, pero sólo una simetría. Esto se debe a que las traslaciones y los giros son movimientos orientados, es decir con un sentido fijo, por lo que siempre mueven los objetos en ese sentido; para moverlos en sentido contrario hace falta otra traslación o giro diferentes. Por el contrario, en la simetría no hay ningún sentido de movimiento predefinido y la única regla es que cada objeto se desplaza al otro lado del eje (observa los resultados de las actividades S-3 a S-6).

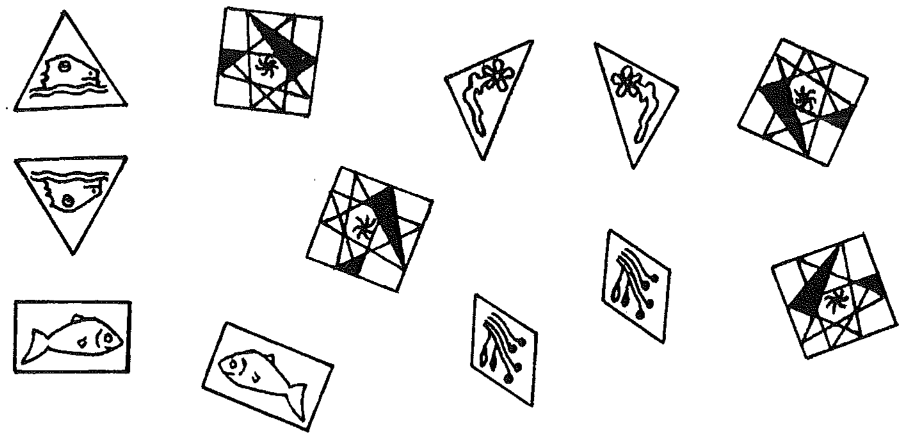
S-12. Calcula los simétricos de los puntos p, q, r y t respecto del eje e. Si llamamos p´ al simétrico de p, ¿qué puedes decir de la posición relativa entre la recta e y el segmento $\overline{pp'}$? ¿Se verifica la misma relación con los otros segmentos?



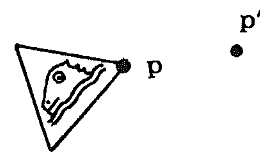

S-13. Recuerda el concepto de mediatriz y úsalo para dar otra definición de simetría.

S-14. De los pares de figuras de la página siguiente, identifica los pares de figuras simétricas y dibuja sus ejes de simetría. Cuando las figuras no sean simétricas, explica el motivo de que no puedas encontrar ningún eje de simetría.



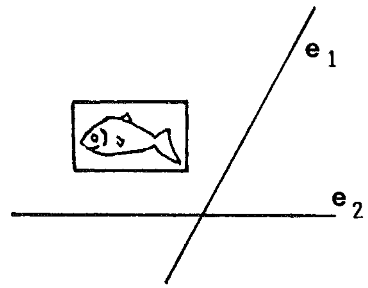


S-15. En la figura se ve un triángulo y el simétrico p´ de uno de sus puntos. ¿Puedes situar sobre el papel el triángulo simétrico?

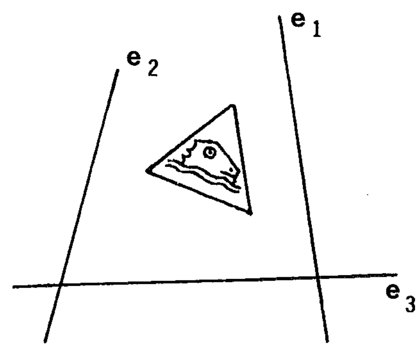



A continuación vamos a realizar actividades que nos llevarán a descubrir las propiedades de la composición de simetrías.

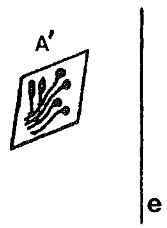
S-16. Aplica la composición $S_2 \circ S_1$ al rectángulo de la figura. Aplícale después el movimiento $S_1 \circ S_2$. ¿Es conmutativa la composición de simetrías?



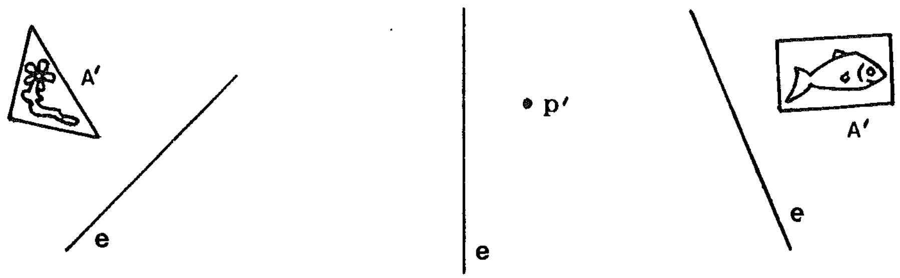

S-17. Aplica la composición $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ al triángulo de la figura. Aplícale también los movimientos $S_2 \circ S_3 \circ S_1$ y $S_1 \circ S_3 \circ S_2$.



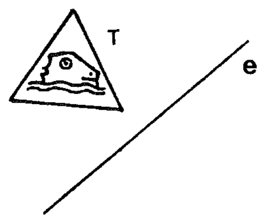
S-18. En la figura hay un rombo A´ que ha sido movido por la simetría $S_e$. ¿Qué movimiento debes realizar para llevar el rombo de nuevo a su posición inicial? En otras palabras, A´ es el simétrico del rombo A: A´ = $S_e$(A). ¿Dónde está A?




S-19. Repite la actividad anterior en los casos siguientes.

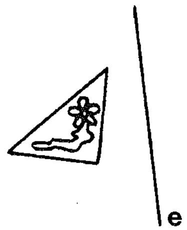



S-20. En la figura ves un triángulo T. Muévelo mediante la simetría S de eje e. Mueve por la misma simetría S la imagen que has obtenido.

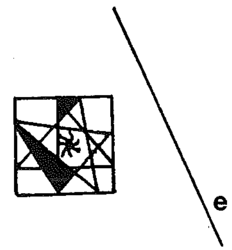



Observa que en la actividad anterior has realizado dos movimientos; el primero de ellos ha sido S(T), pues has movido el triángulo T por medio de S. El segundo movimiento ha sido $S_oS$(T), ya que has aplicado la simetría S a la imagen del primer movimiento, es decir a S(T).

S-21. Realiza con el triángulo de la figura los movimientos S, $S_oS$, $S_oS_oS$ y $S_oS_oS_oS$ (por S indicamos la simetría de eje e). ¿Puedes generalizar el resultado?




S-22. Calcula la imagen del cuadrado de la figura por medio de $S_oS_oS_oS_oS_oS_oS$ y de $S_oS_oS_oS_oS_oS_oS_oS$. Aplica el resultado de S-21 para facilitar tu trabajo.





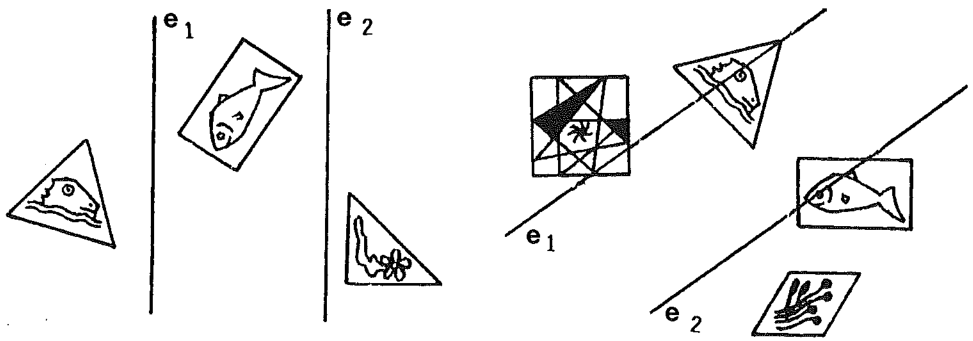

S-23. Completa los siguientes enunciados:
- El movimiento inverso de la traslación $T_a$ es la traslación .....
- El movimiento inveso del giro G(C,a°) es el giro .....
- El movimiento inverso de la simetría $S_e$ es la simetría .....

Vuelve a leer el comentario que hay entre S-11 y S-12, pues ahora le puedes sacar más provecho. En su momento descubriste que $T_{a\,o}T_{-a}$ y G(C,a°)$_o$G(C,-a°) no mueven los objetos, por lo que un movimiento de cada par es el inverso del otro del mismo par. Del mismo modo, $S_{e\,o}S_e$ no mueve los objetos, por lo que el movimiento **inverso** de $S_e$ es la propia simetría $S_e$; podemos escribir $\mathbf{S_e^{-1} = S_e}$.

S-24. Recuerda que $T_0$ (la traslación de vector cero) y G(C,0°) dejan todos los puntos del plano invariantes (no los mueven). ¿Hay alguna simetría con la misma propiedad?

Si tenemos que situar dos rectas en el plano (o lo que es lo mismo, si tenemos que dibujarlas en la hoja de papel), hay tres formas de hacerlo: De manera que sean paralelas, que se corten o que coincidan. En la composición de simetrías, estas tres posibilidades dan lugar a tres situaciones diferentes; las actividades anteriores (desde S-18) estaban referidas a la composición de simetrías con el mismo eje, es decir al caso de rectas coincidentes. Las actividades que vienen a continuación te sugerirán ideas sobre los otros dos casos.

S-25. Mueve mediante la composición de simetrías $S_2 \circ S_1$ las figuras que ves a continuación ($e_1$ y $e_2$ son rectas paralelas). ¿Puedes sustituir en cada caso el movimiento que acabas de realizar por otro equivalente más sencillo?




S-26. Mueve las figuras de la actividad anterior mediante la composición $S_1 \circ S_2$. ¿Puedes sustituir cada uno de los movimientos que acabas de realizar por otro equivalente más sencillo?

S-27. Responde a las siguientes preguntas, que se refieren a los resultados de S-25 y S-26:

¿Qué puedes decir acerca de la posición relativa de cada figura con su imagen final por la composición?

¿Hay siempre la misma relación?

¿Hay siempre la misma distancia entre las figuras y sus imágenes?

¿Toma algún valor particular esa distancia?

Si no has podido contestar a la segunda parte de las actividades anteriores, intenta hacerlo de nuevo después de pensar en las respuestas que acabas de dar.

