ESTUDIO DE LAS CARACTERíSTICAS DE LOS NIVELES DE VAN HIELE

Angel Gutiérrez y Adela Jaime
Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia.

ABSTRACT. The theory proposed by P.M. and D. van Hiele have given rise to a model of teaching and learning whose three main characteristics are discreteness and hierarchy of levels and usefulness of the theory for prediction.
We present the results of an empirical research which deals with the hierarchical structure and the predictive property of the model. The comparison of results obtained by administering three tests (on polygons, measurement and solids) to a group of preservice elementary teachers allows us to formulate the following conclusions:
a) Levels 1 to 4 form a hierarchy, but level 5 has some particularities that need an in deep investigation.
b) There is not relation between the individual results in the different tests, so the assessment of pupils' level in a topic cannot predict their level in other topic.

INTRODUCCIóN

Una teoría de aprendizaje en matemáticas, que actualmente está siendo considerada con gran interés, es la desarrollada por P.M. van Hiele y D. van Hiele-Geldof. Esta teoría se basa en la definición de varios niveles de pensamiento, a través de los cuales progresan los estudiantes, estando caracterizado cada nivel por un tipo de conocimiento, un vocabulario y una forma de razonamiento particulares. Brevemente, las capacidades adquiridas por un estudiante en los diferentes niveles son:

Nivel 1 (reconocimiento): Reconoce los objetos y conceptos matemáticos por su aspecto físico y de forma global, sin distinguir explícitamente sus componentes.

Nivel 2 (análisis): Reconoce las componentes de un objeto o concepto matemático. Es capaz de establecer relaciones entre objetos y/o entre componentes, pero solo de forma experimental. No puede establecer relaciones lógicas ni hacer descripciones formales.

Nivel 3 (clasificación): Realiza relaciones lógicas y es capaz de seguir razonamientos deductivos simples, pero no comprende la función de los elementos de un sistema matemático (axiomas, definiciones, demostraciones, etc.) y, por lo tanto, no sabe manejarlos.

Nivel 4 (deducción): Comprende y realiza razonamientos deductivos, pues ya entiende el valor de axiomas, hipótesis, definiciones, etc., pero todavía no ha adquirido un conocimiento global de los sistemas axiomáticos y no comprende la necesidad del razonamiento riguroso.

Nivel 5 (rigor): Comprende la necesidad del razonamiento riguroso, es capaz de realizar deducciones abstractas a partir de sistemas axiomáticos diferentes y de analizar y comparar esos sistemas.

El mayor interés de la teoría de van Hiele radica en la posibilidad de construir a partir de ella un modelo de enseñanza de la geometría, en el cual cada nivel lleva asociados un tipo de actividades, un lenguaje y una organización del aprendizaje que permiten alcanzar el nivel siguiente. Ejemplos de programas basados en los niveles de van Hiele los encontramos en la Unión Soviética, Holanda y U.S.A. (ver Wirszup (1976), Hoffer (1983), Freudenthal (1973), Mathematics Resource Project (1978) y Fuys, Geddes (1984)).

Hay tres características del modelo que deben ser estudiadas en profundidad: La discretitud de los niveles, su jerarquía y su capacidad de transferencia de unos campos de las matemáticas a otros. Durante los últimos años se han realizado importantes investigaciones en cada una de ellas (Usiskin (1982), Mayberry (1983), Fuys, Geddes (1984) y Burger, Shaughnessy (1986)), cuyos resultados más destacados están comentados en Senk (1985), pero no ha sido posible determinar de forma satisfactoria ninguna de dichas características del modelo.

EL ESTUDIO

A continuación exponemos los resultados de un estudio iniciado en este curso, con el fin de evaluar la validez de las hipótesis sobre la jerarquización de los niveles de van Hiele y la globalidad de los niveles respecto de diversos campos de la geometría.

