ARTICULOS

El modelo de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros.

A lo largo de este artículo queremos ofrecer una visión general que sirva de toma de contacto con el "Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele". Como indica su nombre, esta teoría de aprendizaje describe las formas de razonamiento de los estudiantes de Geometría. Aunque puede pensarse que el tipo de razonamiento es el mismo en cualquier parte de las Matemáticas, esto no es del todo cierto, pues las características propias de las distintas áreas (Aritmética, Algebra, Geometría, etc.) marcan notables diferencias; de hecho, ha habido intentos de aplicar el Modelo de Van Hiele fuera de la Geometría, pero en general han tenido escaso éxito. El objetivo principal de estas páginas es acercar esta teoría a los profesores de Matemáticas y a su práctica cotidiana, con el fin de que les pueda servir como orientación en el diseño de las actuaciones (suyas y de sus alumnos) en las clases de Geometría a lo largo del curso. En la primera sección haremos una descripción de las principales características del Modelo de Van Hiele y después ofreceremos un ejemplo de su aplicación a una unidad de enseñanza concreta.

Es interesante conocer su orígen. Sus autores son los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, que en los años 50 eran profesores de Geometría de enseñanza secundaria en Holanda. A partir de su experiencia docente y de las dificultades de comprensión que observaban en sus alumnos, elaboraron un modelo que explica, por una parte, cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y, por otra parte, cómo puede un profesor ayudar a sus alum-

Ángel Gutiérrez y Adela Jaime

Departamento de Didáctica
de la Matemática
Universidad de Valencia España

nos para que mejoren la calidad de su razonamiento. Esta teoría la exponen por primera vez en sus tesis doctorales, leídas en 1957 y dirigidas por el recientemente fallecido H. Freudenthal (Hiele, 1990 y Hiele-Geldof, 1984).

El Modelo de Van Hiele atrajo enseguida la atención de los educadores soviéticos, que se hallaban inmersos en un proyecto de reforma curricular. Tras unos años de intensas investigaciones y exprimentaciones, se incorpora el Modelo de Van Hiele como base teórica de la elaboración del nuevo curriculum de enseñanza de la Geometría en la U.R.S.S., cuya implantación definitiva se produce en 1964. Un ejemplo de los resultados soviéticos lo tenemos en Pyskalo (1968). Por el contrario, en los países occidentales (con excepción de Holanda) se siguió ignorando el Modelo de Van Hiele hasta que I. Wirszup da una conferencia en la reunión anual del N.C.T.M. (Wirszup, 1976) en la que hace una descripción del curriculum soviético y del Modelo de Van Hiele y alerta a los profesores estadounidenses ante el hecho de que el curriculum de Geometría soviético es más eficaz que el suyo. La reacción provocada hace que en los años siguientes se realicen diversas investigaciones en EE.UU. en torno al Modelo de Van Hiele y que éste sea objeto de interés creciente en todo el mundo, tanto desde el punto de vista de la investigación educativa como del de la práctica docente.

Empezaremos describiendo el Modelo de Van Hiele. Está formado por dos partes: La primera es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento visual de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las facultades de Ciencias; estos tipos de razonamiento se denominan los *niveles de razonamiento.* La segunda parte es una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los alumnos sean capaces de acceder al nivel de razonamiento superior al que tienen actualmente; se trata de las *fases de aprendizaje.* En esta exposición abordaremos ambas componentes: En primer lugar nos ocuparemos de los niveles de razonamiento, que forman la base teórica del Modelo, y después nos centraremos en las fases de aprendizaje y en la aplicación del Modelo al diseño de series de actividades para temas concretos de clase.

En la bibliografía existente (en Gutiérrez, Jaime (1989) ofrecemos una recopilación comentada) se pueden encontrar listas muy completas de características de los distintos niveles de Van Hiele. En dichas publicaciones se utilizan dos numeraciones de los cinco niveles, empezando en 0 y empezando en 1; nosotros preferimos la segunda, para mantener las etiquetas de los niveles de acuerdo con sus ordinales. Las siguientes son las propiedades más importantes que permiten caracterizar con claridad cada nivel y diferenciarlo de sus adyacentes:

Nivel 1 (**reconocimiento**): El estudiante de este nivel

* Percibe los objetos en su totalidad y como unidades.
* Describe los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica en base a semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos.
* No reconoce explícitamente las componentes y propiedades de los objetos.

Nivel 2 (**análisis**): El estudiante de este nivel

* Percibe los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas.
* Puede describir los objetos de manera informal, mediante el reconocimiento de

sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.

* Deduce nuevas relaciones entre componentes o nuevas propiedades de manera informal a partir de la experimentación.

Nivel 3 (**clasificación**): El estudiante de este nivel

* Realiza clasificaciones lógicas de los objetos y descubre nuevas propiedades en base a propiedades o relaciones ya conocidas y por medio de razonamiento informal.
* Describe las figuras de manera formal, es decir que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
* Comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración.
* No es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por este motivo, tampoco comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.

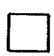
Nivel 4 (**deducción**): El estudiante de este nivel

* Es capaz de realizar razonamientos lógicos formales.
* Comprende la estructura axiomática de las Matemáticas.
* Acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc.).

En la descripción inicial del Modelo (Hiele, 1986) se señala la existencia de un quinto nivel, cuya característica básica es la capacidad para manejar, analizar y comparar diferentes Geometrías. Desde el primer momento, las investigaciones han mostrado una inconsistencia de este nivel con los cuatro anteriores. Por otra parte, la presencia de este nivel apenas aporta nada, desde un punto de vista práctico al Modelo, ya que sólo se encontraría al alcance de los matemáticos profesionales y de algunos estudiantes adelantados de las facultades de Matemáticas. Por este motivo, en adelante vamos a considerar solamente los niveles 1 al 4, que sí podemos encontrar en nuestros alumnos de los diferentes niveles educativos si reciben una enseñanza adecuada.