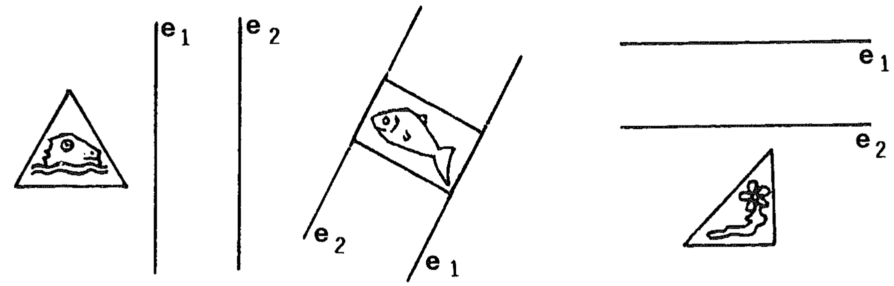
S-28. Realiza varias composiciones de pares de simetrías de ejes paralelos y comprueba las conclusiones de las actividades anteriores.

S-29. En las actividades precedentes has descubierto que la composición de dos simetrías de ejes paralelos equivale a una traslación. ¿Qué relación hay entre el vector de esa traslación y los ejes de simetría? ¿Es importante el sentido

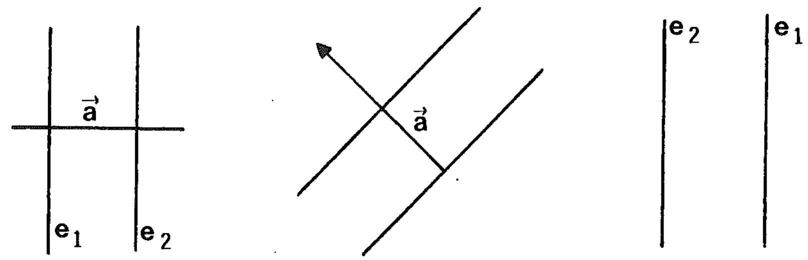


del vector de la traslación? ¿Está relacionado el sentido del vector con los ejes de simetría?

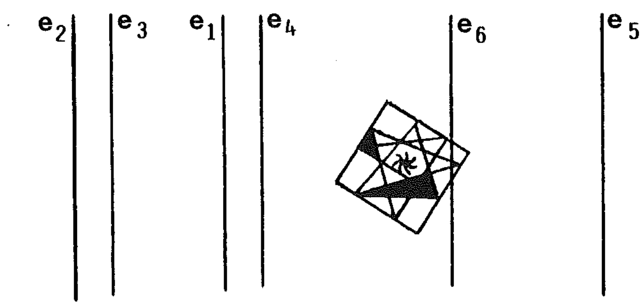
S-30. Realiza la composición $S_2 \circ S_1$ con las figuras siguientes, pero en un solo paso (es decir, aplicando el resultado de las actividades anteriores). Mueve también las mismas figuras por medio de $S_1 \circ S_2$. ¿Es conmutativa la composición de simetrías?



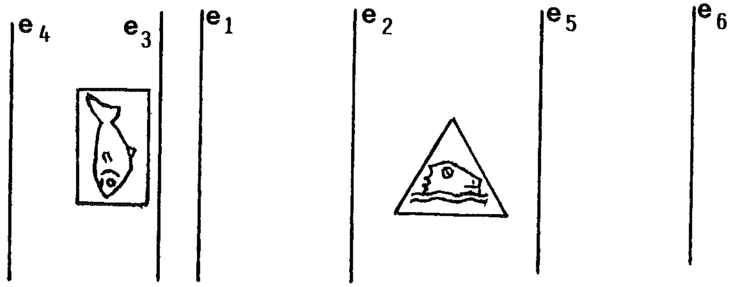

S-31. En las siguientes figuras se representan las simetrías $S_1$ y $S_2$, así como el vector de la traslación $T_a = S_2 \circ S_1$. Completa los datos que faltan en cada figura.




S-32. Calcula las imágenes del cuadrado de la figura por medio de las composiciones $S_1 \circ S_2$, $S_4 \circ S_3$ y $S_5 \circ S_6$.



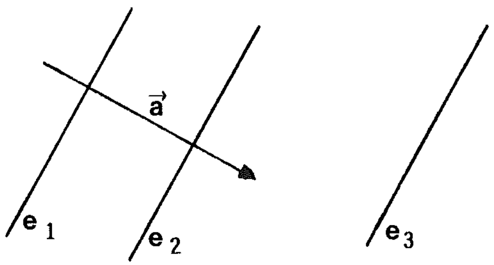
S-33. Repite la actividad anterior con las siguientes figuras. ¿Qué has observado de especial en S-32 y S-33?




S-34. En S-32 y S-33 has realizado varias composiciones de simetrías de ejes paralelos. Dibuja la traslación correspondiente a cada uno de los pares de simetrías. Saca conclusiones de los resultados.

S-35. Has comprobado que la composición de dos simetrías de ejes paralelos equivale a una traslación y que puede ocurrir que varias composiciones den lugar a la misma traslación.

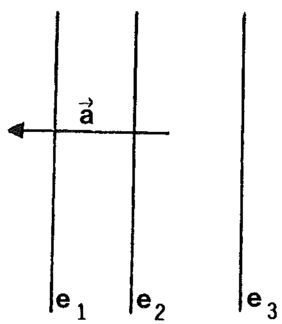
En la figura siguiente ves dos ejes de simetría $e_1$ y $e_2$ y el vector $\vec{a}$, de forma que $S_2 \circ S_1 = T_a$.




Dibuja el eje $e_4$ de manera que $S_3 \circ S_4 = T_a$. ¿Hay varias soluciones?

Dibuja los ejes $e_5$ y $e_6$ para que se verifique $S_5 \circ S_6 = T_a$. ¿Hay varias soluciones?

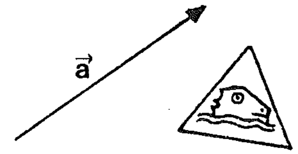
S-36. Repite la actividad anterior con las simetrías y la traslación que ves en la figura.






S-37. Descompón la traslación de vector $\vec{a}$ de la figura en varios productos de pares de simetrías de ejes paralelos:

$T_a = S_1 \circ S_2 = S_3 \circ S_4 = S_5 \circ S_6$.




Usa el triángulo de la figura, moviéndolo según esas composiciones, para comprobar que efectivamente todas ellas equivalen a $T_a$.

Las últimas actividades indican que una traslación puede expresarse como producto de dos simetrías de ejes paralelos que verifiquen ciertas condiciones:

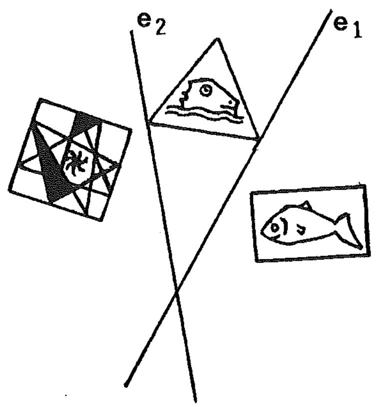
- Los ejes de las simetrías son **perpendiculares** al vector de la traslación.
- La **distancia** entre los ejes es **la mitad del módulo** del vector.
- El **orden de intervención** de las simetrías en la composición vien **fijado por el sentido del vector.**

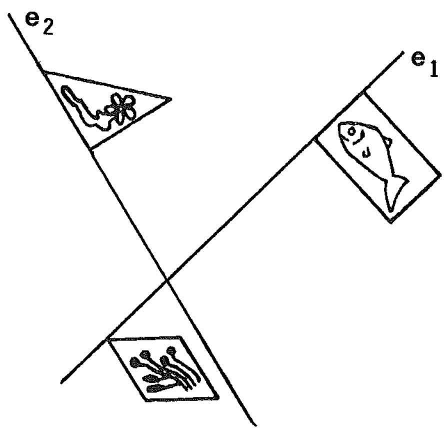
Observa que en estas condiciones no se habla de la posición concreta de los ejes de simetría en el plano, por lo que tienes libertad para situarlos donde quieras, siempre que cumplan los tres requisitos anteriores. Por eso las tres composiciones de S-32, o de S-33, equivalen a la misma traslación, aunque los ejes están situados en diferentes lugares.

Por otra parte, habrás deducido en S-35 y S-36 que el eje $e_4$ sólo puede colocarse en una posición, mientras que los ejes $e_5$ y $e_6$ admiten multitud de soluciones (aunque al dibujar uno de los ejes, el otro tiene una posición obligatoria, debido a las condiciones que se deben cumplir).

Completando el tema, vamos a realizar actividades acerca de la composición de simetrías cuyos ejes se cortan. Observa en sus resultados la similitud que hay con los de las actividades relativas a la composición de simetrías de ejes paralelos.

S-38. Calcula la imagen de las figuras que hay a continuación por medio de la composición de simetrías $S_2 \circ S_1$. ¿Qué movimiento más sencillo equivale a cada una de las composiciones?



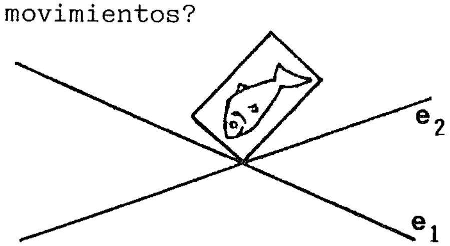



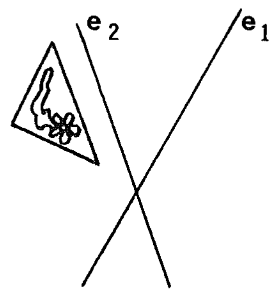

S-39. ¿Qué relación hay entre las simetrías que intervienen en las composiciones anteriores y los giros equivalentes?

Relaciona el centro de giro, el ángulo de giro y su sentido con los ejes de las simetrías.

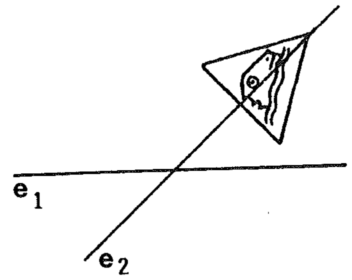
S-40. Realiza varias composiciones de pares de simetrías cuyos ejes se cortan y comprueba las conclusiones de las actividades anteriores.

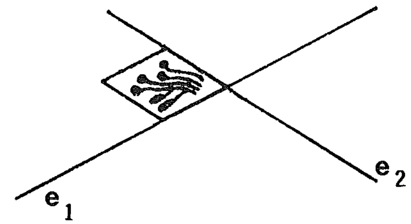
S-41. Realiza el movimiento de las cuatro figuras siguientes por $S_1 \circ S_2$, pero en un solo paso (es decir, aplicando el resultado de las actividades anteriores). Mueve también esas figuras por medio de $S_2 \circ S_1$. ¿Qué relaciones y diferencias hay entre ambos movimientos?



