Giménez, J. y otros (eds.) (1996): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (colección Mathema nº 8). (Ed. Comares: Granada), pp. 143-170.

Uso de Definiciones e Imágenes de Conceptos Geométricos por los Estudiantes de Magisterio

Angel GUTIÉRREZ y Adela JAIME

Departamento de Didáctica de la Matemática

Universidad de Valencia (Valencia, Spain)

Uno de los problemas principales que tiene planteado la investigación en Didáctica de las Matemáticas dentro del campo de la geometría escolar (es decir, la geometría enseñada en Primaria y Secundaria) es la comprensión de los procesos de aprendizaje de los conceptos geométricos. Revisando la literatura especializada, podemos ver cómo los investigadores se han dedicado a analizar la manera como se produce el aprendizaje de los conceptos geométricos elementales (generalmente de geometría plana), los conceptos de las diferentes magnitudes y sus medidas, las isometrías, etc. en estudiantes de diferentes niveles educativos. En cada caso encontramos aproximaciones al problema que difieren en el tipo de material usado, la metodología de enseñanza, la organización de los conocimientos matemáticos o el tipo de actividades realizadas por los estudiantes. Esta diversidad es un reflejo de la complejidad del problema, incluso en el caso de los conceptos geométricos considerados como más elementales (por ejemplo, los distintos tipos de figuras planas).

Un factor importante es el hecho de que los conceptos introducidos en la geometría escolar forman parte de una amplia red de relaciones que los ligan, lo cual se traduce en una diversidad de organizaciones posibles de esos conceptos: A diferencia de lo que ocurre en otras áreas de las Matemáticas escolares como aritmética, álgebra o cálculo, en las que los grupos de conceptos relacionados están muy jerarquizados y parece claro cuál es el orden a seguir en su enseñanza, en geometría es posible, por ejemplo, enseñar en primer lugar las isometríaæs del plano para, a partir de ellas, obtener los conceptos de perpendicularidad, paralelismo, ángulo, circunferencia, …, o empezar enseñando estos conceptos y después introducir las isometrías a partir de ellos. Obviamente, en ambos casos la forma de introducir los conceptos y sus definiciones debe ser diferente y, si bien los conceptos matemáticos son los mismos, las concepciones que generan suelen ser distintas. Numerosas experiencias muestran que unidades de enseñanza basadas en organizaciones distintas de unos mismos conceptos (en Geometría y también en otras áreas de las Matemáticas) pueden dar buenos resultados, si bien las comprensiones que adquieren los estudiantes de dichos conceptos y las formas en que después los aplican pueden ser bastante diferentes.

Investigaciones llevadas a cabo por S. Vinner y sus colaboradores, que resumimos en la sección 1, han dado lugar a un modelo teórico cuyo objetivo es explicar los procesos cognitivos que tienen lugar en los estudiantes durante el aprendizaje de conceptos matemáticos nuevos, en particular de los geométricos, bien sea como conceptos aislados, bien como ampliaciones de campos conceptuales ya formados. Un elemento central de este modelo es la distinción que hace entre un "concepto" matemático, la "imagen del concepto" (concept image) creada en la mente de un estudiante y la "definición del concepto" verbalizada por dicho estudiante. Un aprendizaje correcto lleva a la identificación de estos tres objetos, si bien para numerosos estudiantes se trata de tres componentes desligadas que utilizan o no según la tarea que deban realizar.

En este capítulo describimos una investigación que comienza basándonos en uno de los estudios realizados por el grupo de S. Vinner (Vinner y Hershkowitz, 1983; Hershkowitz, 1989) y sigue profundizando en dicho estudio y desarrollando sus conclusiones teóricas. En primer lugar, hacemos un resumen del marco de referencia de nuestra investigación, constituido por el modelo teórico de Vinner. A continuación presentamos los resultados de la administración a estudiantes de Magisterio de un test elaborado para analizar su comprensión del concepto de "altura de un triángulo". Con ello queremos identificar los procesos de aprendizaje y razonamiento seguidos por los estudiantes de Magisterio y la influencia en los mismos de algunas variables como sus conocimientos previos o la manera de presentarles dicho concepto. Las conclusiones de este estudio se refieren a la identificación de las imágenes conceptuales de los estudiantes previas a la administración del test y a la forma como éstos ponen en juego dichas imágenes conceptuales o la definición matemática de altura de un triángulo en la resolución de tareas específicas.

Por último presentamos los resultados de otro estudio, continuación del anterior, en el cual analizamos la influencia que ejerce en la capacidad de los estudiantes de Magisterio para utilizar el concepto "altura de un triángulo" el conocimiento o desconocimiento que poseen de los diversos conceptos más elementales que integran la definición usual de altura de un triángulo. Nuestro objetivo es verificar la hipótesis de que, en muchas ocasiones, el fallo en la comprensión o el uso por los estudiantes de un concepto geométrico nuevo no está en el aprendizaje incorrecto de dicho concepto en sí mismo o en la presencia de factores que actúan como distractores, sino en los errores derivados de la mala comprensión y uso de los conceptos previos que lo integran.

Esta investigación ha tenido como objetivos ayudarnos a conocer mejor a los estudiantes de Magisterio y proporcionarnos material para trabajar con ellos en las clases: Los resultados que presentamos aquí los hemos utilizado en los cursos a los que han sido administrados los tests como parte del análisis didáctico de la geometría elemental, con la doble finalidad i) de promover en los estudiantes una mejora en sus conocimientos geométricos y ii) de convencerles de la necesidad y utilidad de llevar a cabo este tipo de análisis con sus alumnos de Primaria y, al mismo tiempo, enseñarles métodos para hacerlo.

1. Una interpretación de la formación de conceptos geométricos

Cuando los profesores y libros de texto españoles presentan por primera vez a los estudiantes un concepto nuevo de geometría elemental, suelen recurrir a uno de estos dos métodos de enseñanza: i) Enunciar una definición matemática de dicho concepto (más o menos formal, según el curso) y, a continuación, plantear ejercicios de memorización y de reconocimiento de algunas figuras concretas, o ii) presentar ejemplos de figuras que representan ese concepto, haciendo una descripción de sus características matemáticas (y, a veces, físicas), a continuación, enunciar una definición matemática del concepto y, por último, plantear ejercicios de memorización de la definición y de reconocimiento de otras figuras concretas.

En ambos casos, los profesores suelen poner más énfasis en las definiciones que en los ejemplos, sin darse cuenta de que son los últimos los que impactan más en los estudiantes y los que producen un efecto mental más duradero y profundo. Según Vinner (1983, 1991), cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto conocido, se estimula nuestra memoria y se evoca algo, que raramente es la definición del concepto, sino un conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias. Este "algo" es lo que Vinner llama la *imagen del concepto* (o imagen conceptual). En el caso de conceptos geométricos, la imagen conceptual que se crea en la mente de los estudiantes está compuesta por las diversas figuras, dibujos o representaciones que recuerdan los estudiantes como ejemplos de dicho concepto, junto al conjunto de las propiedades que el estudiante asocia al concepto. Según esto, una imagen de un concepto es correcta cuando le permite al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleva asociadas son todas relevantes. Dichas propiedades no son necesariamente matemáticas puesto que, especialmente en estudiantes situados en el primer o segundo niveles de Van Hiele[1], también pueden ser propiedades irrelevantes de tipo físico. Por ejemplo, la imagen del concepto de rectángulo que se forman muchos estudiantes de Enseñanza Primaria está compuesta por una serie de rectángulos concretos colocados en posición estándar (el par de lados más largos horizontales) y por algunas propiedades derivadas de estas figuras, como tener los ángulos

[1] Para una descripción completa del Modelo de Razonamiento Matemático de Van Hiele, ver Jaime y Gutiérrez (1990).

rectos, los lados opuestos iguales, los lados verticales y horizontales, siendo los horizontales más largos que los verticales, etc.

Por otra parte, fruto de los métodos de enseñanza que mencionábamos antes, los estudiantes memorizan una cierta definición, que repiten cuando el profesor les pregunta pero que no utilizan cuando les pide que pongan en acción dicho concepto para resolver un problema. Vinner y Hershkowitz (1983) llaman *definición de un concepto* a esta definición verbal que un estudiante tiene en su memoria y que recita cuando se le pide. La definición de un concepto expresada por un estudiante no tiene por qué estar ligada operativamente a su imagen de ese concepto en el momento de la realización de tareas. Por ejemplo, al preguntarles, muchos estudiantes recitan que un polígono regular es un polígono que tiene todos los lados iguales, aunque parte de estos estudiantes son capaces de reconocer sin errores todos los ejemplos de polígonos regulares e irregulares que se les presenten. Inversamente, también es frecuente encontrar estudiantes de todos los niveles educativos que, aunque escriben la definición correcta de polígono regular, identifican como tales los rectángulos "porque tienen los ángulos iguales". Ambas discrepancias ponen en evidencia la diferencia que, para los estudiantes, hay entre la imagen y la definición de un concepto y los diferentes usos que hacen de ambas, cosa que el modelo de Vinner explica, como veremos más adelante.

En la formación de la imagen de un concepto que tiene una persona juegan un papel básico la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado tanto en el contexto escolar como extraescolarmente. Con frecuencia estos ejemplos son pocos y con alguna característica visual peculiar, convirtiéndose en prototipos y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante puede comparar casos nuevos. Por lo tanto, la manera de mejorar la calidad de las imágenes conceptuales es ofrecer a los estudiantes mayor variedad de ejemplos, tratar de detectar los defectos de sus imágenes del concepto y hacer especial incidencia en los ejemplos directamente relacionados con esos errores. Uno de los objetivos de la investigación que describimos en este capítulo es dar pautas concretas sobre cómo analizar y mejorar las imágenes de los conceptos geométricos de los estudiantes.

