NUMEROS. 18 - 1988

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL CUALITATIVO EN ESTUDIANTES DE MAGISTERIO

Angel Gutierrez y Adela Jaime
Universidad de Valencia

La proporcionalidad, en sus diversas facetas, está presente a lo largo de las enseñanzas elemental y media; asimismo, constituye un aspecto importante de la actividad matemática que cualquier persona realiza en su vida cotidiana. No obstante, es fácil observar un desajuste entre estos dos ambientes, el docente y el cotidiano, debido, básicamente, a que en el primero el razonamiento proporcional de tipo cuantitativo domina por completo las actividades que se proponen, mientras que en el segundo están también presentes con frecuencia situaciones que requieren un razonamiento proporcional cualitativo.

Existe numerosa literatura, tanto nacional como extranjera, referente al tema de la proporcionalidad aritmética; lo que es una señal de la importancia de este tema en la formación matemática de los individuos y de las dificultades que encuentran los profesores de todo el mundo para conseguir un aprendizaje eficaz. Con este artículo pretendemos dar un pequeño toque de atención sobre el tema. Recogemos en él los resultados de una experiencia que refleja con toda nitidez que nos encontramos ante un problema sobre el cual los profesores de Matemáticas de todos los niveles educativos deberíamos reflexionar.

El experimento se desarrolló durante el curso 87-88 en la Escuela de Magisterio de Valencia y en él participaron 56 estudiantes de 2º de la especialidad de Ciencias. Está basado en otro realizado en los

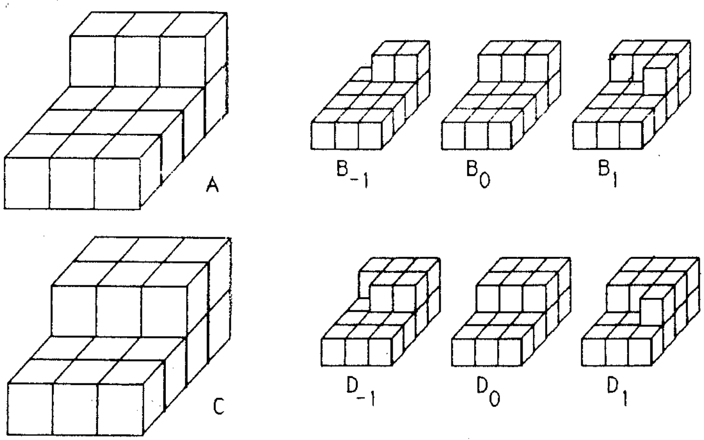
Estados Unidos de América por HAREL y BEHR en 1987, con niños de 7º curso, en cuyo material y test realizamos algunas modificaciones. En base a un material que describiremos a continuación, propusimos a nuestros alumnos una serie de 12 problemas, debiendo contestar cada uno a 4 de ellos, previamente seleccionados por nosotros.

La experiencia tenía un doble objetivo : Por una parte, nos interesaba observar las diferencias entre los alumnos de la enseñanza elemental, que empiezan a estudiar la proporcionalidad, y otros con una formación matemática más amplia (comparando los resultados obtenidos por los autores citados con los nuestros). Por otra, que las respuestas de los estudiantes nos sirvieran de base para elaborar una unidad didáctica de la proporcionalidad en la que los futuros maestros han reflexionado, a partir de sus propios esquemas de razonamiento, y se han dado cuenta de algunos nos errores que deberán combatir en sus alumnos.

El material aludido está formado por :

. Dos bloques, A y C , construidos, respectivamente, con 15 y 18 cubos de *stirofoam*, de aproximadamente 4cm de arista.

. Seis bloques, que denotaremos B_i y D_i, hechos con diversas cantidades (de 15 a 19) de cubos de *unifix* de 2 cm de arista. Los valores del subíndice, -1, 0, 1, de B y D, indican rspectivamente, la diferencia de unidades con los bloques A y C.