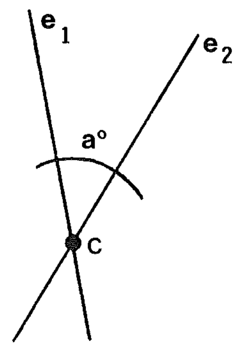



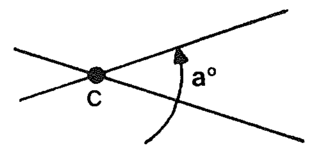


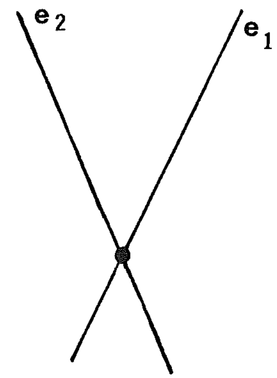



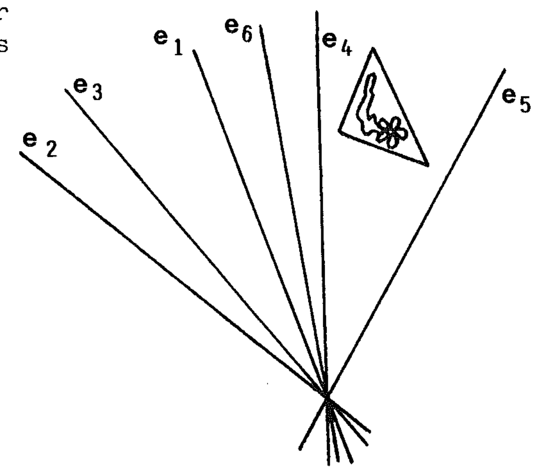

S-42. En la figura que ves a continuación se representan dos simetrías $S_1$ y $S_2$ y un giro $G(C,a°)$ de forma que $G(C,a°) \equiv S_2 \circ S_1$. Completa los datos que faltan en cada figura.



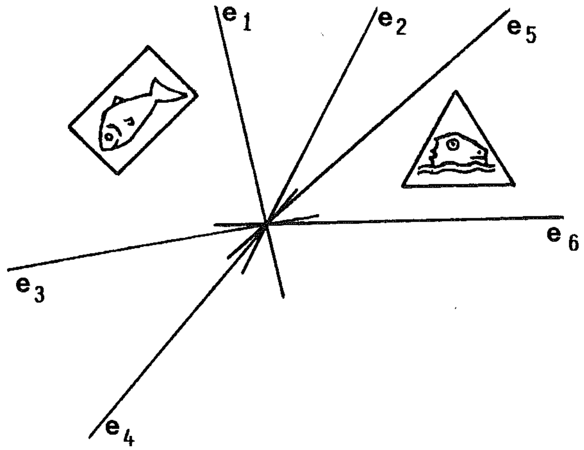




S-43. Calcula las imágenes del triángulo de la figura por medio de las composiciones $S_1 \circ S_2$, $S_4 \circ S_3$ y $S_5 \circ S_6$.



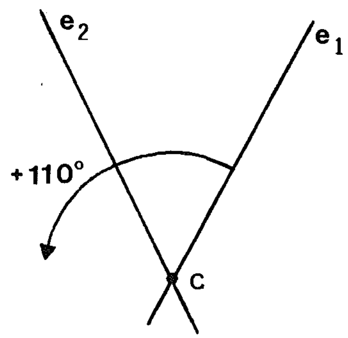
S-44. Repite la actividad anterior con estas otras figuras. ¿Qué has observado de especial en S-43 y S-44?



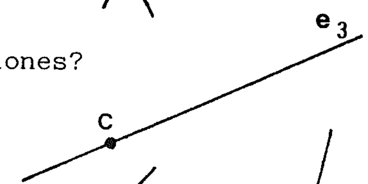

S-45. En S-43 y S-44 has realizado varias composiciones de simetrías de ejes que se cortan. Dibuja el giro correspondiente a cada uno de los pares de simetrías. Saca conclusiones de los resultados.

S-46. Has comprobado que la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan equivale a un giro y que puede ocurrir que varias composiciones den lugar al mismo giro.

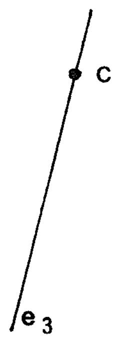
En la figura ves dos ejes de simetría $e_1$ y $e_2$ y el giro $G(C,110°)$, de forma que $S_2 \circ S_1 = G(C,110°)$.



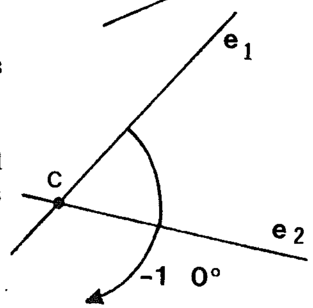

Dibuja el eje $e_4$ de forma que $S_3 \circ S_4 = G(C,110°)$. ¿Hay varias soluciones?




Dibuja los ejes $e_5$ y $e_6$ para que se verifique $S_5 \circ S_6 = G(C,110°)$. ¿Hay varias soluciones?

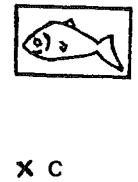



S-47. Repite la actividad anterior con las simetrías y el giro que ves al lado.






S-48. Descompón el giro $G(C,-140°)$ de la figura en varios productos de pares de simetrías de ejes paralelos: $G(C,-140°) = S_1 \circ S_2 = S_3 \circ S_4 = S_5 \circ S_6$.




Usa el rectángulo de la figura, moviéndolo según esas composiciones, para comprobar que efectivamente todas ellas equivalen a $G(C,-140°)$.

## RESUMEN

Dada una recta e (fig. 17), la **simetría de eje e** es un movimiento $S_e$ tal que $S_e(p) = p'$ si:

- El segmento pp´ es perpendicular a la recta e.
- $d(e,p) = d(e,p')$.

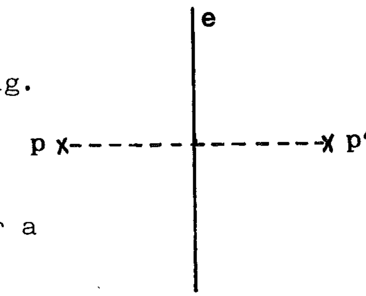



Figura 17

Se han comprobado las siguientes propiedades:

- La composición de dos **simetrías de ejes paralelos** es igual a una **traslación**: $S_2 \circ S_1 = T_a$, siendo $\vec{a}$ **perpendicular** a los ejes $e_1$ y $e_2$, $|\vec{a}| = 2 \cdot d(e_1,e_2)$ y el **sentido** de $\vec{a}$ igual al sentido del movimiento que va **desde la primera** simetría que actúa, $e_1$, **hasta la segunda**, $e_2$ (fig. 18).

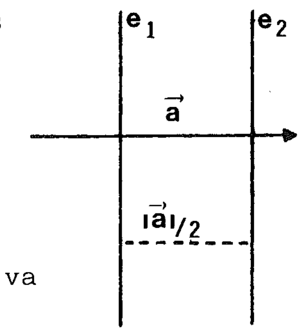



Figura 18

- Recíprocamente, cualquier traslación $T_a$ puede descomponerse en el producto de dos simetrías ($T_a = S_2 \circ S_1$), siendo los ejes

$e_1$ y $e_2$ perpendiculares al vector $\vec{a}$, la distancia entre $e_1$ y $e_2$ la mitad de la longitud del vector de la traslación y el sentido de $\vec{a}$ igual al sentido del movimiento desde la primera simetría que actúa, $e_1$, hasta la segunda, $e_2$.

- Cualquier traslación puede descomponerse de infinidad de maneras en producto de pares de simetrías.
- La composición de dos **simetrías cuyos ejes se cortan** es igual a un **giro:** $S_2 \circ S_1$ = $G(C,a°)$, siendo C el **punto de corte** de los ejes $e_1$ y $e_2$, y a° el **doble** del **ángulo orientado** que se forma **desde la primera** simetría que actúa, $e_1$, **hasta la segunda,** $e_2$ (fig. 19).

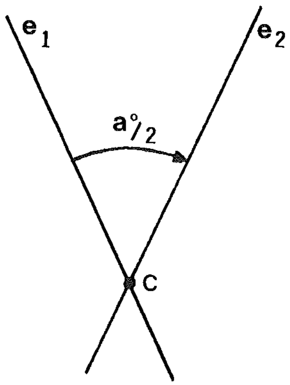


Figura 19

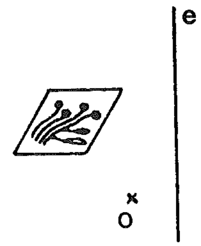
- Recíprocamente, cualquier giro $G(C,a°)$ puede descomponerse en el producto de dos simetrías ($G(C,a°) = S_2 \circ S_1$), cuyos ejes $e_1$ y $e_2$ se cortan en C y forman un ángulo que es la mitad del ángulo de giro, medido desde la primera simetría que actúa, $e_1$, hasta la segunda, $e_2$.
- Cualquier giro puede descomponerse de multitud de formas en producto de pares de simetrías.





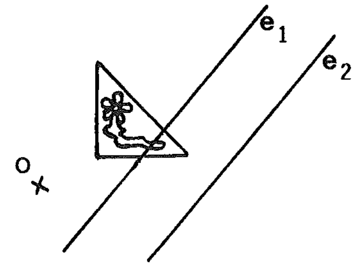
En el bloque de actividades que vamos a realizar a continuación, haremos intervenir composiciones de diversos tipos de movimientos. Es conveniente que recuerdes los resultados de los capítulos anteriores y que los utilices para tratar de simplificar tu trabajo sustituyendo, cuando sea posible, el producto de varios movimientos por un solo movimiento.

C-1. Mueve el rombo de la figura por medio de $G(O,30°) \circ Se \circ Se \circ G(O,50°)$. (Sugerencia: Recuerda los resultado de componer dos simetrías y de componer dos giros con el mismo centro).