En cuanto a la utilización por los estudiantes de las imágenes y las definiciones de los conceptos, está muy extendida entre los profesores de los diferentes niveles educativos la creencia (casi siempre errónea) de que los estudiantes basan sus razonamientos principalmente en las definiciones verbales (formales) de los conceptos y que sus imágenes del concepto tienen, como mucho, un papel secundario, de apoyo. Vinner (1983, 1991) representa esta creencia mediante unos diagramas, resumidos en el de la Figura 1, en los cuales se ve que la imagen del concepto está subordinada, tanto en su formación como en su utilización, a la definición del concepto (probablemente estos profesores también dan por supuesto que la definición del concepto manejada por sus alumnos es la matemáticamente correcta que se les ha enseñado).

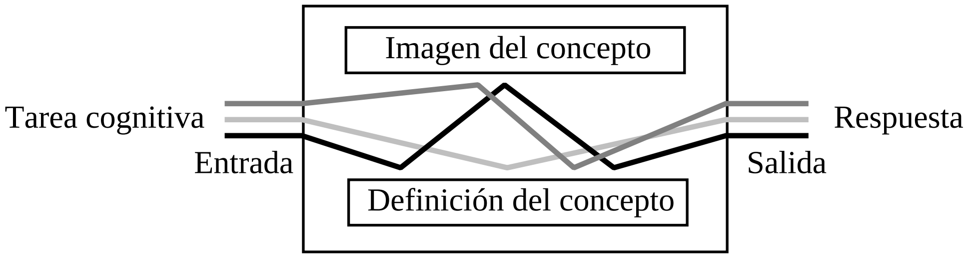


Figura 1. Modelos de actividad mental de los estudiantes esperados por muchos profesores.

Sin embargo, la actividad de los estudiantes está, en una mayoría de casos, basada sólo en sus imágenes de los conceptos, como refleja Vinner (1983, 1991) mediante el diagrama de la Figura 2. Hay un elevado número de estudiantes cuya definición del concepto es inactiva o no existe (olvidaron o nunca aprendieron la definición enseñada por su profesor).

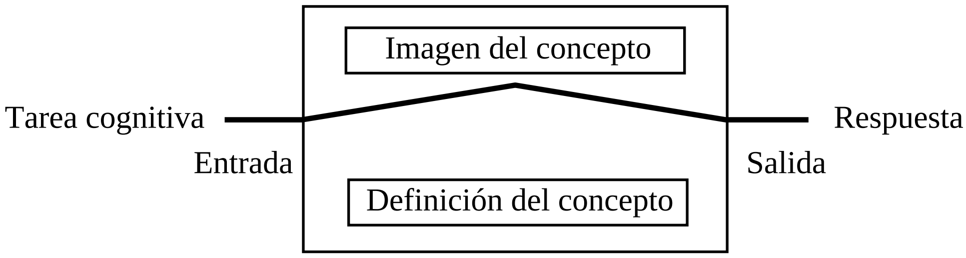


Figura 2. Modelo real de actividad mental de numerosos estudiantes.

Hershkowitz (1990) describe tres tipos de comportamiento de los estudiantes identificados por el modelo de Vinner, dependiendo de la calidad de las imágenes conceptuales de un estudiante:

En primer lugar, los estudiantes con las imágenes conceptuales más pobres, formadas por unos *pocos ejemplos prototípicos* y *propiedades de tipo visual*, basan sus juicios en la *apariencia visual de esos prototipos*, comparándolos con las figuras sobre las que deben trabajar y rechazando como ejemplos aquellas figuras que *no coinciden con los prototipos* de su imagen del concepto. Así, en el caso de las alturas de un triángulo, una situación muy frecuente es que profesores y libros de texto presenten a los estudiantes sólo alturas interiores y sobre una base horizontal (Figura 3). Ello origina que muchos estudiantes sean incapaces de dibujar alturas exteriores o sobre bases no horizontales y que resuelvan estos casos trazando la altura que conocen (en la Figura 4, el estudiante debía trazar la altura sobre el lado *a*).

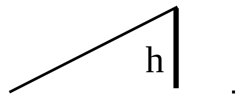


Figura 3. Un ejemplo típico de los libros de texto.

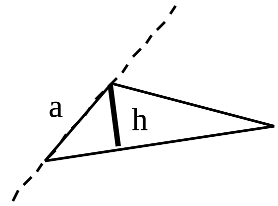


Figura 4. Respuesta consecuencia del ejemplo anterior.

Otro tipo de estudiantes son aquéllos cuyas imágenes mentales siguen teniendo unos *pocos ejemplos prototípicos* pero que también incluyen *propiedades matemáticas* de las figuras. Estos estudiantes centran sus juicios en las *propiedades de esos ejemplos*, que intentan aplicar a las figuras con las que deben trabajar, rechazando como ejemplos las figuras que *no verifican dichas propiedades*. Por ejemplo, la imagen mental de cuadrilátero que tienen muchos estudiantes incluye la propiedad de ser convexo, por lo que no aceptan como cuadriláteros polígonos como el de la Figura 5.

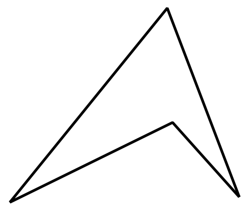


Figura 5. Un cuadrilátero poco habitual en las imágenes conceptuales de los estudiantes.

El tercer tipo de comportamiento descrito por el modelo de Vinner corresponde a los estudiantes que han sido capaces de construir *imágenes conceptuales completas*, es decir, conteniendo una amplia *variedad de ejemplos* y *todas las propiedades importantes* de los mismos. Los ejemplos concretos tienen ahora un papel complementario para dar ideas, verificar conjeturas, etc. que después se corroboran o formalizan al usar las propiedades matemáticas. Estos estudiantes realizan juicios correctos basados en *el análisis y la utilización de las propiedades críticas de los conceptos.* Este es el único tipo de estudiantes cuyas pautas de razonamiento corresponden a las de la Figura 1.

2. Análisis de las imágenes del concepto de altura de un triángulo: Dibujo de alturas de triángulos

En sus investigaciones, Vinner y Hershkowitz (1983) y Hershkowitz (1989) trabajaron con el concepto de altura de un triángulo para observar si la presencia de la definición formal de altura, escrita en el test, influía en la respuesta de los estudiantes. Administraron un test a grupos de estudiantes de 5º a 8º cursos (con edades entre 10 y 14 años), siendo su conclusión que la presencia de la definición "parece tener influencia" en las respuestas a este test, pues hubo mayor porcentaje de aciertos en los estudiantes a los que proporcionaron la definición que en los demás. También observaron la existencia de ciertos tipos de errores que se producían tanto si se proporcionaba la definición como en ausencia de ésta, si bien no llegaron a analizar con detalle estos errores.

En esta fase de nuestra investigación, dirigida a ampliar el estudio y las conclusiones de Vinner y Hershkowitz, hemos administrado su test a estudiantes de Magisterio, observando la influencia de la presencia o ausencia de la definición en el test y también de otros factores relacionados con la formación de los futuros profesores de Primaria. En el Anexo 1 puede verse este test tal como lo presentamos a nuestros alumnos.

El test fue administrado a cuatro grupos completos de los tres cursos de la Escuela de Magisterio de Valencia (con un total de 190 estudiantes), con el objetivo de obtener información sobre los tipos de errores cometidos y sobre varios aspectos que pueden influir en la formación o modificación de las imágenes del concepto de altura puestas de relieve por los estudiantes, como son la presencia o no de la definición de altura escrita en el test y la enseñanza inmediatamente antes de la administración.

En España la formación inicial de los profesores de Primaria se realiza en las universidades, por lo que todos los estudiantes han cursado asignaturas de Matemáticas durante 10 años por lo menos (en los cursos 1º a 8º de E.G.B., 1º y 2º de B.U.P.). La mayoría de los futuros profesores han cursado también asignaturas optativas de Matemáticas en 3º de B.U.P. y/o C.O.U. En cuanto a la geometría euclídea, ésta se estudia sólo en Primaria.

Influencia de la presencia de la definición en el test

El concepto de altura es uno de los conceptos de geometría que todos los profesores de E.G.B. consideran importantes, por lo que todos nuestros alumnos lo estudiaron en su momento. Al administrar el test sin dar a los estudiantes previamente la definición, se puede obtener información sobre lo que éstos recuerdan después de varios años sin utilizar el concepto de altura en las clases de matemáticas y cuál es su imagen actual de dicho concepto. Por otra parte, la presencia de la definición en el test les puede servirles de recordatorio (en algunos casos para activar su imagen conceptual olvidada, aunque ésta no coincida con la definición dada) o permitirles analizar la definición para contestar al test (esto en caso de que no recuerden nada de su aprendizaje previo).

Para evaluar la influencia de esta variable, comparamos las respuestas de estudiantes a los que *no* se les había recordado la definición de altura con las de estudiantes que tenían la definición escrita en la hoja del test. Esto lo hicimos de dos formas diferentes en tres grupos de Magisterio. El grupo A, de 3º de Educación Especial, estaba formado por 59 estudiantes, de los cuales 31 contestaron el test *con* la definición de altura (ver el Anexo 1) y 28 contestaron el test *sin* la definición de altura que encabeza la hoja. El grupo B, de 1º de Filología, estaba formado por 33 estudiantes y el grupo C, de 3º de Educación Especial, estaba formado por 34. En los grupos B y C administramos a todos los estudiantes el test *sin* la definición de altura para, a continuación, darles otra hoja, dictarles la definición de altura y pedirles que respondieran de nuevo al test (2 estudiantes del grupo C no contestaron el test sin definición pero sí el test con definición). Esta forma de administración es más rica que la anterior ya que proporciona información sobre los cambios en las maneras de responder de cada estudiante antes y después de darle la definición. La Tabla 1 resume los resultados para los grupos A, B y C.