Después de esta descripción global, y por lo tanto abstracta, de las características de los niveles de razonamiento de Van Hiele, vamos a centrarnos en un ejemplo concreto de particularización de dicha descripción. Hemos recurrido a los cuadriláteros porque esta familia de polígonos constituye una parte de las Matemáticas y presenta una estructura muy rica en relaciones. Veamos las características que identifican la forma de trabajar con cuadriláteros de alumnos situados en los diferentes niveles de razonamiento.

Nivel 1: El estudiante de este nivel

* identifica cuadrados, rombos, rectángulos, etc. por su aspecto físico y su posición. Por ejemplo,  es un cuadrado pero, después de girarlo,  es un rombo.
* considera cada clase de cuadriláteros diferente (disjunta) de las demás. También considera como pertenecientes a diferentes clases algunos polígonos

con formas muy diferenciadas, como, por ejemplo,

 y 

* puede dibujar, recortar, etc. los diferentes tipos de cuadriláteros, así como reconocerlos en diferentes contextos.

Nivel 2: El estudiante de este nivel

* Identifica, por ejemplo, un rectángulo como un polígono dotado de un número de propiedades matemáticas: tiene 4 lados paralelos dos a dos, con 4 ángulos rectos, con diagonales iguales, que se cortan en el punto medio, etc., pero no se da cuenta de que unas propiedades están relacionadas con las otras (se deducen de ellas).
* no es capaz de dar una definición de rectángulo, es decir un conjunto mínimo de propiedades que lo caracterice.
* no es capaz de relacionar inclusivamente los diferentes tipos de cuadriláteros, sino que los sigue percibiendo como clases disjuntas. Por ejemplo, dirá que "un cuadrado no puede ser un rectángulo porque los cuadrados tienen todos los lados iguales y en los rectángulos dos lados miden más que los otros dos".

Nivel 3: El estudiante de este nivel

* clasifica los cuadriláteros a partir de sus propiedades: Ya reconoce que cualquier cuadrado es un rectángulo pero que no todos los rectángulos son cuadrados, etc.
* puede deducir, basado en argumentos *informales,* unas propiedades a partir de otras. Por ejemplo, paralelismo → igualdad de lados, perpendicularidad → paralelismo de lados opuestos, etc.

Nivel 4: El estudiante de este nivel

* maneja las propiedades de los cuadriláteros y las relaciona dentro de un contexto formal. Por ejemplo, puede demostrar formalmente cualquiera de los teoremas que ya ha utilizado en el nivel 3, o propiedades nuevas, como que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°.
* puede comprender la existencia de diferentes definiciones de una figura, analizarlas y relacionarlas. Por ejemplo:

— Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene los ángulos rectos.

— Un rectángulo es un cuadrilatero cuyas diagonales son iguales y se cortan en sus puntos medios.

— Un rectángulo es un cuadrilatero que tiene los lados paralelos dos a dos y un ángulo recto.

La descripción anterior de los niveles de razonamiento pone de relieve diversas propiedades del Modelo de Van Hiele, cuya importancia práctica radica en que muestran las líneas básicas que debe seguir un profesor que desee fundamentar sus clases en este modelo de enseñanza. Estas propiedades, de las cuales damos una descripción más detallada en Jaime, Gutiérrez (1990), son:

Recursividad: Los elementos implícitos en el razonamiento del nivel N se hacen explícitos en el razonamiento del nivel N + 1.

Por ejemplo, un niño de pre-escolar puede diferenciar círculos, triángulos y rectángulos por la "forma" de las figuras (nivel 1); no obstante es evidente que el niño se fija en la existencia y la forma (o cantidad) de los vértices para esa clasificación, aunque no sea consciente de ello. Más adelante, cuando el niño haya alcanzado el nivel 2, sí será consciente de que los vértices, como elementos diferenciados, son la clave de la clasificación.

La tabla siguiente resume esta característica:

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Niv. 1	objetos geométricos	propiedades matem. de los objetos
Niv. 2	prop. mat. de los objetos	relaciones entre propiedades y/o elementos de los objetos
Niv. 3	relac. entre prop. y/o elem.	deducción formal de relaciones
Niv. 4	deduc. formal de relaciones	

En este contexto, el trabajo central del profesor es conseguir que sus alumnos lleguen a ser conscientes del uso que están haciendo de esos elementos implícitos de su razonamiento y aprendan a utilizarlos de manera voluntaria. Este uso voluntario y correcto es lo que les permitirá alcanzar el nivel de razonamiento superior.

Secuencialidad: No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, es decir que no se puede alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, todos los niveles inferiores.

Un peligro del aprendizaje memorístico es que los estudiantes aparentan un nivel de razonamiento superior al que realmente tienen porque han aprendido vocabulario y formas de trabajo propios del nivel superior, aunque realmente no los comprenden ni los saben utilizar correctamente. Un ejemplo muy frecuente lo tenemos en los estudiantes de Enseñanza Secundaria cuando los profesores les enseñan matemáticas formales y les piden que repitan las demostraciones o que resuelvan formalmente problemas; esta práctica se traduce en que, con el paso del tiempo, los estudiantes han aprendido mecánicamente ciertas formas de actuar y de contestar los ejercicios propias del lenguaje matemático formalizado, con las que dan la impresión de encontrarse en el 4° nivel, cuando en realidad están muy lejos de ese tipo de razonamiento.

Especificidad del lenguaje: Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse y un significado específico del vocabulario matemático, de forma que dos personas que utilicen lenguajes de diferentes niveles no podrán entenderse. Por ejemplo, la palabra "demostrar" tiene significados diferentes en los niveles 2, 3 y 4, pues para demostrar una propiedad: Un estudiante del nivel 2 verificará que se cumple en uno o varios ejemplos y ello bastará para convencerle; un estudiante del nivel 3 sabe que debe dar justificaciones generales, pero éstas se basarán en algún ejemplo o en manipulaciones físicas de los cuerpos. Un estudiante del nivel 4 hará una demostración formal.