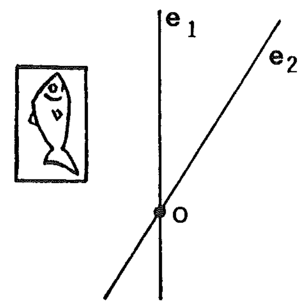



C-2. Ahora aplícale al mismo rombo la composición $Se \circ G(O,30°) \circ G(O,50°) \circ Se$.

C-3. Calcula la imagen del triángulo por $G(O,90°) \circ Se_1 \circ Se_2$, siendo $e_1$ y $e_2$ dos rectas paralelas. (Sugerencia: Si calculas la nueva inclinación del triángulo, solo necesitas buscar la posición de uno de sus puntos para situar el triángulo imagen. Puedes utilizar las actividades G-33 y G-34).

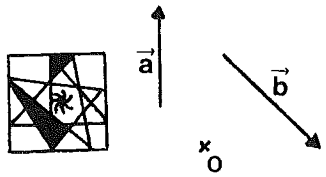



C-4. Mueve el rectángulo de la figura por medio de $G(O,120°) \circ Se_2 \circ Se_1 \circ G(O,350°)$.



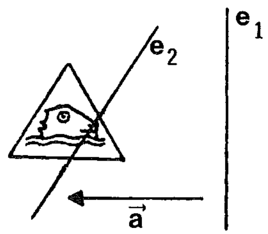

C-5. Mueve el mismo rectángulo por medio del producto $G(O,350°) \circ G(O,-120°) \circ Se_2 \circ Se_1$.

C-6. Mueve el cuadrado de la figura por medio de $T_a \circ G(O,100°) \circ T_b$. (Sugerencia: Aquí también es posible usar las actividades G-33 y G-34).

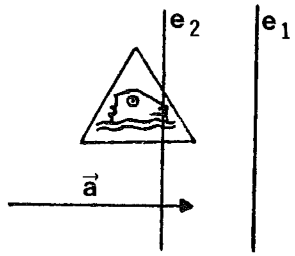


C-7. Mueve el mismo cuadrado por medio de $G(O,-120°) \circ T_b \circ T_a^{-1}$.

C-8. Mueve el triángulo de la figura por medio de la composición $Se_2 \circ Se_1 \circ T_a$. (Sugerencia: ¿A qué movimiento equivale $Se_2 \circ Se_1$?).

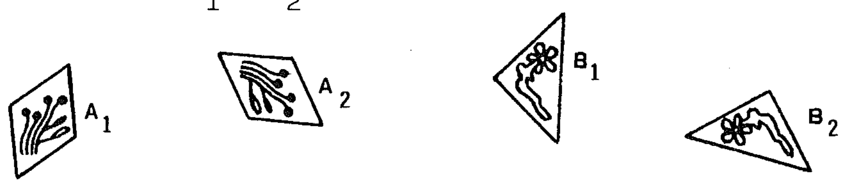


C-9. Mueve el triángulo de la figura mediante $Se_2 \circ Se_1 \circ T_a$.



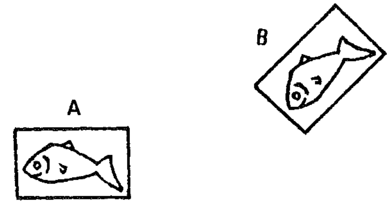
Ahora vamos a realizar actividades inversas de las anteriores: A la vista de una figura y de su imagen por medio de un movimiento, debes descubrir cuál es ese movimiento, es decir, debes indicar las traslaciones, giros o simetrías que lo componen, en el orden adecuado y definidos por sus elementos (vector, centro y ángulo o eje).

C-10. Identifica un movimiento que lleve la figura $A_1$ hasta la figura $A_2$. Haz lo mismo con las figuras $B_1$ y $B_2$.





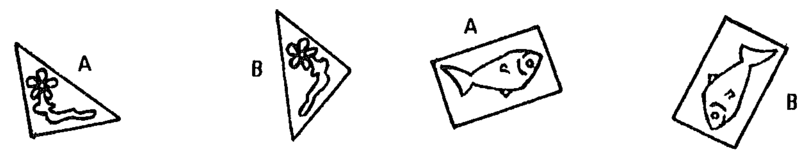
C-11. Realiza un movimiento de tres pasos (es decir, formado por tres isometrías simples) para llevar la figura A hasta la B. Escribe esas componentes en el orden adecuado.



C-12. Realiza un movimiento de dos pasos con las mismas figuras de C-11. Realiza también un movimiento de un solo paso que lleve la figura A hasta la B.

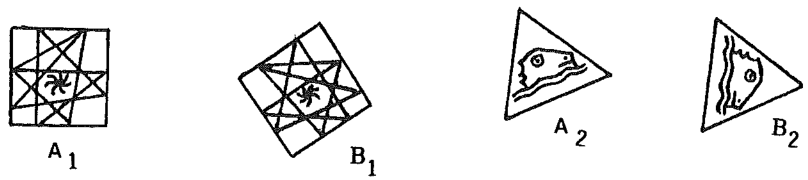
C-13. La figura A se ha desplazado hasta la B por medio de un movimiento en el que interviene un giro de 45°. Identifica ese movimiento.

C-14. Lleva el triángulo A de la figura hasta el B utilizando un movimiento en el que intervenga una simetría. Haz lo mismo con los rectángulos.

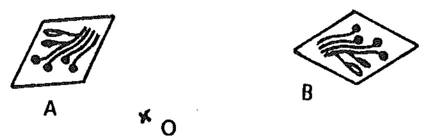


C-15. Realiza un movimiento de tres pasos que lleve el cuadrado $A_1$, de la página siguiente, hasta el $B_1$. Ahora, lleva $A_1$ hasta $B_1$ con un movimiento de dos pasos. Realiza también ese movimiento en un solo paso.

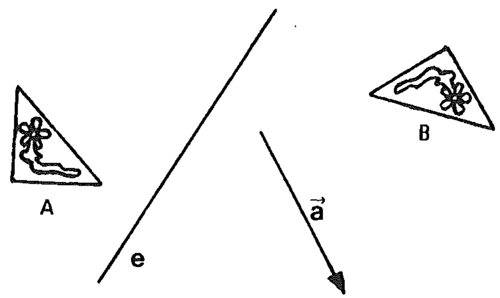
Repite las actividades de C-15 para llevar el triángulo $A_2$ hasta $B_2$.




C-16. El polígono A se ha movido hasta B por medio de dos isometrías, una de las cuales es G(0,-60°). ¿Cuál es el otro movimiento que ha intervenido?



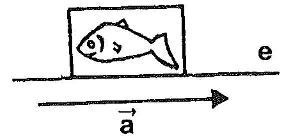

C-17. Para mover el polígono A hasta el B, se han utilizado la simetría $S_e$ y la traslación $T_a$. ¿Qué otros movimientos han intervenido?




Para terminar, te proponemos otro tipo de actividades algo diferentes de las anteriores. Tienes una figura, F, en el papel y un conjunto de movimientos. Elegirás uno de los movimientos de ese conjunto y se lo aplicarás a F; después eliges otra vez un movimiento (que puede ser el mismo de antes) y se lo aplicas a las dos figuras que tienes en el papel; a continuación vuelves a elegir un movimiento del conjunto y se lo aplicas a todas las figuras que ya tienes. Esto lo repites tantas veces como creas conveniente. Vuelve a leer este párrafo, si lo crees necesario, para entenderlo bien, o coméntalo con tus compañeros y con el profesor. Cuando lo tengas claro, empieza a realizar las actividades.

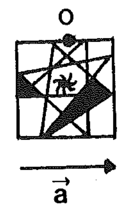


C-18. Al rectángulo de la figura le puedes aplicar $T_a$ y $S_e$. De acuerdo con lo que te señalábamos en el párrafo anterior, elige la traslación o la simetría y mueve el rectángulo con esa isometría. A continuación, vuelve a elegir uno de los dos movimientos y aplícaselo a los dos rectángulos. Sigue así varias veces.

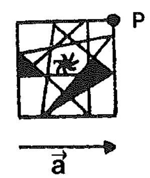



C-19. Utiliza G(0,180°) y $T_a$ con el cuadrado de la figura y realiza una construcción del tipo de la que has obtenido en la actividad anterior.

NOTA: Aunque se mueva el cuadrado, el centro del giro no se mueve con él.



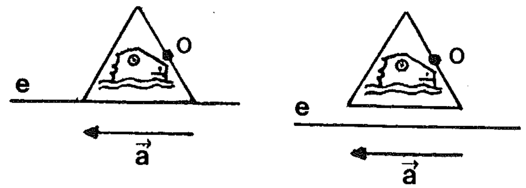

C-20. Utiliza ahora G(P,180°) y $T_a$ con este cuadrado. ¿Qué diferencias observas entre los resultados de C-19 y de C-20? ¿A qué crees que se debe el resultado?




Siguiendo con los resultados de las actividades C-19 y C-20, es interesante que vayamos más allá del simple reconocimiento visual de que se obtiene el mismo diseño en ambos casos. El hecho de que G(0,180°) y $T_a$ produzcan los mismos resultados que G(P,180°) y $T_a$ tiene un fundamento teórico que debes conocer.

C-21. Ya sabes (recuerda los resultados de G-33 y G-34) que al componer un giro con una traslación se obtiene otro giro con el mismo ángulo, aunque distinto centro. Con los datos de las figuras de C-19 y C-20, ¿qué giro se obtiene la realizar $T_a \circ G(0,180°)$? ¿Qué giro se obtiene al realizar $G(P,180°)_{o}T_{a}$?

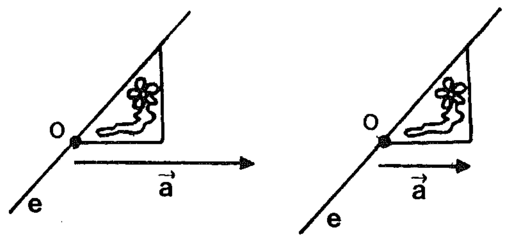
C-22. Aplica $G(O,180°)$, $S_e$ y $T_a$ a cada uno de los triángulos de la figura



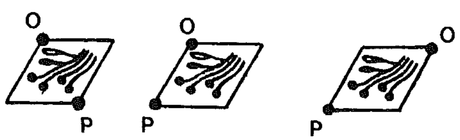

(Las manipulaciones con tres movimientos son similares a las que has hecho antes con dos; procura utilizar los tres). ¿Qué diferencias observas entre los dos resultados?

NOTA: Aunque cambien de sitio los triángulos, el eje de simetría y el centro de giro no se mueven con ellos.