	Respuestas Correctas			Respuestas Casi Correctas			Respuestas Erróneas			Sin Respuesta			
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	A	B	C	
Item 1	85'7	93'9	90'6	0	0	0	14'3	6'1	9'4	0	0	0	S.D.
	93'5	97'0	91'2	0	0	0	6'5	3'0	8'8	0	0	0	C.D.
Item 2	82'1	84'8	84'4	3'6	3'0	0	14'3	12'2	15'6	0	0	0	S.D.
	96'8	84'8	88'2	0	12'2	2'9	3'2	3'0	8'8	0	0	0	C.D.
Item 3	85'7	90'9	84'4	3'6	3'0	0	10'7	6'1	12'5	0	0	3'1	S.D.
	93'5	93'9	91'2	3'2	3'0	0	3'3	3'0	8'8	0	0	0	C.D.
Item 4	82'1	78'8	78'1	0	6'1	3'1	17'9	15'1	18'8	0	0	0	S.D.
	93'5	90'9	82'4	3'2	6'1	2'9	3'3	3'0	14'7	0	0	0	C.D.
Item 5	82'1	69'7	62'5	0	0	0	17'9	24'2	31'2	0	6'1	6'3	S.D.
	87'1	78'8	67'6	0	0	0	12'9	15'1	26'5	0	6'1	5'9	C.D.
Item 6	71'4	84'8	84'4	3'6	9'1	0	25'0	6'1	15'6	0	0	0	S.D.
	90'3	87'9	85'3	0	9'1	2'9	9'7	3'0	11'8	0	0	0	C.D.
Item 7	53'6	66'7	56'3	3'6	3'0	0	42'8	27'3	37'4	0	3'0	6'3	S.D.
	67'7	75'8	73'5	3'2	9'1	0	29'1	15'1	26'5	0	0	0	C.D.
Item 8	21'4	45'5	31'3	21'4	9'1	6'3	57'2	45'4	59'3	0	0	3'1	S.D.
	41'9	54'5	52'9	16'1	15'2	8'8	42'0	30'3	35'4	0	0	2'9	C.D.
Item 9	64'3	66'7	46'9	0	0	0	35'7	27'2	43'7	0	6'1	9'4	S.D.
	67'7	63'6	61'8	0	0	0	25'8	30'3	35'3	6'5	6'1	2'9	C.D.
Item 10	53'6	66'7	62'5	10'7	9'1	12'5	32'1	21'2	12'5	3'6	3'0	12'5	S.D.
	67'7	75'8	76'5	0	9'1	8'8	25'8	15'1	11'8	6'5	0	2'9	C.D.
Item 11	82'1	69'7	78'1	0	6'1	0	17'9	21'2	18'8	0	3'0	3'1	S.D.
	90'3	87'9	88'2	0	6'1	0	6'5	6'0	8'8	3'2	0	2'9	C.D.
Item 12	60'7	69'7	53'1	0	0	9'4	35'7	27'3	37'5	3'6	3'0	0	S.D.
	74'2	90'9	70'6	3'2	0	2'9	22'6	9'1	23'6	0	0	2'9	C.D.
Item 13	57'1	60'6	46'9	0	0	0	39'3	36'4	50'0	3'6	3'0	3'1	S.D.
	64'5	66'7	55'9	3'2	0	0	29'1	30'3	41'2	3'2	3'0	2'9	C.D.
Item 14	57'1	63'6	59'4	3'6	6'1	0	39'3	27'3	40'6	0	3'0	0	S.D.
	61'3	72'7	70'6	9'7	9'1	2'9	25'8	18'2	26'5	3'2	0	0	C.D.

Tabla 1. Porcentajes de las diferentes respuestas a los tests sin la definición (S.D.) de altura y con la definición (C.D.).

Al codificar las respuestas, hemos tomado como "respuestas correctas" aquéllas que verifican los requisitos matemáticos de la altura solicitada, si bien admitiendo un cierto grado de error en la perpendicularidad, ya que los estudiantes dibujaban las alturas a mano alzada. Por lo tanto, hemos codificado como correctos segmentos que forman con la base ángulos próximos a 90° pero que visualmente parecen perpendiculares. Hemos codificado como "respuestas casi correctas" los segmentos trazados cumpliendo los requisitos matemáticos de la altura solicitada excepto que el ángulo que forman con la base es próximo a los 90° pero visualmente se puede notar que no es un ángulo recto. Esta distinción es, a priori, interesante ya que da una idea del rigor de los estudiantes al dibujar figuras geométricas. En cuanto a la categoría de "respuestas erróneas", no hacemos aquí ninguna distinción entre los diferentes tipos de error, pues este análisis es el objetivo de una sub-sección posterior.

En la Tabla 1 puede verse que, en cada curso, el número de figuras sin respuesta es muy bajo, tanto en el test sin la definición como en el test con la definición, lo cual indica que todos los estudiantes tenían formada previamente una imagen del concepto de altura de un triángulo y la recordaban. También hay pocas respuestas casi correctas, que en su mayoría corresponden a los triángulos con las bases no horizontales ni verticales. Ello es coherente con el hecho de que es más difícil reconocer la perpendicularidad (en nuestro caso la falta de perpendicularidad) cuando los lados del ángulo recto no están en posición vertical y horizontal.

La Figura 6 muestra unas gráficas con las sumas de los porcentajes de respuestas correctas y casi correctas de cada grupo. Varios hechos merecen destacarse:

1) Ha habido más respuestas correctas + casi correctas al test que incluía la definición de altura que al que no la incluía, con la única excepción del ítem 9 en el grupo B. Por lo tanto, la definición proporcionó a los estudiantes algún tipo de información que les ayudó a mejorar su comprensión del concepto de altura, ya sea mejorando su imagen conceptual o permitiéndoles utilizar de forma combinada ésta y la definición formal proporcionada.

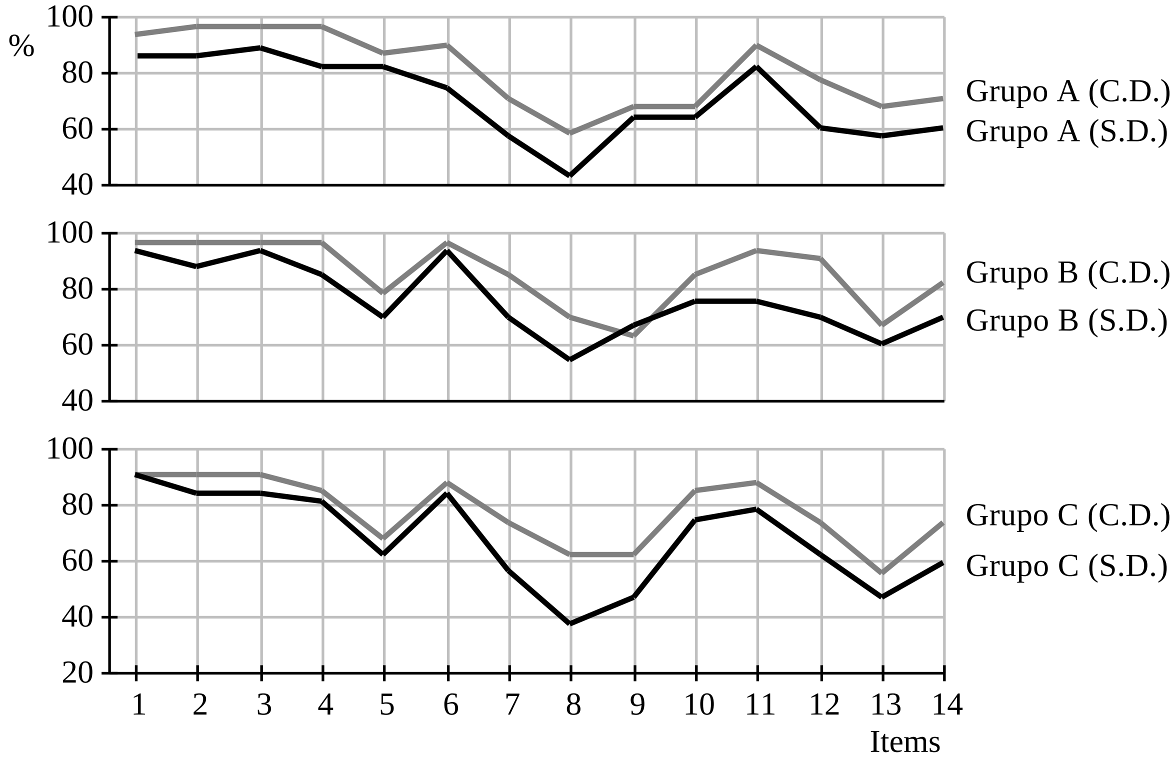


Figura 6. Cantidades (%) de respuestas correctas + casi correctas de los grupos A, B y C.

2) Comparando los resultados de los tres grupos, vemos que hay coincidencia en los items más fáciles o más difíciles. Los items más fáciles (1, 3, 2, 6, 4 y 11, de más a menos fácil por este orden) corresponden a triángulos con altura interior, mientras que los items más difíciles (12, 14, 7, 9, 13 y 8, de menos a más difícil por este orden) corresponden a triángulos con altura exterior (obtusángulos) o sobre un lado (rectángulos).

