

**MEMORIA FINAL DEL
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**La enseñanza de la geometría de sólidos
en la E.G.B.**

Equipo investigador:

Gregoria Guillén Soler (Directora del Proyecto)

Angel Gutiérrez Rodríguez

Adela Jaime Pastor

María Cáceres Sansaloni

Valencia, marzo de 1992

ÍNDICE

1. Introducción

1. Presentación	2
2. Elección de un modelo de enseñanza - aprendizaje de la Geometría	4
3. Elección de una metodología de enseñanza	11
4. Fuentes de información	12
5. Análisis de libros de texto de E.G.B.	14
6. Evaluación del aprendizaje de los estudiantes	15
7. Referencias	16

2. Módulo I: Reconocimiento y análisis de cuerpos geométricos espaciales

1. Justificación del tipo de actividades	2
2. Los estudiantes	4
3. Descripción general de las actividades	4
4. Material utilizado	6
5. Descripción de los bloques de actividades	8
Anexo 1	21
Anexo 2	23
Anexo 3	25

3. Módulo II: Análisis, descripción y clasificación de cuerpos geométricos

1. Introducción	2
2. Marco teórico de referencia para el diseño de las actividades	5
3. La clasificación	10
4. Materiales utilizados por los estudiantes	12
5. Actividades diseñadas para la experimentación. Comentarios	23
6. referencias	69
7. Comentarios sobre las entrevistas. Análisis de las respuestas	71
Anexo 1	228

4. Módulo III: Desarrollo de destrezas de visualización y representación de cuerpos geométricos espaciales

1. Introducción	2
2. Principales destrezas de visualización espacial	7

3. Principales tipos de representaciones planas de cuerpos 3- dimensionales	11
4. Los módulos para la enseñanza de destrezas de visualización espacial	13
5. Los estudiantes	24
6. Resumen y análisis del desarrollo de las clases	25
7. Conclusiones finales	86
8. Bibliografía	90
Anexo 1	93
Anexo 2	199

INTRODUCCIÓN AL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Autores:

Gregoria Guillén Soler (Directora)

Angel Gutiérrez Rodríguez

Adela Jaime Pastor

María Cáceres Sansaloni

INTRODUCCIÓN AL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

1. PRESENTACIÓN

El proyecto de investigación "La enseñanza de la geometría de sólidos en la E.G.B." fue aprobado en la convocatoria del Concurso Público de Ayudas a la Investigación de 1988 dentro del área de Ciencias Sociales. Este informe es la memoria final que da cuenta del trabajo realizado.

De ello se ocupan las partes de la memoria que siguen a esta introducción. Se trata aquí de señalar únicamente las diferencias más notables entre el plan inicial presentado y lo que se ha realizado, e indicar cuáles han sido los objetivos generales que, a posteriori, pueden considerarse como los propios del trabajo que se presenta.

Se indicaba en el plan inicial que el objetivo de este trabajo es elaborar un currículum de geometría de sólidos para la E.G.B. Sin embargo, a lo largo del desarrollo del trabajo, se han llevado a cabo algunas modificaciones respecto a este objetivo inicialmente previsto de las que daremos cuenta a continuación. Así mismo, el tiempo de realización del proyecto se ha extendido por diversas circunstancias. Ambos elementos están interrelacionados, ya que la nueva concepción exigió más tiempo y la dilación en el tiempo impidió realizar algunas de las fases iniciales.

En concreto, el trabajo realizado consta de dos partes: La primera, teórica, incluyó la definición del marco teórico en el que se apoya la investigación, la recopilación de información sobre el tema y el diseño de unidades de enseñanza. La segunda parte, práctica, consistió en la experimentación de esas unidades de enseñanza con grupos de estudiantes de E.G.B. y el análisis de los experimentos.

La lectura de la bibliografía existente y el diseño y primera discusión de las unidades diseñadas abarcó un curso escolar (1988-1989) y provocó un cambio de enfoque en la reelaboración de las unidades docentes. En lugar de atender simplemente al diseño y experimentación de actividades con vistas a su utilización en el aula, es decir, con objeto de desarrollar las habilidades y destrezas geométricas relacionadas con los sólidos, decidimos incluir además en nuestro estudio: La investigación del nivel de razonamiento de los niños que realizaran la experiencia, a medida que ésta avanzara; la investigación de las imágenes que tenían los niños de algunos conceptos, que provenían de su experiencia previa con esta materia, y cómo se ampliaban estas imágenes con la instrucción que llevásemos a cabo; los aspectos visuales que afectaban negativamente en el desarrollo de algunos conceptos geométricos y las dificultades de la enseñanza/ aprendizaje de las habilidades y destrezas geométricas relacionadas

con los sólidos. Tales decisiones se fundamentan básicamente en la posibilidad de realizar diseños más adecuados de actividades para el aula, una vez investigado lo que hemos indicado anteriormente. Pero trae como consecuencia que, al desarrollar las unidades docentes, además de actividades que podrían ser usadas directamente, o con ligeras modificaciones, en la Enseñanza Primaria, se incluyen otras actividades que están dirigidas a la investigación de los problemas propuestos.

Por otra parte, decidimos incorporar el ordenador como herramienta de trabajo en alguna de las partes. Se seleccionó el ordenador para un módulo dedicado a visualización, ya que ese medio permite realizar algunos tipos de ejercicios especialmente adecuados para desarrollar tal destreza y que de otra manera no se podrían realizar. Hemos limitado el uso del ordenador a un módulo y, dentro de él, a no todas las actividades, para evitar un trabajo con proyección sólo en centros en los que se poseyera esta herramienta.

A partir del análisis que hicimos de los libros de texto usuales y sabiendo que la geometría en nuestras escuelas suele quedar relegada a un segundo lugar nos llevaron a prever que los niños no habrían tenido mucha experiencia anterior con la geometría de los sólidos. Teniendo en cuenta estas consideraciones y los niveles que identifica el modelo de Van Hiele, el proyecto quedó dividido en 3 módulos:

— Módulo I: **Reconocimiento y análisis de cuerpos geométricos espaciales**, llevado a cabo por María Cáceres Sansaloni. Este módulo estaría integrado por actividades del nivel 1 de Van Hiele (de reconocimiento de sólidos, introducción o revisión de algunos términos geométricos), con la intención de evaluar si los niños habían superado este nivel de razonamiento, y por actividades que tuviesen como objeto determinar si los niños que realizaran la experiencia eran capaces de analizar los sólidos a nivel local (fijándose en los elementos de los sólidos), actividades que corresponderían al nivel 2 de Van Hiele.

— Módulo II: **Análisis, descripción y clasificación de cuerpos geométricos**, llevado a cabo por Gregoria Guillén Soler. Las actividades de este módulo tendrían como objeto revisar y ampliar la imagen mental de algunos conceptos relacionados con los sólidos y que se tratase el problema de la clasificación. Tendrían que desarrollar las habilidades geométricas correspondientes al 2º y 3º niveles y, además, tendrían que permitir evaluar si los niños superaban o no estos niveles.

— Módulo III: **Desarrollo de destrezas de visualización y representación de cuerpos geométricos espaciales**, llevado a cabo por Adela Jaime Pastor y Angel Gutiérrez Rodríguez. Las actividades de este módulo tendrán como objetivos observar el estado actual de las destrezas de visualización espacial de los estudiantes y de las de lectura y escritura de representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales y mejorar el uso de dichas destrezas por los estudiantes.

En las secciones posteriores presentamos un desarrollo detallado de cada uno de estos módulos. Como se puede ver en esta memoria, el trabajo llevado a cabo fue considerable. Durante el curso 1989-90, se procedió al re-diseño de las actividades (el primer borrador había sido discutido el curso anterior) para su experimentación posterior. Esta no tuvo lugar, ya que era necesario disponer de todo el año para ello, situación que no existía en el momento en que tuvimos dispuestas las unidades docentes. Así, la experimentación se desarrolló a lo largo del curso 1990-91 y, finalmente, durante el curso 1991-92 hemos procedido al análisis de los resultados y la redacción de esta memoria final.

La extensión del trabajo ha hecho inviable una nueva experimentación con alumnos de E.G.B. y la extracción de una propuesta detallada para poner en práctica en toda la Enseñanza Primaria, como era nuestro objetivo inicial. No obstante, las actividades desarrolladas, junto con los comentarios que damos en este informe, sí pueden servir como punto de partida para su utilización en E.G.B.

2. ELECCIÓN DE UN MODELO DE ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Toda investigación relacionada con la enseñanza o aprendizaje de las Matemáticas dirigida a elaborar una propuesta curricular debe basarse en una teoría de desarrollo cognitivo o de enseñanza y aprendizaje que sirva como marco teórico. En el caso de la enseñanza de la Geometría (y de las matemáticas en general), podemos encontrar diversos modelos utilizados en la actualidad y sobre los que existe documentación y bibliografía; algunos de los nombres más destacados, y más diferenciados entre sí, son Piaget, Van Hiele, Skemp, Dienes o Gagné.

Algunos de los miembros del equipo hemos realizado con anterioridad otras investigaciones centradas en la enseñanza de la geometría (ver Gutiérrez, Jaime & Guillén, 1985 y Guillén & Puig, 1983) en las que se ha tomado como marco de referencia el Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. Seguimos considerando que éste es un excelente modelo de representación de los procesos de desarrollo del razonamiento de los estudiantes de matemáticas, por lo que ha sido adoptado también para este proyecto.

El modelo de razonamiento de Van Hiele es una teoría de desarrollo intelectual basada en la experiencia de sus autores como profesores de geometría, lo cual la hace especialmente idónea para esta parte de las matemáticas. Ha sido utilizado en diversas ocasiones como base para la elaboración de cursos de geometría e incluso de currícula nacionales de matemáticas de enseñanza elemental, como son los casos de Holanda, país natal de sus autores, y la U.R.S.S. (ver Treffers, 1987 y Wirszup, 1976).

Como indica su nombre, este modelo trata de describir las formas de razonamiento habituales en los estudiantes de geometría. Aunque puede pensarse que el tipo de razonamiento es el mismo en cualquier parte de las matemáticas, esto no es del todo cierto, pues las características propias de las distintas áreas (aritmética, álgebra, geometría, etc.) marcan notables diferencias; de hecho, ha habido intentos de aplicar el modelo de Van Hiele fuera de la geometría, pero en general han tenido escaso éxito.

Empezaremos haciendo un rápido recorrido por la historia del modelo y su difusión en la comunidad internacional de educadores matemáticos:

- En los años 50, los esposos Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof eran profesores de geometría de enseñanza secundaria en Holanda. A partir de su experiencia docente, elaboraron un modelo que trata de explicar, por una parte, cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y, por otra parte, cómo puede un profesor ayudar a sus alumnos para que mejoren la calidad de su razonamiento. Esta teoría la exponen por primera vez en sus tesis doctorales, leídas en 1957 y dirigidas por H. Freudenthal. La más importante es la tesis de Dina van Hiele, en la cual su autora expone detalladamente la teoría de los niveles de razonamiento y el desarrollo de un curso de geometría con el que ejemplifica el modelo.
- En 1959 se publica el artículo "La pensée de l'enfant et la géométrie" en el Bulletin de l'A.P.M.E.P. (revista de la asociación francesa de profesores de matemáticas de la enseñanza pública), que representa la primera exposición pública a nivel internacional del modelo de los esposos Van Hiele. A pesar de los esfuerzos de H. Freudenthal y de los Van Hiele, el modelo no logra captar la atención del mundo europeo occidental ni del americano.
- Por el contrario, dicho artículo resultó de gran interés para los educadores soviéticos, que se hallaban inmersos en un proyecto de reforma curricular. Tras unos años de intensas investigaciones y experimentaciones, se incorpora el modelo de Van Hiele como base teórica de la elaboración del nuevo currículum de enseñanza de la geometría en la U.R.S.S., cuya implantación definitiva se produce en 1964.
- La comunidad educativa de los países occidentales (con excepción de Holanda) sigue ignorando el modelo de Van Hiele hasta que en 1974 el profesor I. Wirszup da una conferencia en la reunión anual del N.C.T.M. (asociación nacional de profesores de matemáticas de EE.UU.) y publica en 1976 un artículo (Wirszup, 1976) con un contenido similar. Wirszup hace una descripción del currículum soviético y del modelo de Van Hiele y alerta a los profesores estado-unidenses ante el hecho de que el currículum de geometría soviético es más eficaz que el suyo, pues los estudiantes soviéticos aprenden antes, más y mejor que los de EE.UU.

- La reacción provocada hace que en los años siguientes se realicen importantes investigaciones en EE.UU. en torno al modelo de Van Hiele y que éste sea objeto de interés creciente en todo el mundo, tanto desde el punto de vista de la investigación educativa como del de la práctica docente.

A continuación vamos a describir el modelo de Van Hiele. Está formado por dos partes: La primera es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento intuitivo de los niños de pre-escolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas (los 5 "niveles de razonamiento"); la segunda parte es una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los alumnos sean capaces de acceder al nivel de razonamiento superior al que tienen actualmente (las 5 "fases de aprendizaje"). En esta descripción nos ocuparemos de ambas componentes, si bien en el proyecto de investigación sólo han tenido un papel importante los niveles de razonamiento.

En la bibliografía existente se pueden encontrar listas muy completas de características de los distintos niveles de Van Hiele; ver, por ejemplo, Burger & Shaughnessy (1986) y Hoffer (1983). Nosotros haremos aquí sólo una enumeración de las principales características de cada nivel, que es suficiente para entender las referencias al los niveles de razonamiento que aparezcan en lo sucesivo en esta memoria.

Aunque la definición original del modelo de Van Hiele plantea la existencia de 5 niveles de razonamiento, está abierta como tema de investigación la cuestión de la conveniencia o no de eliminar del modelo el quinto nivel. En nuestra opinión, las características de este nivel, tal como las han definido los autores mencionados antes, no están claras en absoluto y no están en concordancia con las de los niveles inferiores. Además, la presencia de este nivel no aporta, desde un punto de vista práctico, nada a nuestro trabajo, ya que se encontraría fuera del alcance de los estudiantes de Enseñanza Primaria o Secundaria.

En las publicaciones sobre el modelo de Van Hiele se utilizan dos numeraciones de los niveles: De 0 a 4 y de 1 a 5; nosotros preferimos la segunda para mantener las etiquetas de los niveles de acuerdo con sus ordinales. Las siguientes son las propiedades más importantes que permiten caracterizar los niveles de razonamiento y diferenciar cada uno de sus adyacentes:

Nivel 1 (reconocimiento): El estudiante de este nivel

- * percibe los objetos en su totalidad y como unidades.
- * describe los objetos por su aspecto físico y los diferencia o clasifica en base a semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos.
- * no reconoce explícitamente las componentes y propiedades de los objetos.

Nivel 2 (análisis): El estudiante de este nivel

- * percibe los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no identifica las relaciones entre ellas.
- * puede describir los objetos de manera informal, mediante el reconocimiento de sus componentes y propiedades, pero no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.
- * deduce nuevas propiedades a partir de la experimentación.

Nivel 3 (clasificación): El estudiante de este nivel

- * realiza clasificaciones lógicas de los objetos en base a propiedades o relaciones ya conocidas.
- * describe las figuras de manera formal, es decir que comprende el papel de las definiciones y los requisitos de una definición correcta.
- * comprende los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no comprende el encadenamiento de estos pasos ni la estructura de una demostración.
- * no es capaz de realizar razonamientos lógicos formales, ni siente su necesidad. Por este motivo, tampoco comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Nivel 4 (deducción): El estudiante de este nivel

- * es capaz de realizar razonamientos lógicos formales.
- * comprende la estructura axiomática de las matemáticas.
- * acepta la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas (definiciones equivalentes, etc.).

Nivel 5 (rigor): El estudiante de este nivel

- * es capaz de prescindir de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad.
- * acepta la existencia de sistemas axiomáticos diferentes y puede analizarlos y compararlos.
- * se encuentra en el máximo nivel de rigor matemático.

Los niveles de Van Hiele están dotados de diversas propiedades cuya importancia práctica radica en que muestran las líneas básicas que debe seguir un profesor que desee basar sus clases en este modelo de enseñanza. Estas propiedades son:

Recursividad: Los elementos implícitos en el razonamiento de nivel N se hacen explícitos en el razonamiento del nivel N+1. Por ejemplo, un niño de pre-escolar puede diferenciar círculos, triángulos y rectángulos por la "forma" de las figuras (nivel 1); no obstante es evidente que el niño se fija en la existencia y la forma (o cantidad) de los vértices para esa clasificación, aunque no sea consciente de ello. Más adelante, cuando el niño haya alcanzado el nivel 2, sí será consciente de que los vértices, como elementos diferenciados, son la clave de la clasificación. La siguiente tabla sintetiza esta característica:

	Elementos explícitos	Elementos implícitos
Nivel 1	Objetos	Propiedades de los objetos
Nivel 2	Propiedades de los objetos	Relaciones entre propiedades y/o objetos
Nivel 3	Relaciones entre propiedades y/o objetos	Deducción formal de relaciones
Nivel 4	Deducción formal de relaciones	Reglas básicas de un sistema axiomático
Nivel 5	Reglas básicas de un sistema axiomático	

Secuencialidad: No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, es decir que no es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, todos los niveles inferiores.

Aquí es necesario poner en evidencia un peligro que se deriva del aprendizaje memorístico: Un estudiante puede aparentar un nivel superior al que realmente tiene porque ha aprendido procedimientos rutinarios propios del nivel superior, aunque realmente no los comprenda. Un ejemplo muy frecuente lo tenemos en nuestros estudiantes de Enseñanza Media: Generalmente, desde 1º de BUP se les hace demostrar propiedades y resolver formalmente problemas para poder aprobar, lo cual se traduce en que con el paso del tiempo han aprendido un cierto número de formas mecánicas de actuar, propias del lenguaje matemático formalizado, con las que dan la impresión de encontrarse en el 4º nivel, cuando en realidad están muy lejos de ese tipo de razonamiento.

Especificidad del lenguaje: Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse, de forma que dos personas que utilicen lenguajes de diferentes niveles no podrán entenderse. Son evidentes las implicaciones de esta propiedad en la forma de comportarse los profesores en las aulas. Con esto, Van Hiele nos está diciendo que si queremos que nuestros alumnos nos entiendan realmente y que aprendan algo, debemos situarnos en su nivel, en vez de pretender que ellos se sitúen en nuestro nivel, es decir, en el que teóricamente les corresponde por el curso en que se encuentran.

Continuidad: El paso de un nivel al siguiente se produce de forma pausada, pudiendo ser rápido (de pocas horas o días) para alcanzar los niveles 1 y 2, pero normalmente lento (de meses o años) para alcanzar los niveles 3 y 4.

Este ha sido uno de los interrogantes que ha presentado la descripción teórica del modelo de Van Hiele, pues en sus planteamientos iniciales (Van Hiele, 1986), los autores del modelo

propugnaban una secuencia discreta de niveles, es decir un paso muy rápido, casi instantáneo, de los estudiantes de un nivel al siguiente. No obstante, dado que las características de cada nivel de razonamiento son múltiples, es necesario preguntarse cómo hay que tratar a los estudiantes que presentan indicios de adquisición de un nivel y que también presentan indicios de no haberlo adquirido. Este hecho ha venido corroborado por numerosos informes, entre ellos los de nuestras propias investigaciones (Gutiérrez, Jaime & Fortuny, 1991; Gutiérrez y otros, 1991), en los que se señala la presencia de estudiantes que muestran características propias de dos niveles consecutivos, lo cual significa que esos estudiantes se encuentran en medio de un proceso de adquisición de las habilidades de razonamiento del nivel superior.

Los Van Hiele proponen una sucesión de cinco fases de aprendizaje para llevar a un estudiante desde un nivel de pensamiento al siguiente. Básicamente, estas cinco fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza. Las fases dentro de los niveles se describen de la siguiente forma:

Fase 1 (información): El estudiante aprende a reconocer el campo de investigación en el que va a trabajar por medio del material que le presenta el profesor. La manipulación de este material le permitirá descubrir una cierta estructura. Esta fase sirve también para que el profesor averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va a abordar.

Fase 2 (orientación dirigida): En la segunda fase el estudiante explora el campo de investigación por medio del material. El estudiante sabe en qué dirección está orientado el estudio, pues sus investigaciones sobre el material son guiadas mediante ciertas cuestiones o directrices dadas por el profesor (por ejemplo, doblar, medir, buscar una simetría). El trabajo está seleccionado de tal forma que las estructuras características se le presentan al estudiante de forma progresiva.

Fase 3 (explicitación): A lo largo de la tercera fase las experiencias adquiridas se unen a símbolos lingüísticos precisos, y los estudiantes aprenden a expresarse en el transcurso de discusiones sobre estas estructuras, que tienen lugar en el aula. El profesor procura que en las discusiones se emplee la terminología usual. En el transcurso de la tercera fase es cuando se forma parcialmente la nueva red de relaciones.

Fase 4 (orientación libre): Ahora los alumnos aplican sus nuevos conocimientos y lenguaje a investigaciones posteriores sobre el material. El campo de investigación es en gran parte conocido, pero el alumno todavía debe encontrar su camino en este campo de investigación. Esto se consigue mediante la asignación por el profesor de tareas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. En el campo de investigación se coloca toda clase de indicios que muestren el camino a seguir pero que el estudiante deberá combinar adecuadamente.

Fase 5 (integración): Al estudiante se le ha orientado, pero todavía debe adquirir una visión general de los métodos que tiene a su disposición. Entonces trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. En este momento el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ninguna novedad al estudiante: Solamente deben ser una acumulación de cosas que ya conoce.

Como resultado de esta quinta fase se alcanza el nuevo nivel de pensamiento. El estudiante adopta una red de relaciones que conecta con la totalidad del dominio explorado. Este nuevo dominio de pensamiento, que ha adquirido su propia intuición, ha sustituido al dominio de pensamiento anterior, el cual poseía una intuición completamente diferente.

3. ELECCIÓN DE UNA METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA

El modelo de Van Hiele propugna, por lo menos para sus tres primeros niveles, una enseñanza eminentemente activa, basada en la manipulación por los estudiantes de figuras y otros materiales didácticos, en la realización de construcciones, dibujos, etc. y en el descubrimiento de los nuevos conocimientos por los niños a partir de su actividad. Esto supone una alternativa radicalmente opuesta a la, tan frecuente, de los niños escuchando al profesor o leyendo ellos mismos los contenidos de los libros de texto, para memorizar las definiciones y enunciados y realizar a continuación ejercicios de aplicación directa o afianzamiento.