C-23. Mueve los siguientes triángulos por medio de Ta, $S_e$ y $G(O,60°)$. Compara los resultados que obtienes con las dos figuras.




C-24. Mueve los rombos de la figura mediante $G(O,120°)$ y $G(P,120°)$. Observa cómo influye la posición de los centros de giro O y P en cada uno de los resultados.




C-25. Aplícale $Se_1$ y $Se_2$ al rectángulo de la figura.

Observa que la banda que has hecho está formada por dos figuras diferentes y que cada figura aparece repetida varias veces. ¿Qué traslación permite pasar de una

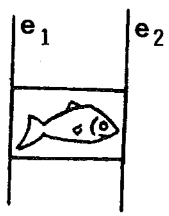
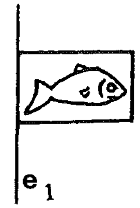


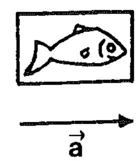



figura a la siguiente de la banda igual a ella? ¿Por qué se origina esta traslación, siendo dos simetrías los movimientos que has usado para hacer la banda?

C-26. Si quieres producir la misma banda que en la actividad anterior, ¿qué movimiento (distinto de $Se_2$) puedes añadir a $Se_1$ para construirla?



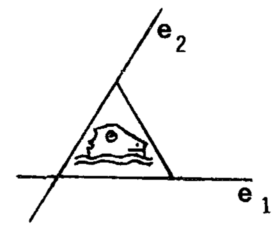

C-27. Añade un movimiento a $T_{2a}$ para generar otra vez la misma banda, pero que ese movimiento no sea $Se_1$.




Por lo tanto, has observado que $\{Se_1, Se_2\}$ generan una banda, pero como $T_{2a} = Se_{2}{}_{o}Se_1$, también $\{Se_1, T_{2a}\}$ y $\{Se_2, T_{2a}\}$ generan la misma banda.

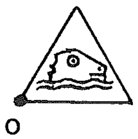
C-28. Aplícale $Se_1$ y $Se_2$ al triángulo de la figura.

Observa que el rosetón que has construído está formado por dos figuras diferentes, que aparecen repetidas varias veces y que para pasar de una figura a la siguiente igual a ella puedes usar un giro. ¿Cuál es el centro de ese giro? ¿Y su ángulo de giro? ¿Por qué se produce ese giro?




C-29. Construye el mismo rosetón de la actividad anterior añadiendo a $Se_1$ otro movimiento (que no sea $Se_2$).

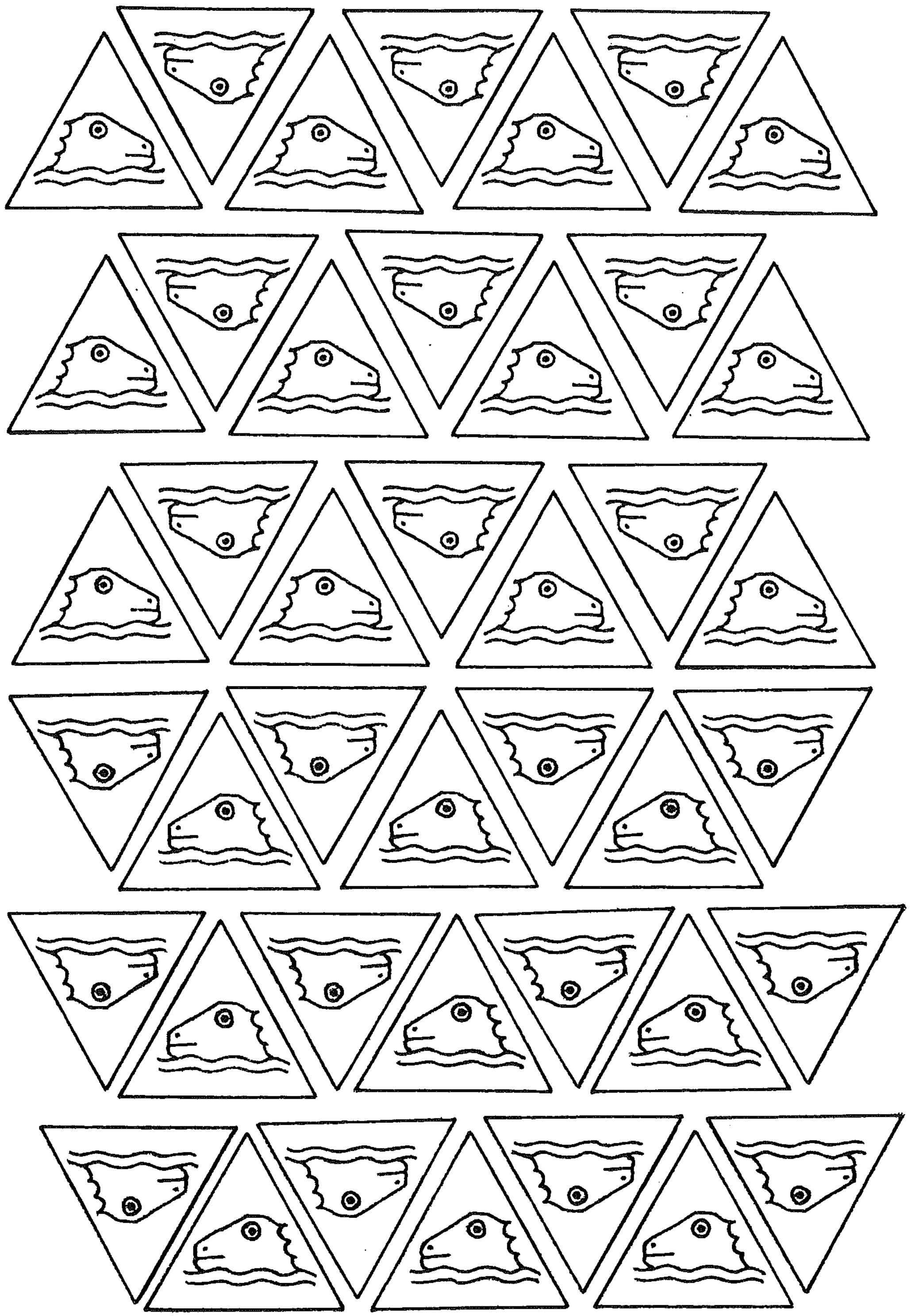
C-30. Construye otra vez el mismo rosetón añadiendo un movimiento al giro G(0,120°).



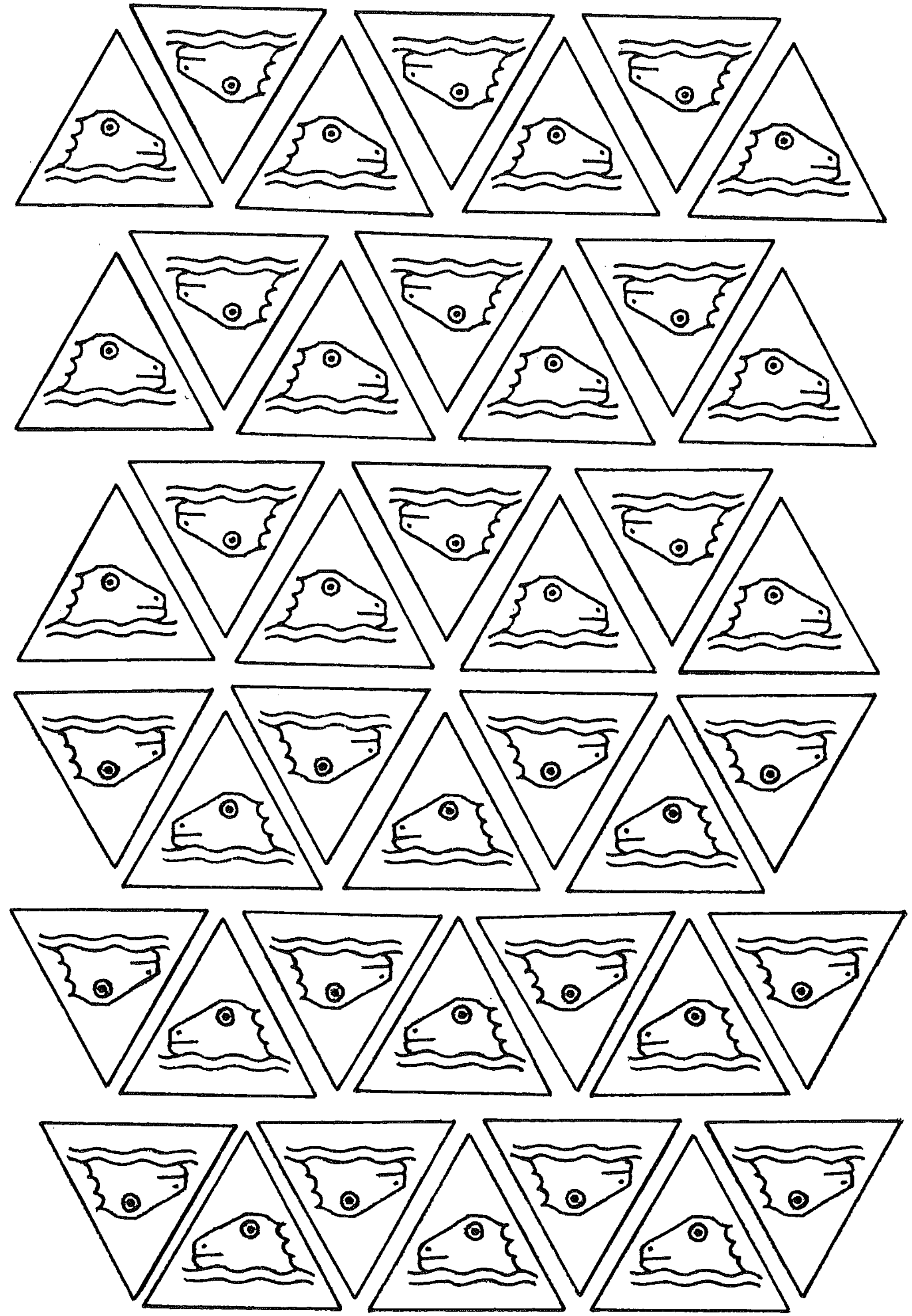
En estas tres últimas actividades has observado un resultado similar al de las anteriores (C-25 a C-27): Como $Se_2 \circ Se_1 = G(0,120°)$, se tiene que $\{Se_1, Se_2\}$, $\{Se_1, G(0,120°)\}$ y $\{Se_2, G(0,120°)\}$ generan el mismo rosetón.