Son evidentes las implicaciones de esta propiedad en la forma de comportarse los profesores en las aulas. Con esto, Van Hiele nos avisa de que si queremos que nuestros alumnos nos entiendan realmente, debemos situarnos en su nivel, en vez de pretender que ellos se sitúen en el nuestro.

Continuidad: Nuestra experiencia personal nos dice que el tránsito entre los niveles de Van Hiele se produce de forma contínua y pausada, pudiendo durar varios años en el caso de los niveles 3 y 4. Dado que las características de cada nivel de razonamiento son múltiples, es necesario preguntarse cómo hay que tratar a los estudiantes que presentan indicios de haber adquirido algunas características de un nivel y también de no haber adquirido otras.

Localidad: Por lo general, un estudiante no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la Geometría, pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento.

Los que hemos estudiado Matemáticas superiores sabemos que, al enfrentarnos con una nueva área de estudio, lo usual es empezar tomando contacto con los elementos más importantes, después con sus propiedades básicas, a continuación relacionar unos elementos o propiedades con otros, etc. En otras palabras, lo usual es recorrer (posiblemente de forma muy rápida) los niveles de Van Hiele desde el 1 en adelante. Por lo tanto, cremos que los niveles de razonamiento son de carácter local y que la "localidad" es más acusada cuanto más bajo es el nivel, pues a menor nivel de razonamiento menor es la capacidad de lo alumnos para globalizar sus conocimientos y abarcar un área amplia de la Geometría.

El Modelo de Van Hiele propone a los profesores una secuencia cíclica de cinco **fases de aprendizaje** para ayudar a los estudiantes a progresar desde un nivel de pensamiento al siguiente. Básicamente, estas cinco fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza. Su carácter cíclico viene dado por el hecho de que cuando los estudiantes, tras recorrer las cinco fases, consiguen alcanzar un nivel de razonamiento superior al que tenían, deben iniciar un nuevo recorrido por las cinco fases para conseguir llegar al nivel superior al actual. Naturalmente, aunque las fases son las mismas para todos los niveles, los contenidos matemáticos, el lenguaje empleado y la forma de resolver los problemas son diferentes para cada nivel; lo que permanece es la metodología de trabajo, pero cambia su contenido concreto. Las fases del Modelo de Van Hiele son las siguientes:

Información: Al empezar a estudiar un tema nuevo, el profesor debe informar a los estudiantes sobre cuál es el campo de investigación en el que van a trabajar y cuáles van a ser los problemas que van a tratar de resolver. Esta fase sirve también para que el profesor averigüe los conocimientos previos de sus alumnos sobre ese tema y, en caso de que tengan algunos conocimientos organizados, cuál es su calidad y en qué nivel de razonamiento son capaces de desenvolverse los estudiantes.

En todo caso, no hay que despreciar los conocimientos que puedan haber adquirido los estudiantes de forma extra-académica, pues si son adecuados deben servir como punto de partida y si son erróneos, el profesor debe empezar por modificar esos errores.

Orientación dirigida: En la segunda fase los estudiantes exploran el campo de investigación por medio del material que les ha suministrado el profesor. Este material suele estar formado por bloques de actividades dirigidos al descubrimiento y aprendizaje de los conceptos y propiedades fundamentales del área de estudio en cuestión. Estas actividades deben estar claramente orientadas hacia sus objetivos, por ejemplo mediante ciertas cuestiones o directrices dadas por el profesor (como doblar, medir, buscar una simetría, etc), de tal forma que las estructuras características se le presenten a los estudiantes de forma progresiva.

Explicitación: La tercera fase, que es fundamentalmente de diálogo entre los estudiantes, con intervenciones del profesor cuando sea necesario, tiene varios objetivos. Uno es conseguir que las experiencias adquiridas se unan a los símbolos lingüísticos precisos y que los estudiantes aprendan a expresarse con precisión (dentro de las características de su nivel de razonamiento) en el transcurso de discusiones que tienen lugar en el aula.

Otro objetivo es hacer que los estudiantes reflexionen "en voz alta" sobre el trabajo que han estado haciendo, sus soluciones, dificultades, métodos, etc. Este debate entre los compañeros enriquecerá notablemente el conocimiento de cada estudiante, pues les obliga a organizar sus ideas y expresarlas con rigor, pone de relieve los métodos y resultados incorrectos y afianza los correctos. Así, en el transcurso de la tercera fase se forma parcialmente la nueva red de relaciones entre los conceptos propios del área de estudio.

Orientación libre: Ahora los estudiantes tendrán que aplicar sus nuevos conocimientos a investigaciones posteriores sobre el tema de estudio. Este es en gran parte conocido, pero el alumno todavía debe afianzar y completar sus conocimientos del mismo. Esto se consigue mediante la asignación por el profesor de tareas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. Se trata de actividades y problemas menos dirigidos que los que se plantean en la segunda fase, pues en aquel momento los problemas estaban dirigidos a enseñar unos conocimientos concretos, mientras que en la fase de orientación libre la finalidad de las actividades de los estudiantes es conseguir que profundicen en dichos conocimientos, que se afiancen en su uso, que relacionen unos con otros y que descubran y aprendan algunas propiedades que por su complejidad no pueden ser estudiadas antes.

Integración: A lo largo de las fases anteriores, los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades de razonamiento, pero todavía les falta adquirir una visión general de los conceptos y métodos que tienen a su disposición. En esta fase el profesor debe tratar de resumir en un todo el campo que han explorado los estudiantes y lograr que integren lo que acaban de aprender en la red de conocimientos relacionados con este campo que pudieran tener con antelación. El profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ninguna novedad al estudiante: Solamente deben ser una acumulación de las cosas que ya conoce.