Obviamente es necesario mantener la coherencia entre la teoría de enseñanza y aprendizaje subyacente en la investigación y la metodología de trabajo que guiará la enseñanza. En este caso, creemos que el método de enseñanza heurístico es el más apropiado como complemento del modelo de Van Hiele, pues lo escrito en el párrafo anterior describe perfectamente las ideas centrales de la enseñanza heurística, método que, por otra parte, tiene una larga tradición en la enseñanza de las Matemáticas en nuestro país gracias, fundamentalmente, a la figura de Pedro Puig Adam.

Dado que vamos a trabajar con niños de E.G.B., todas las actividades estarán apoyadas en materiales manipulativos. Como hemos indicado antes, pretendemos ofrecer a los niños diversos materiales didácticos para que hagan construcciones de los cuerpos geométricos, analicen los cuerpos, los clasifiquen, descubran propiedades de las clases, etc. Todo ello a partir del análisis de sus propias observaciones y construcciones, convenientemente aprovechadas por el profesor para que se avance en dicho análisis.

4. FUENTES DE INFORMACIÓN

En los dos apartados anteriores hemos definido las directrices que han guiado este proyecto. Una vez hecha esa selección, la atención del equipo investigador se centró en la recopilación de información que pudiera ser útil para el diseño de las unidades de enseñanza. Aquí es necesario diferenciar dos perspectivas: 1) El tipo de información en cuanto a su contenido y 2) el tipo de información en cuanto a su origen.

1) Las actividades que vamos a diseñar en este proyecto se refieren a la geometría espacial. Para ello es necesario tener en consideración:

- * Los conceptos de geometría 3-dimensional que vamos a estudiar. Vamos a centrarnos en los conceptos habituales de la E.G.B., que básicamente se refieren a los prismas, las pirámides, los cuerpos redondos, los poliedros regulares y otras familias, como los antiprismas y las bipirámides, que apenas están incluidas en la enseñanza de la geometría en nuestro país.
- * La enseñanza heurística hace que los niños deban manipular diferentes materiales didácticos, gracias a los cuales podrán estudiar los sólidos desde diversos puntos de vista dinámicos.
- * La capacidad de visión espacial de los estudiantes. Este es un tema de investigación controvertido en el que, para empezar, es necesario explicitar qué entendemos por "visión espacial"; hay varias posturas, entre las que podemos destacar la de entender la visión espacial como la capacidad para interpretar la información visual que recibimos y la de entenderla como la capacidad para manipular mentalmente objetos conocidos. Esta distinción es importante ya que en cada caso hay que realizar actividades diferentes y la evaluación de los estudiantes se basa en claves distintas. En este sentido, son interesantes los trabajos publicados por A. Bishop, por ejemplo Bishop (1983) (ver también las referencias del módulo III).

2) Los contenidos curriculares que hemos mencionado anteriormente están presentes de forma casi universal en los currícula de geometría de los países de nuestro entorno cultural, una vez en la enseñanza elemental y otras en la enseñanza media, unas veces con un tratamiento lúdico e informal y otras con un tratamiento formalista y axiomático. Por lo tanto, la bibliografía que estamos manejando está constituida por:

- * Nuestros propios trabajos previos sobre este tema, así como artículos, comunicaciones, etc. que informan sobre otras experiencias realizadas recientemente en España.
- * Diferentes colecciones de textos de E.G.B. actualmente en uso. Para ello hemos utilizado una encuesta realizada por miembros de este equipo de la que se ha obtenido información

sobre las colecciones de textos más utilizadas en los colegios de E.G.B. de la provincia de Valencia.

- * Libros, tanto nacionales como extranjeros, que tratan sobre la geometría espacial o sobre su enseñanza.
- * Publicaciones extranjeras (libros, actas y revistas) referentes a investigaciones y experiencias centradas en alguno de los puntos de interés de esta investigación.
- * Colecciones de textos de enseñanza elemental o media extranjeras, que nos sirven para estudiar métodos de trabajo diferentes de los habituales en España. Estas colecciones son de Gran Bretaña, EE.UU. y Holanda.

5. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO DE E.G.B.

Es un hecho de sobra conocido que actualmente la geometría está relegada a un segundo plano en las Enseñanzas Elemental y Media españolas (defecto que compartimos con muchos otros países de nuestro entorno cultural). Esto se refleja, por una parte, en la situación de los temas de geometría en la planificación anual de los cursos, ya que siempre son los últimos temas y, por otra parte, en el escaso interés que muestra la mayoría de los profesores por abordarlos, pues lo sobrecargado de los programas oficiales hace que sea necesario eliminar o acortar algunos temas, que generalmente son los geométricos, reduciéndolos a algunos elementos tópicos consistentes en la memorización de diversas definiciones y fórmulas. Desgraciadamente, el origen de este problema es más profundo que la simple ordenación del temario, pues tiene sus raíces en las reformas curriculares llevadas a cabo a partir de la introducción de las "matemáticas modernas" y su concepción algebrista y estructuralista de la enseñanza no universitaria de las matemáticas.

Lo dicho en el párrafo anterior se refleja en nuestro convencimiento de que las directrices sugeridas por los libros de texto de E.G.B. a los profesores son, en muchos casos, poco apropiadas para una enseñanza eficaz de la geometría. No obstante, hemos hecho un análisis de los temas de geometría espacial de diversas series de textos de E.G.B. para mantener o rechazar esta opinión con datos reales actuales. Para ello hemos seleccionado tres series: Dos de ellas, "Matemáticas" de Santillana y "Azimut" de Anaya, son las más utilizadas en la provincia de Valencia (según los datos obtenidos de una encuesta contestada por estudiantes de la Escuela de Magisterio después de haber realizado las Prácticas de Enseñanza); la tercera serie es "El mundo del número", de la editorial Didascalía, que ha sido elegida por el fuerte contraste que se observa entre su metodología y la que proponen las mencionadas con anterioridad.

Este análisis nos ha servido como base para delimitar los contenidos, secuenciación y profundidad de tratamiento, con el que se han podido tratar estos temas en los diversos cursos de E.G.B. De ahí, podríamos prever la experiencia previa que los niños que realizarían la experiencia podrían haber tenido con el estudio de los sólidos. Así mismo, para diseñar las actividades, cuando lo hemos considerado apropiado, hemos tenido en cuenta las formas de enseñanza sugeridas en las "guías del profesor", siempre que fueran coherentes con el punto de vista del modelo de Van Hiele.

6. EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LOS ESTUDIANTES

La forma de evaluación de los resultados es un elemento muy importante en cualquier experiencia educativa, por lo que la selección del método más adecuado de evaluación debe hacerse con cuidado, ponderando las diferentes posibilidades y determinando su adaptación a la materia, a los métodos de trabajo y a los estudiantes.

En una investigación es necesario distinguir entre las experimentaciones "de laboratorio", en las que se trabaja con grupos reducidos de niños, y las realizadas con grupos grandes (las clases normales de los colegios de E.G.B.).

En el primer caso es fácil para el equipo investigador hacer un seguimiento continuo personalizado de los participantes en la experiencia, así como recurrir a métodos clínicos para determinar con más exactitud el aprendizaje conseguido o los problemas particulares de mala comprensión. En el campo de la educación matemática, los dos métodos más frecuentes, en los cuales hay algunas variantes, son:

* La resolución de actividades por parejas, con lo cual se fomenta la comunicación entre los dos estudiantes y se puede observar con claridad el curso de los pensamientos de cada uno, sus estrategias de trabajo, los conocimientos que aplican, etc.

* Las entrevistas clínicas, en las cuales el entrevistador puede dirigir la actividad hacia los puntos más interesantes y tiene la posibilidad de pedir al estudiante aclaraciones o más comentarios.

En el segundo caso (grupos grandes de alumnos) es casi inevitable recurrir a la evaluación de los resultados en base a cuestionarios escritos, con la consiguiente pérdida de información. Aquí también hay varias posibilidades, si bien está aceptado de forma generalizada que lo mejor es confeccionar cuestionarios de respuesta libre en los que se dé la oportunidad a los alumnos para explicar sus contestaciones todo lo que quieran.

En este proyecto hemos utilizado los dos métodos que describimos como pertenecientes al primer caso. En cada uno de los módulos indicamos el método que hemos usado para la evaluación.

7. REFERENCIAS

- Bishop, A.J. (1983): Space and Geometry, en Lesh, R.; Landau, M., eds. (1983) *Acquisition of mathematics concepts and processes*. (Academic Press: N. York), pp. 175-203.
- Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17 n° 1, pp. 31-48.
- Guillén, G.; Puig, L. (1983): *Necesidad y experimentación de un nuevo modelo para el estudio de la geometría en la EGB y Escuelas de Magisterio*. (ICE de la U. Literaria: Valencia).
- Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fortuny, J.M. (1991): An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 21 n° 3, pp. 237-251.
- Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Guillén, G. (1985): *Propuesta para la utilización de los mosaicos como refuerzo al estudio de las isometrías en E.G.B. y Escuelas de Magisterio* (memoria del proyecto de investigación). (Consellería de Cultura, E. y C. de la Gener. Valenciana: Valencia).
- Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Shaughnessy, J.M.; Burger, W.F. (1991): A comparative analysis of two ways of assessing the van Hiele levels of thinking, en *Proceedings of the 15 P.M.E.* vol. 2, pp. 109-116.
- Hiele, P.M. (1986): *Structure and insight. A theory of mathematics education*. (Academic Press: Londres).
- Hoffer, A. (1983): Van Hiele-based research, en R. Lesh; M. Landau, eds. (1983): *Acquisition of mathematics concepts and processes* (Academic Press: N. York), pp. 205-227.
- Treffers, A. (1987): *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project)*. (D. Reidel: Dordrecht).
- Wirszup, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, en J.L. Martin; D.A. Bradbard, eds. (1976): *Space and geometry* (ERIC: Columbus, USA), pp. 75-97.

**MÓDULO III DEL
PROYECTO DE INVESTIGACIÓN**

**Desarrollo de destrezas de
visualización y representación de
cuerpos geométricos espaciales**

Autores:

Angel Gutiérrez Rodríguez
Adela Jaime Pastor

MÓDULO III: DESARROLLO DE DESTREZAS DE VISUALIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS ESPACIALES

Angel Gutiérrez y Adela Jaime.

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València.

1. INTRODUCCIÓN

Hadamard decía que buena parte del pensamiento necesario en la investigación matemática es de tipo espacial. Por otra parte, Einstein explicaba que sus elementos de pensamiento no eran palabras, sino determinados signos e imágenes más o menos claras que él podía reproducir o combinar de forma voluntaria.

Resulta ocioso extenderse en consideraciones acerca de la importancia que tiene la visualización espacial en el aprendizaje de la Geometría 3-dimensional, ya que, salvo contadas excepciones, la mayor parte del trabajo que realizan los niños durante su período de estudio de este tema en E.G.B. se basa en representaciones planas de cuerpos espaciales. Es por ello que, necesariamente, una parte de este Proyecto de Investigación tenía que estar dedicada al estudio de las habilidades de visualización de los niños y a su desarrollo.

Puesto que desde nuestro nacimiento todos estamos inmersos en un mundo 3-dimensional, no cabe plantearse que la adquisición de destrezas de visualización espacial deba hacerse a partir de cero en un determinado curso de E.G.B. Por el contrario, debemos ser conscientes de la realidad de que:

- Todos los estudiantes de E.G.B. tendrán desarrolladas determinadas destrezas de tipo visual espacial cuando lleguen a las escuelas o cuando empiecen el estudio de la Geometría 3-dimensional.

- Que las destrezas de cada estudiante y su grado de maduración pueden ser diferentes a las de sus compañeros, pues dependerán enormemente del contexto socio-cultural en el que hayan crecido los niños. A este respecto, aunque no conocemos estudios realizados en España, son muy significativos los resultados de las investigaciones recogidas en Nesher & Kilpatrick (1990) pg. 78, que creemos que podría ser generalizables con las matizaciones y ajustes oportunos.

- Las destrezas de visualización espacial espontáneas de los estudiantes no tienen por qué ser adecuadas al contexto específico de la Geometría 3-dimensional (y lo más probable es que no lo sean), ya que se trata de una situación nueva, muy peculiar y con unos requerimientos de manejo de información bi y tri-dimensional más fuertes y exigentes que los de nuestro entorno

cotidiano fuera de la clase de Geometría. Por lo tanto, es necesaria una actuación directa y específica sobre estas habilidades, para adecuarlas a las nuevas necesidades, antes de pretender que los niños logren un aprendizaje comprensivo y completo de la Geometría 3-dimensional.

El contenido de este último punto puede parecer contradictorio con el hecho de que, en nuestra investigación, hayamos trabajado sobre las capacidades de visualización espacial en último lugar. Sin embargo no lo es, ya que el trabajo que han hecho los niños en los dos módulos precedentes se ha basado de forma exclusiva en la manipulación de sólidos reales, por lo que no han utilizado ninguna representación plana de los sólidos y la necesidad de usar la visualización espacial y las imágenes visuales mentales ha sido reducida.

En base al planteamiento precedente, este tercer módulo del Proyecto de Investigación ha tenido los siguientes **objetivos generales**:

1) Identificar las destrezas de visualización espacial adquiridas por los estudiantes antes de empezar la instrucción reglada y su grado de desarrollo.

2) Identificar las destrezas de visualización espacial necesarias para un aprendizaje adecuado de la Geometría 3-dimensional en E.G.B., entre las que se deben incluir las destrezas necesarias para la manipulación física o mental de cuerpos geométricos (girar, trasladar, deformar, ...) y las necesarias para relacionar representaciones en el plano de cuerpos espaciales con dichos cuerpos (en los dos sentidos $2D \Rightarrow 3D$ y $3D \Rightarrow 2D$).

3) Diseñar y experimentar unos conjuntos de actividades útiles tanto para evaluar los conocimientos de visualización espacial de los estudiantes como para la enseñanza o el perfeccionamiento de las más necesarias de dichas destrezas.

Además de estos objetivos globales, nos hemos planteado también otros objetivos más concretos, referidos a algunos componentes particulares de los bloques de actividades o de la actividad de los estudiantes. Entre ellos podemos destacar:

4) Observar las diferencias reflejadas por los estudiantes al enfrentarse a actividades similares pero basadas en distintos tipos de sólidos. Los tres modelos de poliedros empleados (figurativos, sombreados y de varillas) tienen diferentes grados de abstracción, por lo que es razonable suponer que los estudiantes los manipularán con distintos grados de perfección. También es probable que la familia de poliedro utilizada (cubo, tetraedro, octaedro, prisma, etc.) tenga influencia en la forma como los resuelvan las actividades.

5) Observar el grado de facilidad de uso de los tres programas de ordenador utilizados. Entre estos programas hay diferencias operativas que son significativas pues requieren de distintas habilidades de visualización (o diferentes grados de desarrollo de la misma habilidad).

6) Comparar los diferentes entornos utilizados para presentar a los estudiantes los poliedros que hemos usado en las actividades (cuerpos reales, representaciones en papel y software) y comparar los diferentes tipos de representaciones planas usadas.

En todos los casos, se intenta averiguar si hay una ordenación particular que permita determinar cuáles de los elementos comparados en cada caso (tipos de sólidos, tipos de software y tipos de representaciones planas) son más adecuados para utilizarlos con estudiantes noveles, con alguna formación o expertos.

En los párrafos precedentes hemos aludido a la "visualización espacial" en su doble faceta de elemento presente en la vida ordinaria y de componente central del aprendizaje y la enseñanza de la Geometría 3-dimensional. La visualización espacial ha sido estudiada en numerosas ocasiones y por personas con puntos de vista e intereses diversos. En algunos casos se ha estudiado desde una perspectiva utilitaria, como habilidad general que todos usamos continuamente; en otros casos se ha estudiado desde el punto de vista de actividades especializadas, como la Arquitectura, la Física o las Matemáticas; en otros casos se ha tenido en cuenta un determinado marco psicológico general. Esto hace que sea imprescindible empezar haciendo una declaración de intenciones mediante una definición lo más clara y concreta posible de la postura que nos proponemos adoptar en esta investigación, con el fin de evitar a los lectores falsas interpretaciones.

Puesto que el objetivo de este proyecto de investigación ha sido mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, y en particular de la Geometría, es razonable que hayamos adoptado la interpretación dada actualmente a la visualización espacial en el campo de la Didáctica de las Matemáticas (o Educación Matemática, en la terminología sajona), que presenta notables diferencias con las correspondientes a diversas escuelas psicológicas. Para ello nos basaremos en algunos autores que han colaborado de manera fundamental a formar la actual concepción de la "visualización espacial" en este área de la educación, tales como Bishop (1980; 1983; 1989), Bishop & Nickson (1983), Gaulin (1985), Gaulin & Puchalska (1987), Hoffer (1981; 1987; 1988) o Presmeg (1986a; 1986b). Estos investigadores interpretan la visualización espacial como un conjunto de destrezas, predominantemente mentales, que permiten actuar a los individuos en el contexto de las representaciones gráficas matemáticas, tomando este contexto en un sentido amplio que abarca las representaciones usuales en los diferentes campos matemáticos como Geometría, Análisis, Álgebra, Aritmética, Estadística, etc. En la sección 2 nos ocuparemos de la descripción detallada de dichas destrezas.

Dentro de esta perspectiva didáctico-matemática de la visualización espacial, es necesario mencionar algunos trabajos, referidos a la enseñanza o aprendizaje de destrezas de visualización espacial, que han tenido influencia en nuestra investigación ya que han sido los primeros intentos de conectar la visualización espacial con la teoría de los niveles de razonamiento geométrico de

Van Hiele, interpretando el comportamiento de los estudiantes y su evolución desde el punto de vista proporcionado por este marco teórico.

El primer intento que conocemos de caracterizar explícitamente los Niveles de Van Hiele en Geometría 3-dimensional aparece en Hoffer (1981), donde se describen las características de diversas habilidades geométricas generales (visual, verbal, dibujo, lógica y de aplicación de herramientas) particularizadas a cada uno de los niveles de Van Hiele. Para cada habilidad y nivel de razonamiento, este artículo incluye algunos ejemplos de situaciones concretas, estando parte de ellos referidos a sólidos. No obstante, a partir de este artículo es imposible obtener de forma directa una descripción detallada de las formas de razonamiento en Geometría 3-dimensional basada en los niveles de Van Hiele.

Otra investigación relacionando la Geometría espacial con el modelo de Van Hiele es la presentada por D. Lunkenbein en varias publicaciones. Lunkenbein (1983a) se centra en la descripción de las formas como trabajan los estudiantes con los poliedros, dando lugar a una descripción detallada de los niveles 1 y 2 de Van Hiele en este contexto. Por otra parte, Lunkenbein (1983b) enfoca la cuestión desde la perspectiva piagetiana de las "agrupaciones lógicas", describiendo 3 tipos de agrupaciones: Infralógicas, particiones lógicas e inclusiones lógicas. Estas 3 clases de agrupaciones coinciden, por sus características, con los tipos de clasificación de familias de figuras definidas en los niveles 1, 2 y 3 de Van Hiele. Finalmente, Lunkenbein (1984) utiliza los resultados del trabajo precedente para analizar cómo resuelven los estudiantes determinadas actividades con poliedros. Como resumen, estos trabajos constituyen una interesante propuesta de caracterización de los niveles de Van Hiele en Geometría 3-dimensional, si bien es parcial porque sólo se refiere a los 3 niveles inferiores de razonamiento y sólo describe uno de los componentes de dichos niveles, la clasificación lógica de familias.

Realmente, las investigaciones mencionadas son aproximaciones aisladas al problema que, si bien no aportan avances significativos en su solución, sí indican algunas líneas de trabajo futuro. Por nuestra parte, creemos que los resultados que hemos obtenido en este proyecto son de tipo exploratorio, que nos han permitido tener más información inicial pero que, por sí solos, no constituyen un conjunto de resultados completo, sino una base para futuras investigaciones en las que desarrollaremos y completaremos ésta.

Por último, mencionaremos algunos trabajos sobre la enseñanza del manejo de representaciones planas de cuerpos espaciales que también hemos tenido en cuenta al organizar los conjuntos de actividades en este módulo. Ya en los primeros años 50 aparecen publicaciones sobre las relaciones entre visualización espacial y dibujo o interpretación de representaciones planas, pero de orientación únicamente psicológica y concordante con los paradigmas vigentes en la época. A mediados de los años 70 se realizan investigaciones que ya se pueden incluir en la perspectiva actual de la Didáctica de las Matemáticas. Mitchelmore (1976; 1980; 1983) reflejan diferentes momentos de una investigación en la que se identifican varias etapas en el desarrollo

de la capacidad de los estudiantes para representar figuras 3-dimensionales. Más reciente es el trabajo del Middle Grades Mathematics Project (MGMP), que ha producido una interesante unidad de enseñanza de diferentes métodos de representación plana (Winter et al., 1986). Apoyándose en esta unidad, en particular en el test incluido en ella, Ben-Haim, Lappan & Houang (1985) han analizado las dificultades de los estudiantes de Enseñanza Primaria ante las representaciones isométricas de módulos policubos (un tipo de sólidos que describiremos en la sección 3).

Como hemos especificado al enumerar los objetivos generales, en esta parte de la investigación nos hemos ocupado del estudio de la capacidad de los estudiantes para manipular mentalmente cuerpos geométricos (en particular poliedros) y para pasar de diferentes tipos de representaciones gráficas a dichos cuerpos o viceversa. En las páginas siguientes presentamos, en primer lugar, un resumen de los elementos que han constituido la base teórica para la elaboración de las unidades de enseñanza de este módulo (secciones 2 y 3), después una descripción de la estructura y contenidos de las unidades de enseñanza que hemos diseñado y experimentado (secciones 4 y 5) y, por último, un resumen y análisis del desarrollo de la experimentación (sección 6).

Los resultados de este módulo de la investigación han sido objeto de diversas participaciones en congresos internacionales en los que hemos presentado partes de esta investigación:

- Conferencia en el III Simposio Internacional de Investigación en Educación Matemática (Valencia, 1991).