En los problemas se ofrece información sobre la relación(cualitativa) de pesos entre el bloque A y un bloque B,y se pide deducir la relación existente entre los pesos del bloque C y un bloque D. Por ejemplo : *El bloque A pesa lo mismo que el B_{-1} . ¿ Cuál pesa más,el bloque C o el D_0 ?*

Al no haber valores numéricos para los pesos de los diferentes bloques,se evita la resolución puramente algorítmica del problema. Los estudiantes deben ignorar la relación real de pesos entre los bloques,lo cual no supones dificultad tras la explicación inicial del objetivo de los problemas.

Como hay 3 posibles relaciones de peso entre A y cada uno de los 3 bloques B_i,y se pueden combinar estos 9 datos con 3 pares de bloques C y D_i ,es posible plantear 27 problemas diferentes. De ellos,hemos seleccionado los doce siguientes. El signo ? indica que la relación entre C y D_i es indeterminada.

Si A pesa ...		que B_i entonces C pesa ...		que D_i
1)	=	B_0	=	D_0
2)	=	B_0	>	D_{-1}
3)	=	B_{-1}	<	D_0
4)	>	B_0	>	D_{-1}
5)	>	B_1	>	D_1
6)	>	B_{-1}	?	D_0
7)	<	B_0	?	D_{-1}
8)	<	B_1	?	D_0
9)	<	B_{-1}	<	D_{-1}
10)	<	B_{-1}	<	D_1
11)	=	B_1	>	D_1
12)	>	B_{-1}	?	D_1

Los 9 primeros son los utilizados por Harel y Behr. Nosotros hemos añadido los otros tres para completar la secuencia y facilitar el análisis de los resultados,pues ofrecen algunos contrastes interesantes con los anteriores.

El objetivo con el que hemos realizado la experiencia no es -

observar los resultados de los problemas, sino los procesos de resolución, es decir, los tipos y niveles de razonamiento proporcional empleados por los estudiantes.

A la vista de las 224 respuestas de nuestros alumnos, podemos distinguir cuatro tipos básicos de estrategias. La tabla que se adjunta más adelante muestra el número de respuestas para cada tipo.

Con el fin de facilitar la lectura, denotaremos por n(A,B) a la relacion entre el número de unidades del bloque A y el número de unidades del bloque B. Análogamente, p(A,B) representa la relación entre los pesos del bloque A y los del B. En consecuencia, n(A,B) y p(A,B) pueden tomar los valores < , = , > . El mismo significado tienén los símbolos n(C,D) y p(C,D).

Los tipos de estrategia seguidos por nuestros alumnos son, de acuerdo a la nomenclatura de Harel y Behr, los siguientes :

1. Estrategia de conteo.- Es la más simplista, pues los estudiantes obtienen la relación p(C,D) comparando la cantidad de unidades de estos bloques, sin tener en cuenta para nada los datos relativos a los bloques A y B. Por ejemplo, esto es lo que respondió uno de los estudiantes al problema 2:

El bloque D_{-1} *pesará menos porque se compone de una unidad menos que el bloque* C.

2. Estrategias de emparejamiento.- Utilizan las relaciones n(A,B) y n(C,D) para deducir la relación p(C,D), mediante la extrapolación de p(A,B). Un ejemplo muy claro lo tenemos en la siguiente respuesta al problema 5:

El bloque C *pesará más que el* D_1*, debido a la relación anterior* (del enunciado del problema) *que nos dice que el bloque* A *pesa más que el* B_1 *aunque tiene un cubo menos: entonces el* C *, como tiene un cubo menos que el* D_1 *, también pesará más.*

Un razonamiento idéntico lo encontramos en estudiantes que, en el problema 11, contestan que el bloque D_1 pesa lo mismo que el C.

Cuando los índices de los bloques B y D no coinciden, los alumnos que utilizan esta estrategia se ven obligados a modificarla, mediante el uso de un nuevo bloque (del tipo B o D), cuyo índice permita dar el salto con la ayuda de la transitividad de la relación de pesos. Veamos un ejemplo con el problema 3:

El bloque D_0. Para llegar a esa elección he pensado que si el bloque A pesa lo mismo que el bloque B_{-1}, entonces el bloque C debe pesar lo mismo que el bloque D_{-1}. Con lo que D_0 pesa más que C, pues tiene una unidad más que el D_{-1}.