Es fácil darse cuenta de que las fases de aprendizaje tienen, por los objetivos de cada una, una secuenciación lógica que no se puede alterar. La única excepción es la tercera fase, de explicitación; esta fase no debe consistir en un período de tiempo entre las fases segunda y cuarta dedicado a que los estudiantes dialoguen, sino que hay que entenderla como una dinámica continua, a lo largo de todas las clases, de diálogo y de reflexión común después de cualquier tipo de actividad, sea de la fase que sea. De esta manera, la fase de explicitación estaría sobrevolando las otras cuatro fases y entremezclada con cada una de ellas.

Asimismo, si el profesor y los alumnos han estado trabajando juntos un tema con anterioridad, puede que la fase 1 de un determinado nivel no requiera actividades específicas, pues el profesor ya sabe qué conocimientos y nivel de razonamiento tienen sus alumnos y es suficiente hacer algunos comentarios o preguntas para re-tomar el tema y comenzar con las actividades de la fase 2.

Para completar esta presentación del Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele, vamos a dar un ejemplo de su aplicación al diseño de una unidad de enseñanza de los giros del plano (esta unidad es parte de un proyecto más amplio cuyo objetivo es el diseño de unidades para la enseñanza de las isometrías del plano).

Antes de iniciar el diseño de una unidad de enseñanza para un tema concreto de Geometría, hay que particularizar el significado general de los niveles de Van Hiele, que hemos visto al principio del artículo, definiendo características de cada nivel de razonamiento en términos del tema en cuestión. En nuestro caso, las características de los niveles de razonamiento particularizadas a los giros del plano son:

Nivel 1 (**reconocimiento**): El estudiante de este nivel

* Reconoce, utiliza y describe los giros por sus características visuales globales.
* Utiliza la disposición en forma de círculo, la equidistancia al centro y la variación en la inclinación, pero lo hace de una forma global, es decir, según el aspecto general de la figura que ve.

Nivel 2 (**análisis**): El estudiante de este nivel

* Reconoce y utiliza los giros a partir de sus dos características básicas: Centro y ángulo de giro. La visión global del primer nivel ha dado paso a una consideración de los elementos. Por ejemplo: Para colocar la imagen de una figura, el estudiante tiene en cuenta la equidistancia al centro de varios de sus puntos (generalmente trazando circunferencias) y reconoce la necesidad de utilizar más de un punto.
* Descubre experimentalmente y utiliza propiedades de los giros, como la igualdad del ángulo recorrido por distintos puntos de una figura, las particularidades de los giros de 180°, la equivalencia de giros, el resultado del producto de giros con el mismo centro.

Nivel 3 (**clasificación**): El estudiante de este nivel

* Establece relaciones entre propiedades descubiertas anteriormente, lo cual le permite realizar demostraciones informales y descubrir propiedades nuevas. Por ejemplo:
  — Obtiene y justifica el procedimiento de cálculo del centro de giro mediante el corte de dos mediatrices.
  — Descubre la relación entre el ángulo de giro y la inclinación de la figura imagen respecto de la original (fig. 1) y la utiliza para justificar el resultado del producto de giros de distinto centro.
  — Relaciona traslaciones o simetrías con giros.[1]

---

[1] El desarrollo de este punto depende del nivel de razonamiento que los estudiantes hayan alcanzado previamente en el estudio de las traslaciones o las simetrías.

* Comprende la definición formal de giro y reconoce y utiliza conjuntos mínimos de condiciones necesarias y suficientes para definir un giro.

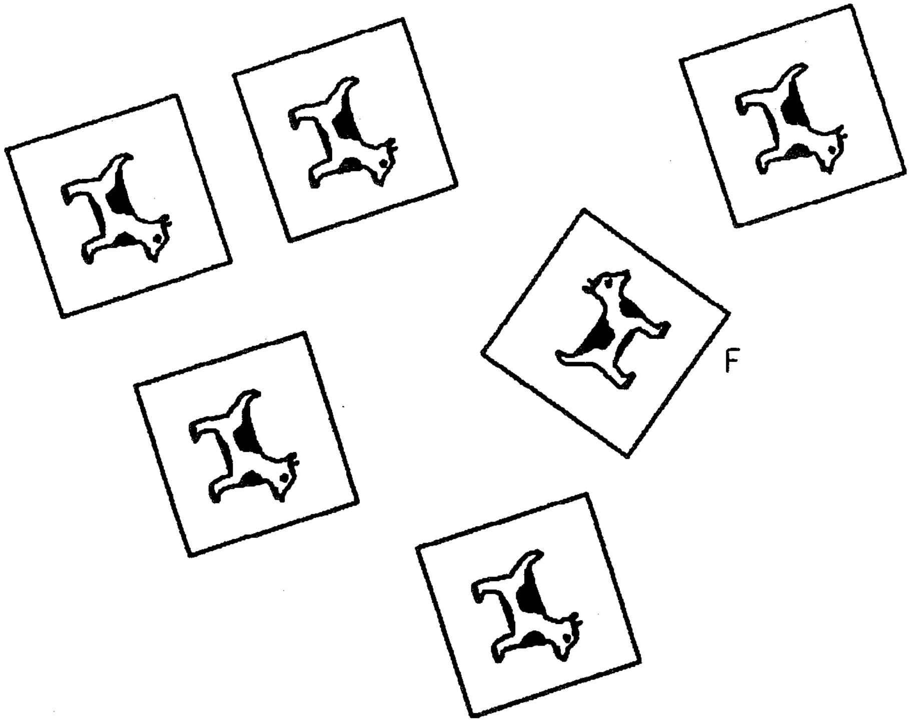


Figura 1
Giros con el mismo ángulo y distintos centros aplicados a F. Se observa que todas las imágenes son trasladadas entre sí.

Nivel 4 **(deducción)**: El estudiante de este nivel

* Comprende y utiliza los métodos formales de razonamiento: Es capaz de emplear y enunciar las propiedades en términos de hipótesis y tesis y encadenar lógicamente los pasos seguidos en el razonamiento.