- Ponencia invitada en el Reunión del Geometry Working Group durante el XV Congreso del P.M.E. Group (Asís, Italia, 1991).

- Conferencia en el International Symposium on Spatial Representation (Montreal, Canadá, 1991).

- Comunicación en el XVI Congreso del P.M.E. Group (Durham, EE.UU., 1992).

2. PRINCIPALES DESTREZAS DE VISUALIZACIÓN ESPACIAL

Los autores citados al final de la sección 1 usan el término "visualización espacial" en el contexto de las Matemáticas y se refieren, por tanto, a ciertas destrezas mentales que tienen que ver con el aprendizaje de las Matemáticas y que controlan la creación, transformación, transmisión y utilización de las diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos en las aulas (naturalmente, dentro de este conjunto de conceptos tienen un papel destacado los relativos a la Geometría y, sobre todo, a la Geometría 3-dimensional). Dentro de

este complejo contexto de actividades mentales, se pueden diferenciar 3 tipos de elementos: Imágenes, procesos y habilidades.

Las **imágenes mentales**, es decir las representaciones mentales que se pueden hacer de objetos físicos, relaciones, dibujos, conceptos, etc., son el elemento central en toda actividad de razonamiento visual o de visualización espacial. La principal fuente de información sobre la existencia y las características de las imágenes mentales, desde la posición de la Didáctica de las Matemáticas, la proporcionan los trabajos de Norma Presmeg, que ha identificado los siguientes tipos de imágenes mentales (Presmeg, 1986b):

1) Imágenes concretas (fotografías en la mente). Se trata de imágenes figurativas de objetos físicos.

2) Imágenes de fórmulas. Consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las ha visto, por ejemplo, en el libro de texto o en la pizarra. En cierta manera, se trata también de imágenes concretas, si bien en este caso el objeto "fotografiado" no es una figura geométrica sino una fórmula o relación literal. Así, una imagen de fórmula de la función seno consistirá en visualizar el texto $y = \text{sen } x$.

3) Imágenes de patrones. Son imágenes de esquemas visuales correspondientes a relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la propia relación, sino alguna representación gráfica de su significado. Por ejemplo, una una imagen del patrón correspondiente a la función seno consistirá en visualizar un objeto subiendo y bajando entre +1 y -1, o un objeto deslizándose sobre una superficie ondulada.

4) Imágenes cinéticas. Son imágenes que llevan asociada una actividad muscular, generalmente por el movimiento de manos, cabeza, etc. Este tipo de imágenes son muy frecuentes, por ejemplo, cuando se está trabajando en la construcción de una figura y un estudiante se refiere a alguna línea horizontal.

5) Imágenes dinámicas. Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan. Por ejemplo, nos podemos imaginar un punto dando vueltas sobre una circunferencia, o un prisma de base cuadrada acortándose para convertirse en un cubo. No hay que confundir estas imágenes con las cinéticas, pues ahora no hay ningún tipo de actividad física.

Las imágenes visuales (físicas o mentales) son los objetos que se crean, utilizan y transforman en la actividad de visualización espacial. Esta manipulación de las imágenes mentales tiene lugar mediante determinados **procesos** que, según Bishop (1983; 1989), son de dos tipos:

1) Procesamiento visual. Este es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales. También es éste el proceso que permite la transformación de unas imágenes visuales, ya formadas, en otras.

2) Interpretación de información figurativa. Este es el proceso de lectura, comprensión e interpretación de las representaciones visuales usadas en Matemáticas (figuras geométricas, gráficas y diagramas de todo tipo) para extraer la información que contienen. Por lo tanto, este proceso puede verse como el inverso del anterior.

En tercer lugar, nos referiremos a las **habilidades** utilizadas por los individuos para la creación y procesamiento de imágenes visuales. Una relación bastante detallada de las habilidades que pueden integrar la percepción espacial de un individuo cuando está inmerso en el estudio de las Matemáticas es la que nos proporciona Del Grande (1987; 1990):

1) Coordinación motriz de los ojos. Es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo, es decir para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz. Es evidente que los niños adquieren esta habilidad muy pequeños y que no plantea ningún problema a los niños normales de Enseñanza Primaria.

2) Percepción de figura y contexto. Es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. Es necesaria, por ejemplo, cuando la figura que se manipula está formada por varias partes, como en los mosaicos, o cuando el contexto está formado por varias figuras superpuestas que interfieren unas con las otras. Por ejemplo: ¿Cuántos cuadrados hay en la figura 1?

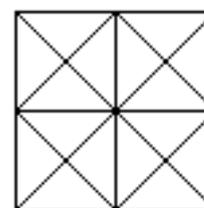


Figura 1.

3) Conservación de la percepción. Es la habilidad para reconocer que un objeto mantiene determinadas propiedades, como su forma o tamaño, constantes aunque deje de verse total o parcialmente o se la observe desde diferente punto de vista (por ejemplo por un cambio de posición del objeto o del observador). Esta habilidad es necesaria para asociar las propiedades identificadas en una imagen mental de un objeto a otras imágenes diferentes del mismo objeto.

4) Reconocimiento de posiciones en el espacio. Es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo (el observador) o con otro objeto, que actúa como punto de referencia. Se utiliza, por ejemplo, para reconocer que el cuadrado de la figura 2-1 sigue teniendo las propiedades de un cuadrado después de haber girado 45° (figura 2-2).

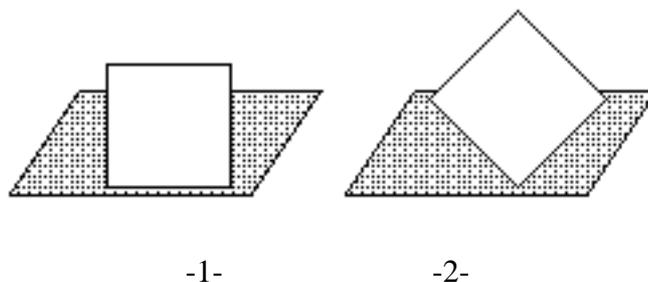


Figura 2.

5) Reconocimiento de las relaciones espaciales. Es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio. Dichas relaciones pueden expresarse de manera relativa, es decir referida solamente a los propios objetos, o en términos absolutos, referidas al observador o a un tercer objeto. Por ejemplo, que están girados, son perpendiculares, simétricos, etc. Esta habilidad es necesaria para resolver el siguiente ejercicio: Construir, con cubos Multilink, el cuerpo de la figura 3.

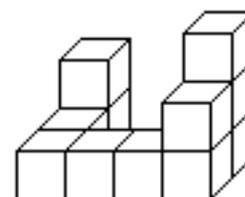


Figura 3.

6) Discriminación visual. Es la habilidad que permite comparar varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales. Un ejemplo es el clásico juego, que aparece en los periódicos, de las 7 diferencias. Otro ejemplo es el siguiente: ¿Cuántos módulos iguales hay en la figura 4?

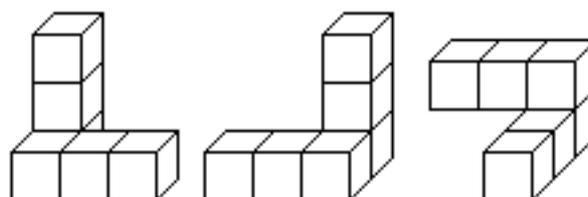


Figura 4.

7) Memoria visual. Es la habilidad para recordar las características visuales y de posición que tenían en un momento dado un conjunto de objetos que estaban a la vista pero que ya no se ven o que han sido cambiados de posición.

Es posible definir otras habilidades que se observan con frecuencia durante la realización de actividades de visualización espacial, pero generalmente se trata de combinaciones de las habilidades descritas. Por ejemplo, podemos identificar la habilidad de "conservación de las relaciones espaciales", que nos permite reconocer que las posiciones relativas de varios objetos no varían cuando se les somete al mismo movimiento (giro o traslación). Esta sería una

combinación de las habilidades de reconocimiento de posiciones en el espacio y de conservación de la percepción.

3. PRINCIPALES TIPOS DE REPRESENTACIONES PLANAS DE CUERPOS 3-DIMENSIONALES

A pesar del interés y deseo de la mayoría de los profesores de E.G.B. por hacer que sus clases de Matemáticas sean lo más prácticas posible y que estén basadas en la manipulación por los niños de modelos que representen los conceptos matemáticos que estén estudiando, la realidad es que, por una variedad de motivos principalmente económicos, el peso que tienen los contenidos (gráficos y textuales) de los libros de los estudiantes sigue siendo muy alto. Por otra parte, no podemos olvidar que en nuestra vida cotidiana (tiendas, estaciones, aeropuertos, periódicos, ...) existen infinidad de símbolos que representan determinados objetos o acciones. Por ambos motivos, las transformaciones $2D \Leftrightarrow 3D$ son una herramienta muy necesaria que debe estar presente en la formación geométrica de los estudiantes de Enseñanzas Primaria y Secundaria.

Aún limitándonos al contexto de los cuerpos geométricos 3-dimensionales, hay numerosas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas centradas en los problemas de la creación de representaciones planas y la interpretación de dichas representaciones. Una constante en estas investigaciones es el reconocimiento de que se trata de un campo difícil en el que todavía queda mucho por hacer y en el que la utilización de la informática permitirá la implantación de nuevas metodologías de enseñanza más eficaces. En el capítulo 4 de Nesher & Kilpatrick (1990) se hace una excelente recopilación de este tipo de investigaciones, por lo que no nos vamos a extender aquí en su descripción. Nuestro objetivo en esta sección es hacer una descripción de los principales tipos de representaciones planas usadas en la enseñanza de la Geometría 3-dimensional, algunos de los cuales hemos utilizado en este módulo.

Como señalábamos en un párrafo anterior, en los distintos campos de aplicación de las Matemáticas se utilizan numerosas formas de representación plana; Gaulin & Puchalska (1987) hacen un recorrido por algunos de ellos. Pero centrándonos en la Geometría 3-dimensional, este autor se refiere a las siguientes formas de representación de sólidos:

- Descripción verbal. Surge de manera relativamente frecuente entre los estudiantes que carecen de instrucción previa en métodos de representación. Como veremos más adelante, también surgió este tipo de representación en nuestros alumnos la primera vez que les planteamos actividades de representación de sólidos.

- Representación ortogonal. Se basa en el dibujo de varias vistas laterales del sólido, cuyo número depende de la regularidad del cuerpo representado (figura 5). Esta forma de representación es importante porque se trata de una de las formas de representación estándar en áreas como la ingeniería industrial.

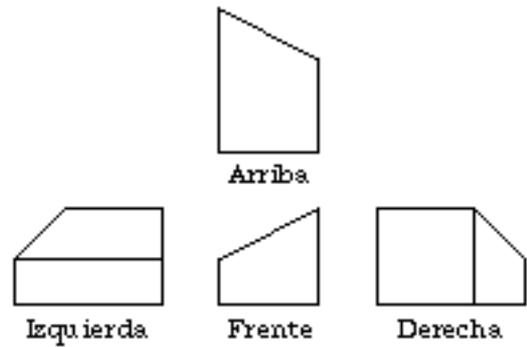


Figura 5.

- Representación ortogonal codificada. Este tipo de representación está asociado a una clase especial de sólidos, que en adelante llamaremos "módulos policubos", consistentes en uniones de una cantidad determinada de cubos unidad iguales (en las figuras 3 y 4 hay algunos ejemplos). La codificación de cada vista lateral permite saber cuántos cubos unidad hay detrás de los representados en dicha vista (figura 6).

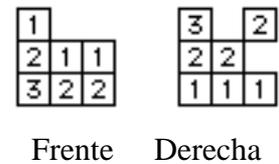


Figura 6.

- Representación plano a plano. Esta representación también está asociada a los módulos policubos y consiste en dibujar la vista superior de cada plano del sólido (figura 7).

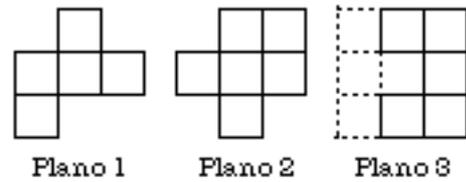


Figura 7.

- Representación isométrica. Este tipo de representación se basa en el uso de una retícula regular, generalmente de triángulos equiláteros. Cuando se utiliza para representar módulos policubos, que es lo más frecuente en Geometría, cada cubo se observa desde uno de sus ejes que pasan por dos vértices opuestos y se representa mediante un hexágono de dicha retícula (figura 8). Hay multitud de obras de arte basadas en dibujos geométricos en cuya base se encuentra esta forma de representación. En particular, están las famosas figuras imposibles de Escher y de Penrose.

- Representación en perspectiva. Se trata de la forma tradicional de representación, si bien los estudiantes, debido a su falta de instrucción al respecto, desconocen la misión de la línea del horizonte, de los puntos de fuga y de su número. Por ejemplo, es frecuente que en los prismas, y sobre todo los cubos, los estudiantes dibujen todas las aristas paralelas a sus opuestas, incluso las que convergen en el punto de fuga (es decir, que en realidad dibujan representaciones oblicuas).

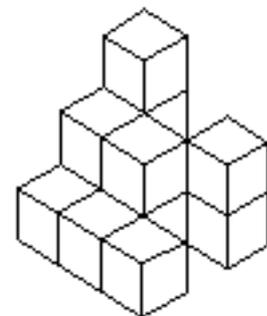


Figura 8.

En las unidades que hemos elaborado no nos hemos ocupado de todas las formas de representación, sino sólo de las más usuales e importantes de ellas. Concretamente, los estudiantes han tenido que utilizar representaciones **ortogonales**, **ortogonales codificadas**, **isométricas** y en **perspectiva**. Con el fin de hacer las denominaciones más significativas, a las representaciones ortogonales y ortogonales codificadas las hemos llamado "de vistas laterales" y "de vistas numéricas", respectivamente.

4. LOS MÓDULOS PARA LA ENSEÑANZA DE DESTREZAS DE VISUALIZACIÓN ESPACIAL

En la mayoría de las numerosas investigaciones realizadas en Didáctica de las Matemáticas sobre la adquisición y el desarrollo de las capacidades de visualización espacial y razonamiento visual destaca como resultado común la influencia positiva de un entorno rico en materiales manipulativos y la propuesta de que los años de Enseñanza Primaria superior (es decir a partir de 5º de E.G.B.) son los más adecuados para realizar la formación y desarrollo de este tipo de capacidades.

Al enumerar los objetivos que nos planteamos en éste módulo del proyecto de investigación, señalábamos que nos hemos interesado por la influencia de diversas variables que pueden estar presentes en las actividades que se propongan a los estudiantes de E.G.B.: Familias de poliedros, tipos de modelos, tipos de material (y en particular tipos de software) y formas de representación. En esta sección vamos a describir, en primer lugar, las características de las diversas componentes del entorno que hemos diseñado y, después, los tipos de actividades que hemos planteado a los estudiantes. Obviamente el entorno y las actividades no son independientes, pues hemos creado cada uno de ellos pensando en el otro, y la estructura del primero sólo se comprenderá bien cuando se conozca el tipo de actividades que se van a realizar en él. Pero la necesaria linealidad de esta descripción impone sus condiciones.

4.1. Materiales utilizados por los estudiantes.

Todos los bloques de actividades que hemos diseñado están basados en la manipulación de diferentes **sólidos geométricos**. Como puede verse en el Anexo 1, hemos propuesto a los estudiantes realizar cada actividad del bloque de "Posiciones" varias veces con sólidos de diferentes familias. Estas son: **Cubo**, **tetraedro**, **octaedro**, **prisma recto de base rectangular**, **pirámide de base cuadrada** y **módulo policubo**. Además, en las actividades del módulo de "Representaciones" hemos utilizado una variedad de módulos policubo.

En la actualidad, al hablar de los materiales utilizables en las clases de Matemáticas, debemos distinguir tres tipos: Los materiales físicos, el software informático y los materiales impresos.

A) Por lo que se refiere a los **materiales físicos**, en Geometría 3-dimensional seguimos disponiendo de los clásicos conjuntos de sólidos (formados generalmente por poliedros y cuerpos de revolución), a los que se añaden algunos otros materiales como los polígonos troquelados, los Polydron (que han sido descritos en los módulos precedentes) y los cubos Multilink (cubos encajables de 1 cm. de arista), que permiten construir diversos sólidos. En las actividades de este módulo del proyecto de investigación hemos utilizado los siguientes tipos de sólidos:

- **Sólidos de caras opacas.** Hemos construido modelos de todas las familias de sólidos mencionadas más arriba: Los poliedros regulares estaban hechos con piezas de Polydron (figura 9-a), la pirámide y el prisma con cartulina y el módulo policubo (figura 9-b) con cubos Multilink. En todos los casos, las caras estaban cubiertas con tramas de diferentes texturas uniformes. En el Anexo 1 se pueden ver ejemplos de estas tramas. En adelante llamaremos "sólidos opacos" a estos modelos.

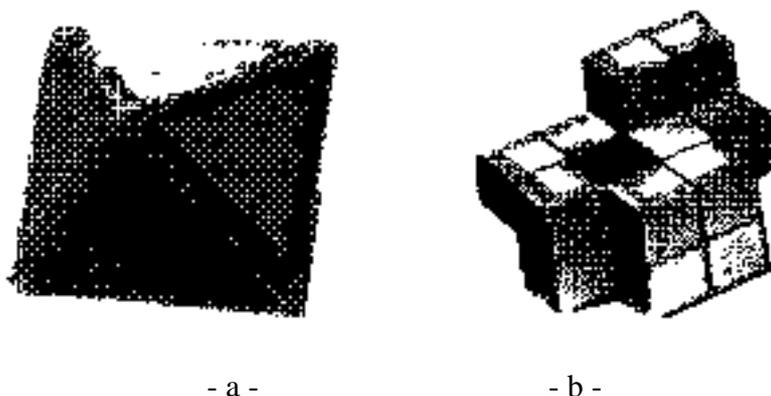


Figura 9.

- **Sólidos de varillas.** Hemos construido con varillas sólidos de las mismas familias que los sólidos opacos, a excepción del módulo policubo (figura 10). En los casos de la pirámide y el prisma, tuvimos cuidado para que, aunque los poliedros de varillas y los opacos no tuvieran el mismo tamaño, sí fueran semejantes.



Figura 10.

- **Cubo de caras figurativas.** Además de los sólidos opacos descritos antes, hemos utilizado en algunas actividades un cubo opaco cuyas caras no están cubiertas por tramas uniformes, sino por figuras diferentes y que son claramente significativas para los estudiantes (una oveja, una manzana, una vela, etc.) (figura 11). Este cubo estaba hecho con cuadrados de Polydron, lo cual permitía deshacerlo y rehacerlo en un gran número de variantes de las posiciones de cada figura, con el fin de evitar que los estudiantes pudieran trabajar de memoria. A estos cubos los llamaremos "cubos figurativos" a partir de ahora.

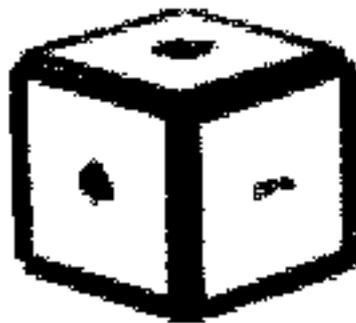


Figura 11.

- **Módulos policubos.** En las actividades del bloque de "Representaciones" utilizamos una variedad de módulos policubos (figura 12). Todos ellos estaban contruidos con piezas Multilink, con el objetivo de que los estudiantes pudieran construirlos o transformarlos con facilidad. Las dimensiones máximas de los módulos que hemos utilizado eran 3x3x3 cubos.



Figura 12.

El sistema de encaje de las piezas se ha revelado como un elemento importante a tener en cuenta: Aunque nuestros alumnos tenían fuerza suficiente para unir y separar los cubos Multilink, en algunas ocasiones las conexiones eran algo duras y esto les distraía de la actividad que estaban realizando y les inducía a equivocarse; es probable que este tipo de piezas no sea adecuado para niños algunos años más pequeños que nuestros alumnos porque encuentren dificultades para unirlos o separarlos. Por otra parte, cada pieza está formada por 1 cara "macho" y 5 caras "hembra", lo cual produce en algunas ocasiones dificultades para hacer las conexiones.

B) El acceso a los **ordenadores** y al **software** de simulación ha supuesto una interesante innovación en los métodos de enseñanza de las Matemáticas, ya que han puesto al alcance de profesores y alumnos objetos y experiencias que antes era imposible tener. Disponemos hoy de infinidad de programas que representan conceptos y propiedades de cualquier parte de las Matemáticas (aritmética, álgebra, geometría, teoría de números, probabilidades, estadística, etc.).

B) El acceso a los **ordenadores** y al **software** de simulación ha supuesto una interesante innovación en los métodos de enseñanza de las Matemáticas, ya que han puesto al alcance de profesores y alumnos objetos y experiencias que antes era imposible tener. Disponemos hoy de

infinidad de programas que representan conceptos y propiedades de cualquier parte de las Matemáticas (aritmética, álgebra, geometría, teoría de números, probabilidades, estadística, etc.).

Para el estudio de la Geometría 3-dimensional, se dispone actualmente de una variedad de programas de ordenador que proporcionan representaciones dinámicas de mucha calidad de cuerpos que pueden llegar a ser muy complejos; algunos de esos programas están elaborados expresamente para la enseñanza de la Geometría, mientras que otros fueron inicialmente concebidos para CAD (diseño asistido por ordenador). En esta experimentación nuestros alumnos han trabajado con dos ordenadores Macintosh SE del Departament de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València y con tres programas diferentes que permitían realizar diversas clases de actividades. Estos programas son:

- **Phoenix 3D**. Este es un programa comercializado que permite representar sólidos 3-dimensionales opacos o transparentes y girarlos libremente. Para efectuar un giro, se debe seleccionar el icono correspondiente (figura 13¹) y, manteniendo pulsado el botón del ratón, se debe mover éste en la dirección correspondiente al giro seleccionado. Mientras se efectúa dicho movimiento, aparece en la pantalla una pequeña pirámide que gira de manera continua y automática en la dirección seleccionada y la longitud del movimiento del ratón determina el ángulo del giro (cuyo valor puede verse en la pantalla en todo momento); estas dos herramientas (la pirámide y el desplazamiento del ratón) permiten realizar los giros con un grado intermedio de intuitividad. En el momento en que se suelta el botón del ratón, el ordenador presenta la nueva posición del sólido que se está manipulando. Por lo tanto, en Phoenix 3D el usuario no ve moverse al sólido real, sino a la pequeña pirámide accesoria, por lo que debe determinar la amplitud del giro que desea realizar antes de ver el resultado.