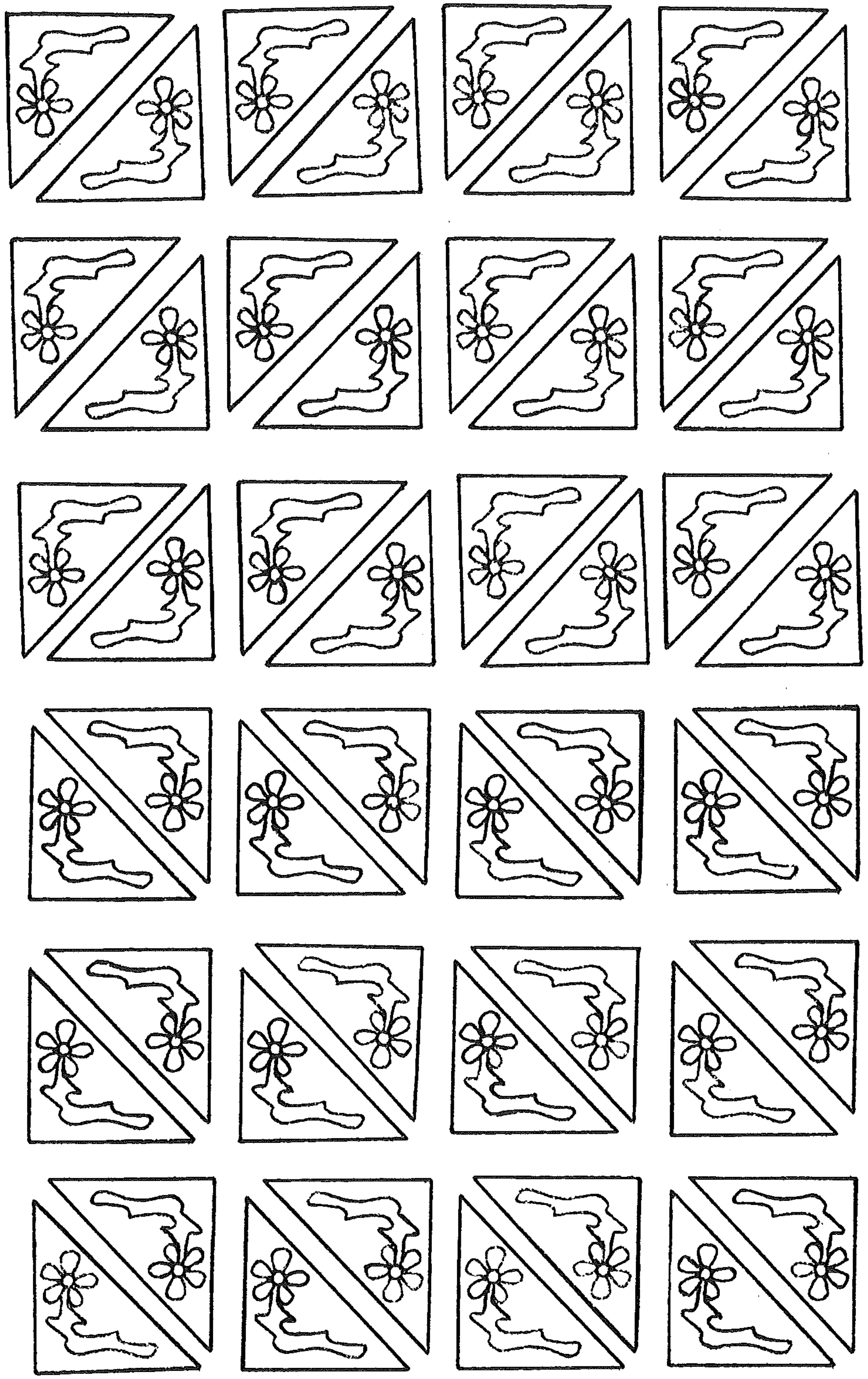
# LÁMINAS



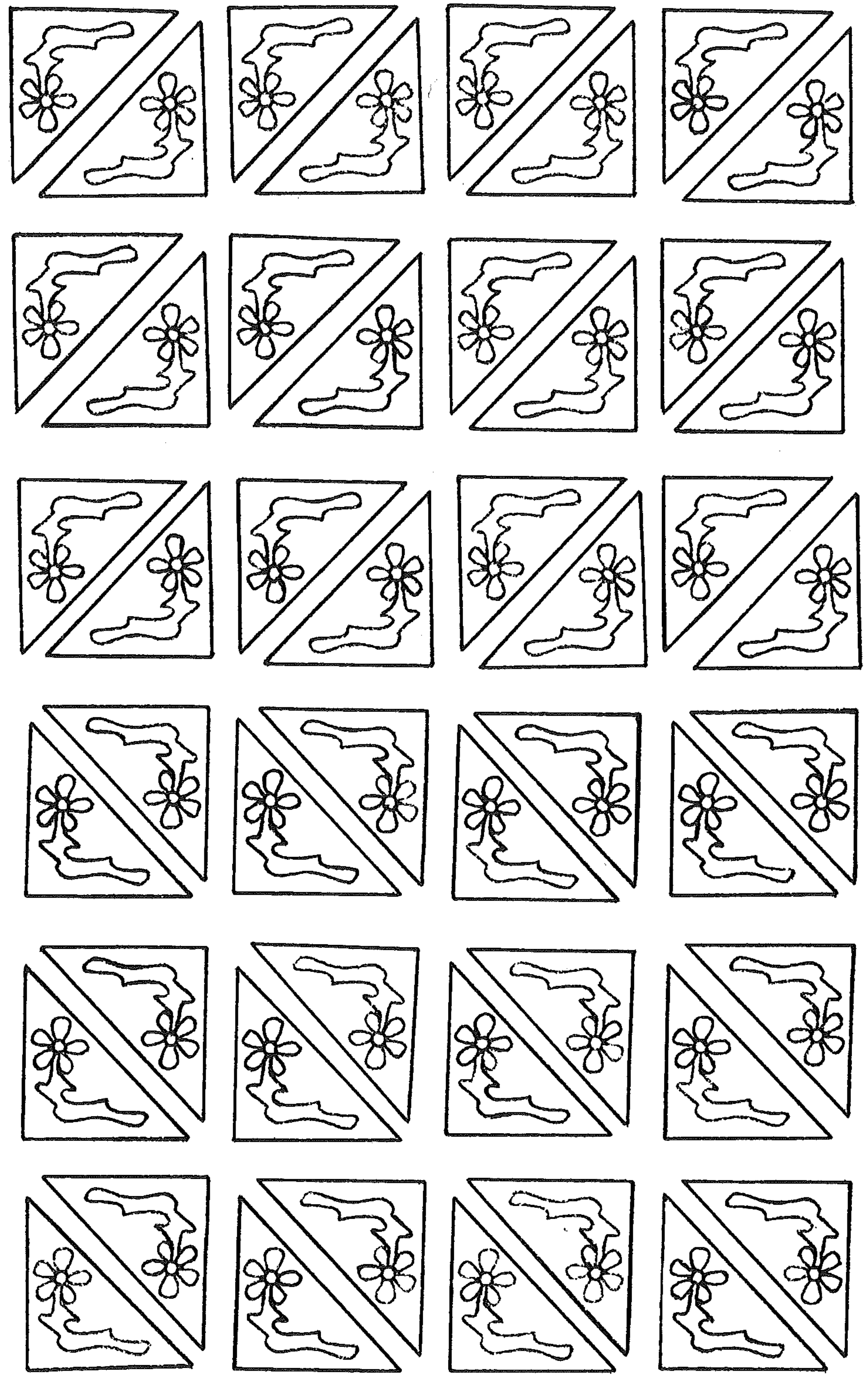
© A. Jaime y A. Gutiérrez. 1986



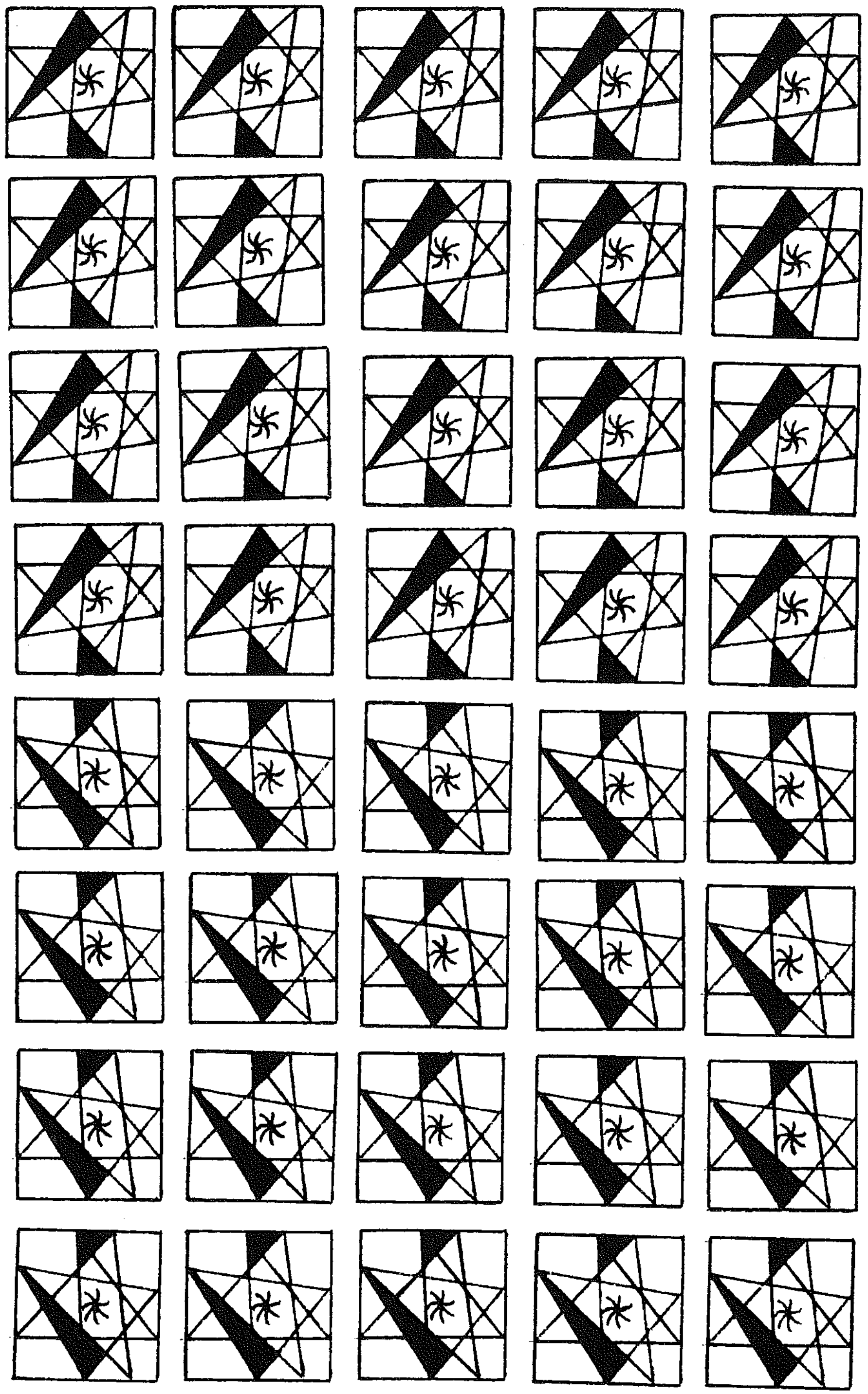
© A. Jaime y A. Gutiérrez. 1986



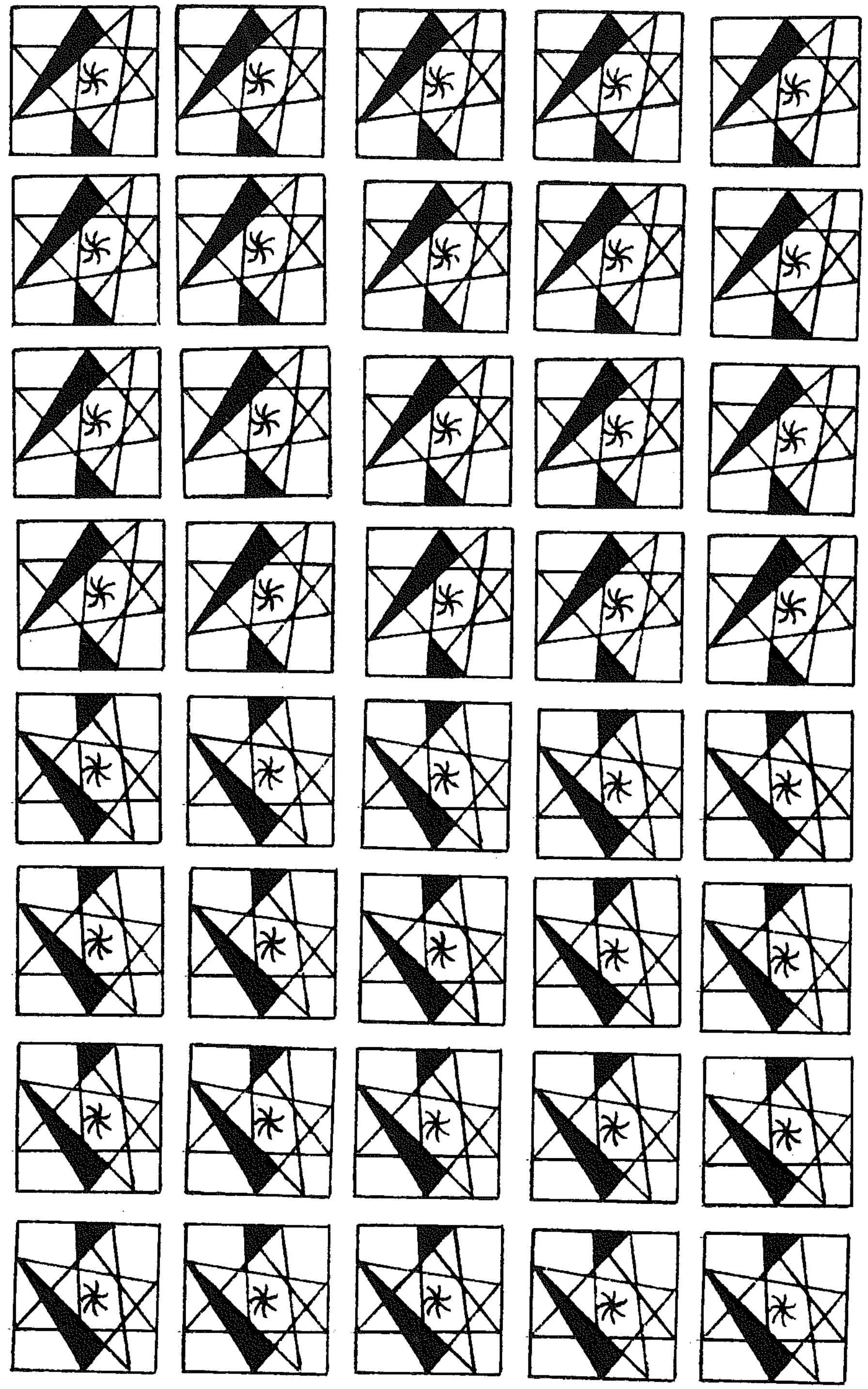
© A. Jaime y A. Gutiérrez. 1986



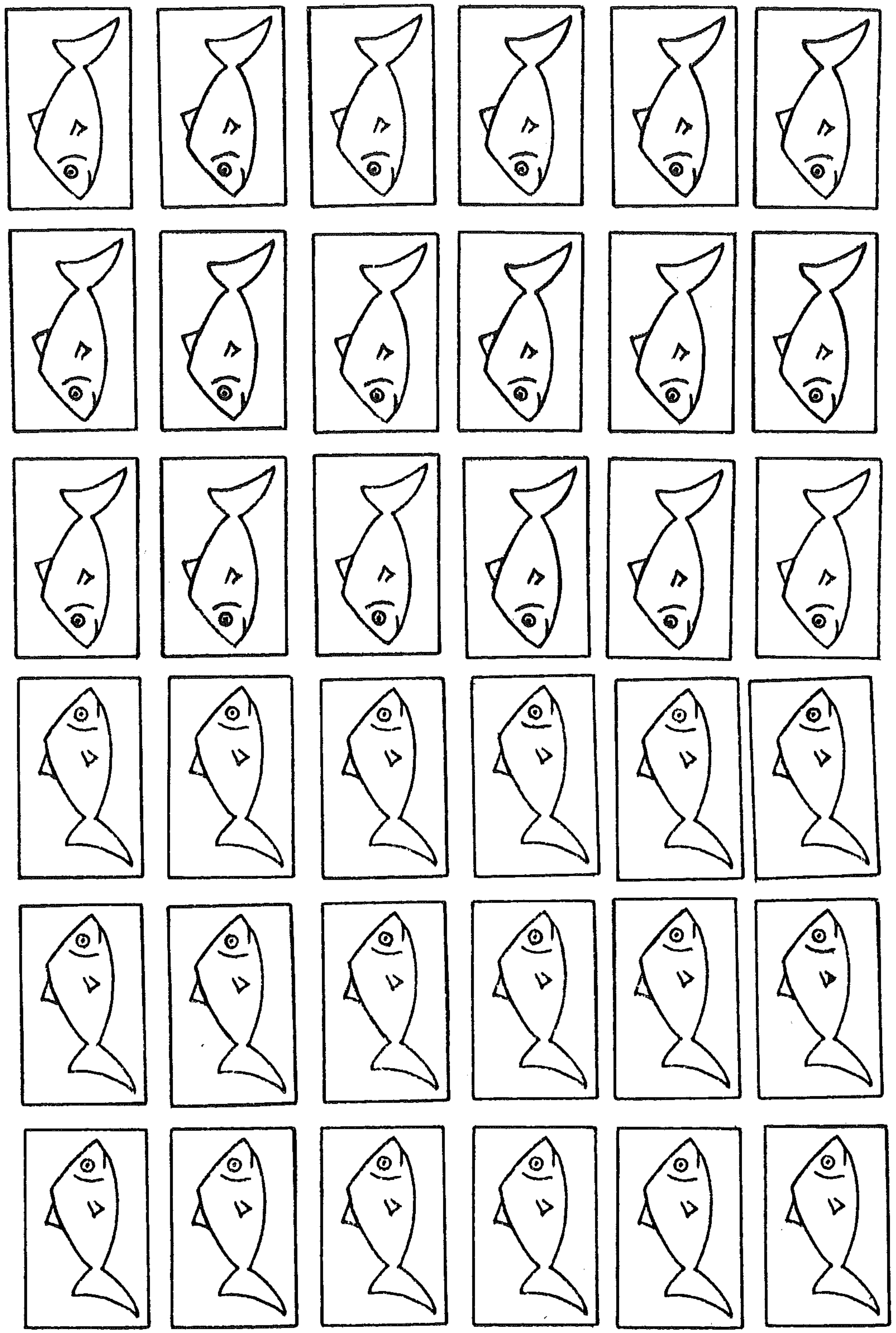