* Puede realizar demostraciones formales de las propiedades conocidas o de otras nuevas.

* Consigue una integración de la estructura global de las isometrías del plano.[2] Utiliza la estructura algebraica de dicho conjunto.

Un desarrollo completo de este nivel de razonamiento en los giros requiere la integración de las otras isometrías (al menos de las simples: Traslaciones y simetrías. No es necesario haber desarrollado la simetría en deslizamiento), pues al efectuar productos, estos movimientos se encuentran estrechamente

[2] Después de haber llegado a este nivel en el estudio de las traslaciones y las simetrías.

vinculados. Por ello, a partir del nivel 3 de razonamiento en giros consideramos necesario que los alumnos hayan desarrollado una instrucción semejante en traslaciones y simetrías. Esto se refleja en la secuencia de actividades que proponemos, pues a partir del nivel 3 aparecen situaciones en las que traslaciones y simetrías se relacionan con los giros.

Una vez caracterizados los niveles en términos de giros, podemos empezar el diseño de la unidad de enseñanza. Por limitaciones de espacio, no haremos una exposición completa de las actividades a realizar en cada nivel, sino que indicaremos tipos de actividades integrados en esta unidad de enseñanza, a lo largo de las diferentes fases y niveles de razonamiento. Por otra parte, de acuerdo con la interpretación que dimos más arriba de la fase 3, como una actitud continua de diálogo durante las demás fases, no hemos diseñado actividades específicas para esta fase en ninguno de los niveles.

Desde el punto de vista metodológico, es necesario resaltar que hay que contemplar las actividades dentro del contexto de la secuencia concreta en la que se encuentran, pues una actividad aislada puede utilizarse en distintas fases, e incluso distintos niveles. Su situación concreta dentro del conjunto es lo que marca sus objetivos. Por ejemplo, ante una actividad dirigida a que los estudiantes descubran una propiedad, si en una secuencia se sitúa como actividad de la fase 2, su objetivo será el descubrimiento directo de la propiedad, mientras que si la pretensión es que la actividad corresponda a la fase 4, deberá surgir como aplicación de otras ya conocidas por los estudiantes.

La unidad de enseñanza que presentamos está dirigida a estudiantes de Enseñanza Primaria y comienzo de la Enseñanza Secundaria (grados 3 a 11, con edades entre 9 y 16 años aproximadamente) y a estudiantes de la Escuela de Magisterio (futuros profesores de Enseñanza Primaria).

El material que utilizamos para las actividades está formado por los elementos usuales de dibujo (regla, compás y transportador), por discos de plástico transparente y por pequeñas figuras de papel de varias formas (cuadrados, rectángulos, triángulos y rombos), con un dibujo en su interior (fig. 2); los alumnos disponen de cantidad suficiente de estas figuras, bien para realizar físicamente los movimientos, bien para pegarlas en la posición de la imagen por el giro. Con ello pretendemos evitar posibles errores ocasionados por un mal dibujo. También se agiliza de esa manera el trabajo, pues siempre es más rápido pegar una figura que dibujarla. De todas maneras, los estudiantes a veces prefieren prescindir de las figuras de papel y dibujarlas.

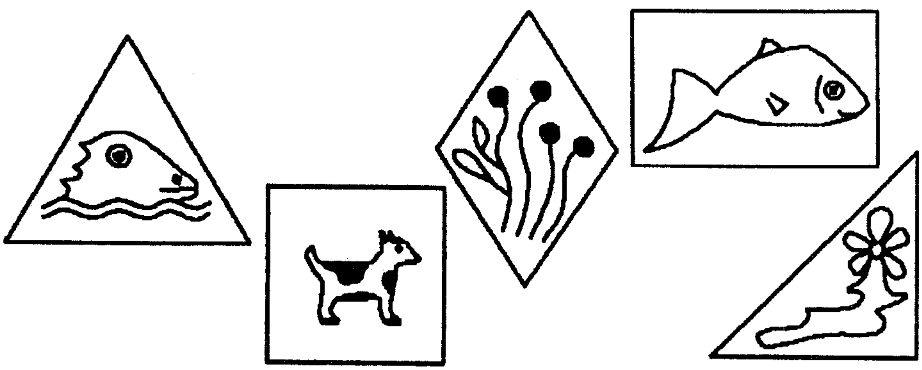


Figura 2

Actividades del Nivel 1

Fase 1

1a) Cada estudiante "gira" sobre sí mismo.

Hacer un dibujo en una hoja de papel, pinchar la hoja con un alfiler y darle vueltas.

Colocar una figura de papel (cuadrado, triángulo,...) sobre una hoja en blanco, pincharla con un alfiler y darle vueltas.

Pegar una figura sobre un disco de plástico, pincharlo por su centro y darle vueltas.

Fase 2

1b) El profesor da algunos ejemplos y pide a los alumnos, otros de movimientos en el mundo real que son giros y de otros que no lo son.

Repetir los dos últimos ejercicios de la fase 1, pero pegando varias figuras a lo largo del recorrido de giro.

1c) Sobre el resultado de alguno de los ejercicios de 1b), trazar, sin herramientas de dibujo, el recorrido seguido por un punto de una figura a lo largo del giro. Emplear un disco transparente[3] para comprobar la respuesta (perforando el disco en el punto correspondiente para poder atravesarlo con el bolígrafo y dibujar de forma automática el recorrido del punto).

Identificar posibles recorridos de giros entre un conjunto de líneas dadas (incluir circunferencias, casi circunferencias, cuadrados, etc.).

[3] Esta formulación de las actividades está hecha para estudiantes de los primeros cursos de Primaria que todavía no son capaces de manejar el compás. Si los estudiantes manejan bien el compás, se puede modificar la forma de comprobación.