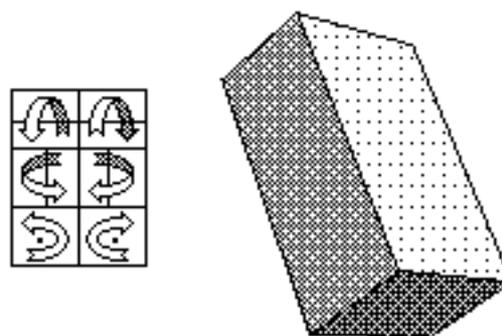


Figura 13.

Para las actividades de "Posiciones", hemos usado Phoenix 3D con todos los sólidos mencionados al comienzo de esta sección, excepto con el cubo figurativo, en sus formas opaca y transparente. También hemos usado este programa con 5 módulos policubos diferentes en las actividades de "Representación".

- **3D Images**. Se trata de un programa, del cual hemos usado una versión piloto, que permite representar sólidos 3-dimensionales transparentes y girarlos libremente. A diferencia del

¹ Debido a la diferencia de dimensiones entre la pantalla del ordenador y las hojas donde está impresa esta memoria, esta figura y otras posteriores sólo reflejan de forma aproximada la posición de los objetos en la pantalla.

programa anterior, 3D Images realiza los movimientos de manera continua y automática, pues mientras se mantiene pulsado el botón del ratón sobre el icono de un determinado giro (figura 14), el usuario puede observar cómo se mueve el sólido, manteniéndose un movimiento continuo del mismo hasta que se suelta el botón. Así pues, a diferencia de Phoenix 3D, este programa es muy intuitivo, ya que para realizar un giro no es necesario calcular la amplitud del ángulo sino, simplemente, observar la pantalla y detener el giro cuando el sólido ha llegado a la posición deseada. En la sección 6 comentaremos la influencia que tiene la diferencia de uso de estos dos programas en el comportamiento de los estudiantes, ya que esta es una de las variables que nos propusimos analizar en este módulo.

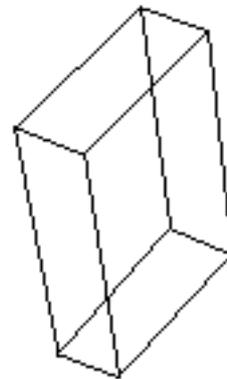


Figura 14.

Hemos usado el programa 3D Images en las actividades de "Posiciones" y con todos los sólidos de varillas mencionados al comienzo de esta sección.

Aunque tanto Phoenix 3D como 3D Images permiten girar los sólidos hasta cualquier posición, los únicos movimientos que realmente permiten hacer son giros, de cualquier amplitud y sentido, alrededor de alguno de los tres ejes de coordenadas X, Y y Z, siendo el eje Z perpendicular al plano de la pantalla (figura 15).

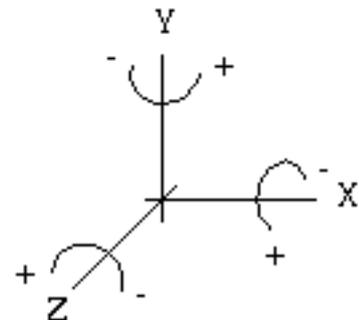


Figura 15.

- **HyperCard.** Se trata de un programa muy versátil que simula la estructura de un fichero, en el que cada ficha puede contener diversos campos de texto, gráficos, interactivos o de control, algunos de los cuales son invisibles al usuario y contienen instrucciones de control indicándole al ordenador qué acciones tiene que realizar a continuación o en qué dirección debe continuar la ejecución. Hemos diseñado varias pilas de fichas de HyperCard para diferentes cometidos:

1. Control: Esta pila se compone de 2 fichas encargadas de facilitar a los estudiantes el uso del ordenador y el paso de unos programas a otros (en la figura 16 se ve una de las fichas). Cada ficha contiene diversos "botones" de manera que, cuando un estudiante pulsaba uno de ellos, se abría automáticamente el archivo correspondiente a la actividad que el estudiante iba a realizar. Además, al terminar de usar ese archivo, el ordenador devolvía automáticamente el control a estas fichas.

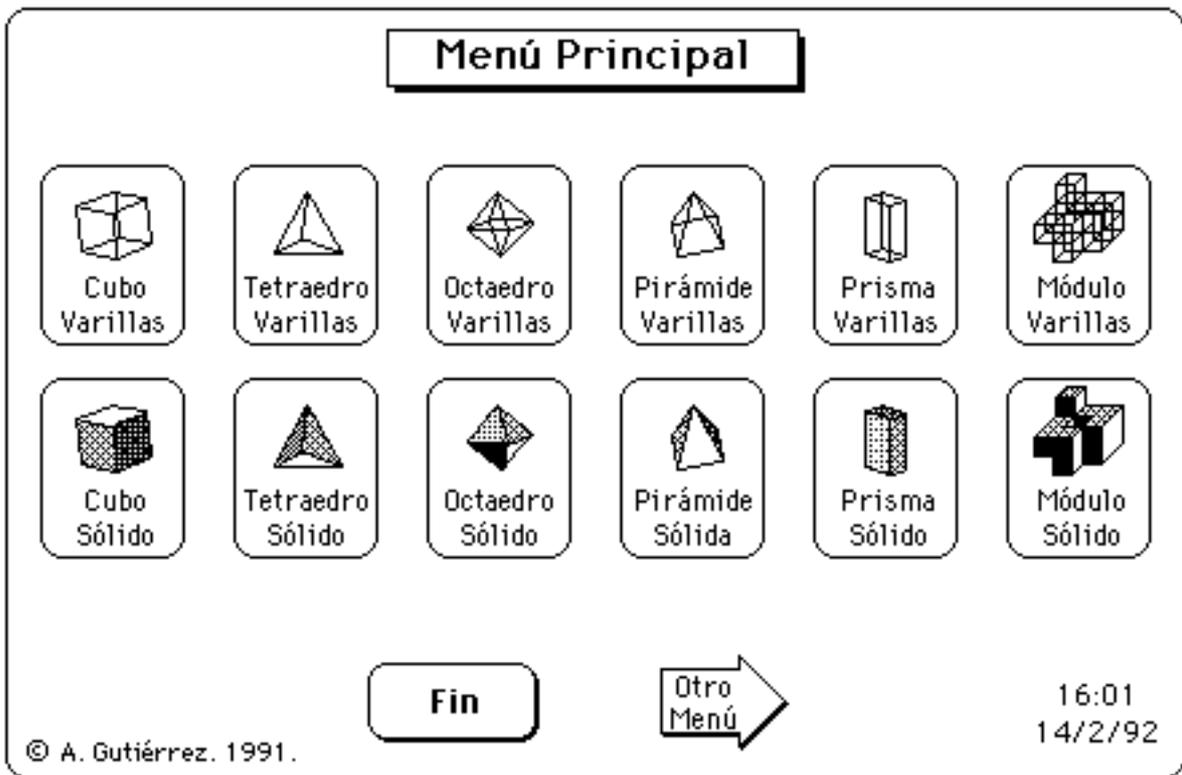


Figura 16.

2. Movimiento de cubos figurativos: Se trata de una pila en la que cada ficha presenta una de las 24 posiciones posibles de un cubo figurativo junto a varios botones con forma de flecha que permitían mover el cubo alrededor de los tres ejes X, Y y Z (figura 17). A diferencia de los otros dos programas utilizados, en este caso los únicos giros posibles eran de $\pm 90^\circ$. Hemos diseñado 10 pilas, para 10 cubos diferentes.

3. Representaciones planas de módulos policubos: Cada pila está formada por las diferentes vistas laterales, numéricas o isométricas posibles de un módulo (figura 18). Al igual que en el caso anterior, las fichas disponen también de botones que permitían a los estudiantes pasar de una vista a otra cuando lo necesitaran. Hemos diseñado un total de 6 pilas.

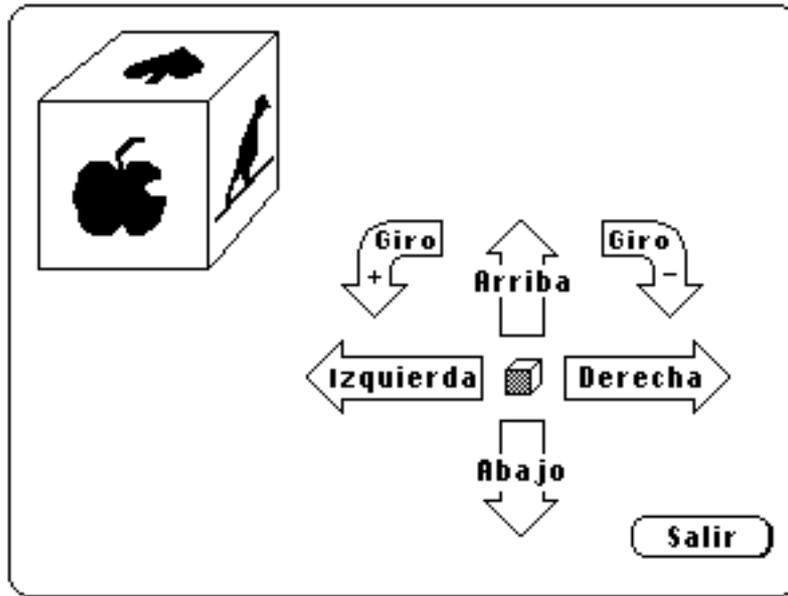


Figura 17.

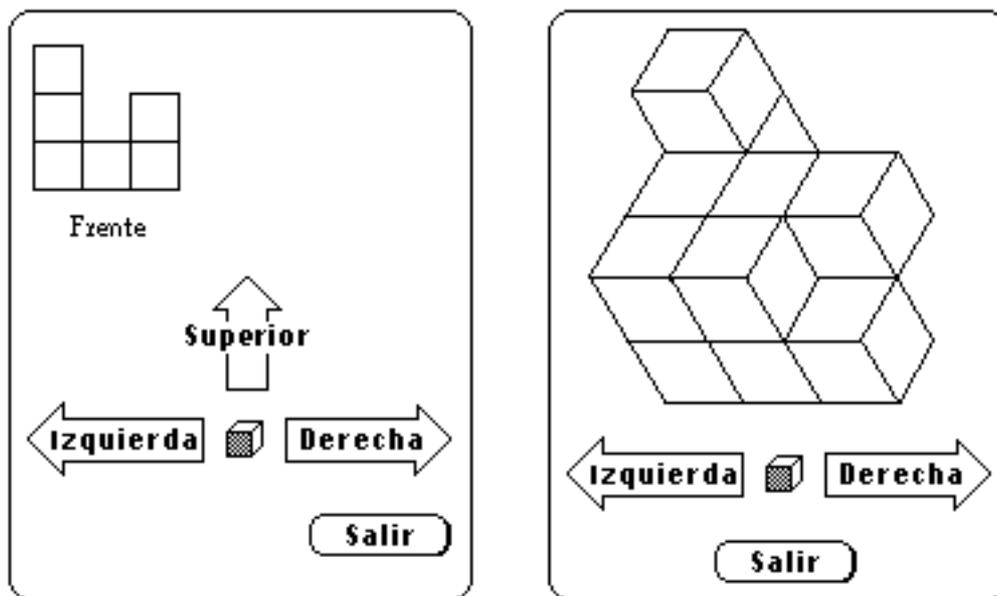


Figura 18.

4. Representaciones planas de poliedros, cubos figurativos o módulos policubos: Se trata de pilas cuyas fichas contienen diferentes "fotografías" (en perspectiva, ortogonales o isométricas) de sólidos y que no permiten el movimiento del sólido representado. Se utilizaron en diversas actividades y su objetivo común era observar si hay diferencia en el comportamiento de los estudiantes cuando se encuentran ante representaciones planas en hojas de papel o las mismas representaciones en la pantalla del ordenador.

C) Los **materiales impresos**, constituyen la principal fuente de información para los estudiantes (los libros de texto) y seguirán siendo la principal fuente de información en su vida futura (libros, periódicos, etc.). Por estos motivos, parte de las actividades propuestas están basadas en la interpretación de **representaciones planas** de los sólidos enumerados al principio de esta sección. Se ha cubierto todas las representaciones planas mencionadas en la sección 3, para todos los tipos y familias de sólidos empleados. En algunas actividades los estudiantes tenían que interpretar representaciones dadas y en otras tenían que dibujarlas.

Con el fin de uniformizar la relación entre los 3 soportes empleados para representar los sólidos (físico, informático e impreso), las figuras en papel eran impresiones de los sólidos utilizados en el ordenador. De esta manera, se garantizaba que las tramas de los sólidos opacos eran realmente las mismas en los 3 soportes y que se trataba realmente de los mismos sólidos, pues las dimensiones de los cuerpos eran las mismas, o proporcionales, en los 3 casos.

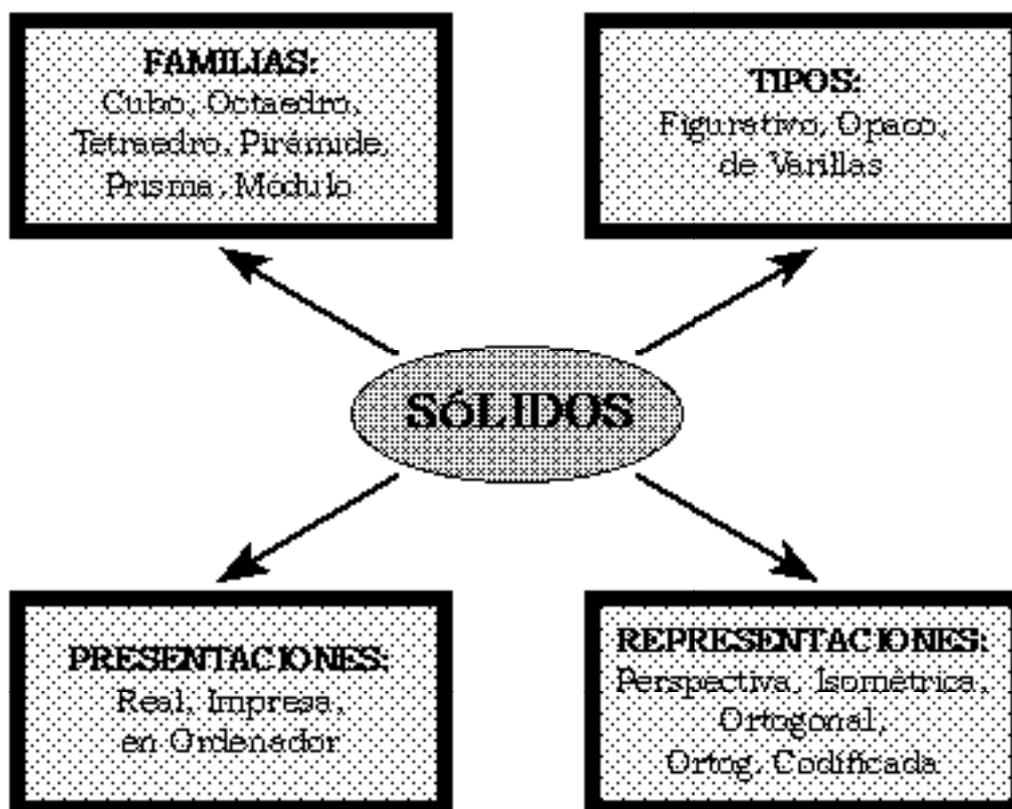


Figura 19.

Para concluir, el diagrama de la figura 19 resume los diferentes elementos que hemos descrito en las páginas anteriores, que integran el micro-mundo creado como soporte de las actividades de este módulo.

4.2. Actividades planteadas a los estudiantes.

En el Anexo 1 está recogido el conjunto completo de actividades diseñadas para este módulo del proyecto de investigación. En total hemos diseñado 50 actividades, la mayor parte de las cuales consta de varios ejercicios similares planteados sobre sólidos o formas de representación diferentes. Están divididas en dos partes: Actividades de "Posiciones", que se basan en la colocación de los sólidos o sus representaciones en posiciones específicas en el espacio, y actividades de "Representaciones", que se orientan a dibujar e interpretar diferentes tipos de representaciones planas diferentes de la perspectiva. Desde el punto de vista de sus contenidos específicos, las actividades se pueden dividir en 4 grandes tipos:

1) Actividades de **comparación de sólidos**: A la vista de dos representaciones de sólidos, los estudiantes debían determinar si ambas correspondían al mismo sólido o no. Las actividades Pos-1 y Rep-2a (ver el Anexo 1) son ejemplos de este tipo.

2) Actividades de **movimiento de sólidos**: Dadas dos posiciones diferentes de un mismo sólido, los estudiantes debían mover el sólido desde una de ellas hasta la otra. La actividad Pos-5b es un ejemplo de este tipo.

Estos dos tipos de actividades componen el núcleo principal de las actividades de Posiciones, si bien también había actividades de dibujo en este grupo. En las actividades de Posiciones sólo se trabajó con representaciones en perspectiva.

3) Actividades de **representación de sólidos**: Los estudiantes tenían que dibujar en papel, en alguna de las formas de representación usadas, un sólido que se les presentaba. Las actividades Pos-9, Pos-11a y Rep-4a son ejemplos de este tipo.

Como puede observarse en el Anexo 1, tanto en las actividades de comparación como de movimiento y dibujo, se hicieron combinaciones de las diferentes familias, tipos y formas de presentación de los sólidos.

4) Actividades de **construcción de sólidos**: Los estudiantes tenían que construir un módulo policubo que correspondiese a una representación dada. La actividad Rep-3b es un ejemplo de este tipo.

Las actividades de dibujo y de construcción constituyeron el núcleo central de las actividades de Representaciones, aunque también se incluían algunas actividades de comparación en este grupo.

Como se ha visto, el entorno de trabajo de los estudiantes estaba basado en los 3 contextos más importantes que actualmente se pueden utilizar para la enseñanza de la Geometría (físico, informático e impreso). Puesto que estábamos interesados en promover el desarrollo integral de las habilidades y procesos de visualización y razonamiento espacial de los estudiantes, un

componente central del trabajo que han debido realizar ha consistido en la utilización simultánea de algunos de esos contextos y en el transvase de información de unos a otros. Para lograr esto, todas las actividades que hemos diseñado están planteadas en base a 2 de los 3 contextos mencionados, tal como muestra el diagrama de la figura 20.

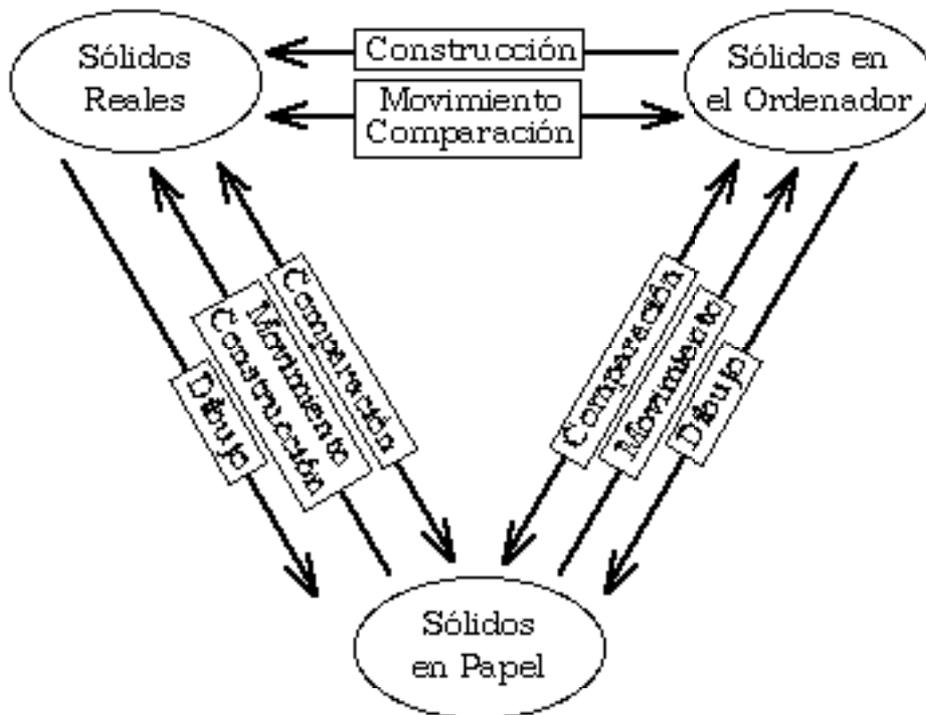


Figura 20.

Las flechas del diagrama indican las direcciones posibles de realización de las actividades. Así, por ejemplo, las actividades de construcción sólo es posible realizarlas con sólidos reales, si bien el modelo a construir puede ser una figura presentada de forma impresa o en la pantalla del ordenador. Del mismo modo, sólo es posible hacer actividades de dibujo sobre papel y es posible comparar dos representaciones de sólidos tomando como punto de partida cualquiera de las 3 formas de presentación de los sólidos (en realidad se trata de una relación simétrica).

En la sexta sección de este módulo haremos una descripción detallada de las características de las diferentes clases de actividades y de las respuestas típicas que hemos encontrado para cada una de ellas.

5. LOS ESTUDIANTES

La experimentación de este módulo se inició a principios de abril de 1991. Dado que los niños llevaban trabajando con nosotros, en los módulos precedentes, desde diciembre de 1990, se produjo un fenómeno bastante frecuente en actividades de este tipo, que se realizan en horas fuera de clase y que no tienen ninguna influencia explícita en las calificaciones del curso: Parte

de los estudiantes (generalmente aquéllos a los que les resulta más difícil seguir la marcha de las actividades y, por lo tanto, menos atractivo el trabajo) empezó a dar muestras de cansancio. En vista de ello, antes de empezar la experimentación de este tercer módulo, les expusimos a los estudiantes nuestros planes de seguir trabajando hasta final de mayo y, como imaginábamos, algunos niños dijeron que no querían seguir, por lo que en este tercer módulo sólo participaron 3 de los estudiantes que habían estado colaborando hasta entonces: Enrique, Mercedes y María del Carmen.