Hasta ahora, la mayoría de las experiencias desarrolladas para determinar las propiedades de la teoría de van Hiele se han basado en cuestiones de geometría plana relacionadas con los polígonos. La primera parte del trabajo que hemos realizado ha consistido en diseñar tres tests basados en los tres campos más importantes de la geometría: geometría plana (principalmente polígonos), medida de magnitudes (longitud, superficie y volumen) y geometría espacial (principalmente poliedros).

La comparación de los niveles alcanzados por cada estudiante en los diferentes tests nos permite observar la correlación existente entre ellos y, por tanto, conjeturar sobre la globalidad o localidad de los niveles de van Hiele. Por otra parte, el análisis independiente de cada test ha hecho posible medir el grado de jerarquización de los niveles.

Tomando como referencia la estructura del test de Usiskin (1982), cada test consta de 5 ítems para cada nivel, con 5 respuestas en cada ítem. Con el fin de hacer más fiables las comparaciones de los resultados, se ha mantenido la misma estructura gramatical en todos los tests. Respecto del contenido matemático de los ítems, es fácil enunciar modelos de cuestiones válidos tanto para geometría plana como espacial, pero en la medida de magnitudes se presenta una organización conceptual mucho más simple que en el caso de polígonos o poliedros, lo cual hace difícil mantener la semejanza entre los ítems.

Por otra parte, el diseño de tests basados en conceptos diferentes de los relacionados con polígonos puede ser útil para abrir nuevas lineas de investigación sobre el modelo de van Hiele para la enseñanza de la geometría.

LA MUESTRA

Hemos administrado los tests a 563 alumnos de los tres cursos de la Escuela de Formación de Profesorado de E.G.B. (enseñanza elemental española) de la Universidad de Valencia. La tabla 1 indica la cantidad de estudiantes que ha contestado los diferentes grupos de tests.

	Test P	*Test M*	*Test S*
Test P	*409*	*276*	*232*
Test M	*---*	*392*	*241*
Test S	*---*	*---*	*318*

Test P = polígonos
Test M = medida
Test S = sólidos

Tests P, M y S: 193 estudiantes

Tabla 1

La realización de los tests ha tenido lugar en tres sesiones diferentes, con un intervalo mínimo de tres días entre una y otra, si bien en la mayor parte de los casos este intervalo ha sido de 1 ó 2 semanas. Los alumnos han dispuesto de tiempo libre para contestar los tests (entre 30 y 45 minutos por término medio).

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Es evidente la importancia de los criterios, de paso de niveles y de asignación de nivel mínimo, elegidos en el análisis de las respuestas a estos tests. Habitualmente se toma como criterio para superar un nivel que el estudiante conteste bien 2/3 de las respuestas, lo cual supone en nuestro caso superar 3 ó 4 de los 5 ítems correspondientes a un nivel. La observación directa previa de nuestros alumnos y otros estudios realizados con estudiantes de niveles semejantes (Mayberry (1983) y Matos (1985)) nos hicieron suponer a priori que la mayoría de alumnos estarían en los niveles 2 y 3 (para nosotros, el primero dé los niveles descritos por van Hiele es el nivel 1 y consideramos en el nivel O a quienes no alcanzan el nivel 1). Por este motivo, hemos utilizado dos criterios de superación de niveles (ver Usiskin (1982), pg. 23). Hay que procurar:

a) En los niveles bajos, que los alumnos no queden por debajo de su nivel real, por lo que usamos el criterio 3/5.
b) En los niveles altos, que los alumnos no superen un nivel por respuestas al azar, por lo que empleamos el criterio 4/5.

Hemos asignado los niveles de dos formas diferentes: mediante el criterio 33344 (es decir, 3 de 5 para los tres primeros niveles y 4 de 5 para los dos últimos niveles) y 33444. Además, a un alumno que supere los niveles 1 y 2 y falle el nivel 3 se le ha asignado el nivel 2 (independientemente de los resultados obtenidos en los niveles 4 y 5). La tabla 2 muestra un resumen de los niveles obtenidos.