3) En los items 10 y 11 aparece el mismo triángulo pero situado en dos posiciones diferentes. En las gráficas se observa una clara diferencia entre los porcentajes de respuestas (casi) correctas de cada grupo a estos dos items, lo cual se debe interpretar como debido a la influencia de la posición de la figura, pues el ítem más fácil (el 11) corresponde a la posición horizontal prototípica. Lo mismo ocurre con los items 7, 8 y 12, donde los más fáciles (12 y 7, por este orden) son triángulos con la base horizontal y vertical, respectivamente, mientras que el triángulo del ítem 8 tiene la base con otra inclinación.

Influencia de la enseñanza en la imagen conceptual de los estudiantes

En el cuarto grupo que participó en esta experimentación, el grupo D, administramos la versión del test *sin* la definición de altura antes y después de que los alumnos trabajaran con alturas de triángulos como parte de su enseñanza normal del curso. El objetivo era observar la influencia de la enseñanza en sus imágenes del concepto de altura. El grupo D, de 2º de Ciencias, estaba formado por 77 estudiantes, de los cuales 49 contestaron ambos tests, 64 contestaron al pre-test y 62 contestaron al post-test.

Como parte de los contenidos de la asignatura de Didáctica de las Matemáticas, el grupo D trabajó en el aula de informática con el programa Cabri (versión 1.7 para Pc) una hora semanal a lo largo del curso, resolviendo problemas geométricos de construcción y diversos problemas relacionados con conceptos geométricos básicos, como triángulos, cuadriláteros, paralelismo, etc. En cada ordenador operaba un grupo de 2 ó 3 estudiantes. El trabajo con triángulos ocupó 3 clases en semanas consecutivas y estuvo dedicado a construir los diferentes segmentos (alturas, medianas, etc.) y puntos notables de los triángulos y a observar, conjeturar y verificar sus propiedades características, siendo una de las propiedades que debían tener en cuenta la posición interior o exterior de los segmentos y los puntos respecto de los triángulos en función del tipo de triángulo de que se trate. En la Tabla 2 se resumen los resultados del grupo D en el pre y el post-test.

La Tabla 2 muestra con claridad que ha habido una notable mejora en los resultados en el post-test. Por otra parte, la Figura 7 da apoyo visual para realizar un análisis más fino de los resultados, observándose que las mayores diferencias entre la cantidad de respuestas correctas + casi correctas del pre-test y el post-test se dan en los items 7, 8, 12, 13 y 14, que son, junto con el ítem 9, los más difíciles. Si comparamos globalmente estas diferencias con las correspondientes de los grupos A, B y C (Figura 6), es evidente que son mucho mayores en el grupo D.

	Respuestas Correctas		Respuestas Casi Correctas		Respuestas Erróneas		Sin Respuesta	
	PRE	POST	PRE	POST	PRE	POST	PRE	POST
Item 1	95'3	96'8	3'1	3'2	1'6	0	0	0
Item 2	76'6	85'5	14'1	8'1	9'3	6'4	0	0
Item 3	95'3	93'5	3'1	6'5	1'6	0	0	0
Item 4	81'3	90'3	7'8	4'8	9'3	4'8	1'6	0
Item 5	82'8	88'7	0	0	15'6	11'3	1'6	0
Item 6	82'8	80'6	10'9	16'1	6'3	3'2	0	0
Item 7	53'1	74'2	4'7	6'5	42'2	16'1	0	3'2
Item 8	35'9	64'5	4'7	11'3	57'8	22'6	1'6	1'6
Item 9	68'8	74'2	0	1'6	29'6	22'6	1'6	1'6
Item 10	62'5	74'2	10'9	8'1	26'6	17'7	0	0
Item 11	73'4	88'7	14'1	3'2	12'5	8'1	0	0
Item 12	67'2	79'0	0	4'8	32'8	16'1	0	0
Item 13	70'3	80'6	0	0	29'6	17'7	0	1'6
Item 14	56'3	74'2	4'7	8'1	39'0	17'7	0	0

Tabla 2. Resultados (%) de la administración del pre-test y el post-test al grupo D.

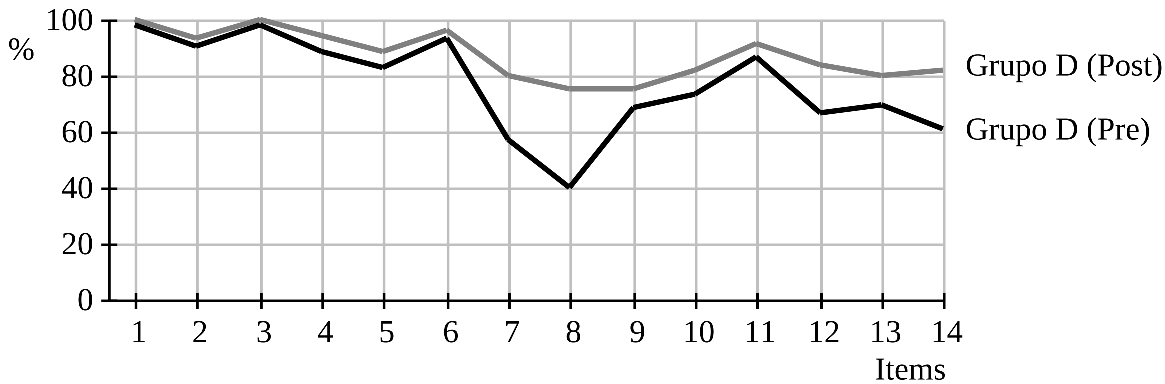


Figura 7. Cantidades (%) de respuestas correctas + casi correctas del grupo D.

Estos datos indican que la influencia de la instrucción previa en la calidad de las imágenes conceptuales de los estudiantes de Magisterio es mayor que la influencia del simple recordatorio de la definición que pueda hacerse en las clases de la Escuela de Magisterio. Esto tiene unas consecuencias evidentes para los cursos de Matemáticas y de Didáctica de las Matemáticas en la formación de profesores, pues los datos de esta investigación demuestran que la postura que adoptamos muchas veces los profesores de estos cursos de mencionar sólo de pasada las definiciones o los enunciados de propiedades estudiadas hace años, que se necesitan para entender los contenidos que se están estudiando, no es la más adecuada. Por el contrario, a la larga, compensa dedicar algún tiempo en clase a trabajar con esos conceptos o propiedades, pues ello redunda en una mejor comprensión de los mismos por los estudiantes.

Análisis de los errores de los estudiantes

Por último, vamos a analizar las respuestas de algunos estudiantes testados en los grupos A, B, C, y D, utilizándolas para identificar cuál es la imagen del concepto de altura de un triángulo que se desprende de dichas respuestas y si se trata de una imagen correcta, incorrecta o parcial. Este tipo de trabajo es de gran importancia en los cursos de formación de profesorado, pues todavía son mayoría los estudiantes de estos cursos con la idea (seguramente heredada de sus profesores de Matemáticas) de que lo importante en Matemáticas es obtener el resultado correcto de los problemas o ejercicios y que, cuando se obtiene un resultado erróneo, no importa el procedimiento para resolver el problema ni la causa del error. Por lo tanto, es interesante mostrarles ejemplos de análisis de respuestas a partir de los cuales se puede obtener información sobre la forma de pensar de los estudiantes y sus conocimientos, y mostrarles también una variedad de respuestas erróneas que reflejen distintas dificultades de aprendizaje que requieren diferentes respuestas por parte del profesor.

Al analizar las respuestas al test de las alturas, utilizamos varios códigos para los tipos de dibujos que han aparecido con más frecuencia en las respuestas de nuestros estudiantes:

0 - No contesta.

1 - Dibujo correcto de la altura sobre la base indicada.

2 - Dibujo de la mediana sobre la base indicada o sobre otro lado.

3 - Dibujo de la mediatriz sobre la base indicada o sobre otro lado.

4 - Dibujo de un segmento perpendicular a la base indicada pero de longitud incorrecta.

5 - Dibujo correcto de la altura sobre otro lado del triángulo.

6 - Dibujo desde el vértice opuesto a la base indicada de un segmento interior al triángulo y no perpendicular a la base (distinto de la mediana). A diferencia del código 8, la inclinación del segmento es tan grande que no puede tratarse de una imprecisión del dibujo.

7 - Otras respuestas erróneas.

8 - Dibujo casi correcto de la altura pedida, con una falta de perpendicularidad pequeña pero perceptible a simple vista.

En la sub-sección anterior nos hemos ocupado de los códigos 0, 1 y 8; ahora nos ocupamos de los demás códigos, que corresponden a las respuestas incorrectas y aparecen resumidos en la columna de "respuestas erróneas" de las Tablas 1 y 2. Hemos analizado las respuestas de 157 estudiantes: Los 28 estudiantes del grupo A, 33 del grupo B, y 32 del grupo C que contestaron el test *sin* definición, y los 64 estudiantes del grupo D que respondieron el pre-test (también *sin* la definición). La Tabla 3 da información sobre la presencia de cada tipo de error en las respuestas de los 157 estudiantes que hemos analizado. Nuestro objetivo en esta sub-sección no es hacer un análisis cuantitativo comparando las cantidades o tipos de errores cometidos en los tests con/sin la definición de altura o antes/después de haber recibido instrucción, sino analizar cada error y deducir la imagen conceptual que lleva asociada.