Ya hemos descrito en los módulos anteriores las características generales y personales de los estudiantes que han tomado parte en la experimentación (Centro de procedencia, curso, edades, etc.), con la excepción de Mercedes, por lo que no es necesario repetir aquí esa información referente a los 3 niños con los que hemos trabajado.

Mercedes se había incorporado a la experimentación al final de las sesiones del módulo anterior, a pesar de lo cual no mostró ninguna carencia achacable a la falta de conocimientos de los cuerpos geométricos que utilizaba. La forma de selección de esta niña fue la misma que para sus compañeros. Se trataba de una niña con una capacidad para la visualización espacial media-baja, cosa que se reflejaría constantemente a lo largo de las sesiones de este módulo. Estaba interesada por trabajar y aprender, pero se rendía pronto cuando las tareas que le proponíamos le resultaban difíciles. Su diferencia de capacidad de manejo de los cuerpos espaciales con M^a Carmen se traducía en que pocas veces trabajaron juntas, pues su lentitud de pensamiento, unida a la agilidad mental de M^a Carmen, se traducían en que generalmente era ésta quien resolvía los problemas, ante la desesperación de Mercedes y de nosotros mismos, que deseábamos verla actuar.

Trabajar con un número de estudiantes tan reducido como el que hemos tenido en la experimentación de estas actividades tiene el inconveniente de que su comportamiento no puede ser generalizado sin riesgos a toda la población estudiantil de 6^o de E.G.B., si bien hemos tenido la suerte de contar con 3 estudiantes cuyas capacidades de razonamiento y visualización son netamente diferentes, por lo que hemos podido obtener descripciones de un rango de comportamientos razonablemente amplio.

Por otra parte, este reducido número de niños ha tenido la ventaja de que nos ha sido mucho más fácil hacer un seguimiento detallado de cada estudiante, por lo que esta última parte de la investigación la podemos considerar dentro de los parámetros típicos de un estudio de casos; de hecho, el análisis que realizaremos en la sección 6 tiene esto en cuenta.

6. RESUMEN Y ANÁLISIS DEL DESARROLLO DE LAS CLASES

La experimentación de este módulo se ha desarrollado en 23 sesiones, con una duración media de 50 minutos cada una. Las clases se llevaron a cabo en el mismo lugar y con el mismo horario que en los módulos anteriores. Dependiendo de la actividad concreta, los estudiantes trabajaron de manera individual (1 + 1 + 1 estudiantes), en un solo grupo (3 estudiantes) o formando dos grupos (2 + 1 estudiantes). Esta última organización fue la más frecuente debido, por una parte, a que en un trabajo individual los estudiantes apenas exteriorizan sus pensamientos, por lo que se perdería una gran cantidad de información necesaria para entender cuáles son sus procesos de razonamiento y sus estrategias de trabajo y, por otra parte, a que en la mayoría de las actividades, el trabajo de los 3 niños en un sólo grupo habría provocado la inhibición del o los estudiantes menos hábiles, por lo que éstos habrían aprendido menos y nosotros sólo habríamos podido observar el comportamiento del o los estudiantes más avanzados (situación que se refleja claramente en las grabaciones de las clases correspondientes a los módulos 1 y 2).

Para realizar las actividades, cada estudiante disponía de una libreta formada por los textos y figuras de todas las actividades, en la que, cuando era apropiado, escribían o dibujaban sus respuestas. También disponían de dos ordenadores Macintosh SE con el software descrito en la sección 4.1 B, de hojas de papel blanco o punteado para las actividades de dibujo y de un conjunto para cada estudiante formado por los sólidos descritos en la sección 4.1 A y una cantidad elevada de cubos Multilink sueltos para las actividades de construcción de módulos policubos.

Todas las sesiones de este módulo fueron grabadas en video. Utilizamos 2 cámaras, con el fin de poder recoger con detalle la actividad de los estudiantes cuando trabajaban separados (en particular cuando estaban manipulando los dos ordenadores), pues de otra manera hubiera resultado sumamente difícil hacer un seguimiento continuo de cada niño. Solamente utilizamos 1 cámara en algunas actividades en las que los 3 estudiantes trabajaban juntos (en actividades de dibujo o construcción, por ejemplo) y era posible seguir su actividad simultánea sin dificultad. De esta manera, hemos podido recoger toda la actividad de cada estudiante durante las 23 sesiones en cerca de 30 horas de video, que han sido la base, junto a los dibujos de los estudiantes, para el análisis que presentamos en esta sección.

Ya hemos dicho anteriormente que los estudiantes que han participado en este módulo han realizado la mayoría de las 50 actividades que hemos diseñado, pero no lo han hecho siguiendo el orden secuencial de los números de las actividades, sino que han alternado unos tipos de actividades con otras: Durante las primeras 9 sesiones los niños realizaron diferentes clases de actividades del bloque de Posiciones y a partir de la décima sesión realizaron actividades de Posiciones y de Representaciones. Los motivos para actuar de esta manera han sido evitar el

aburrimiento de los niños por tener que realizar varias actividades seguidas iguales y promover la utilización de manera alternada de diferentes destrezas de visualización espacial.

En el resumen y análisis de las respuestas de los estudiantes que presentamos a continuación vamos a comentar por separado cada tipo de actividades descrito en la sección 4.2, por lo que no seguiremos un orden cronológico estricto. Tampoco vamos a hacer una descripción exhaustiva de la forma como cada estudiante resolvió cada una de las actividades, pues ello daría lugar a una repetición demasiado larga y tediosa, sino que describiremos los distintos comportamientos diferenciados que hemos observado y presentaremos ejemplos mediante transcripciones de fragmentos de las grabaciones.

Por último, queremos hacer notar la enorme dificultad (y a veces imposibilidad total) que supone trasladar a un texto la actividad de los estudiantes cuando mueven un poliedro con sus manos: Es evidente que la cámara de video no puede ir más allá de reflejar de manera aproximada las manipulaciones del estudiante, pues nunca es capaz de grabar exactamente la forma como éste ve el sólido que manipula. Por el contrario, cuando se trata del movimiento de un sólido en el ordenador, la cámara sí puede ver exactamente lo mismo que los estudiantes, por lo que las descripciones más detalladas y exactas que podemos hacer corresponderán a las actividades de trabajo en el ordenador, de construcción de módulos y de dibujo en papel.

6.1. Actividades de comparación de sólidos.

En la figura 21 se pueden ver dos tablas que resumen las actividades de comparación de los bloques de Posiciones y de Representaciones. En la cabeceras de la izquierda de las tablas aparecen las diferentes formas de presentación de los sólidos usadas en cada actividad y en las cabeceras superiores aparecen los diferentes tipos de sólidos y de representaciones planas utilizados. Tanto en estas tablas como en las análogas de los apartados siguientes, los números de actividad en cursiva corresponden a aquéllas que no han sido realizadas por los estudiantes.

POSIC.	Cubo figurat.	Sólido opaco	Sólido de varillas	REPRES.	Isométr.	Vistas laterales	Vistas numér.
Real, Ord.	(*)	(*)	(*)	Real, Papel	<i>2a, 2b, 11a</i>	<i>2a, 2b, 11b</i>	2a, 2b
Real, Papel	(*)	1	2a	Ord., Papel			
Ord., Papel	7a	7b	2b				

(*) Demasiado fácil para nuestros alumnos.

Figura 21. Actividades de comparación de sólidos.

El objetivo global de estas actividades era fomentar la observación minuciosa de los poliedros, analizando las relaciones entre unos elementos del sólido y otros (igualdad de caras, aristas o ángulos, paralelismo de caras o aristas, perpendicularidad, etc.). Los diferentes tipos de sólidos generan distintas necesidades de uso de dichos elementos y propiedades, en función del tipo y la complejidad de la información proporcionada por los sólidos, cosa que vamos a detallar en las páginas siguientes. Así, es natural que la comparación de los cubos figurativos se basara en la posición de los dibujos de las caras, que la de los poliedros opacos se basara en las tramas de las caras y en la forma que adquieren las caras desde el punto de vista del observador y que la comparación de los poliedros de varillas se basara en las posiciones de las aristas y en las formas de los polígonos que forman unas aristas con otras al cruzarse o cortarse.

En todas estas actividades los estudiantes tienen que hacer uso, principalmente, de la habilidad de discriminación visual, necesaria para comparar componentes de los sólidos, si bien en los cuerpos de varillas la habilidad de percepción de figuras y contexto también resulta, en determinados casos, necesaria.

Revisaremos las diferentes actividades recogidas en la figura 21, empezando por las actividades de Posiciones y, dentro de éstas, por las de comparación de sólidos reales con representaciones en papel. De manera general, diremos que la forma de resolver estas actividades por nuestros alumnos consistió en mover el sólido (real o del ordenador) tratando de ponerlo en la misma posición que el sólido de la lámina que estaban analizando; cuando no lo conseguían, su conclusión era que ambos sólidos no eran iguales.

La actividad Pos-1 (comparación de sólidos opacos reales con representaciones en perspectiva en papel) fue la primera que se realizó al iniciar las sesiones de esta parte de la experimentación. Ello creó algunas situaciones de confusión lógicas por el desconocimiento que tenían los estudiantes del material. La principal dificultad se derivó de la asociación de las tramas de las caras de los cuerpos reales y las dibujadas en el papel. Es necesario tener en cuenta que el ordenador no varía la trama de una cara aunque ésta cambie de posición, por lo que la trama de una cara que se ve en el ordenador (y por lo tanto también en el papel) es la misma cuando la cara está paralela a la pantalla o cuando está casi perpendicular a la misma (comparar, por ejemplo, las tramas con cruces blancas de los sólidos 1, 2 y 4 de la actividad Pos-1.1); sin embargo, las tramas de los sólidos reales sí cambian un poco de aspecto al cambiar la posición de las caras respecto del observador. Un ejemplo lo tenemos en el siguiente diálogo² a propósito del sólido 6 de Pos-1.2. Aunque este poliedro (figura 22-a) no corresponde realmente a un tetraedro regular, el diálogo recoge la parte inicial del intento de resolución de los estudiantes,

² En las transcripciones usaremos las iniciales de los nombres de los estudiantes, C(armen), E(nrique) y M(ercedes), y P(rofesor) para indicar a cualquiera de los dos miembros del equipo investigador que desarrollamos este módulo.

que se centra en el problema de colocar el tetraedro real de manera que coincidan las tramas de las caras situadas en las mismas posiciones. Una vez resuelto esto, los estudiantes se centraron, con un poco de ayuda nuestra, en la comparación de las formas de las caras (esta parte del diálogo no la hemos incluido aquí).

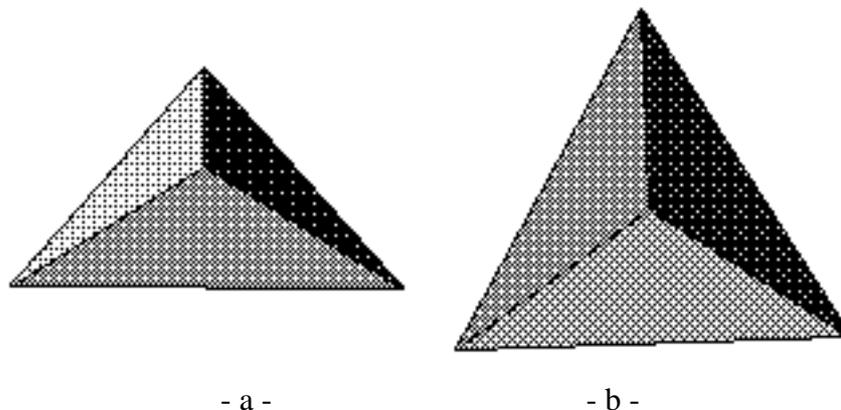


Figura 22.

[Los niños empezaron el ejercicio, como en los casos anteriores, buscando las tramas que correspondían a las caras que se veían en la lámina. En particular, M^a Carmen pone su tetraedro como muestra la figura 22-b]

C.: *Entonces, no puede ser.*

[M^a Carmen creía que no se podía colocar el tetraedro en la posición del cuerpo 6 porque no conseguía poner las tramas en las posiciones correspondientes. Su problema es que sólo era capaz de girar su sólido alrededor del eje Z]

M.: *Pues yo sí lo tengo ... No.*

C.: [siguiendo con su argumentación] *Porque esta cara* [señalando la superior izquierda de su tetraedro, figura 22-b] *tendría que estar aquí abajo* [señalando la cara inferior del tetraedro de la lámina].

P.: *A ver, ¿así, por ejemplo?* [moviendo el tetraedro alrededor del eje Z para poner esa cara en la posición que dice M^a Carmen]

C.: *Pero es que esta cara tendría que estar aquí* [señalando las caras negras de su sólido y del de la lámina], *¿no?, porque es la misma.*

P.: *Sí.*

C.: *Y entonces, esta cara que hay aquí, ¿no es la misma que ésta? Pues tendría que estar aquí* [se refería a las mismas caras que al principio de esta transcripción].

M.: *Yo sí lo puedo ver.*

P.: *M^a Carmen, mira a ver cómo lo puede ver Mercedes.*

C.: *Es que ella las tiene diferentes. Yo las tengo cambiadas* [M^a Carmen creía que los dos tetraedros eran diferentes, aunque realmente eran iguales].

P.: *No creo. Mira a ver, que son los dos iguales* [comprueban las caras].

M.: *Yo sí lo veo.*

C.: *Así sí.*

La constatación de la existencia de este problema, que nosotros no habíamos previsto, hizo que en adelante diéramos poca importancia a las diferencias que pudiera haber entre unos sólidos y otros por causa de las tramas, de manera que, si la única diferencia entre un sólido real y otro en el ordenador o en papel era la tonalidad de las tramas, optamos por considerarlos iguales. Las únicas excepciones fueron algunos casos en los que las diferencias entre las tramas eran muy acusadas y no había posibilidad de confusión, como tonos casi blancos frente a otros casi negros.

Otra dificultad inicial de Mercedes fue la de interpretar qué eran las figuras de las láminas, pues creía que los sólidos representados podían ser fragmentos del cuerpo que tenía en la mano. Así, al analizar el cuerpo 3 de Pos-1.1, se produjo el siguiente diálogo:

C.: *Esta no se puede poner aquí.*

P.: *¿Por qué?*

M.: *Sólo se ve una parte* [se refería a la cara negra del poliedro 3].

C.: *No es que esto no se ve una parte, esto se ve todo. Lo que pasa es que la inclinación hace que se vea así* [señalando la cara negra en la lámina].

P.: *Eso es la cara entera.*

M.: *¿Entera?*

P.: *Sí.* [dirigiéndose a Mercedes] *¿Tú puedes ponerlo* [el cubo real] *de manera que se vea así* [señalando a la lámina]?

Esta dificultad fue desapareciendo poco a poco a lo largo de la sesión, pudiendo considerarla superada después de haber resuelto los diferentes ejercicios de la actividad Pos-1.

Comentábamos al principio de este apartado que los niños no realizaron el mismo tipo de análisis con los sólidos opacos que con los de varillas. En los primeros la atención se dirigió preferentemente (aunque no exclusivamente) a la forma de las caras. Por ejemplo, al analizar la pirámide 6 de la actividad Pos-1.4, Mercedes y M^a Carmen se fijaron en que si colocaban sus pirámides de manera que alguna cara se viera como su correspondiente de la pirámide 6, entonces otra de las caras tenía un aspecto completamente diferente de su pareja; hasta el final, cuando ya habían comprobado que esa figura no correspondía a su pirámide, no hicieron alusión al no paralelismo de las aristas de la base:

M.: *Esta no se puede ver.*

C.: *Imposible.*

P.: *¿Por qué?*

M.: *Porque esto* [señalando a la cara oscura superior del sólido 6] *tendría que estar así ... Esta* [señalando la cara blanca], *si la ponemos así* [como en el sólido 6] *coincide más o menos, pero entonces ésta ya no* [la cara oscura opuesta a la blanca].

P.: *¿Por qué no coincide la de arriba?*

M.: *Esta [la cara del sólido] es mucho más puntiaguda.*

C.: *Esto [señalando el vértice de la pirámide 6] parece que está más metido y esto [el vértice de la pirámide real] más ...*

P.: *¿Más hacia afuera?*

C.: *Sí.*

P.: *Y tú puedes poner la pirámide de manera que la cara blanca se vea igual que la que hay en el dibujo?*

C.: *No ... Además, esto está torcido [señalando la arista superior de la pirámide 6].*

P.: *La arista de arriba está inclinada.*

Por el contrario, con los sólidos de varillas, los estudiantes usaron más a menudo como base para sus argumentaciones las relaciones entre las aristas (igualdad, paralelismo, etc.) y menos la forma de las caras. Dependiendo de la figura en concreto, los argumentos de los niños se basaban en las aristas, en las caras, o en ambos elementos a la vez. La respuesta de M^a Carmen al sólido 5 de Pos-2a.1 fue:

C.: *El 5 seguro que no se puede.*

P.: *¡Qué rápida eres!*

C.: *Hombre, es que estas 2 aristas están inclinadas [señalando las aristas marcadas en la figura 23-a] y tienen que ser perpendiculares a la cara esta. Tienen que ser perpendiculares [señalando dos aristas del cubo real].*

P.: *Pero, ¿puede ocurrir que cuando lo pongas en perspectiva no sean ya perpendiculares?* [en una ocasión anterior habíamos hablado de la no conservación del paralelismo de las aristas cuando la cara que las contiene no está en el plano de la hoja de papel o la pantalla del ordenador].

C.: *Pero no puede ser porque esta cara [la superior del poliedro 5] no parece ser igual a ésta [la inferior]. Esto parece como si estuviese este cubo [el real] así pero esto, esta arista [la marcada en la figura 23-b], así, más metida para adentro [manipulando el cubo real y deformándolo al apretar donde marca la flecha en la figura 23-b].*

En este protocolo hemos visto cómo M^a Carmen inició su argumento observando la no perpendicularidad de las aristas y lo concluyó observando la no igualdad de las caras. En otras ocasiones sólo había una forma de orientar las explicaciones, como ocurrió en la representación 1 de Pos-2a.3, donde el elemento clave son los dos pares de aristas interiores (marcados en la figura 24):

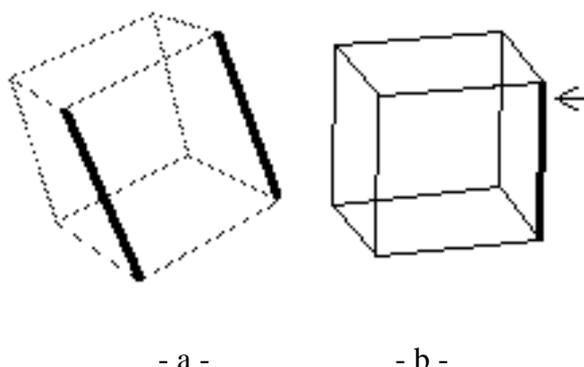


Figura 23.

[los 3 estudiantes colocaron sus octaedros en una determinada posición y dijeron que sí lo veían igual que el sólido 1]

P.: *Espera un momento, M^a Carmen. Yo en tu cuerpo veo que estas aristas* [las de la izquierda marcadas en la figura 24] *están inclinadas hacia la izquierda y éstas* [las de la derecha marcadas en la figura 24] *hacia la derecha, ¿no? ... A ver cómo lo pones tú, Enrique. ¿Hacia qué lado está inclinada esta arista? Hacia la izquierda ¿no?*

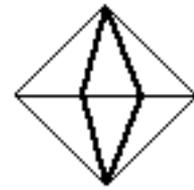


Figura 24.

E.: *Sí.*

P.: *¿Y ésta?*

E.: *Hacia la derecha.*

P.: *¿Y ahí* [en el sólido 1], *cómo están?*

M.: *Yo ya lo tengo.*

P.: *¿Están inclinadas* [las aristas] *igual que aquí* [en la figura 1]?

M.: *Sí.*

P.: *¿Seguro? ¿Y éstas de atrás?*

M.: *No, porque ésta* [arista del sólido] *está así y ésta* [arista del sólido 1] *está así, inclinada.*

P.: *Entonces, a ver ...*

M.: *No se puede ver.*

P.: *A ver si lo puedes poner igual.* [Mercedes siguió intentando hacer que su octaedro se viera como el de la lámina]

C.: *Sí que se puede* [describiendo las correspondencias entre las aristas de su poliedro y el de la lámina].

P.: *Pero ésta de aquí* [señalando una arista del poliedro real inclinada /], *¿hacia qué lado está inclinada?*

C.: *Así* [indicando con la mano la posición /]. *No puede ser.*

[siguió una pequeña discusión, al final de la cual los 3 estudiantes dijeron que no se podía poner el octaedro real como el representado en 1]

C.: *No se puede. Estas* [aristas] *tendrían que formar un rombo.*

Sin embargo, en el prisma 4 de Pos-2a.5 ocurrió lo contrario, pues los estudiantes centraron su análisis en la comparación de la forma de las caras laterales:

M.: [antes había dicho que sí había colocado el prisma en la posición correcta] *Aunque, esto* [señalando la cara sombreada del prisma de la figura 25-a] *tendría que estar más ancho ... No, no se puede.*

[M^a Carmen también dijo lo mismo]

P.: *A ver, ¿cómo estaría [el prisma real] si fuera en la misma posición?*

[M^a Carmen y Mercedes pusieron sus prismas en la posición de la figura 25-b, con la cara mayor de frente]

P.: *Claro, así tendría que ser más ancho. ¿Y no hay otra posibilidad?*

C.: *Poniéndolo muy lejos.*

P.: *Pero, hay otros lados [quiere decir caras] que son más estrechos ¿no? ¿no podríais ponerlo en otra posición, de manera que en vez de ver los lados anchos vierais los lados más estrechos?*

[Mercedes no veía esa posibilidad, pues seguía aferrada a comparar la figura de la lámina con la posición del prisma real que había usado antes]

C.: *¡Sí que puede ser! ¡Sí que puede ser!* [y puso su prisma en la posición correcta, es decir, con las caras de tamaño intermedio en el plano de la lámina]

M.: *No puede ser, porque yo esto lo veo más ancho. O sea, lo pongo así, lo pongo para que ésta [cara, la horizontal superior] se vea poco y entonces ésta [la horizontal inferior] se ve mucho. Si lo pongo así [girándolo un poco hacia arriba, 

El diálogo siguió unos minutos más, observando las diferentes posibilidades de colocación del prisma, según la cara que se situara en el plano del frente, y pensando en la manera de saber qué posición correspondía al prisma 4 de la lámina.*

Así pues, el tipo de sólido empleado se reveló como un factor importante para la utilización de unos elementos u otros en el análisis de las semejanzas y diferencias entre los poliedros reales y los representados en las láminas. Aunque no utilizamos el cubo figurativo en esta clase de actividades, estamos seguros de que la reacción de los estudiantes habría sido la de fijarse en los dibujos de las caras y en sus posiciones para hacer las comparaciones pues, como veremos un poco más adelante, ésta es la estrategia que usaron nuestros alumnos al comparar los cubos figurativos del ordenador y los de las láminas de papel.