Nivel	Test P 33344	Test P 33444	Test M 33344	Test M 33444	Test S 33344	Test S 33444
0	4.40	4.40	24.74	24.74	45.28	45.28
1	11.98	11.98	20.92	20.92	44 97	44.97
2	24.45	57.95	25.00	41.58	1.89	6.29
3	56.72	23.47	22.96	8.67	7.55	3.14
4	1.71	1.71	2.30	1.02	0.00	0.00
5	0.73	0.49	4.08	3.06	0.31	0.31

Tabla 2: *Distribución, en %, de los alumnos por niveles*

El análisis de estos resultados ha sido realizado calculando varios coeficientes. Para la verificación de la jerarquía de los niveles se ha empleado el coeficiente R de reproductividad del Análisis Escalográfico de Guttman; este coeficiente, que evalúa la cantidad de estudiantes que han fallado un nivel pero han pasado otro superior, ha sido utilizado de forma eficaz en trabajos anteriores, como el de Mayberry (1983) o el C.S.M.S. Project del Chelsea College (Hart y otros (1981)). La tabla 3 contiene los valores obtenidos al medir las respuestas correspondientes a los niveles 1 a 5.

Test	Tipo de corrección 33344	Tipo de corrección 33444
P	0.940	0.939
M	0.868	0.861
S	0.853	0.903

Tabla 3: *Coeficiente R para los niveles 1 a 5*

Test	Tipo de corrección 33344	Tipo de corrección 33444
P	0.976	0.990
M	0.959	0.966
S	0.858	0.935

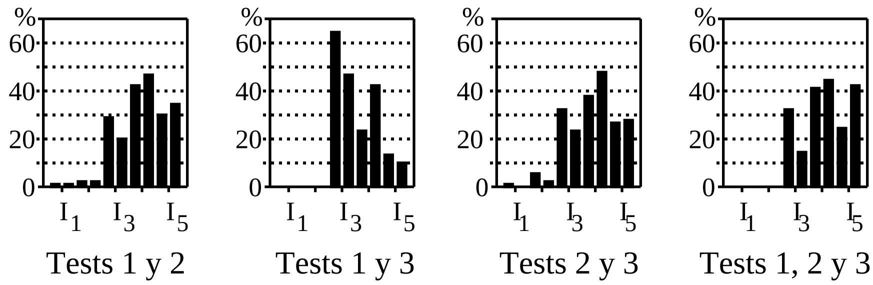
Tabla 4: *Coeficiente R para los niveles 1 a 4*

Se suele considerar válida la jerarquía de los niveles si el coeficiente R no es inferior a O.90 (Mayberry (1983)) o a 0.93 (Hart (1981)). Según esto, habría que rechazar la jerarquización de los niveles de van Hiele en medida de magnitudes y en sólidos. No obstante, un análisis más detallado de los resultados pone de relieve de forma clara la influencia del nivel 5 en los coeficientes anteriores. La tabla 4 muestra los coeficientes obtenidos al medir sólo las respuestas correspondientes a los niveles 1 a 4.

Estos resultados nos llevan a la conclusión de que los cuatro primeros niveles del modelo de van Hiele forman una jerarquía, pero que el quinto nivel presenta características especiales que deben ser estudiadas detalladamente, con el fin de reformular sus características o de considerar la posibilidad de eliminarlo del modelo, como sugiere el propio van Hiele (1986, pg. 47).

Para evaluar la capacidad de predicción del modelo de van Hiele hemos utilizado dos coeficientes. Con el coeficiente C de consenso de Leik se mide el grado de dispersión de los niveles alcanzados por una persona en los diferentes tests, mientras que el coeficiente γ de Kruskal mide la correlación entre las respuestas del total de alumnos a dos de los tests.