	Error 2	Error 3	Error 4	Error 5	Error 6	Error 7
Item 1	0	0'6	5'7	0	0	0
Item 2	3'2	1'3	3'8	0	0	3'8
Item 3	0	0'6	4'5	0	0	1'3
Item 4	4'5	1'9	4'5	0	0'6	2'5
Item 5	6'4	1'3	6'4	4'5	0'6	1'9
Item 6	0	0'6	6'4	3'2	0	1'3
Item 7	19'1	1'9	3'8	5'1	3'2	5'1
Item 8	27'4	1'9	2'5	11'5	9'6	2'5
Item 9	10'2	1'3	5'1	7'6	1'3	7'6
Item 10	9'6	1'3	2'5	1'3	4'5	4'5
Item 11	5'1	1'9	6'4	0	1'3	1'9
Item 12	14'0	1'3	8'3	5'1	4'5	0
Item 13	12'1	1'9	4'5	10'2	5'1	3'2
Item 14	17'2	1'9	7'0	7'0	3'8	0

Tabla 3. Distribución (%) de las respuestas erróneas de los estudiantes.

Al analizar la presencia de cada tipo de error en los diferentes items del test, hay que tener en cuenta que en algunos triángulos ciertos errores quedan ocultos. Por ejemplo, en los triángulos isósceles no se pueden detectar los errores 2 ni 3, por coincidir altura, mediana y mediatriz (salvo que el estudiante dibuje sobre un lado distinto del marcado).

A continuación presentamos y analizamos los casos de las respuestas de varios estudiantes, que representan a la mayoría de las respuestas de los grupos testados. En ellas se puede ver la regularidad de su forma de dibujar las alturas como reflejo de su imagen de este concepto. También hay algunos estudiantes que cometen muy pocos errores, fruto generalmente de descuidos o distracciones momentáneas al contestar esos items del test, y otros estudiantes que tienen una mayoría de respuestas erróneas pero sin ninguna regularidad, probablemente debido a un desconocimiento casi total de lo que es la altura de un triángulo, bien porque nunca estudiaron este concepto, bien porque lo han olvidado por completo.

1) La Figura 8 muestra varias respuestas de un estudiante. Tanto en este caso como en los siguientes, las demás respuestas del estudiante son análogas a las incluidas en la figura correspondiente y, por lo general, totalmente coherentes con ellas, por lo que éstas son suficientes, por las limitaciones de espacio de este texto, para identificar las características de la imagen conceptual del estudiante.

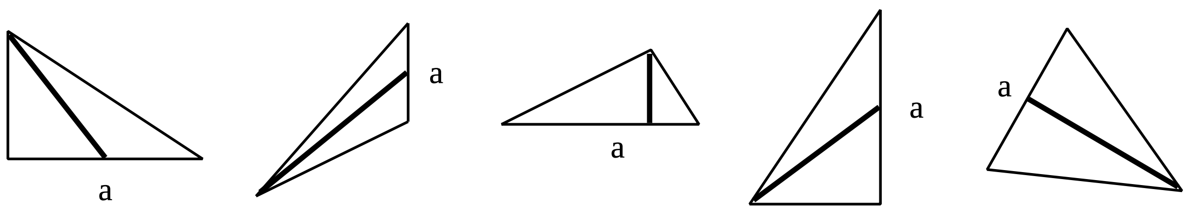


Figura 8. Confusión entre los conceptos de altura y mediana.

La Figura 8 presenta a un estudiante con una imagen errónea del concepto de altura, pues lo confunde con el de mediana de un triángulo. Como se aprecia en la Tabla 3, éste es el error más frecuente (error nº 2). Ello está causado, en parte, porque estos dos conceptos se estudian conjuntamente en la Enseñanza Elemental por lo que, con el paso del tiempo, algunos estudiantes integran ambas imágenes conceptuales en una sola. Esto se debe, por una parte, a que la enseñanza que recibieron dichos estudiantes estuvo, probablemente, basada sólo en ejemplos prototípicos de triángulos acutángulos; más adelante, en los casos 5 y 6, veremos que se repite esta problemática. Y, por otra parte, se debe también a que los estudiantes no recurren a la definición de altura para realizar los dibujos, ni siquiera cuando la tienen escrita en la hoja del test, sino sólo a su imagen conceptual, confirmando lo afirmado por Vinner (1993, p. 73) y representado en la Figura 2 (este tipo de error apareció en el 26'9% de los tests sin la definición de altura y en el 22'4% de los tests con la definición). Es interesante observar que, en realidad, la mayoría de este tipo de estudiantes, como el del ejemplo, han aprendido correctamente el concepto de altura en el caso prototípico de los triángulos con la altura interior, pero no son capaces de dibujar la altura exterior o sobre un lado.

2) El ejemplo de la Figura 9 corresponde a un estudiante que liga el concepto de altura al de mediatriz. Esta situación ha sido muy poco frecuente en nuestra muestra. El estudiante de este caso no tiene una imagen errónea del concepto de altura, pues los segmentos que dibuja son, realmente, alturas sobre los lados marcados, sino que tiene una imagen parcial, que le obliga a dibujar la altura desde el punto medio de la base. Esta imagen parcial puede suponer que el estudiante no sea capaz de resolver un problema en el que necesariamente haya que dibujar la altura desde otro punto.

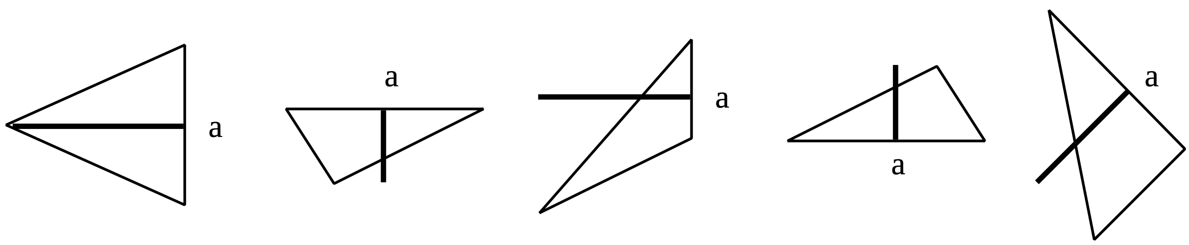


Figura 9. Imagen conceptual parcial con interferencia del concepto de mediatriz.

3) En la Figura 10 se observa que el estudiante ha dibujado siempre una altura interior al triángulo o coincidente con un lado, trazando la correspondiente a un lado que no es el indicado cuando la solución correcta era un segmento exterior. La imagen conceptual de este

alumno es parcial y no incluye, por tanto, la posibilidad de triángulos con altura exterior sino que contiene solo la situación prototípica de altura interior.

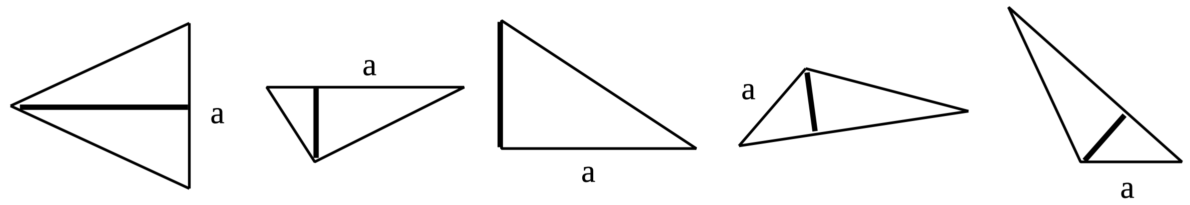


Figura 10. Dibujo de otra altura cuando la pedida es exterior.

4) La Figura 11 presenta el caso de un estudiante para el que no es relevante la longitud del segmento, pero sí considera las demás características del concepto de altura. Posiblemente asocia la altura a una semi-recta o a un segmento de longitud indeterminada, con las demás características de altura correctas. Como en el caso 2, una forma de desestabilizar esta imagen conceptual y hacer que se convierta en una imagen completa es proponer problemas en los que sea necesario utilizar la característica no adquirida, en este caso la medida de la altura.

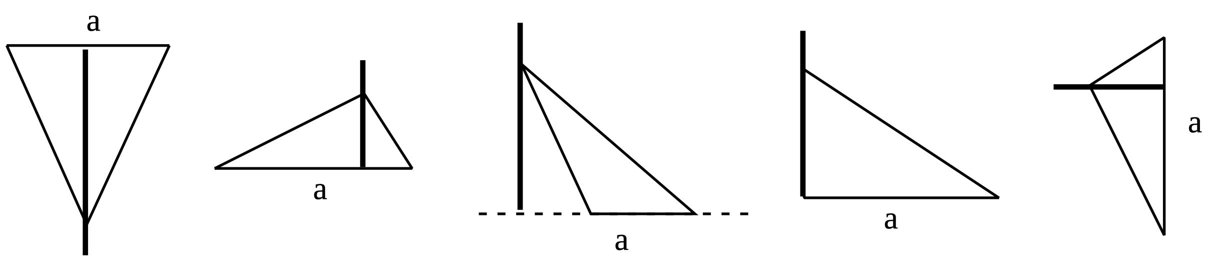


Figura 11. Imagen parcial en la que no se tiene en cuenta la longitud de la altura.

5) La Figura 12 presenta a un estudiante (el único en nuestro estudio que ha dado este tipo de respuesta) cuya imagen del concepto de altura probablemente sólo incluye los triángulos isósceles, con la altura sobre la base, y no posee ninguna imagen para las otras situaciones, por lo que en estos casos dibuja algún elemento relacionado con el triángulo, en particular lados. En concreto, este estudiante marca uno de los lados del triángulo o el segmento punteado (que indica el lado sobre el que se debe trazar la altura).