Al hacer actividades análogas a las anteriores pero cambiando el movimiento de poliedros reales por el de poliedros en la pantalla del ordenador, pudimos observar un cambio sustancial en el foco de atención de los estudiantes: Para nuestros alumnos ha resultado muy fácil (salvo en algunos casos particulares con el prisma) poner los cuerpos reales en las posiciones representadas en las láminas, o en posiciones próximas a éstas cuando no se trataba de los mismos sólidos; realmente, el proceso de movimiento de los sólidos reales con las manos es inconsciente en los niños, puesto que es una destreza que tienen plenamente adquirida desde hace bastantes años. Por este motivo, la parte de la actividad en la que debían concentrar su

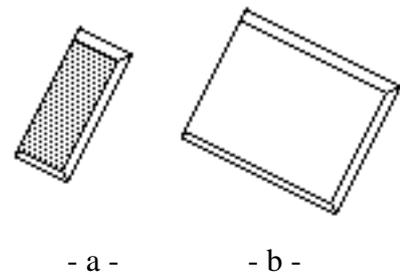


Figura 25.

atención era la de comparación de las dos imágenes que percibían (la del cuerpo real y la de la lámina), tratando de ajustar una a la otra.

Sin embargo, en los cuerpos del ordenador, el trabajo de poner los poliedros en las posiciones adecuadas para las comparaciones era más difícil, debido a la limitación de las posibilidades de movimiento que hemos comentado en la sección 4.1-B (figura 15). Por lo tanto, en estas actividades el foco de atención de los estudiantes se desplazó del proceso de comparación al proceso de movimiento, siendo su problema más difícil el llegar desde la posición inicial de los sólidos a la posición final. Este cambio implicó una variación en las habilidades de visualización empleadas para resolver los problemas, pues, por una parte, es necesario un uso eficaz de los procesos de procesamiento visual (en cuanto a transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras) para poder realizar los movimientos de forma rápida y exacta. Por otra parte, en el movimiento están implicadas las habilidades de conservación de la percepción y de discriminación visual (esta última también necesaria para comparar dos representaciones de sólidos, como hemos visto).

En este apartado nos estamos ocupando de analizar solamente la parte de las actividades que tiene que ver con la comparación de dos sólidos y no la parte que tiene que ver con el movimiento del sólido del ordenador que los estudiantes hacían como paso previo a la comparación, que será el objetivo del apartado 6.2.

El trabajo con los cubos figurativos ha resultado, en general, muy fácil para nuestros alumnos. Enseguida idearon una estrategia, que surgió espontáneamente en todos ellos, consistente en mover los cubos desde su posición inicial a la indicada en la lámina, y la complementaron con la estrategia de comparación que cabía esperar, basada en las posiciones de los dibujos de las caras: Si en dos cubos coinciden los dibujos de una determinada cara visible (generalmente la del frente) pero no coinciden los de otra cara visible, entonces los dos cubos no son iguales. Así es como M^a Carmen explicaba esto en el cubo 3 de la actividad Pos-7a.1 (figura 26-c):

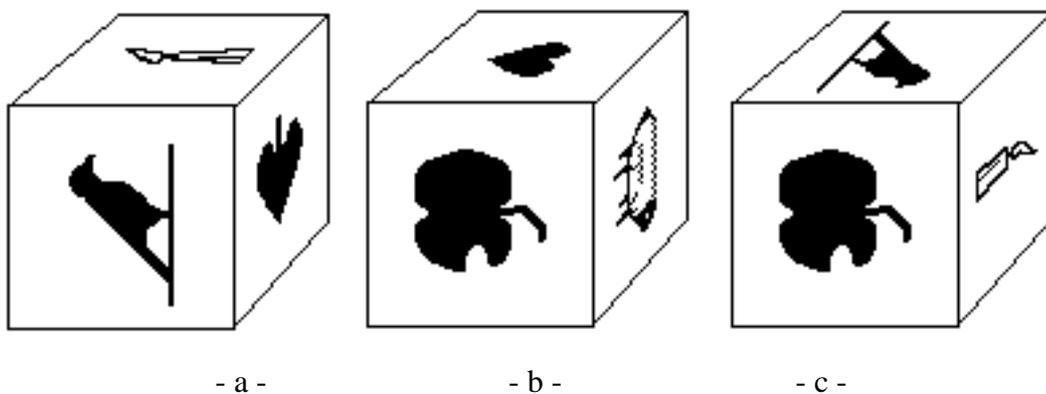


Figura 26.

[Después de realizar algunos giros, M^a Carmen ha movido el cubo del ordenador desde la posición de la figura 26-a a la de 26-b; su comentario se refiere a los cubos -b- y -c- de dicha figura]

C.: *No se puede hacer ... porque no coinciden los dibujos y la manzana está bien.*

En otras ocasiones los niños hacían un análisis de las posiciones relativas de las figuras, pudiendo llegar a la conclusión de que dos cubos no eran iguales sin necesidad de mover el del ordenador. Así es como resuelve Mercedes la misma actividad, comparando directamente los cubos -a- y -c- de la figura 26:

M.: *No es.*

P.: *¿Por qué?*

M.: *Porque esto [señalando en el cubo de la lámina, -c-] es la cabeza del pájaro, ¿no? Entonces la vela está encima de la cabeza del pájaro. Aquí [señalando en el cubo del ordenador, -a-] la vela está delante del pájaro. No tendría que estar en la cara del pájaro.*

La actividad Pos-2b fue la primera que hicieron nuestros alumnos con el ordenador y con el programa 3D Images, por lo que los primeros ejercicios de la actividad no podemos considerarlos como significativos, ya que al observar las cintas de video resulta evidente que parte de sus errores se deben a que todavía no saben manejar bien el programa del ordenador.

Las formas de comparar los sólidos del ordenador y de las láminas de papel en las actividades Pos-2.b y Pos-7.b han sido similares a las que hemos descrito para las actividades Pos-2.a y Pos-1, respectivamente, por lo que no vamos a dedicarles más espacio. No obstante, sí es importante reseñar que el uso de poliedros en el ordenador en vez de los reales nos ha permitido solventar la dificultad, ya comentada en las páginas anteriores, derivada del hecho de que el profesor nunca pueda ver un cuerpo real exactamente igual que lo ve el estudiante que lo tiene en la mano. Como consecuencia, nuestro diálogo con los estudiantes se volvió más seguro y fiable porque ambos estábamos viendo exactamente lo mismo, los profesores sabíamos qué veían realmente los estudiantes, independientemente de sus comentarios, y pudimos entrar en un nivel de análisis más minucioso de las figuras. El siguiente diálogo habría sido imposible si Mercedes, en vez de estar comparando el tetraedro 1 de la actividad Pos-2b.2 con el del ordenador, lo estuviera haciendo con el real:

[Mercedes debe decidir si el tetraedro de la figura 27-a es igual al del ordenador o no; después de algunos movimientos, ha colocado el tetraedro del ordenador en la posición de la figura 27-b]

M.: *¡Ya!*

P.: *¿Ya? ¿Ya está igual?*

M.: *Sí.*

P.: *Yo veo cosas diferentes* [estas diferencias habrían sido difícilmente perceptibles por el profesor si se tratara de un poliedro real].

M.: *Esto está más gordo que eso ¿no?* [se refería al triángulo obtusángulo de la derecha de -a- y a su correspondiente en -b-]

P.: *¡Ah! Yo los veo bastante diferentes ¿eh?* [Mercedes volvió a mover el tetraedro, hasta situarlo en la posición de la figura 27-c]

M.: *¡Ya!*

P.: *¿Los ves igual ahora, Mercedes?*

M.: *Yo sí ... No, mentira.*

P.: *¿Qué hay diferente?*

M.: *Esa raya* [señalando al segmento marcado en la figura 27-d]. *Esa de ahí no tiene que estar.*

[Después, Mercedes siguió moviendo el tetraedro para intentar situarlo como el de la lámina]

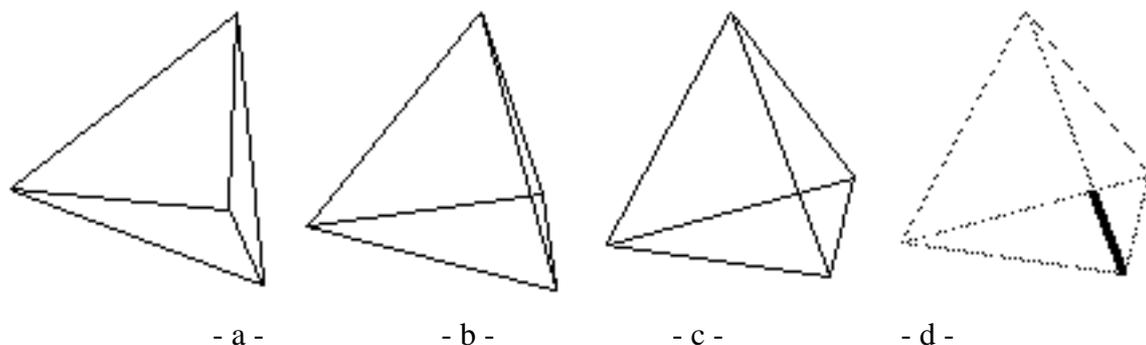


Figura 27.

En lo referente a la comparación de sólidos representados en perspectiva (actividades del bloque de Posiciones), tanto en las actividades comentadas en este apartado como en las que incluimos en el apartado 6.2, hemos podido observar algunas formas de razonamiento características y claramente diferenciados:

- La más elemental, que podríamos asociar al nivel 1 de Van Hiele, se basa en una observación global de los poliedros, prestando atención solamente a la forma "exterior" de las representaciones planas o de los cuerpos y sin tener en cuenta elementos como las aristas interiores o propiedades como el paralelismo o la igualdad de las formas percibidas de las caras. Un ejemplo típico de este comportamiento lo tenemos en el último fragmento transcrito (basado en la figura 27), pues Mercedes, al principio, sólo nota una diferencia global entre los tetraedros y después, cuando se fija en los detalles interiores, se limita a comparar el número de segmentos (que no de aristas) que ve en cada sólido.

Otros ejemplos de este razonamiento de reconocimiento global, que surgieron con frecuencia a lo largo de la experimentación, se pueden caracterizar por comentarios parecidos a los siguientes:

C.: *No puede ser, porque yo lo miro y digo "¿Es eso un tetraedro?" y digo "No, es una pirámide oblicua".*

M.: *No puede ser porque lo he intentado muchas veces [y no he podido colocar el mío igual que el de la lámina].*

- Una forma de razonamiento superior, que puede asociarse al nivel 2 de Van Hiele, es el que se basa en la observación de las diferencias y semejanzas visuales entre los dos cuerpos comparados para deducir de ahí relaciones matemáticas (igualdad, paralelismo, etc.). Ahora los estudiantes ya utilizan el proceso visual de interpretación de información figurativa, pues convierten información gráfica, percibida visualmente, en propiedades matemáticas específicas, cosa que no ocurre en la forma de análisis descrita en los párrafos anteriores. La transcripción correspondiente a la figura 23 es un ejemplo de esta forma de proceder.

- Podemos hablar de un tercer tipo de razonamiento basado en el análisis comparativo de las figuras como paso inicial, previo a cualquier movimiento de los sólidos, para intentar determinar si son iguales o no. En este caso nos encontramos ante un razonamiento lógico matemático que utiliza preferentemente propiedades conocidas por saber de qué familia es el poliedro que se analiza y también propiedades observadas visualmente cuando no se dispone de otra fuente de información, pero tendiendo a prescindir de éstas últimas cuando sea posible. Esta forma de razonamiento puede identificarse como correspondiente al nivel 3 de Van Hiele.

Seguramente por la falta de experiencia previa de nuestros alumnos, esta forma de razonamiento apenas ha estado presente en la experimentación y sólo ha surgido cuando las diferencias entre el sólido real o del ordenador y la representación en la lámina era grande. Por ejemplo, al comparar la pirámide real de varillas con el cuerpo 1 de la actividad Pos-2a.4, explicaron:

M.: [Después de manipular un poco su pirámide] *Esa figura no puede ser, porque esta arista tendría que ser igual de gorda [es decir, larga] que ésta. Si la intentas poner más delgada [es decir, corta], no se puede.* [Mercedes se refería a las aristas corta y larga de la base de la pirámide de la lámina]

P.: *¿Y tú por qué dices que no, M^a Carmen?*

C.: *Porque esto no es un cuadrado [señalando al paralelogramo de la base].*

Mercedes ha razonado en el nivel 2 mientras que M^a Carmen lo ha hecho en el nivel 3. Un poco después, cuando llegaron a la pirámide 4 de esta actividad, aparecieron indicios del nivel 3 en la respuestas de ambas niñas cuando dijeron:

C.: *El 4 tampoco es.* [y a continuación lo comprobó manipulando su pirámide]

M.: *La base* [de la pirámide de la lámina] *tendría que ser cuadrada del todo.*

Para completar este apartado, comentaremos las actividades del bloque de Representaciones en las que pedíamos a los estudiantes que compararan un módulo policubo real o del ordenador con varias representaciones no en perspectiva dadas en láminas de papel (Rep-2a y Rep-2b).

Ambas actividades eran similares, siendo la única diferencia que en una de ellas los estudiantes tenían módulos policubos reales y en la otra tenían los módulos en la pantalla del ordenador.

La actividad Rep-2a supuso la primera toma de contacto de los estudiantes con las representaciones planas diferentes de la perspectiva o la verbal que habían usado los días anteriores al realizar las actividades Rep-1a, Rep-1b y Rep-1c. Por este motivo, en los primeros ejercicios se produjeron las dificultades típicas de la toma de contacto con un nuevo concepto o técnica, si bien los niños las superaron con facilidad. Los problemas de aprendizaje dignos de mención han sido:

- En las representaciones isométricas, algunas veces asociaban dos cubos que no estaban en la misma posición, sino en posiciones parecidas, lo cual refleja una carencia de la habilidad de discriminación visual. Por ejemplo, Mercedes creía que el módulo 3 de Rep-2a.2 sí era igual al que ella tenía en la mano. Para comprobarlo, emparejaba los cubos de su módulo y del de la lámina de uno en uno o por pequeños grupos, debido a lo cual no se dio cuenta de que había un cubo que no coincidía en ambos módulos (figura 28). No obstante, los casos más frecuentes de este error se daban cuando los cubos aparecían en un segundo plano, medio tapados por otros cubos, lo cual obligaba a determinar la fila y columna en que se encontraban dichos cubos analizando la relación de posición con sus vecinos.

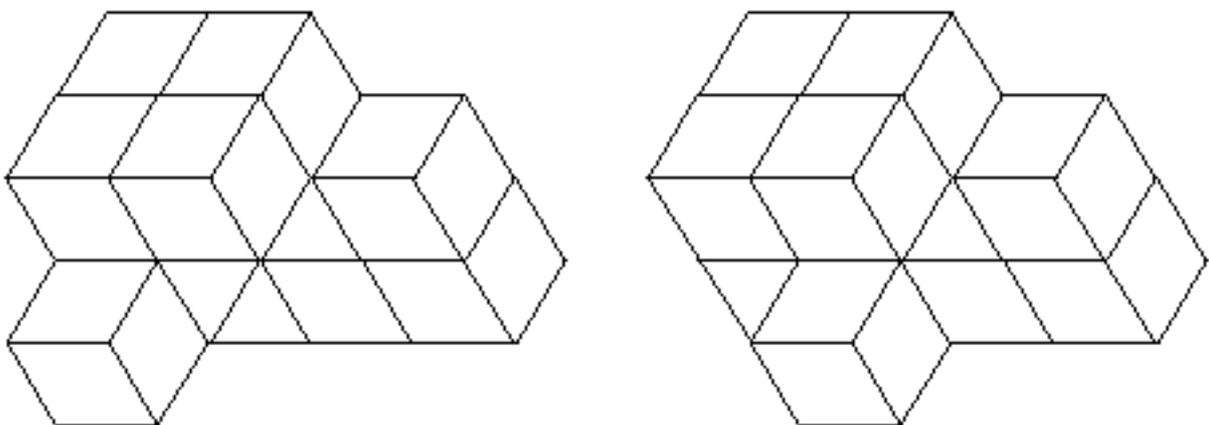


Figura 28.

Y éste es el diálogo entre Enrique y M^a Carmen a propósito del módulo 2 de Rep-2b.1:

[M^a Carmen estaba moviendo el módulo del ordenador, para acercarlo a la posición de la lámina, y había llegado a la posición de la figura 29-a. M^a Carmen se da cuenta de que el entrante que aparece en la parte inferior derecha del módulo coincide con el que hay en la cara inferior izquierda de la lámina]

E.: *Entonces no puede dar. No puede dar. Mira, escucha ...*

[M^a Carmen le interrumpió y siguió moviendo, para llegar a la posición de la figura 29-b]

C.: *Sí que es igual, mira: Los dos de abajo [señalando en la lámina] se ven ahí, una puntita [señalando en la pantalla los cubos A]. Sí que es igual. ¿A que sí, Enrique?*

E.: [Estaba haciendo su comprobación mientras M^a Carmen le explicaba la suya] *No, no. El de aquí debajo no está. El de debajo de éste, ¿cuál es?* [señalando en la pantalla el cubo B]

C.: *Claro, no es.*

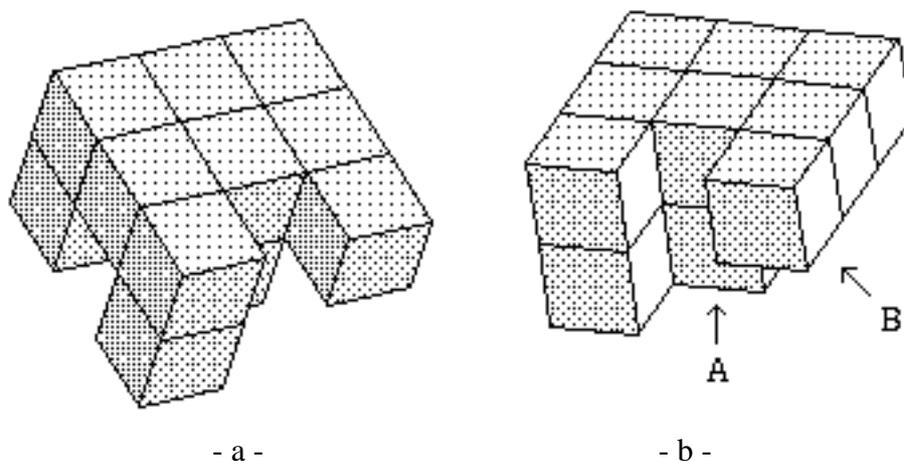


Figura 29.

- En cualquiera de las diferentes representaciones, es necesario fijar la posición de una de las caras del módulo (real o del ordenador) con el que se está comparando, asociándola con una de las caras de la representación plana. Así, por ejemplo, en las vistas laterales o numéricas, es necesario determinar qué cara del módulo va a hacer el papel de cara del frente. Durante las primeras sesiones, todos los niños tuvieron problemas de este tipo porque, al girar el módulo para observar otra cara, olvidaban cuál era la posición del frente, lo cual les originaba confusiones, errores y pérdidas de tiempo. Para solucionar este problema, les proporcionamos a los niños unas etiquetas adhesivas con la palabra "Frente" para que las pegaran en los módulos como ellos quisieran.

Otro obstáculo inicial relacionado con el anterior fue la falta de consciencia por los niños de que la posición de cada vista lateral en relación con las demás es relevante. Es decir que, por ejemplo, las dos vistas de la figura 30 no son



Figura 30.

equivalentes, aunque tengan la misma forma, porque llevan asociadas caras de arriba, la derecha, etc. diferentes. Este tipo de error surgía de vez en cuando, generado más por la falta de atención que por no saber cómo debían hacerlo. La línea superior de la figura 31 esquematiza los movimientos hechos por Mercedes para verificar si un grupo de vistas laterales correspondían o no a su módulo. Como se puede ver, el segundo giro que hizo era erróneo pues daba lugar a que la cara de arriba quedase colocada en una posición incorrecta. La parte inferior de la figura 31 muestra una de las varias formas correctas de mover el módulo para que cada cara quede bien colocada.

- Una dificultad asociada a la representación isométrica es la que mostró Enrique al confundirla con la representación en perspectiva. El siguiente diálogo se refiere a la representación 2 de la actividad Rep-2a.2, que sí correspondía al módulo que Enrique tenía en la mano:

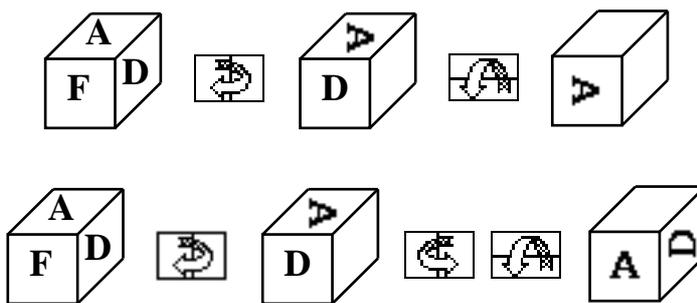


Figura 31.