Este tipo de razonamiento viene acompañado en bastantes casos por la suposición errónea de que si el bloque A pesa, por ejemplo, menos que el bloque B_1, entonces pesa lo mismo que el B_0.

3. Estrategia de balanza.- La característica de esta estrategia es que los estudiantes se basan en las cantidades de unidades que hay que añadir a los bloques A y B para obtener los bloques C y D, respectivamente. Así, un estudiante responde lo siguiente al problema 5:

C pesa más que D_1 porque 15 unidades de A > 16 unidades de B_1 una unidad de A pesa más que una de B_1. Si sumamos 3 en cada lado, como 3 u. de A > 3 u. de B_1, la desigualdad se mantiene : 15+3 u. de A > 16+3 u. de $B_1 \Rightarrow$ 18 u. de C > 19 u. de D_1.

Vamos a denominar a esta estrategia "de balanza completa", siguiendo la notación de Harel, Behr, para distinguirla de la seguida por aquellos estudiantes que no tienen en cuenta la relación entre las unidades, que llamaremos "de balanza incompleta". En la siguiente respuesta al problema 1 se aplica esta variante:

Si A pesa lo mismo que B_0 y A tiene 15 unidades igual que B_0, entonces, como C es igual a A más 3 unidades y D_0 es igual a B_0 más 3 unidades, entonces pesan lo mismo.

Aunque en este ejemplo el estudiante llega a la respuesta correcta, aplicando el mismo razonamiento en el problema 11 se llegaría a que los bloques C y D_1 pesan lo mismo, lo cual no es cierto.

4. Estrategia constructiva.- Esta es la estrategia correcta más usada por nuestros alumnos. Consiste en deducir la relación entre los pesos de las unidades grandes y pequeñas a partir de n(A,B) y p(A,B), para deducir la solución p(C,D), usando esta relación junto a n(C,D). Con esta estrategia, un alumno responde así al problema 10:

El bloque D_1. *Si* A *pesa menos que* B_{-1}, *cada cubo de* A *pesa menos o igual que uno de* B_{-1}, *con lo que se explica que* D_1 *pese más que* C

Y esta es la respuesta de otro estudiante al problema 7:

Cada cubito de A *pesa menos que cada uno de* B_0 *pero no sabemos cuánto menos. Si en general la diferencia de peso entre* pA *y* pB_0 *es menos que uno de los cubitos de* B_0, *que son iguales que los de* D_0, *podría ser que* $pC \leq pD_1$, *pero en cualquier caso no se puede determinar.*

He aquí la tabla de distribución de respuestas :

Estrategia \ Problema nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Conteo	-	2	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-
Emparejamiento	6	15	16	19	14	11	9	11	14	19	13	8
Balanza incompl.	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	1	-
Balanza compl.	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	-
Constructiva	2	2	1	4	1	3	3	-	2	2	-	-
No clasificable	1	-	2	3	1	4	6	5	1	6	3	-
No contestado	-	-	-	1	-	1	1	2	1	-	-	1

Si queremos ordenar las diferentes estrategias, los resultados de la tabla corroboran que la estrategia de conteo es la típica de los estudiantes que todavía no han empezado a desarrollar el razonamiento proporcional y que, por lo tanto, no ven la necesidad de tener en cuenta simultáneamente los cuatro bloques. Por este motivo, la cantidad de estudiantes de Magisterio que emplearon dicha estrategia es irrevelante, mientras que en el informe de Harel, Behr se puede observar que, después de la estrategia de balanza incompleta, la de conteo es la más usada por los niños.

En el otro extremo de la jerarquía se encuentra la estrategia constructiva, que parece la más sofisticada de las que hemos visto, y al mismo tiempo parece la forma más razonable de resolver correctamente es tos problemas. Con ella ocurre lo contrario de lo que hemos comentado respecto a la estrategia de conteo, ya que ninguno de los niños que participaron en la investigación de Harel, Behr la utilizó, mientras que entre nuestros alumnos es, relativamente, bastante frecuente.