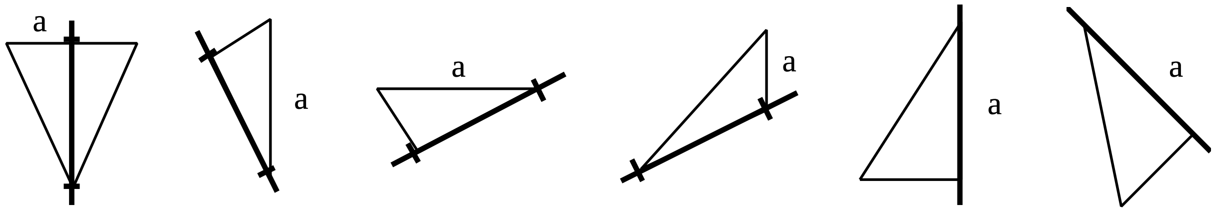


Figura 12.

A pesar de la regularidad de su respuesta (el estudiante siempre marca un lado del triángulo) una observación detallada muestra que no hay ningún criterio para la elección de ese lado. Desde el punto de vista de la formación de profesores, este ejemplo sirve para reafirmar la necesidad de que los profesores planteen situaciones de diálogo en las que los estudiantes expliquen sus respuestas para que, de esa manera, los profesores puedan conocer con seguridad los motivos de las mismas. Y, desde el punto de vista de la investigación didáctica, esta respuesta pone de relieve la debilidad de las pruebas escritas frente a las entrevistas para conocer las razones de las respuestas de los estudiantes.

6) Finalmente, el estudiante cuyas respuestas aparecen en la Figura 13 muestra una imagen conceptual bastante confusa y heterogénea, en la que las imágenes visuales incorrectas predominan sobre el uso de las propiedades matemáticas del concepto. Así, podemos notar que para este estudiante, la línea de puntos que ayuda a identificar el lado sobre el que se debe dibujar la altura es un distractor que le induce a dibujar segmentos erróneos. Una vez más, su imagen conceptual incluye el prototipo de la altura interior, si bien en el primer y último triángulos (los extremos de la Figura 13) da dos respuestas contradictorias. Además, para este estudiante la altura debe ser un segmento distinto a los lados (en los triángulos rectángulos). Vemos que abandona la característica de la perpendicularidad ante otras características visuales que hacen que sus dibujos se parezcan más a las figuras existentes en su memoria.

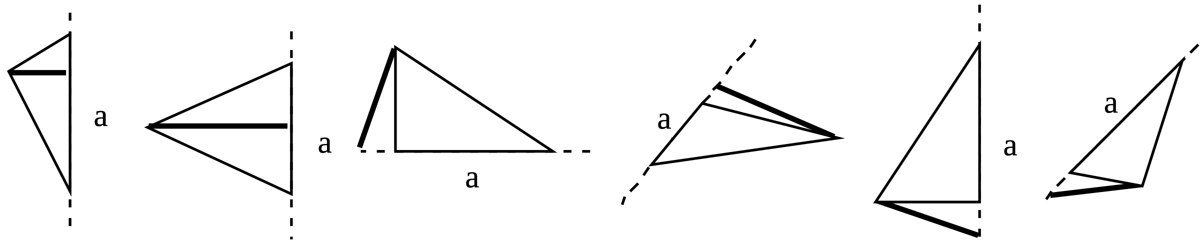


Figura 13.

Hemos visto varios ejemplos de estudiantes de Magisterio que tienen en común que sus imágenes del concepto de altura son parciales y/o erróneas, pero cuyas imágenes son bastante diferentes unas de otras. Por lo tanto, una enseñanza correctiva debe prestar atención a las particularidades de cada una de ellas e incluir situaciones específicas que fueran útiles para cada estudiante. En un grupo heterogéneo de estudiantes, como son los de los cursos de formación de profesores de Primaria en España, esta forma de enseñanza debe prestar atención a todos los tipos de errores mayoritarios y detenerse a analizar y corregir cada uno de ellos. Para esto, puede resultar valiosa una metodología de trabajo en el aula que fomente la participación de los estudiantes que no poseen ese tipo de error, pues ellos plantearán objeciones, contraejemplos, etc. y discutirán con sus compañeros, lo cual resultará beneficioso para todos, tanto si tienen una imagen conceptual errónea como correcta.

3. Descomposición del concepto de altura de un triángulo: Dibujo de cada sub-concepto implicado

Veíamos en la sección 1 que la mayoría de los estudiantes tienen la tendencia a usar, cuando resuelven problemas de geometría, únicamente sus imágenes de los conceptos implicados (Figura 2), dejando de lado las definiciones formales, en particular cuando éstas entran en contradicción con aquéllas. Sin embargo, en ocasiones los estudiantes no tienen más remedio que utilizar las definiciones formales de los conceptos para resolver los problemas o contestar a las preguntas del profesor. Esto ocurre, por ejemplo, cuando los profesores, tanto de Primaria como de Secundaria, plantean sus clases de manera que enseñan a sus alumnos los conceptos nuevos a partir de la definición formal, por lo que los estudiantes sólo pueden crear sus imágenes conceptuales mediante ejemplos extraídos de *sus* definiciones de los conceptos (que pueden coincidir o no con las definiciones presentadas por el profesor).

Hershkowitz (1989) analizó el efecto que posee en la adquisición de un concepto matemático la cantidad de elementos que componen su definición formal. Dichos elementos son, principalmente, conceptos previos en los que se basa, es decir de orden inferior (Skemp, 1980), si bien también están presentes a veces reglas de construcción, adjetivos comparativos, etc. Así mismo, hay que tener en cuenta en este análisis las partículas lógicas que unen o cuantifican los atributos. El resultado obtenido por Hershkowitz (1989) al analizar diez definiciones de conceptos geométricos es que existe una relación directa entre el número de elementos que componen una definición y la dificultad de asimilación por los estudiantes del concepto definido.

Nuestra experiencia de bastantes años como profesores nos dice que con frecuencia el fallo de los estudiantes se debe a que no son capaces de manejar correctamente la estructura lógica de las definiciones. Un caso lo tenemos en la confusión entre las partículas *y* y *o* que lleva a muchos estudiantes, por ejemplo, a aceptar como polígonos regulares aquéllos que tienen sólo los lados iguales o sólo los ángulos iguales. Otra situación en la que son frecuentes los errores de los estudiantes la tenemos cuando éstos deben encontrar contraejemplos basándose en la negación de una definición, ya que suelen exigir la negación de *todas* las propiedades que forman la definición. La situación se complica cuando entramos en el terreno de los convenios implícitos, como ocurre con las distinciones entre las definiciones inclusiva y exclusiva de un mismo concepto (Jaime, Chapa, Gutiérrez, 1992 han estudiado en detalle este problema).

Sin embargo, desarrollando esta línea de investigación, nos planteamos la hipótesis de que no es la estructura lógica la única ni la principal causa de los errores de los estudiantes al usar las definiciones formales en Matemáticas, sino que el desconocimiento (o el conocimiento erróneo o parcial) por los estudiantes de los conceptos previos utilizados en una definición (que a partir de ahora llamaremos "sub-conceptos" de la definición) es también una fuente importante de errores.

Para comprobar la veracidad de esta hipótesis, hemos procedido a descomponer la definición usual del concepto de altura de un triángulo en los diversos elementos que intervienen en la misma, y a diseñar un test que evaluara el conocimiento que poseen nuestros alumnos del concepto de altura y de cada unos de dichos elementos. Hemos podido constatar que, en numerosos casos, los estudiantes no habían asimilado correctamente algunos de los sub-conceptos, por lo que la información aportada por la definición no puede crear una imagen conceptual correcta ni mejorar la adquirida a partir de los ejemplos gráficos. Este resultado apunta a que, con frecuencia, los profesores de Enseñanza Primaria no son conscientes de la estructura piramidal de las Matemáticas, que obliga a construir unos conceptos a partir de otros previos, por lo que la trasladan de una forma deslabazada a la organización de su enseñanza.

En el test discutido en la sección 2 hemos definido que "la altura de un triángulo es la perpendicular trazada desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación". En esta forma de definición está implícito que la altura es un segmento, por lo que, para analizar los sub-conceptos implicados en el concepto de altura, hemos tomado otra forma de la definición equivalente a la anterior pero que no contenga ningún elemento implícito. En concreto, hemos partido de la definición según la cual *la altura de un triángulo sobre un lado es el segmento trazado perpendicularmente desde el vértice opuesto hasta ese lado o su prolongación.* A partir de ella, hemos testado:

1) El sub-concepto de perpendicular: Trazar una recta perpendicular a otra recta dada.
2) El sub-concepto de perpendicular desde un punto: Trazar la recta perpendicular desde un punto dado hasta un segmento dado o su prolongación.
3) El sub-concepto de vértice opuesto: Identificar el vértice de un triángulo opuesto a cierto lado.
4) El concepto de altura de un triángulo: Trazar la altura de un triángulo sobre cierto lado.

Basándonos en esta descomposición, diseñamos un test en el que se pide a los estudiantes dibujar varios casos de cada tipo 1 a 4 anteriores (ver el Anexo 2). El test, del que realizamos tres variantes, fue administrado a dos grupos completos de primer curso de la Escuela de Magisterio de Valencia, con 119 estudiantes en total. En todas las variantes del test se plantearon las mismas preguntas; las figuras usadas, aunque diferentes, fueron análogas en cuanto a la forma y la posición relativa de sus elementos. Por lo tanto, podemos considerar que los tests son equivalentes entre sí. La única diferencia significativa entre los tests está en la forma de plantear el apartado C, con los items de dibujo de las alturas, que explicamos a continuación.