E.: *No me da. Mira, si lo pongo de una manera, me da medio, la parte de aquí* [señalando la parte inferior izquierda del módulo, que estaba puesto como en la lámina], *pero ésta no me da* [señalando la parte superior del módulo, que seguía como el de la lámina] *y si lo pongo para que ésta me dé bien, la otra no me da bien. Por lo tanto no me da.*

[Enrique observa cómo M^a Carmen va señalando los cubos del módulo y asociándolos con los correspondientes de la lámina, por lo que dice que sí son el mismo sólido]

P.: *¿Lo ves, Enrique?*

E.: *Pero que está en distinta posición ... Yo así sí que lo veo, pero no lo veo en igual posición.*

[Le explicamos a Enrique la diferencia entre las vistas isométrica y perspectiva y le ayudamos a entender que no tiene que buscar la identidad visual, sino la correspondencia de las posiciones de los cubos]

Como puede observarse, el error de Enrique se debía a que él pretendía ver el módulo exactamente igual que el de la lámina. Sin duda ésta era una consecuencia de las actividades del bloque de Posiciones que había realizado con anterioridad, en las cuáles sí se buscaba esa identidad.

- Una característica importante de las representaciones de vistas laterales o numéricas, que debe tenerse en cuenta al comparar una vista con un módulo (real o del ordenador) es que una vista lateral puede corresponder a varias caras del módulo. Por ejemplo, cualquier vista simétrica que coincida con una cara de un módulo corresponderá también con la cara opuesta. Esta

particularidad de las vistas ortogonales es la que más dificultades causó a nuestros alumnos y a la que más atención dedicamos en las actividades del bloque de Representaciones. Veamos cómo comprobaron M^a Carmen y Enrique que la representación 6 de la actividad Rep-2a.2 no correspondía al módulo que tenían en la mano (las representaciones 1, 2, 4 y 5 de esa lámina sí representan dicho módulo):

E.: *A mí no me da.*

P.: *¿Coinciden?*

E.: *EL frente sí, pero el otro me da ...*

P.: *A ver, ¿cuál sería la posición de frente?*

E.: [Enrique puso su módulo en una posición concordante con la vista del frente] *Así. Y entonces así* [girando el módulo 90° para ver la cara de la derecha] *me da ...*

C.: [Interrumpiendo a Enrique] *Nunca puede haber una T aquí.* [M^a Carmen empezó a darle vueltas a su módulo pasando por las 6 caras para mostrar a los demás que ninguna tiene forma de T] *No hay T.*

E.: *Yo no lo veo, porque éste no da simétrico* [quiere decir que no los ve iguales].

Inicialmente, los movimientos de los módulos policubo en el programa Phoenix 3D sufrieron de buena parte de las dificultades que experimentaron para mover los poliedros en las actividades de Posiciones (que analizaremos en el apartado 6.2). No obstante, en poco tiempo aprendieron algunas características de las actividades de Representaciones (siendo Mercedes quien tardó más en reconocer estas propiedades y quien las utilizaba de manera más irregular): Que no era necesario buscar la posición exacta representada en las láminas sino que, para hacer las comparaciones, era suficiente con situar el módulo de la pantalla aproximadamente como el de la lámina. Que, para trabajar con vistas laterales o numéricas, había que hacer giros de 90° para pasar de una cara a otra. Que el proceso, asociado a las vistas numéricas, de conteo de los cubos que había en cada fila del módulo del ordenador no se podía hacer simultáneamente para todas las filas del módulo (salvo algunas excepciones), sino que era necesario mover unos pocos grados el módulo para verlo desde los lados.

La mayor dificultad con que se encontraban los estudiantes al resolver la actividad Rep-2b era la de averiguar si una determinada cara de la representación plana correspondía o no a alguna de las caras del módulo del ordenador. La revisión de las diferentes caras del módulo para ver si coinciden o no con una cara de la representación plana debe hacerse con cuidado, siguiendo una estrategia definida, con el fin de evitar que se pase varias veces por la misma cara y, lo que es peor, que se quede alguna sin comparar. La necesidad de este proceso les quedó demostrada a M^a Carmen y Enrique cuando resolvieron el ejercicio 5 de la actividad Rep-2b.1:

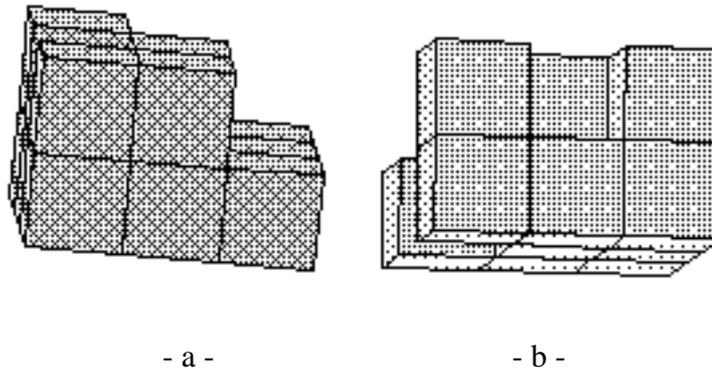


Figura 32.

[M^a Carmen empezó a mover el módulo hasta que lo llevó a la posición de la figura 32-a]

C.: *3. 1, 2, 3. 1 y 2 y 1, 2, 3* [estaba contando los cubos del plano superior del módulo]. *Ya no da.*

E.: *Ya no da.*

[En este momento, M^a Carmen y Enrique creían que la representación 5 no correspondía al módulo de la pantalla porque la cara que habían comprobado no se correspondía con la vista de la izquierda]

P.: *Ya no da. O sea, que ésta [cara] no te sirve de izquierda. ¡Oye! Que esa no sirva de izquierda no quiere decir que [la representación] no sirva. Esa no te sirve para la izquierda, pero tendrás que buscar otra.*

C.: *Pero no hay otra.*

P.: *Vamos a ver. Si ésta no os sirve de izquierda, ¿cuál es la otra que tampoco va a servir?*

C.: *La de la otra parte* [señalando la cara opuesta].

P.: *Vale. Pues busca una de las otras; todavía te quedan 4 caras más, ¿no?*

C.: *La de arriba tampoco ... no sirve ... y la de abajo tampoco.*

E.: *La de abajo tampoco.*

C. y E.: *Tiene que ser ésta o ésta* [señalando las caras de la izquierda y la derecha en la pantalla].

P.: *Y la de arriba y abajo, ¿por qué no pueden ser?*

C.: *Porque no pueden ser. Porque esto es así ... no* [señalando las columnas de la derecha, centro e izquierda del módulo de la pantalla].

P.: *Pero, ¿por qué no pueden ser?*

C.: *Como estos no ... los cuadraditos no coinciden, pues la de abajo tampoco.*

[Después de algunos giros, llevaron al módulo de la pantalla a la posición de la figura 32-b]

E.: *Esta sí. 1, 2, 3. 1, 2, 3* [señalando los cubos por filas]

C.: *Es verdad. Esta es la de frente.*

E.: *La de frente. Claro, la de frente.*

C.: *¿Los de abajo coinciden? ... 1, 2, 3* [señalando los cubos de la fila derecha del plano inferior del módulo, figura 32-b]. *No, no coinciden. Ya no puede ser ... porque mira, aquí hay 3 cubos de abajo y aquí* [en la lámina, fila inferior derecha] *hay 2 ... ¡Ah!, pero si le damos la vuelta ...* [señalando el botón  de la pantalla]

E.: *Pero si le damos la vuelta, el izquierda también tendrá que ser el otro lado.*

C.: *Pero vamos a probarlo* [M^a Carmen giró el módulo aproximadamente 180° en la dirección que había señalado, con lo que lo llevó hasta la posición de la figura 33-a]

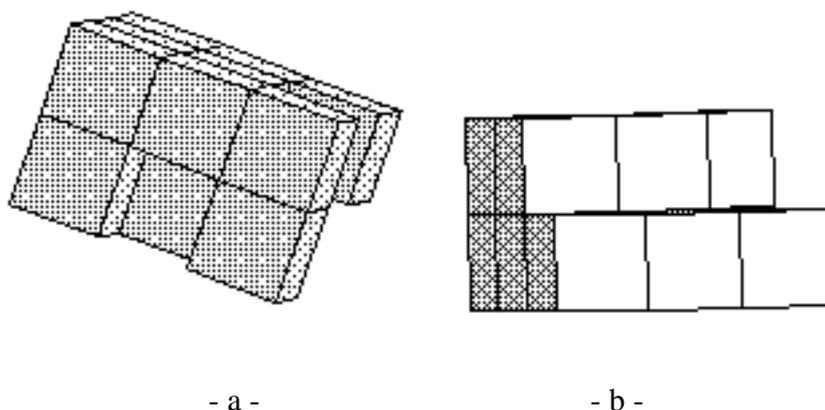


Figura 33.

C.: *Pues tampoco puede dar, porque aquí hay 2* [señalando la fila superior derecha del módulo].

P.: *¿Cuál es la [vista] que estás buscando? ¿La del frente?*

C.: *Sí, y no puede dar.*

P.: *¿Y cuál es la que quieres que sea del frente?*

C.: *Esa de ahí ... Sí que puede dar. Mira, Enrique. Aquí hay 2, que pueden ser estos 2 de abajo si le damos la vuelta para abajo.*

E.: *No ... Sí. Si le damos la vuelta sí que da.*

[Hicieron el giro  de 180° y llevaron el módulo a la posición de la figura 33-b]

E.: *Ya está, mira: 1, 2, 3, 1, 2* [contando en la pantalla]. *1, 2, 3, 1, 2* [contando en la lámina los valores correspondientes]

C.: *Estas sí coinciden ... ¡vale! Ahora vamos a mirar para abajo, vamos a bajarlo un poco más a ver si coinciden.*

[M^a Carmen y Enrique terminaron la actividad comprobando que en esta posición (siendo la cara de la figura 33-b la del frente) el módulo sí coincidía con la representación y girándolo para verificar que también la cara de la izquierda coincidía; esta cara, en realidad, era la de la figura 32-a, pero M^a Carmen y Enrique habían confundido las tramas y creyeron que en la fila superior izquierda había 3 cubos, cuando en realidad había 2]

En otras ocasiones los estudiantes siguieron una forma de trabajo similar a ésta, también con representaciones isométricas o de vistas laterales. Otro signo de progreso digno de ser mencionado es que, durante la resolución de la actividad Rep 2-b, descubrieron que no era

necesario llevar el módulo del ordenador hasta la posición mostrada en la lámina, pues en ocasiones bastaba con girar el libro de actividades, que era más cómodo que girar el módulo en el ordenador.

6.2. Actividades de movimiento de sólidos.

En la figura 34 se puede ver una tabla que resume las actividades de movimiento de sólidos. En la cabecera izquierda aparecen las diferentes formas de presentación de los sólidos usadas en cada actividad (por ejemplo, "Ord. > Papel" significa que se debe mover el poliedro del ordenador hasta la posición indicada mediante una figura en perspectiva de una lámina) y en la cabecera superior aparecen los diferentes tipos de sólidos utilizados.

POSIC.	Cubo figurat.	Sólido opaco	Sólido de varillas
Real < > Ord.	3a, 3c (*)	3b, 3d (*)	4a, 4b (*)
Real > Papel	(#)	(#)	(#)
Ord. > Papel	5a	5b	5c, 6a, 6b

(*) En una actividad se mueve el sólido real teniendo como modelo el del ordenador y en la otra al revés.

(#) Es equivalente tener el modelo en papel o en el ordenador, pero éste ofrece más posibilidades de variación.

Figura 34. Actividades de movimiento de sólidos.

En las actividades de comparación de sólidos, comentadas en el apartado 6.1, los niños sabían que los modelos a veces no correspondían al cuerpo con el que estaban haciendo la comparación. Sin embargo, en las actividades de movimiento de sólidos los estudiantes sabían que las figuras que hacían de modelo siempre eran representaciones del sólido que estaban moviendo, es decir que en las actividades de movimientos siempre había solución; esto es un elemento importante para el desarrollo de las actividades pues tiene una influencia innegable en la actitud de los estudiantes cuando son incapaces de llegar al resultado.

El análisis del grupo de actividades de movimientos debe hacerse de forma diferenciada para cada tipo de sólido, pues nuestros alumnos desarrollaron distintas estrategias para cada uno. Por otra parte, también hubo bastante diferencia entre las actividades de movimiento de los cuerpos reales y los del ordenador: Como hemos comentado en el apartado 6.1, nuestros alumnos tuvieron muy pocas dificultades para mover los sólidos reales hasta las posiciones de los modelos, cosa que no ocurrió igual con los cuerpos del ordenador, por lo que en las actividades de movimiento de sólidos reales (Pos-3a, Pos-3b y Pos-4a) no sucedió nada reseñable: Al mover

los cubos figurativos, los niños se fijaban en el dibujo de una cara, al mover los cuerpos opacos se fijaban en las tramas de las caras y al mover los sólidos de varillas se fijaban en las posiciones de las aristas, para fijar a continuación las posiciones de esas caras o aristas del cuerpo real, pero siempre resolvieron estos ejercicios con facilidad. Por lo tanto, todos los comentarios que haremos en lo que queda de este apartado se referirán a las actividades de movimiento de sólidos en el ordenador.

6.2.1. Movimiento de cubos figurativos.

Las actividades más elementales de movimiento de sólidos en el ordenador son el grupo de actividades basadas en el cubo figurativo (Pos 3c y Pos 5a). Los 3 niños utilizaron la misma estrategia para llegar desde la posición inicial a la del modelo, que coincidía con la usada para mover los cubos figurativos reales:

1. Elegían una cara del modelo (real o en la lámina), que generalmente era la del frente.
2. Si esa cara no estaba a la vista en el cubo del ordenador, empezaban a moverlo hasta que aparecía en la pantalla.
3. Una vez que la cara elegida aparecía en la pantalla, movían el cubo para llevar esa cara a su posición (frente arriba o derecha) en el modelo y, si era necesario, completaban los movimientos para hacer que la figura de la cara se situara con la inclinación correcta.

No obstante, tener una estrategia de realización de los movimientos correcta y eficaz no significa que, a la hora de la verdad, los estudiantes fueran capaces de hacer esos movimientos de manera adecuada, es decir con rapidez y sin movimientos innecesarios. En ningún caso se necesitan más de 5 giros para llevar un cubo a la posición final, pero mientras que M^a Carmen y Enrique siempre resolvían los ejercicios con unos pocos movimientos, Mercedes a veces los realizaba en pocos pasos pero otras veces hacía recorridos de alrededor de 10 pasos, llegando en alguna ocasión a girar el cubo 21 veces antes de llevarlo a su posición final. La figura 35 muestra la secuencia de movimientos realizados por Mercedes para llegar hasta el cubo 2 de la actividad Pos-5a.1 (la posición inicial era el cubo superior izquierdo).

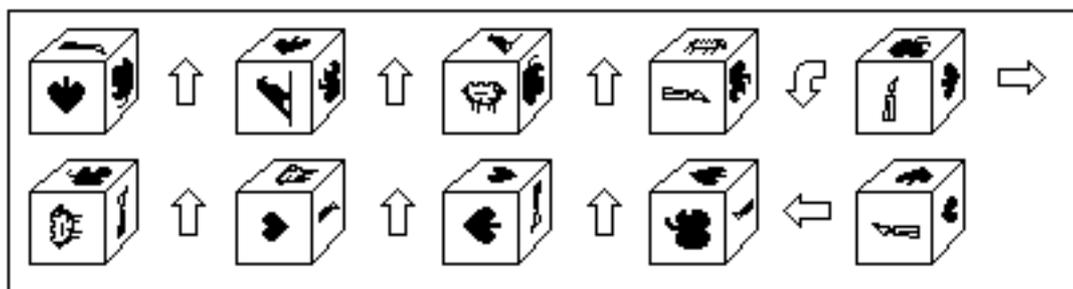


Figura 35.

Obviamente, si los 3 estudiantes se basaban en la misma estrategia, la diferencia en los resultados prácticos de unos y otros se debía a sus distintos niveles de destreza en el uso de los procesos y habilidades visuales: Mientras que M^a Carmen era capaz de imaginar movimientos del cubo y de transformar esa imagen mental en la acción correspondiente (es decir de utilizar con eficacia los procesos de procesamiento visual y, sobre todo, de interpretación de información figurativa aplicados a imágenes mentales dinámicas), Mercedes no era capaz muchas veces de realizar esa actividad mental.

Esta conclusión se ve corroborada por el hecho de que Mercedes realizó la segunda mitad de los ejercicios de estas actividades mucho mejor que la primera mitad, siendo muy fácil observar en las grabaciones que, si bien siguió cometiendo errores con frecuencia, la longitud de las secuencias de movimientos que necesitaba iba disminuyendo con el tiempo.

Existe también la posibilidad de que el entorno de manipulación de los sólidos tuviera influencia negativa y ayudara a producir esas series tan largas de movimientos de Mercedes. En concreto, no descartamos la posibilidad de que las formas de las flechas que indicaban los giros "izquierda" y "giro +" y de las que indican los giros "derecha" y "giro -" (ver figura 17) produjeran alguna confusión en esta niña. Esta es una cuestión que tendremos en cuenta en el futuro, para estudiar con más cuidado la claridad con que cada icono representa el movimiento que lleva asociado y la facilidad para leer su significado.

6.2.2. Movimiento de sólidos opacos.

La actividad Pos-3d pedía a los estudiantes mover sólidos opacos en la pantalla del ordenador hasta posiciones dadas por los correspondientes sólidos reales. Esta actividad fue abordada en dos sesiones diferentes (5^a y 16^a) bastante alejadas en el tiempo. En la 5^a sesión, dedicamos poco tiempo a esta actividad, y prácticamente lo único que hicimos fue lograr que los niños tomaran contacto con el programa Phoenix 3D pues de trataba de la primera actividad de este tipo que tuvieron que realizar nuestros alumnos, por lo que sufrieron las dificultades iniciales habituales derivadas de tener que aprender a manejar el programa Phoenix 3D y que comprender las diferencias de éste con el programa 3D Images, que habían usado en las sesiones anteriores.

No obstante, ya pudimos percibir con claridad algunas diferencias significativas entre los comportamientos de M^a Carmen y Enrique por un lado y Mercedes por otro, que en las sucesivas sesiones se fueron percibiendo con más claridad: Mientras los primeros eran capaces de trabajar de una manera reflexiva, tratando de pre-determinar los movimientos que tenía que hacer el sólido del ordenador, Mercedes era incapaz de imaginar posiciones del sólido diferentes de las que veía en la pantalla, el cuerpo real o la lámina, por lo que usaba con mucha frecuencia los movimientos al azar. Por otra parte, también surgió la novedad de que debían mover el poliedro de la pantalla hasta la posición de un sólido real, lo cual es algo más difícil cuando trabajan

juntos varios niños, pues cada uno tiene un punto de vista diferente. En las diferentes sesiones en las que tuvieron que realizar actividades de este tipo, surgió con frecuencia un diálogo parecido a éste:

E.: *Pero, ¿cómo lo vemos?*

P.: *Desde donde estáis.*

E.: *Pero es que yo lo veo ... solamente una cara.*

P.: *Pues poneros de acuerdo.*

[Enrique y M^a Carmen hablaron entre ellos y decidieron llevarlo a la posición que veía Enrique]

En la 7^a sesión los estudiantes trabajaron en la actividad Pos-5b, a la cual dedicaron la mayor parte del tiempo, por lo que aquí sí pudimos observar su trabajo después de superada la fase de aprendizaje del programa. Trabajaron M^a Carmen y Enrique juntos y Mercedes sola. Desde el primer momento se pudo observar que M^a Carmen y Enrique eran capaces de planificar los movimientos del sólido del ordenador, por lo menos de uno en uno, cuando su objetivo no estaba demasiado lejos de la posición que tenían en ese momento en la pantalla, incluyendo el uso explícito de los grados cuando se trataba de ángulos que les eran familiares (próximos a 90° ó 180°). Pero cuando los giros no eran alrededor del eje Z (es decir  y ) o se trataba de otros ángulos de giro, les resultaba difícil determinar los ángulos con un mínimo de exactitud. Sólo en casos como la actividad Pos-5b.5, en la que deben mover un módulo policubo, hicieron un uso bastante eficaz de los grados:

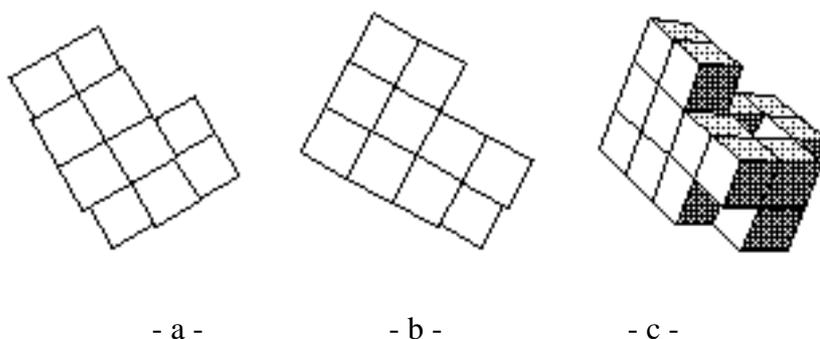


Figura 36.

[El módulo del ordenador se encontraba en la posición de la figura 36-a y M^a Carmen y Enrique debían moverlo hasta la posición 1 de esa lámina (figura 36-c)]

P.: *A ver, ¿en cuántos movimientos lo vais a hacer?*

C.: *No sé.*

P.: *¿No sabes?*

[M^a Carmen hizo un giro  para intentar poner los 2 cubos de la línea \ de la derecha de la figura 36-a en la posición de los 2 cubos de la línea \ superior de la figura 36-c]

C.: *Es que yo sé que eso no es así. Es otra cara, esta cara no es. Es otra cara que también es blanca.*

P.: *¿Por qué sabes que esa cara no es?*

C.: *Porque esto, por más vueltas que des, no se puede poner ahí. Se pondrá esto aquí y eso ahí* [señalando a 2 pares de cubos del módulo de la pantalla].