El coeficiente C varía entre 0 y 1, C=0 indica disparidad, C=0.5 indica aleatoriedad y C=1 indica concordancia entre las respuestas. Hemos agrupado los valores obtenidos en varios intervalos: I_1=[0, 0.15[, I_2=[0.15, 0.30[, I_3=[0.30, 0.70[, I_4=[0.70, 0.85[, I_5=[0.85, 1]. Las gráficas muestran los porcentajes de alumnos en cada uno de los intervalos; en cada caso, la columna izquierda corresponde al criterio 33344 y la columna derecha corresponde al 33444.



El coeficiente γ toma valores entre -1 y +1 y su significado es el habitual en los coeficientes de correlación. La tabla 5 muestra los valores obtenidos para cada par de tests.

	Tipo de corrección	
Test	*33344*	*33444*
P y M	*0.46*	*0.52*
P y S	*0.45*	*0.40*
M y S	*0.41*	*0.44*

Tabla 5: *Coeficiente γ*

Tanto el coeficiente C como el coeficiente γ indican que:

1) No hay divergencia entre los diferentes tests.
2) Hay cierto grado de concordancia entre los resultados de los tests, pero éste es insuficiente para apoyar la hipótesis de la globalidad de los niveles de van Hiele.

Tanto nuestra experiencia como las otras a las que nos hemos referido antes presentan un porcentaje muy reducido de estudiantes en los niveles 4 y 5, por lo que creemos que no son válidas para obtener conclusiones respecto de estos niveles. Una línea que debería ser seguida en futuras investigaciones es la de realizar experiencias con grupos en los cuales la mayoría de las personas estén en los dos niveles superiores; es muy probable que en este caso se obtengan resultados positivos acerca de la capacidad de predicción del modelo de van Hiele, pues una persona situada en los tres primeros niveles tiene una visión local y fragmentada de las matemáticas que dificulta la transferencia de conocimientos de unas áreas a otras, mientras que aquellos estudiantes que han alcanzado el cuarto o quinto nivel son capaces de tener una visión global de las matemáticas que facilita dicha transferencia. Nuestra hipótesis al respecto es que los niveles 1, 2 y 3 son locales y no permiten realizar predicciones, mientras que los niveles 4 y 5 son globales y si permiten realizar predicciones.

REFERENCIAS

Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the van Hiele levels of Development in Geometry, J. for Research in Math. Education vol. 17, pp. 31-48.

Freudenthal, H. (1973): Mathematics as an Educational Task. (D. Reidel: Dordrecht).

Fuys, D.; Geddes, D. (1984): An Investigation of the van Hiele model of Thinking in Geometry among 6th and 9th grades: Research findings and implications. (ERIC: Columbus, OH).

Hart, K. y otros (1981): Children’s Understanding of Mathematics: 11-16. (J. Murray: London).

Hoffer, A. (1983): Van Hiele based Research, en Lesh, Landau (eds.) Acquisition of Mathematics Concepts and Processes (Academic Press: N. York), pp. 205-227.

Mathematics Resource Project (1978): Didactics and Mathematics. (Creative Publications: Palo Alto, CA).

Matos, J.M. (1985): Geometric concepts of Portuguese preservice primary Teachers: A van Hiele based Research, en Streefland (ed.) Proceedings of the 9th International Conference of the P.M.E. (OW&OC: Utrecht) vol. 1, pp. 189-194.

Mayberry, J. (1983): The van Hiele levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers, J. for Research in Math. Education vol. 14, pp. 58-69.

Senk, S.L. (1985): Research and Curriculum Development based on the van Hiele model of Geometric Thought, en Bell, Low, Kilpatrick (eds.) Theory, Research and Practice in Mathematical Education (Shell Centre: Nottingham), pp. 351-357.

Usiskin, Z. (1982): Van Hiele levels and Achievement in Secondary School Geometry. (ERIC: Columbus, OH).

Van Hiele, P.M. (1986): Structure and Insight. (Academic Press: N. York).

Wirszup, I. (1976): Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry, en Martin, Bradbard (eds.) Space and Geometry. Papers from a research workshop (ERIC: Columbus, OH), pp. 75-97.