En el grupo E se administró el test antes y después de trabajar con el concepto de altura de un triángulo como parte de la enseñanza normal de la asignatura. El pre-test fue administrado al comienzo del curso y contestado por 17 alumnos. Unos días después de administrar el pre-test, el grupo E dedicó algunas horas de clase a hacer un análisis matemático y didáctico detallado del concepto de altura y de los sub-conceptos que integran la definición usada. Además, como parte del análisis didáctico, se utilizaron las respuestas al pre-test. El post-test fue administrado al final del curso y contestado por 59 alumnos. En el pre-test la consigna del apartado C era "dibujar las alturas de los triángulos sobre los lados marcados" pero no se incluía la definición de altura. En el post-test, incluido en el Anexo 2, el enunciado del apartado C contenía la definición de altura, pero evitando la palabra "altura" y sin indicar explícitamente que se trata de dicho segmento. El objetivo de esta redacción de la cuestión fue tratar de evitar las respuestas erróneas, que hemos comentado en la sección 2, de los estudiantes que tienen la palabra "altura" asociada a una imagen conceptual errónea pero que sí son capaces de analizar una definición "nueva" y aplicarla correctamente.

En el grupo F se hizo una única administración del test, en la que participaron 43 alumnos. En el apartado C se pedía "dibujar las alturas de los triángulos sobre los lados marcados" pero, a diferencia del pre-test del grupo E, sí se incluía la definición de altura.

Así pues, cruzando de diferentes formas los resultados de las tres administraciones, podemos obtener información sobre diversas variables que pueden condicionar las respuestas de los estudiantes: La presencia o no de la definición explícita de altura; la presencia de la palabra clave "altura de un triángulo"; el trabajo en clase con alturas de triángulos. En la Tabla 4 resumimos los resultados de las tres administraciones del test (los items de cada apartado del test están numerados de izquierda a derecha). En los items de trazado de alturas de triángulos (apartado C) se podría hacer un análisis similar al que hemos realizado en la sección 2 de este texto, pero éste no es un objetivo del test, por lo que nos limitamos a distinguir entre respuestas correctas, casi correctas y erróneas.

	Respuestas Correctas			Respuestas Casi Correctas			Respuestas Erróneas			Sin Respuesta		
	E1	E2	F	E1	E2	F	E1	E2	F	E1	E2	F
Item A1	64'7	76'3	58'1	5'9	11'9	18'6	29'4	11'8	23'2	0	0	0
Item A2	41'2	86'4	72'1	35'3	6'8	9'3	23'5	6'8	18'6	0	0	0
Item A3	58'8	91'5	83'7	17'6	0	4'7	23'5	8'5	11'6	0	0	0
Item A4	70'6	==	==	5'9	==	==	23'5	==	==	0	==	==
Item B1	52'9	78'0	72'1	5'9	8'5	9'3	29'4	13'5	13'9	11'8	0	4'7
Item B2	52'9	79'7	72'1	11'8	0	0	23'5	18'6	21'0	11'8	1'7	7'0
Item B3	41'2	69'5	62'8	5'9	10'2	9'3	41'2	18'6	23'2	11'8	1'7	4'7
Item B4	58'8	67'8	58'1	0	10'2	9'3	29'4	20'3	27'9	11'8	1'7	4'7
Item B5	35'3	==	72'1	5'9	==	0	47'0	==	20'9	11'8	==	7'0
Item C1	35'3	50'8	20'9	0	0	0	35'3	45'8	65'1	29'4	3'4	14'0
Item C2	17'6	42'4	11'6	5'9	10'2	2'3	41'2	44'0	67'4	35'3	3'4	18'6
Item C3	11'8	35'6	7'0	5'9	3'4	2'3	47'0	57'6	67'4	35'3	3'4	23'3
Item C4	11'8	54'2	7'0	5'9	8'5	2'3	47'0	32'2	67'4	35'3	5'1	23'3
Item C5	==	37'3	9'3	==	11'9	0	==	42'3	72'1	==	8'5	18'6

Tabla 4. Resultados (%) de los grupos E y F (E1 = pre-test y E2 = post-test del grupo E).

Puesto que la hipótesis que queremos verificar es que una parte importante de los errores cometidos al trazar la altura de un triángulo provienen del mal aprendizaje de los sub-conceptos, relaciones lógicas, etc. que integran la definición usual, el primer análisis que haremos de la Tabla 4 es la comparación de los porcentajes de respuestas de los items en los apartados A, B y C. Sumando, para cada ítem, las cantidades de respuestas correctas y casi correctas de cada curso, vemos que los valores obtenidos en los items del apartado A son significativamente mayores que los obtenidos en los items del apartado B (con la única excepción del ítem A1 del grupo F) y que éstos son significativamente mayores que los obtenidos en los items del apartado C. Por lo tanto, la Tabla 4 ofrece una primera confirmación de la hipótesis mencionada antes. Por motivos de espacio no podemos incluir aquí los resultados obtenidos por cada estudiante, pero éstos muestran una jerarquía total entre los conceptos de "perpendicular", "perpendicular desde un punto" y "altura de un triángulo", ya que:

1) Los estudiantes que contestaron (casi) correctamente más de la mitad de los items del apartado B (es decir a 3 ó más items) contestaron bien todos los items del apartado A. Las únicas excepciones entre las 119 respuestas de los estudiantes de la muestra fueron 4 estudiantes del grupo F que fallaron el ítem A1 (dos casos), el A2 (un caso) o ambos (un caso).

2) Los estudiantes que contestan (casi) bien más de la mitad de los items del apartado C (es decir a 3 ó más items) contestan bien todos los items de los apartados A y B. Las únicas excepciones fueron 2 estudiantes del grupo F, uno de los cuales falló el ítem A1 y el otro dejó sin contestar el ítem B5.

Por lo tanto, en términos de aprendizaje de los sub-conceptos analizados, podemos deducir de estos datos que:

- Los estudiantes que comprenden bien el concepto de altura comprenden bien los conceptos de perpendicular y de perpendicular desde un punto a un segmento. Los estudiantes que saben dibujar bien la perpendicular desde un punto a un segmento, también dibujan bien una perpendicular cualquiera.

- Los estudiantes que no comprenden el concepto de perpendicular a una recta o a un segmento tampoco comprenden los conceptos de perpendicular desde un punto a un segmento y de altura de un triángulo. Del mismo modo, los estudiantes que no comprenden el concepto de perpendicular desde un punto a un segmento tampoco comprenden el de altura de un triángulo.

Por lo que respecta a la influencia de la enseñanza en la comprensión de los conceptos analizados en este test, la observación de los resultados del grupo E en el pre-test (E1) y el post-test (E2) en la Tabla 4 pone claramente de relieve el gran aumento de los porcentajes de respuestas correctas en el post-test. Este resultado coincide con los que hemos discutido en la sección 2 de este capítulo y confirma nuestra conclusión de que en los cursos de Matemáticas o Didáctica de las Matemáticas para la formación de profesores es necesario dedicar tiempo a recordar conocimientos olvidados y a perfeccionar las imágenes que tienen los estudiantes de conceptos que deberían conocer bien pero que, realmente, no es así. La metodología de trabajo que se puede seguir en estos cursos la hemos mencionado al final de la sección 2.

4. Conclusiones

Los resultados de esta investigación sobre la manera de entender conceptos geométricos elementales los futuros profesores de Enseñanza Primaria o Secundaria nos permitirán hacer propuestas fundamentadas relativas a los aspectos en los que conviene incidir en su formación matemática y didáctica, para mejorar los propios conocimientos matemáticos de los futuros profesores y para que, en su momento, estén en condiciones de presentar a sus alumnos situaciones adecuadas a su nivel y capacidad.

En esta investigación nos hemos centrado en futuros profesores de Primaria y en el concepto de altura de un triángulo. Los resultados obtenidos en nuestra investigación muestran que los estudiantes de Magisterio tienen unas imágenes conceptuales muy próximas a las de los estudiantes de Primaria, abundando las imágenes basadas en las figuras prototípicas más frecuentes en los libros de texto (triángulos apoyados en la base horizontal y con la altura interior).

Para mejorar estas concepciones de los estudiantes, los profesores de Magisterio solemos recurrir a un recordatorio rápido y superficial de los conocimientos matemáticos necesarios en cada momento. Esta investigación muestra que, efectivamente, esta forma de proceder produce una cierta mejora en las imágenes conceptuales de los estudiantes, si bien ésta es mucho mayor si se dedica algún tiempo en clase a analizar y estudiar de manera efectiva dichos conocimientos matemáticos. Esto implica averiguar los tipos de dificultades y errores que tienen los estudiantes específicos, plantear actividades enfocadas a provocarles conflictos y contradicciones y generar una discusión en la que se pongan de relieve distintos puntos de vista, correctos e incorrectos, se analicen y se comprendan los motivos de los errores.

Hemos mostrado y analizado diferentes tipos de errores de los estudiantes testados que son reflejo de diversas imágenes conceptuales, siendo el error más frecuente la confusión entre altura y mediana. Es interesante notar que casi todos los tipos de error detectados tienen su origen en unas imágenes conceptuales muy pobres basadas en ejemplos prototípicos que no incluyen elementos tan importantes como el dibujo de alturas sobre los lados del triángulo o exteriores al mismo o el dibujo de alturas en posiciones diferentes de la vertical.

También hemos profundizado en las causas de estos errores de los estudiantes, verificándose claramente nuestra hipótesis inicial de que un origen del problema está en el desconocimiento por los estudiantes de los conceptos básicos en los que se apoya el concepto de altura de un triángulo.

Como conclusiónes final, por lo que respecta a la enseñanza a los futuros profesores de Matemáticas, esta investigación nos permite plantear algunas sugerencias que deberían tenerse en cuenta en estos cursos, en especial en estos momentos en que se están poniendo en marcha los nuevos currícula de las diferentes titulaciones universitarias.