Fase 4

1d) Se da a los estudiantes una hoja con varias figuras. Los alumnos deben reconocer las que se corresponden mediante un giro. Pueden usar una figura y moverla antes de contestar. El alumno deberá justificar sus respuestas haciendo explícita la equidistancia al centro de giro (de manera global), la variación de la inclinación de la figura y el recorrido circular de los puntos.

1e) Identificación de giros sobre un mosaico.

Fase 5

Resumen por parte del profesor: En qué consiste un giro. Cómo se colocan las figuras. Qué trayectoria sigue un punto. A qué distancia del centro se coloca la imagen.

Relación con otros conceptos. El profesor diseñará las actividades que considere oportuno, según los conocimientos de los alumnos.

Comentarios. Con las actividades de la fase 1 se pone en contacto a los niños con los giros. Por eso, simplemente dan vueltas a distintos dibujos o sobre sí mismos.

En la fase 2 ya se centra la atención en la transformación que experimenta una figura al girarla. Al colocar varias figuras a lo largo del recorrido del giro se facilitan las ideas del movimiento circular de los giros, la equidistancia al centro de giro y la variación en la inclinación de la figura durante el desplazamiento. Dedicamos una actividad expresamente a poner de relieve la idea de que el giro es un movimiento circular porque, aunque pueda parecernos algo muy elemental, no lo es para los estudiantes que tienen que realizar su progreso completo a lo largo del nivel 1. Por ejemplo, la figura 3 es la respuesta de un niño de tercer grado (8 años) al cual le pedimos que dibujase el recorrido seguido por el punto A.

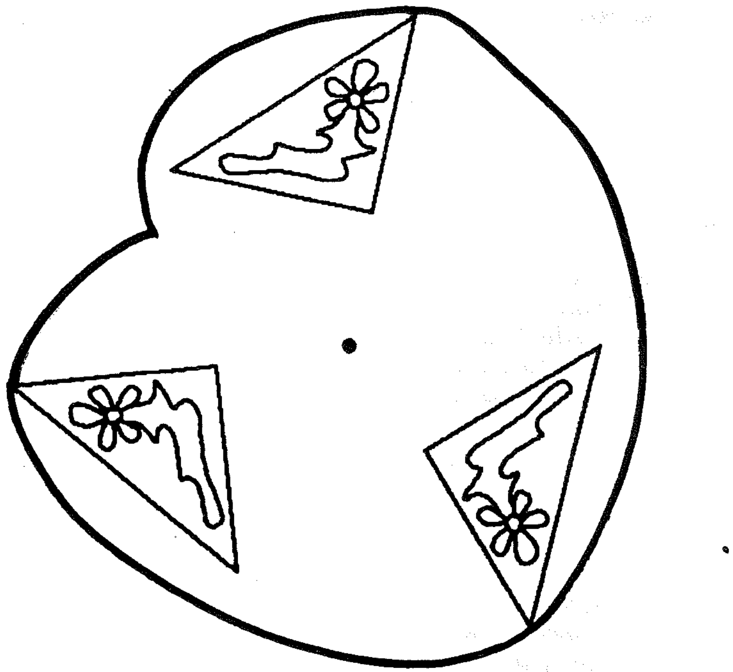


Figura 3

En las actividades de la fase 4 se utilizan los elementos estudiados en la fase 2 para reconocer figuras giradas.

Actividades del Nivel 2

Fase 1

El profesor deberá informarse sobre los conocimientos de sus alumnos sobre los giros, en particular en relación con el concepto de ángulo y su medida. En caso de ser necesario, deberá desarrollar una unidad de enseñanza complementaria al respecto.

Fase 2

2a) Identificar las figuras que corresponden mediante un giro. Se deberá inducir a los estudiantes a medir la distancia desde el centro de giro a varios puntos de las figuras. También se les hará ver la necesidad de comprobar más de un punto cuando el centro de giro no está en la figura.

2b) Calcular la posición de la imagen de una figura (obteniendo la posición de varios puntos). Inducir en los estudiantes la necesidad de utilizar más de un punto cuando el centro de giro no está en la figura.

2c) Aplicar a un punto un giro concreto (indicando el centro y el ángulo de giro).

2d) Dadas una figura, su imagen por un giro y el centro de giro, medir el ángulo girado por varios puntos de la figura.

2e) Aplicarle a una figura un giro utilizando el compás y el transportador (si los alumnos son niños pequeños y tienen dificultades en su manejo, se pueden usar discos y sectores angulares de ciertos valores concretos, como 30°, 60° y 90°). Inducir en los estudiantes la necesidad de obtener la imagen de más de un punto cuando el centro de giro es exterior a la figura.

2f) Aplicar giros de 180°, observando sus características especiales en la posición de la figura imagen. Calcular imágenes mediante giros de 180° utilizando sólo la regla (sin compás).

Fase 4

2g) Determinar giros equivalentes. Obtener la condición que han de cumplir dos giros para ser equivalentes.

2h) Componer giros del mismo centro. Generalizar el resultado. Descubrir la conmutatividad.

Construir rosetones generados por un giro (figura 4). Tras la realización de algunos rosetones, los alumnos deben prever la cantidad máxima de figuras que se pueden colocar en un rosetón, conocida la figura que hay que girar.

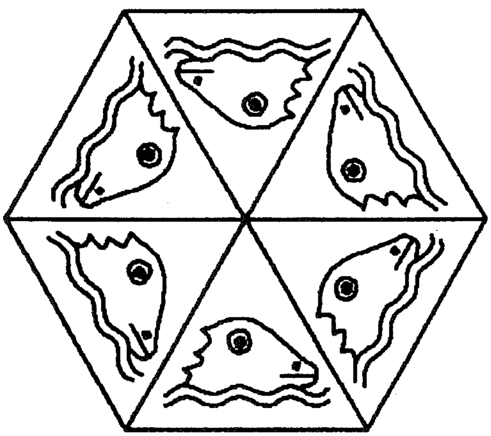


Figura 4

2i) Dados dos puntos P y P′ y varios puntos más, encontrar los que sirven como centros de giro que transforman P en P′. Generalizar el resultado describiendo el lugar donde pueden estar otros centros de giros no dados.