Las estrategias de emparejamiento y de balanza se encuentran en posiciones intermedias de la ordenación, pues representan etapas de transición hacia la de balanza completa y la constructiva, únicas formas correctas de resolver estos problemas que han estado presentes en el estudio. No obstante, no entraremos en el tema de la jerarquización, que es muy amplio y queda fuera de nuestras pretensiones. Algunos estudios importantes sobre el proceso de adquisición del razonamiento proporcional están expuestos en Piaget(1986), Hart(1981) o Noelting(1980 a y 1980 b).

Es interesante extraer alguna conclusión del hecho de que la mayoría de nuestros alumnos utilizan en algún caso la estrategia de emparejamiento (más del 69% de respuestas y del 87% de alumnos); por ello, vamos a analizarla desde el punto de vista matemático. La respuesta dada en la primera cita del apartado 2, que es un caso típico, revela que el estudiante basa su razonamiento en la relación p(A) - p(B) en vez de basarse en p(A) / p(B). Debido a esto, realiza una transformación de tipo aditivo de la razón entre p(A) y P(B), según la cual $p(A) / p(B) = [p(A) + 3] / [p(B) + 3]$, en vez de realizar una transformación de tipo multiplicativo, que es la correcta.

Este es el principal error que hay que combatir en la construcción por los niños del concepto de proporcionalidad, pues se adquiere con gran facilidad y degenera en una estrategia errónea, cuyo peligro mayor es que en muchos casos proporciona la solución correcta. En este sentido, nuestros resultados coinciden con los obtenidos por Karplus(1983) y por los autores citados dos párrafos más arriba (todos ellos obtienen un importante porcentaje de respuestas de este tipo), aunque sus investigaciones, excepto la de Harel, Behr, están basadas en ejercicios cuantitativos. También coincidimos con ellos al extraer conclusiones sobre la necesidad de darle un tratamiento específico y detallado a este error.

Al comenzar este artículo aludíamos a la falta de atención hacia la práctica de razonamiento proporcional cualitativo. Vamos a terminarlo haciendo un comentario acerca de la relación entre las actividades en las que interviene la proporcionalidad cuantitativa y aquellas en las que se utiliza la proporcionalidad cualitativa.

Con un grupo formado por 18 de los 56 alumnos que respondieron al test que hemos descrito, continuamos planteando ejercicios del mismo estilo, pero con mayor información numérica, para que tuvieran que encontrar soluciones cuantitativas; ahora los datos no indicaban que un bloque pesaba más que otro, sino que indicaban, por ejemplo, que pesaba 30 unidades más.

Aunque esperábamos que nuestros estudiantes empezaran a utilizar las proporciones numéricas (igualar fracciones, despejar, etc), no ocurrió así, sino que mantuvieron los mismos tipos de estrategias que hemos comentado y, naturalmente, los mismos tipos de errores; sobre todo, el derivado de la estrategia de emparejamiento. Esto nos confirma en la creencia de que el estudio de la proporcionalidad debe realizarse simultáneamente en los aspectos cuantitativo y cualitativo, ya que ambos se complementan y son necesarios para una adecuada comprensión y adquisición del concepto.

REFERENCIAS

HAREL, G ; BEHR, M.J. - Differences in qualitative reasoning skills among 7th grade children in solving a non-numeric proportional reasoning blocks task - Preprint - 1987

HART, K.M. , ed. 1981 - Children's understanding of mathematics : 11-16 - Murray, London

KARPLUS, R. ; PULOS, S. ; STAGE, E.K. (1983) - Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems - Educational Studies of Mathematics - Vol. 14, pp. 219-233

NOELTING, G. (1980a) - The development of proportional reasoning and the ratio concept, part. 1 : Differentiation of stages - Educational-

Studies of Mathematics - Vol. 11 ,pp. 217-253

NOELTING,G (1980b) - The development of proportional reasoning and the ratio concept,part II : Problem structure at succesive stages - Educational Studies of Mathematics - Vol. 11,pp. 331-363

PIAGET,J y otros (1968) - Epistemologie el psychologie de la-fonction - Presses Universitaires de France - Paris).