Una primera sugerencia es acerca de la forma, utilidad, e incluso pertinencia, de enseñar Didáctica de las Matemáticas a estudiantes cuya base matemática es tan pobre que no comprenden los conceptos de los que se pretende hacer un análisis didáctico, ya que tienen un conocimiento de los mismos erróneo o, en el mejor de los casos, parcial, puramente memorístico, algorítmico y basado en prototipos elementales. Partiendo de una concepción de los cursos de Didáctica de las Matemáticas para futuros profesores en los que se estudien los contenidos matemáticos necesarios para el trabajo didáctico con los que los estudiantes tengan problemas, en los diferentes cursos de Magisterio en los que hemos realizado esta investigación, hemos usado los resultados de la misma de dos maneras:

1ª) Los tests administrados nos han servido para detectar las dificultades y carencias de nuestros estudiantes, así como su generalización en el grupo, permitiéndonos identificar los contenidos matemáticos que debían ser estudiados antes de entrar en el estudio de los contenidos didácticos y las concepciones erróneas que es necesario corregir. Es necesario tratar de que los futuros profesores de Matemáticas sean capaces de interpretar y analizar correctamente definiciones y enunciados matemáticos, al menos los que se refieren a conceptos y situaciones de las Matemáticas del nivel educativo correspondiente, Primaria en el caso de esta experiencia.

2ª) Tanto los propios tests como los resultados de su administración han resultado ser un excelente caso con el que ejemplificar las componentes del análisis didáctico del concepto de altura objeto de los tests. Al tratarse de respuestas dadas recientemente por los propios estudiantes, éstos le conceden total credibilidad y están en condiciones de entender las razones de los errores, dificultades, diferentes concepciones, etc. que surgen de las respuestas, por lo que el análisis didáctico resulta más rico, comprensible y provechoso.

Otra sugerencia tiene que ver con la existencia de muchos conceptos de geometría elemental que llevan asociados otros conceptos más elementales y construcciones geométricas (por ejemplo perpendicularidad, trazado de una perpendicular a un segmento, etc.). Es frecuente que los profesores universitarios demos por sentado que tanto los conceptos como sus sub-conceptos y construcciones relacionadas son recordados y comprendidos correctamente por los futuros profesores. Sin embargo, la realidad no es ésta, pues son muchos los estudiantes que tienen carencias muy acusada en estos conocimientos. Por ello, pensamos que en la formación didáctica de los futuros profesores se debe plantear la necesidad de que, en la preparación de sus clases en las escuelas de Primaria, realicen un análisis matemático de las definiciones de los diferentes conceptos que incluya la descomposición en sus elementos básicos, junto a un análisis didáctico del grado de comprensión de estos conceptos y sub-conceptos por los niños, seguido de la instrucción necesaria para que éstos puedan interpretar correctamente los sub-conceptos y comprender la definición del concepto principal.

5. Referencias

Hershkowitz, R., 1989, Visualization in geometry - two sides of the coin, *Focus on Learning Problems in Mathematics* vol. 11, n° 1, pp. 61-76.

Hershkowitz, R., 1990, Psychological aspects of learning geometry, en *Nesher, P.; Kilpatrick, J. (eds.), 1990, Mathematics and cognition* (Cambridge U.P., Cambridge, G.B.), pp. 70-95.

Jaime, A.; Chapa, F.; Gutiérrez, A., 1992, Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B., *Epsilon* n° 23, pp. 49-62.

Jaime, A.; Gutiérrez, A., 1990, Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele, en *Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.), 1990, Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar, Sevilla), pp. 295-384.

Skemp, R.R., 1980, *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* (Morata: Madrid).

Vinner, S., 1983, Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* vol. 14, pp. 293-305.

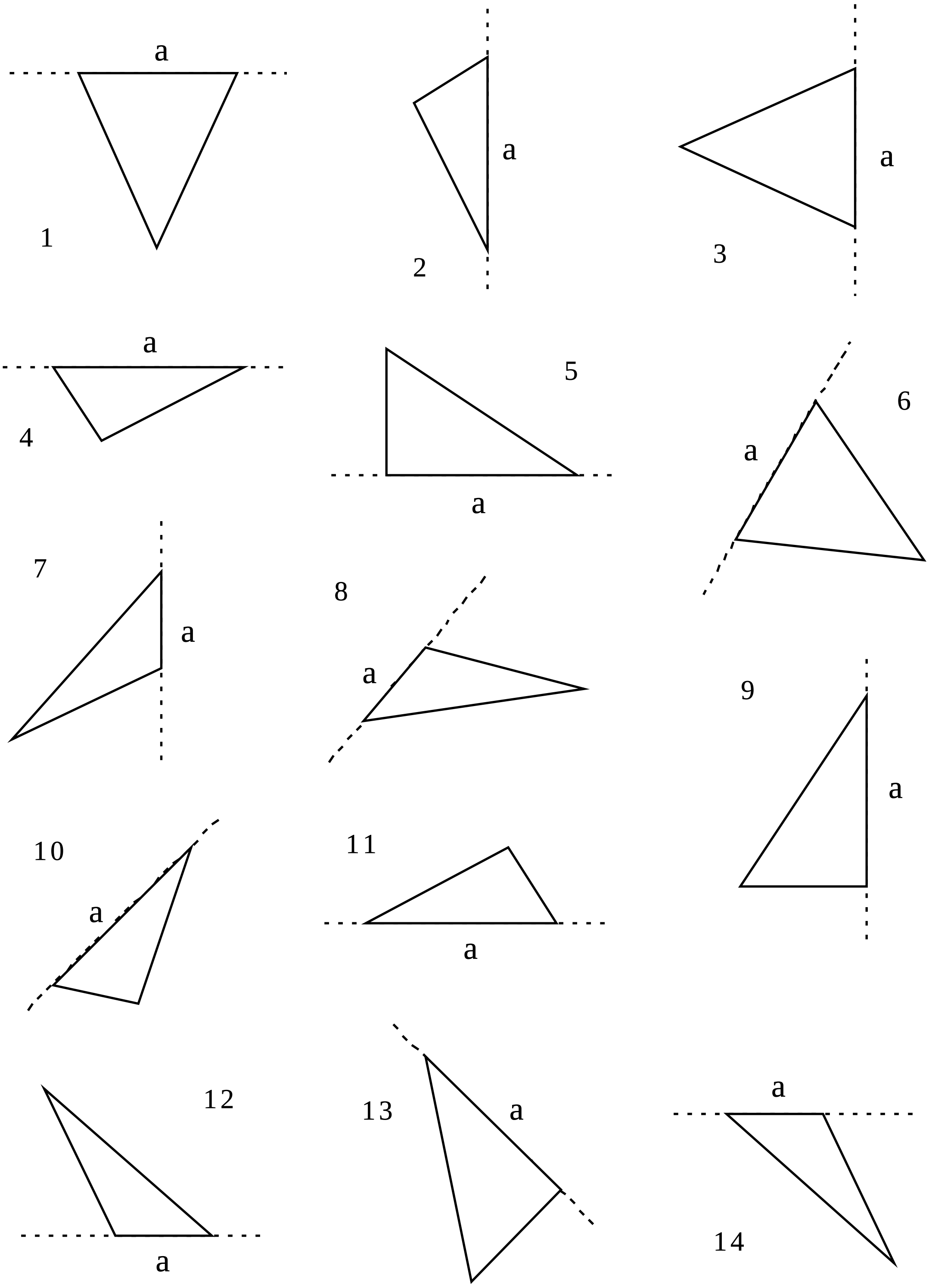
Vinner, S., 1991, The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, en *Tall, D. (ed.), 1991, Advanced mathematical thinking* (Kluwer, Dordrecht, Holanda), pp. 65-81.

Vinner, S.; Hershkowitz, R., 1983, On concept formation in geometry, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* vol. 83, n° 1, pp. 20-25.

ANEXO 1

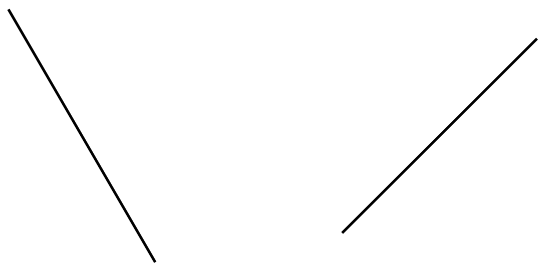
Recuerda que una ALTURA de un triángulo es la perpendicular trazada desde un vértice hasta el lado opuesto o su prolongación.

En cada triángulo, traza la ALTURA sobre el lado marcado con la letra **a**.

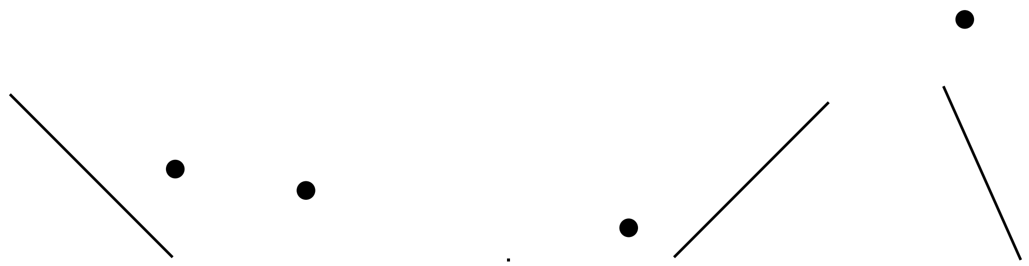


ANEXO 2

A) Traza una recta perpendicular a cada una de éstas.



B) Desde el punto, traza una recta perpendicular al segmento o a su prolongación.



C) Indica mediante **B** el vértice opuesto al lado **b** de cada triángulo. Traza después un segmento que vaya perpendicularmente desde el vértice opuesto al lado **b** hasta este lado (b) o su prolongación.