Fase 5

Resumen por parte del profesor centrado en: ¿Qué es un giro? ¿Cómo se aplica un giro a una figura? Si obtienes con el compás la imagen de un punto de una figura, ¿cómo colocas la imagen de la figura completa? ¿Es suficiente con la imagen de un punto para colocar bien la imagen de la figura completa? ¿Cuál es el resultado del producto de giros con el mismo centro?

Comentarios: Las actividades de la fase 2 comienzan con la consideración puntual, analítica, de la equidistancia, que se utilizaba visual y globalmente en el nivel 1: Ahora la equidistancia se comprueba midiendo en varios puntos de una figura. El alumno llegará a ser consciente de que no basta con asegurar sólo la equidistancia entre un punto y su imagen, pues se puede colocar la figura imagen con distintas inclinaciones (actividad 2a). La actividad 2b aplica esa idea.

En varias actividades de la fase 2 se van presentando los distintos elementos básicos del concepto de giro: Centro y ángulo de giro, igualdad del ángulo recorrido por los distintos puntos de una figura y equidistancia al centro de cualquier punto y su imagen. Estas actividades son las que permiten obtener de manera consciente, es decir no como un simple algoritmo, la imagen mediante un giro de una figura por el método usual de determinar la imagen de varios puntos con el compás (actividad 2e), sino sabiendo por qué se puede obtener así la imagen de una figura. Las actividades de la fase 2 se completan con la 2f dedicada a estudiar las propiedades peculiares de los giros de 180°.

El conocimiento de los elementos característicos de los giros y la explicitación de sus propiedades más destacadas realizados en la fase 2, les permiten a los alumnos descubrir por sí mismos, en la fase 4, otras propiedades interesantes de los giros, como las que se proponen en las actividades 2g a 2i. Señalaremos que el objetivo de la actividad 2i no es utilizar el concepto matemático de mediatriz, sino el descubrimiento experimental de la situación en que se encuentran los posibles centros de giro.

Actividades del Nivel 3

Fase 1

Debido a la relación entre giros, traslaciones y simetrías que se plantea a partir de este nivel, el profesor debe obtener información sobre el nivel de los alumnos en estos movimientos.

Fase 2

3a) Justificar por qué la mediatriz del segmento PP′ es el lugar geométrico de los posibles centros de giros que transforman P en P′. Determinar el centro del giro que transforma una figura en otra (mediante el corte de mediatrices) y obtener el ángulo girado.

3b) Aplicar a una figura varios giros con distintos centros pero igual ángulo (En la Fig. 1 presentamos un ejemplo). Generalizar el resultado y relacionarlo con las traslaciones (al aplicar giros con el mismo ángulo sobre una figura las imágenes son trasladadas entre sí).

3c) Utilizar el resultado obtenido en 3b) para aplicar a figuras giros cuyo centro está fuera de las figuras. (Este método de trabajo es especialmente eficaz cuando hay que realizar un producto de giros equivalente a otro giro).

3d) Dadas varias propiedades o condiciones, seleccionar un conjunto mínimo de manera que definan un giro. Seleccionar otro conjunto mínimo diferente del anterior.

3e) Enunciar una definición formal de giro. Expresar el significado de esa definición usándola para girar una figura. Mostrar a los alumnos una o varias demostraciones formales sencillas en las que haya que aplicar la definición de giro (por ejemplo, demostrar que el producto de giros del mismo centro es otro giro con el mismo centro y ángulo la suma de los ángulos de los factores).

Fase 4

3f) Hacer que los alumnos completen o justifiquen formalmente alguno de los pasos de una demostración sencilla (por ejemplo, que el producto de dos simetrías cuyos ejes se cortan es un giro cuyo centro es el punto de corte y cuyo ángulo es el doble del formado por los ejes).

Hacer que los alumnos repitan, razonándola, alguna demostración realizada anteriormente por el profesor, en la que varíe alguno de los datos (por ejemplo, si el profesor ha empleado en la demostración de la propiedad enunciada en 3e) dos ángulos con el mismo sentido, hacer que los alumnos utilicen dos ángulos de sentidos opuestos).

3g) Realizar productos de giros de distinto centro. Generalizar el resultado y justificarlo. Obtener la imagen de una figura tras un producto de ese tipo por dos métodos: Aplicando el producto a dos puntos y mediante el método introducido en 3c).

3h) Determinar alguno de los giros que forman parte de un producto, conocida la isometría equivalente. Por ejemplo, dada una figura y su imagen por un producto de dos giros, se sabe que el primer giro aplicado ha sido G(0, 70°); determinar el segundo giro que ha intervenido en el producto (ver figura 4).

Plantear el mismo ejercicio de forma general: ¿Cómo se obtiene el centro y el ángulo de un giro que ha intervenido en un producto de dos giros, cuando se conocen la figura inicial, la final y el otro giro?

Plantear la descomposición de un giro en producto de dos giros de distinto centro. Comenzar con un caso concreto: ¿Cuántas soluciones hay? ¿Por qué? ¿Cómo se obtienen? Después, generalizar el resultado.

3i) Realizar el producto de giros con traslaciones (se pueden desarrollar puntos análogos a los indicados en 3g).

Fase 5

Igual que en los niveles anteriores, se hace un resumen de las propiedades y métodos desarrollados a lo largo de las fases anteriores de este nivel. En este resumen se incluye la necesidad de utilizar métodos de justificación propios de este nivel.

Comentarios: Una de las características del nivel 3 es el comienzo del razonamiento formal. El establecimiento de relaciones entre propiedades lo podríamos considerar como el prólogo. Las actividades 3a a 3c corresponden a ese momento y por eso las hemos incluido en la fase 2: A través de la experimentación y generalizando o justificando posteriormente se dirige a los alumnos para que, a partir de relaciones entre propiedades, se obtienen propiedades nuevas.