© A. Jaime y A. Gutiérrez. 1986



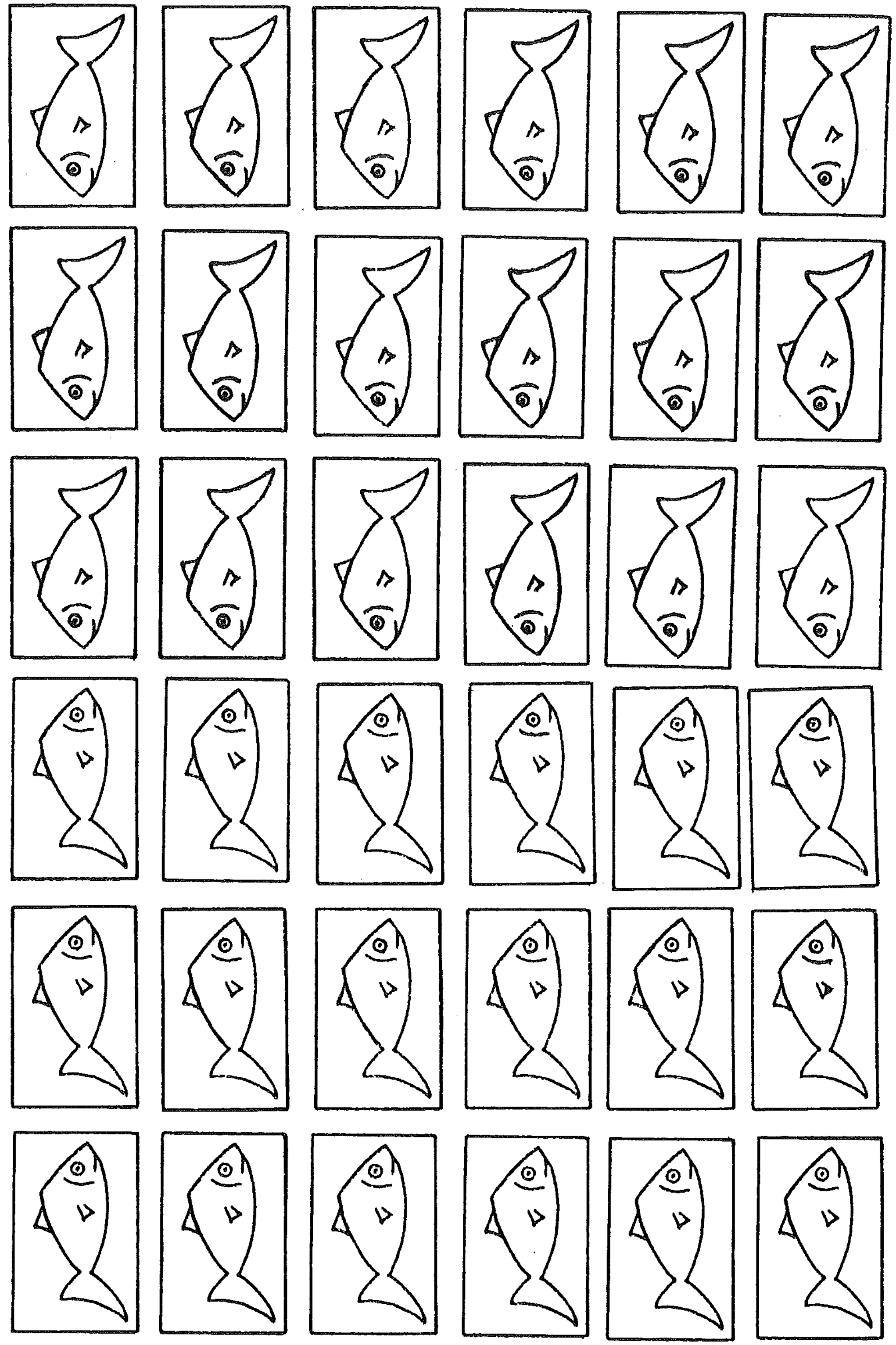
© A. Jaime y A. Gutiérrez. 1986



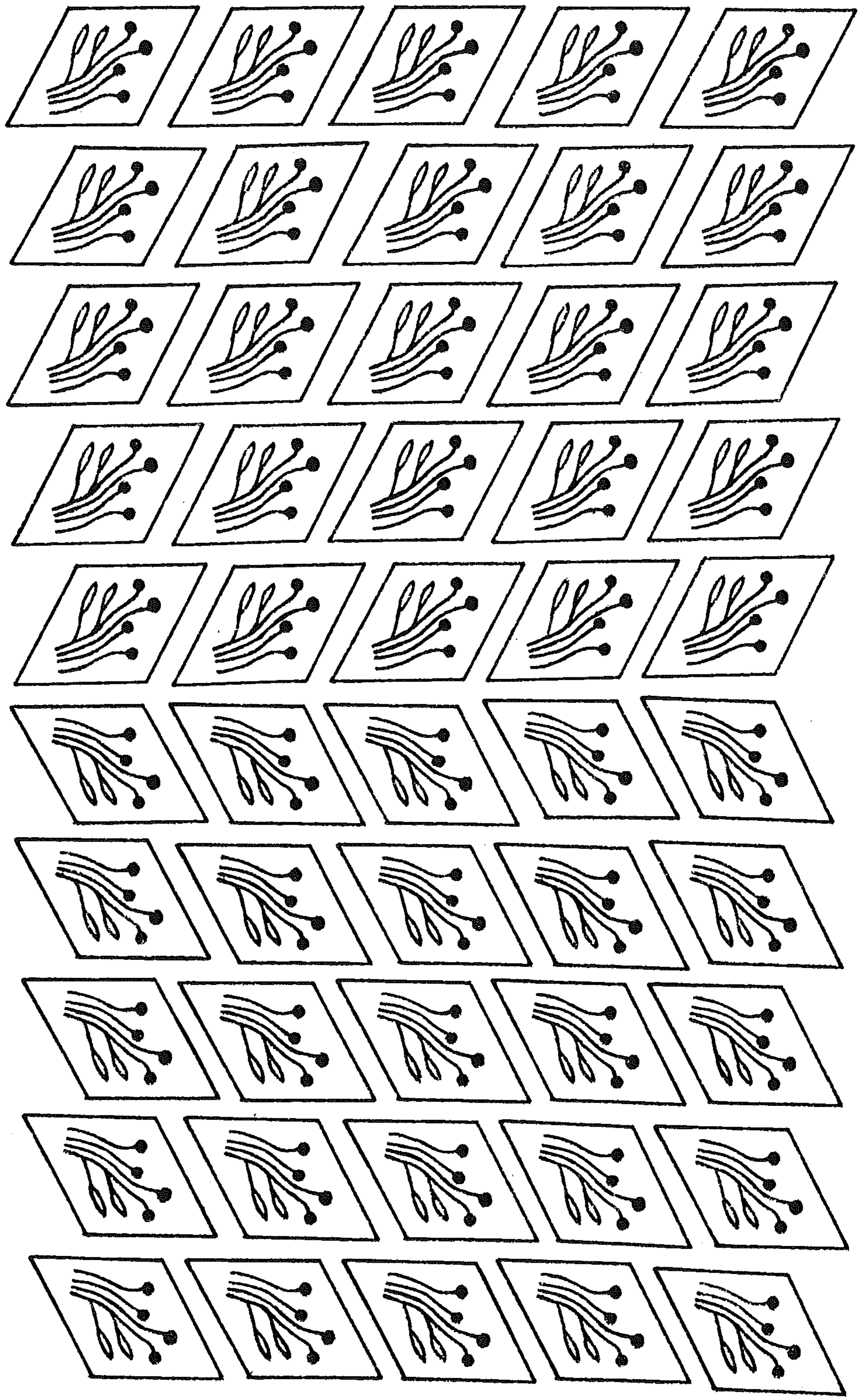
© A. Jaime y A. Gutiérrez. 1986



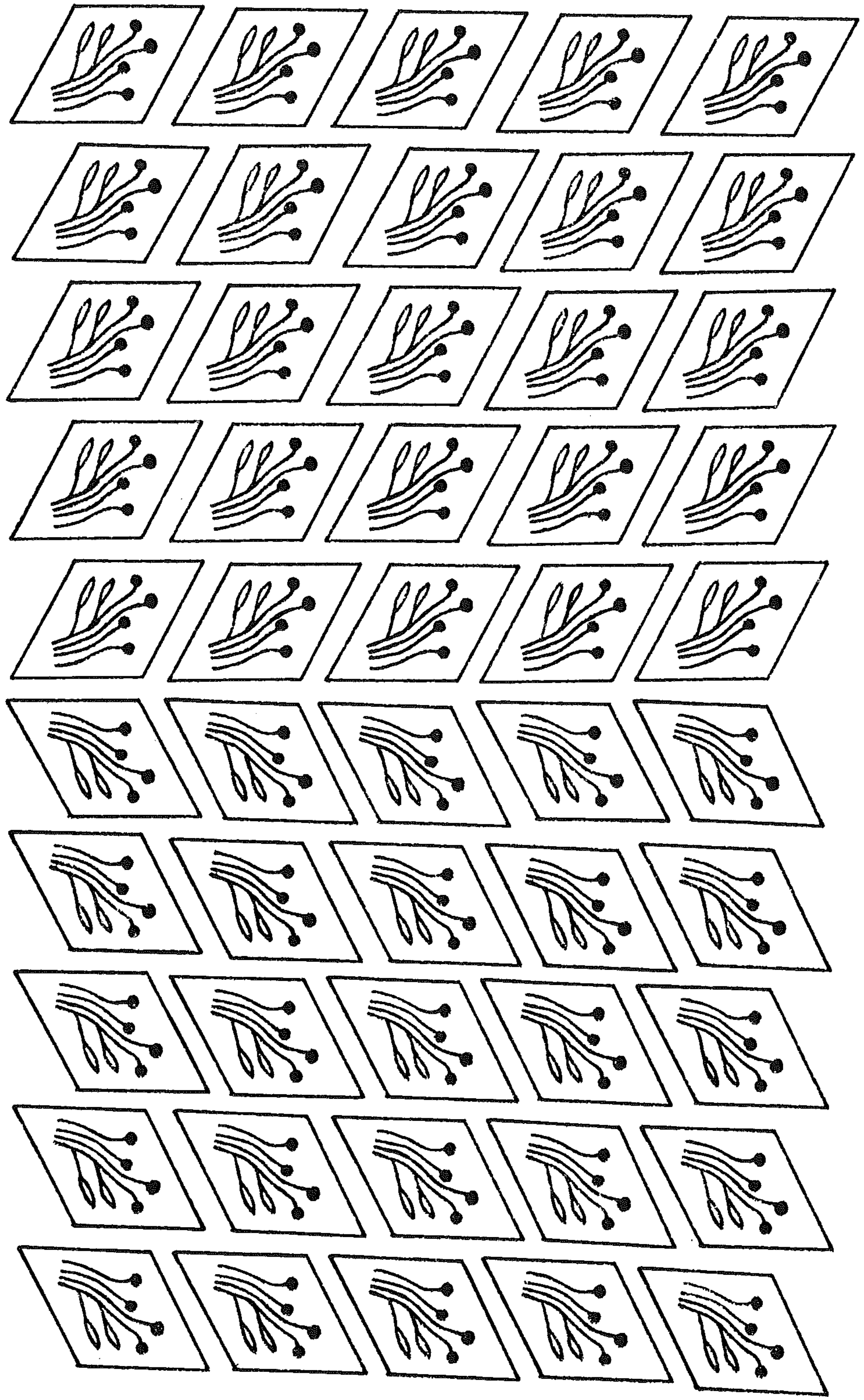
© A. Jaime y A. Gutiérrez. 1986



© A. Jaime y A. Gutiérrez. 1986



© A. Jaime y A. Gutiérrez. 1986



© A. Jaime y A. Gutiérrez. 1986

*Se terminó de imprimir en*
*Artes Gráficas Soler, S. A.,*
*de la ciudad de Valencia,*
*el día 14 de febrero de 1986*

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

ESCOLA UNIVERSITÀRIA DEL PROFESSORAT
D'EDUCACIÓ GENERAL BÀSICA

M