Otro de los elementos propios del nivel 3 es el relacionado con la definición. En las actividades 3d y 3e se desarrolla ese aspecto. Se trata de ejercicios dirigidos, tanto a la construcción de la definición como a su interpretación ante situaciones concretas. Los hemos incluido en la fase 2 porque al alumno se le orienta en cada momento sobre lo que ha de hacer.

La fase 4 en relación con la definición se presenta en algunas de las demostraciones de ejercicios sugeridos para esta fase, como el 3f. Decimos que en este caso el trabajo del alumno en relación con la definición corresponde a la fase 4 porque tiene que aplicarla a situaciones nuevas.

Las actividades 3f a 3i pensamos que corresponden a la fase 4 porque en ellas los alumnos utilizan los conocimientos adquiridos en la fase 2 para organizar alguna demostración o planteamiento de la solución de algún ejercicio, determinar algún movimiento o completar una demostración. No se trata de que el profesor guíe a los alumnos en todo momento (ello corresponde a la fase 2), pues los alumnos ya disponen de las herramientas necesarias para desarrollar las actividades y deben ser capaces de resolverlas con alguna ligera indicación.

Actividades del Nivel 4

Fase 1

Al igual que sucede en los niveles anteriores, pensamos que los alumnos ya han superado la fase 1 de toma de contacto si han seguido la secuencia de actividades propuesta para los niveles anteriores. De todas formas, se pueden plantear algunas actividades que suponen una toma de contacto con el formalismo propio del nivel 4.

4a) Enunciar la hipótesis y la tesis que hay que tener en cuenta para demostrar que el producto de giros de distinto centro es una traslación cuando el valor de la suma de los ángulos de los giros factores es múltiplo de 360°.

4b) Enunciar la hipótesis y la tesis que hay que tener en cuenta para demostrar que los giros son isometrías (es decir, que conservan las longitudes).

Fase 2

4c) Realizar las demostraciones de las dos propiedades señaladas en los apartados anteriores 4a) y 4b).

4d) Demostrar que la composición de dos simetrías cuyos ejes se cortan es un giro. Caracterizar dicho giro.

Fase 4

Comprendidas las demostraciones anteriores, en las que el elemento básico es la asimilación de la descomposición de manera adecuada de giros en producto de simetrías, queda todo un campo abierto para demostrar formalmente otro tipo de composiciones. A modo de ejemplo presentamos algunos de los múltiples ejercicios que se pueden plantear.

4e) Demostrar que el producto de dos giros de distinto centro es un giro cuando el valor de la suma de los ángulos de los giros factores no es múltiplo de 360°.

Demostrar cuál es el resultado de la composición de un giro y una traslación.

4f) Demostrar que toda isometría del plano se puede expresar como producto de como máximo tres simetrías.

Una forma más elemental (apropiada para el nivel 3) de estudiar esta propiedad sería la siguiente:

Dadas dos figuras congruentes del plano,

— si son directas, siempre se puede pasar de una a otra mediante una traslación o un giro.

— si son inversas, si no hay una simetría que convierta una en la otra, siempre se puede encontrar la composición de una simetría y un movimiento directo, traslación o giro (si se ha estudiado la simetría en deslizamiento, este caso se reduce a ese movimiento).

Fase 5

En esta fase la visión de los alumnos de las isometrías del plano ya debe ser global, en cuanto que se consideran todos los movimientos relacionados estrechamente entre sí. La labor de resumen en esta fase consiste en destacar tales relaciones. Además si los alumnos han estudiado los movimientos desde otro punto de vista, por ejemplo, el matricial, en esta fase conviene establecer los vínculos correspondientes.

Comentarios: Las actividades propuestas en la fase 1 son una iniciación al planteamiento formal y a la estructura de los teoremas. En el nivel 3 proponíamos estas actividades para afianzar la definición de giro, realizar justificaciones informales de los resultados y repetir, con alguna variación, las demostraciones realizadas por el profesor. Ahora el objetivo es que el alumno enuncie en términos formales las hipótesis y las tesis de dichas propiedades, como paso previo a la organización de sus demostraciones formales.

Las actividades propuestas en la fase 2 tienen como objetivo guiar al estudiante en la realización de una demostración formal completa. La correspondiente a la actividad 4d), junto con una propiedad semejante que relaciona simetrías y traslaciones (el producto de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación) son dos pilares básicos en los que se apoyan muchas demostraciones formales de composiciones de movimientos y la estructura algebraica.

Con los conocimientos adquiridos en la fase 2, en las actividades de la fase 4 los alumnos pueden desarrollar razonamientos formales para demostrar otras propiedades.

Referencias

GUTIERREZ, A.; JAIME, A. (1989): Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, *Enseñanzas de las Ciencias* 7.1, pp. 89-95.

HIELE, P.M., (1986): Structure and insight. A theory of mathematics education (Academic Press: Londres).

HIELE, P.M. (1990): *El problema de la comprensión, en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría* (De problematiek van het inzicht, gademonstreed aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof). (Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda).

HIELE-GELDOF, D. The didactics of geometry in the lower class of secundary school (De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.), en *Fuys; Geddes; Tischler (1984): Selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele* (Brooklyn College, C.U.N.Y.: Nueva York), pp. 1-214.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. (1990): Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele, en *Linares Sánchez (1990): Teoría y práctica en eduación matemática* (Alfar: Sevilla, España), pp. 295-384.

PYSKALO, A. M. (1968): *Geometry in grades 1-4 (problems in the formation of geometric conceptions in pupils in the primary grades).* (Proveshchente Publishing House: Moscú).

WIRSZUP, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, en *Martín (1976): Space and geometry* (ERIC: Columbus, USA), pp. 75-97.