P.: *Y si quieres poner otra cara, ¿qué tendrás que hacer?*

C.: *Hay que darle con éstos* [señalando en la pantalla los giros alrededor de los ejes X e Y; de ellos, M^a Carmen y Enrique eligen 

C.: [Hablándole a Enrique] *Y dale 180 ... ó 90. 90, dale 90. ...* [después de ver el resultado del giro] ... *Esa cara es negra; tampoco sirve. Buscamos una cara blanca. Dale otra vuelta, otros 90. ...* [después de ver el resultado del giro] ... *Mira, ya nos ha salido la cara que es. ¿No ves que esta cara sí que puede ser? Porque le damos la vuelta y esto* [señalando los 2 cubos de antes, figura 36-a, pero vistos desde el otro lado] *lo ponemos arriba.*

[A continuación, seleccionaron el giro , que les permitió llevar el módulo hasta la posición de la figura 36-b y, después, hicieron varios giros  hasta llevar el módulo a la posición correcta (figura 36-c)]

Otro elemento importante que caracteriza las diferentes formas de razonamiento de los estudiantes era la manera que tienen de comparar los sólidos, en este caso el sólido del ordenador y el de la lámina al que desean llegar. En el caso de M^a Carmen y Enrique, esta comparación se basaba, generalmente, en la comparación de las formas de una o varias de las caras visibles en ambas representaciones. Así, al resolver la posición 6 de la actividad Pos-5b.3, y tras llevar la pirámide del ordenador a la posición de la figura 37, se produjo este diálogo entre ellos:

C. y E.: *Ya está.*

C.: *No, porque esto* [señalando en la lámina la arista entre la base y la cara lateral blanca] *está más recto* [en la pantalla]. *Hay que bajarlo un poco más.*

[Después, giraron  varias veces hasta que la pirámide llegó a la posición correcta]

No obstante, sus habilidades de visualización espacial y su experiencia con los giros no eran suficientes para realizar giros más complejos. Así, cuando Enrique, para dárselas de listo, sugirió a M^a Carmen que movieran la

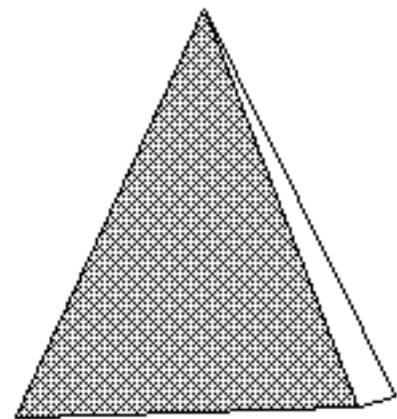


Figura 37.

pirámide hasta la posición 5 de Pos-5b.3 (la última de esta actividad, pues no seguían el orden numérico de las figuras de cada actividad) en un sólo paso, el resultado fue un recorrido más largo e inexacto que en los cinco casos anteriores:

[La pirámide de la pantalla estaba en una posición similar a la n° 1 de la lámina de esta actividad]

E.: *En sólo un movimiento, ¿eh? Mira, la cara de abajo [la base de la pirámide de la pantalla] es ésta* [señalando la base en la figura 5 de la lámina].

C.: *Hay que hacer así* [moviendo la mano en la dirección ].

[A pesar de esto, Enrique elige  y después , para llegar a la posición de figura 38-a. Después, mediante  lleva la pirámide a la posición de figura 38-b. Enrique dice que va por buen camino, pero M^a Carmen sigue moviendo la pirámide hasta llegar a la posición de figura 38-c. Finalmente, Enrique realiza unos pocos movimientos más, combinando   y  , y llega a la posición final]

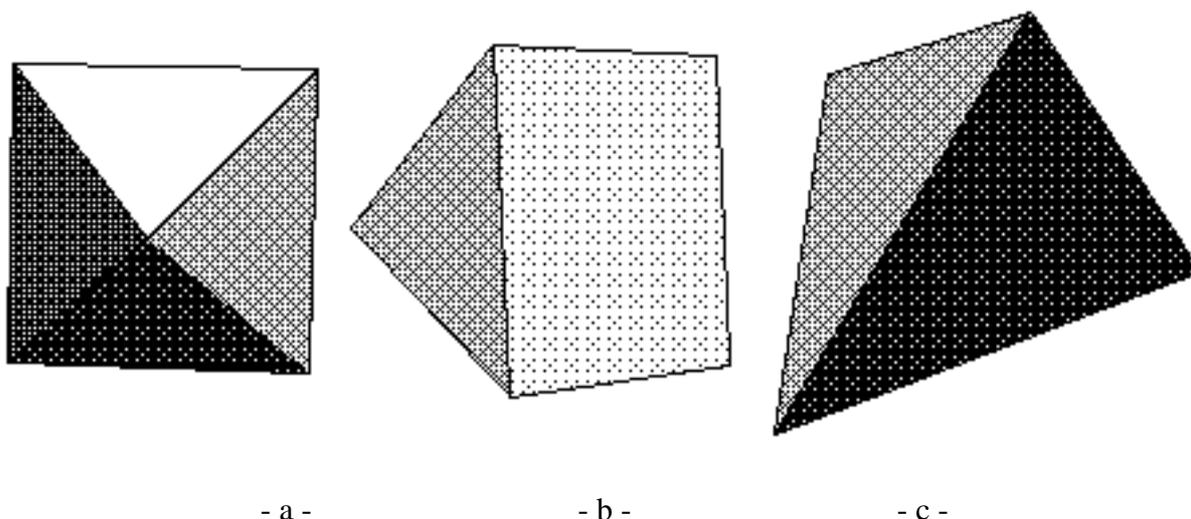


Figura 38.

En cuanto a Mercedes, su forma de elegir los movimientos era bastante aleatoria, pues presentaba la ambigüedad de que, por una parte, solía determinar con la mano (imágenes cinéticas) los movimientos que debía hacer con bastante corrección, pero después era incapaz de transformar correctamente esos movimientos en los giros que debía realizar en el ordenador. Al mismo tiempo, su capacidad para determinar, aunque sólo fuera de manera aproximada, la amplitud de los ángulos era muy escasa, por lo que generalmente realizaba giros de pocos grados e iba avanzando poco a poco. El siguiente diálogo, a propósito de la pirámide 6 de Pos-5b.3, es representativo de este tipo de dificultades:

[Mercedes acababa de mover la pirámide hasta la posición 4 de Pos-5b.3 y ahora debe moverla hasta la posición 6. Durante la primera parte del diálogo, Mercedes hace varios giros con la pirámide]

M.: *Yo muevo a boleo.*

P.: *Tú mueves a boleo ... ¿Y no puedes pensar un poquito qué movimiento te interesa?*

M.: *No.*

P.: *¿Por qué?* [Mercedes no contestó, por lo que el profesor intentó hacerle explicitar sus pensamientos] *Vamos a ver, ¿qué estás buscando?*

M.: *La cara blanca.*

P.: *Pues ya la tienes ahí* [acababa de situar la pirámide en la posición de la figura 39-a]. *¿Qué es lo que quieres hacer?*

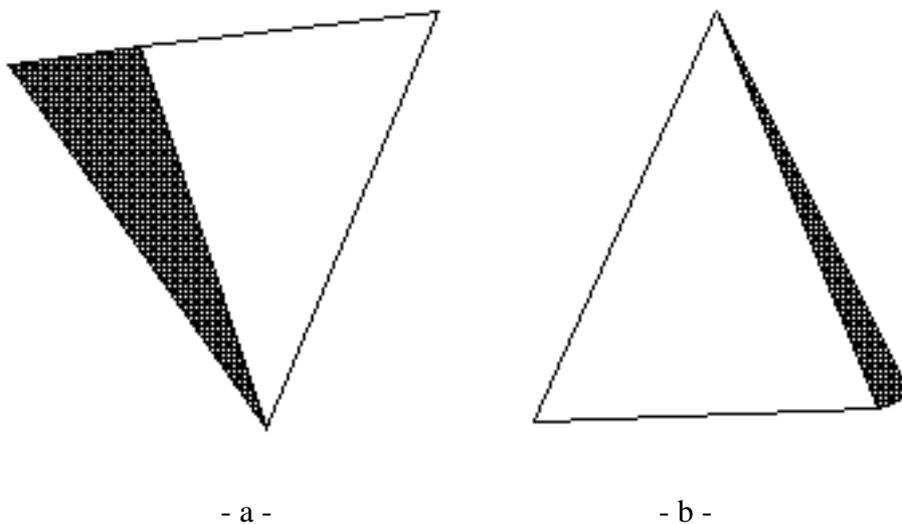


Figura 39.

M.: *Ponerla bien.*

P.: *Pero, ¿qué es ponerla bien?*

M.: *La base va abajo.*

P.: *¿Qué movimiento hace eso?*

[Mercedes eligió ; el profesor le mostró con la pirámide real el movimiento que debía hacer, para que lo eligiera en el menú del ordenador, pero ella no fue capaz, por lo que, al final, el profesor le señaló el giro  y la tuvo que dirigir un poco hasta que llevó la pirámide a la posición de la figura 39-b]

M.: *Ahora ya.*

P.: *Sí, pero no está bien colocada. Vamos a ver, ¿qué hay que hacer ahora?*

M.: *Girarla para allí* [mientras hacía el giro  con la mano]

P.: ¿Con cuál? [Mercedes eligió  en el ordenador y empezaba a hacerlo] *Espera, espera. Ese movimiento, ¿cómo gira? Tú tienes que girarla así ¿no?* [el profesor le mostraba el giro  con la pirámide real], *y ese movimiento lo que hace es así* [haciendo  con la pirámide real].

[Finalmente, Mercedes reconoció que el movimiento era , lo seleccionó y lo hizo, llegando a la posición final]

Como puede observarse en el diálogo anterior, Mercedes tenía muy afianzada la mecánica, usual cuando se inicia el aprendizaje de los giros en el plano, de asociar los sentidos positivo y negativo de giro a los movimientos de la mano hacia la derecha y la izquierda, respectivamente, pasando por la parte superior de la circunferencia (figura 40). Esto se traducía en que no era capaz de discriminar los diferentes planos de los giros y de ahí sus frecuentes errores.



Figura 40.

Siguiendo la descripción cronológica, nos ocuparemos ahora de la parte de la actividad Pos-3d realizada durante la sesión 16ª. Al comparar la forma de trabajar en esta actividad con la de la actividad Pos-5b, que acabamos de comentar, se puede observar que todos los estudiantes habían mejorado su capacidad de uso de los procesos y habilidades de visualización espacial necesarios para realizar los movimientos de los sólidos del ordenador (los procesos de procesamiento visual e interpretación de información figurativa y las habilidades de reconocimiento de posiciones y de relaciones en el espacio y discriminación visual). No obstante, se mantenía la diferencia entre las formas de trabajar de Mª Carmen y Enrique y de Mercedes (o, probablemente, había crecido).

En la siguiente transcripción, en la que Mª Carmen y Enrique trabajaban para llevar la pirámide del ordenador desde su posición actual (figura 41-a) hasta la de una pirámide real (figura 41-g), se puede observar cómo Mª Carmen dirigió a Enrique en la realización de los movimientos y cómo la niña pre-planificaba cada movimiento en función de la posición de la pirámide en ese momento y de la posición final. Obviamente, el vértice de la pirámide, debido a su unicidad y a la diferencia de su forma con los vértices de la base, actuó como centro de atención preferente para el análisis de Mª Carmen, aunque no único:

[En primer lugar, se pusieron de acuerdo en el punto de vista de la pirámide real. Decidieron que valdría como la veía Mª Carmen y que ella dirigiría los movimientos]

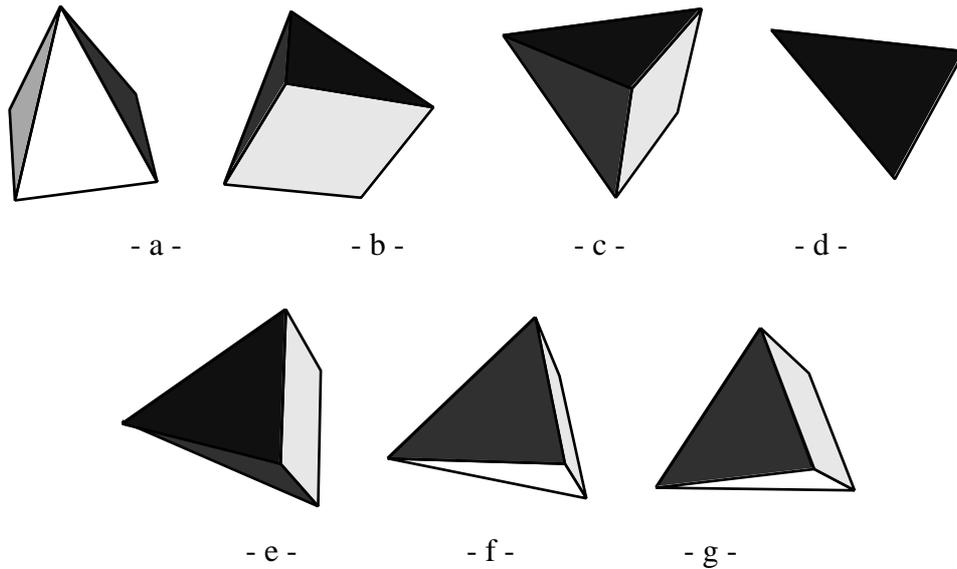


Figura 41.

E.: ... *Pues primero la ponemos de costado.* [a continuación hicieron varios giros en los sentidos ,  y , que llevaron la pirámide a la posición de figura 41-b] ... *Ahora hay que ponerla así, que esta punta [el vértice] esté aquí* [señalando el vértice de la pirámide real].

[Enrique seleccionó el giro  pero M^a Carmen dice que ése no es el movimiento adecuado y le indica que escoja ; el resultado es la figura 41-c; como se verá un poco más adelante, M^a Carmen no sólo estaba teniendo en cuenta la posición del vértice, sino también la cara que aparecía en el frente de la pantalla]

C.: *Yo veo eso. Ahora hay que bajarlo* [a continuación movieron la pirámide con  y la situaron en la posición de la figura 41-d] ... *Eso. Ahora ponlo horizontal. Horizontal, ¿comprendes?* [mientras trazaba con el dedo una línea horizontal por mitad de la pantalla.

Enrique usó el giro  varias veces hasta poner la pirámide como M^a Carmen quería]

C.: *Y ahora tiene que verse esa cara* [señalando la base de la pirámide. Enrique realizó giros  y después , hasta llegar a la posición de la figura 41-e].

[En este momento, M^a Carmen se dio cuenta de que la cara que estaba apareciendo por debajo no era la misma que la de la pirámide real (la blanca) y de que era porque había confundido la trama de una cara del ordenador con la del cuerpo real. Entonces, empezaron a girar la pirámide alrededor del eje X () hasta que apareció la cara blanca por debajo;

después usaron el giro  para ponerla como en la figura 41-f y, finalmente, ajustaron la posición con  y , hasta situarla aproximadamente como en la figura 41-g]

Veamos ahora, a modo de comparación, cómo resolvió Mercedes una actividad similar con un tetraedro. Podría pensarse que la regularidad del tetraedro frente a la irregularidad de la pirámide, con su vértice diferenciado, puede suponer una grado mayor de dificultad para los estudiantes. Efectivamente, así ha sido para los 3 estudiantes; recordemos, por ejemplo, los problemas de M^a Carmen en la actividad Pos-1.2 (figura 22) para colocar el tetraedro real en su posición correcta porque no sabía cómo girarlo para que cambiaran las posiciones de las caras visibles. No obstante, ésta no fue la base de los problemas que tuvo Mercedes en la actividad Pos-3d, pues ella identificaba perfectamente las tramas de las caras y sus posiciones cuando le preguntábamos explícitamente. Su problema estaba en que no era capaz de hacer esas identificaciones por sí misma y que a veces no sabía seleccionar el giro adecuado:

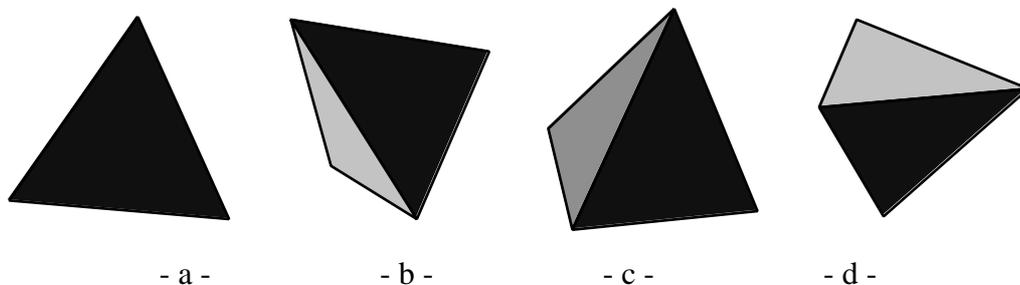


Figura 42.

[Mercedes empezó la actividad con el tetraedro en la posición de la figura 42-a y debía llevarlo hasta la posición de 42-d. Lo primero que hizo fue girarlo mediante  hasta dejarlo en la posición de la figura 42-b]

M.: *Ya.*

P.: *¿Ya está en la misma posición [que el poliedro real]?*

M.: *No es la misma cara.*

P.: *Este vértice de aquí [señalando en el tetraedro real], ¿cuál es [en el de la pantalla]?*

M.: *¡Hay! Está al revés.*

P.: *Está al revés. Lo has puesto hacia abajo.*

M.: *Ah, ya [a continuación giró el tetraedro mediante  varias veces, pero el resultado global fue un giro de, aproximadamente, 360°]*

M.: *Ya.*

P.: *¿Ya están igual? ¡Está como antes! ¡Lo has dejado como antes! [Mercedes empezó a girar el sólido en sentido contrario al de antes]*

P.: *Cuéntame. ¿Qué buscas?*

M.: *No sé. Mira, me sale mal* [mientras tanto, había seguido girando en el mismo sentido al azar].

P.: *Eso que haces, ¿te sirve para algo?*

M.: *No, porque ...*

P.: *¿Y si cambias de movimiento? Ahora no te sirve porque tienes la cara negra* [en la pantalla] *a la izquierda y tiene que estar a la derecha, ¿no?*

[Mercedes hizo un giro  y llevó el tetraedro hasta la posición de la figura 42-c. Pero se veía claramente que estaba perdida, por lo que el profesor intentó ayudarla a salir adelante poniéndole el tetraedro de manera que se vieran las dos caras de la figura 42-d. A continuación

ella hizo varios giros ]

M.: *No se puede.*

[La actividad siguió durante un rato más en el mismo estilo, hasta que, finalmente, con una importante ayuda del profesor, consiguió llegar a la posición correcta]

6.2.3. Movimiento de sólidos de varillas.

Por lo que se refiere al movimiento de poliedros de varillas en el ordenador con el programa 3D Images (actividades Pos-4b y Pos-5c), resultó significativa la diferencia en la facilidad y rapidez con que todos los estudiantes resolvieron estas actividades, respecto de las anteriores, hechas con sólidos opacos en el programa Phoenix 3D. La mayor facilidad y rapidez se debió al software utilizado pues, al permitir 3D Images el movimiento automático y continuo de los poliedros, los niños no tenían necesidad de calcular las amplitudes de los giros y, además, podían corregir fácilmente los errores usando el giro de sentido contrario.

A la actividad Pos-4b le dedicamos poco tiempo y no sucedió nada especialmente destacable en ella. El motivo principal para trabajar poco en esta actividad fue que la dificultad, ya comentada en el apartado 6.2.1, de las diferentes visiones de un poliedro real según donde estuvieran sentados los niños era mayor en el caso de los sólidos de varillas que en los opacos, pues pequeños cambios de posición de los estudiantes hacían que las aristas o vértices dejaran de coincidir o que una arista pasara, por ejemplo, de estar a la izquierda de otra a estar a su derecha.

Aunque Pos-4b no fue la primera actividad que hacían de movimiento de sólidos de varillas en el ordenador, surgió ahora el problema de cómo mover un sólido en el que dos aristas se ven superpuestas de manera que dichas aristas sigan estando superpuestas. Tomando la situación práctica en la que había surgido esta cuestión (izquierda de la figura 43), les mostramos a los estudiantes que la única manera de mantener dos aristas superpuestas era realizar giros de manera que esas aristas fueran perpendiculares al eje del giro (es decir, que el plano determinado por las aristas coincidiera con el plano del giro). La secuencia de posiciones de la figura 43 muestra un ejemplo del proceso que debe seguirse. Obviamente, también se puede optar por situar las aristas coincidentes verticales y hacer el giro alrededor del eje X).

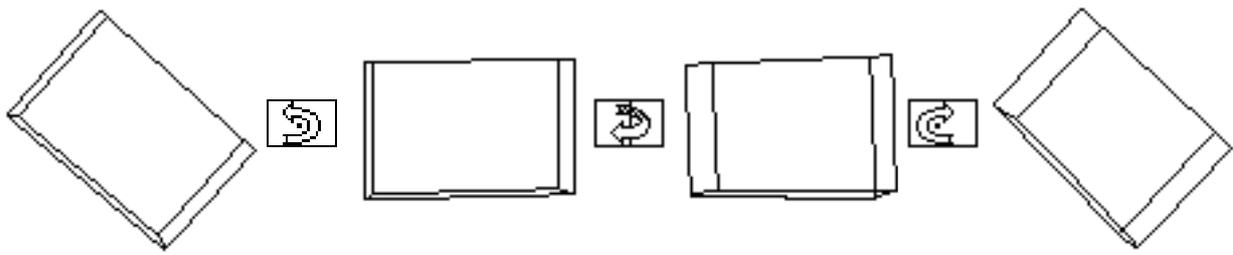


Figura 43.

La actividad Pos-5c fue planteada en 5 ocasiones diferentes a lo largo de la experimentación (sesiones 7^a, 9^a, 10^a, 18^a y 21^a), algunas veces trabajando con el programa 3D Images y otras con Phoenix 3D, dependiendo de la dificultad de cada actividad en particular y de la destreza de cada alumno. El objetivo de este cambio en el software fue observar la influencia del tipo de programa (de movimiento automático o manual) y la del tipo de sólido (opaco y de varillas) en la facilidad y las estrategias de resolución.

Como resumen general del modo de trabajo de los estudiantes en esta actividad, podemos decir que las estrategias de cada uno han sido análogas a las que han utilizado en las actividades de comparación de sólidos de varillas, mostrando las mismas formas de análisis de las figuras y de sus diferencias que ya hemos descrito en el apartado 6.1: Usaron como base para sus razonamientos las relaciones entre las aristas (igualdad, paralelismo, etc. de aristas) con más frecuencia que la forma de las caras; cuando se referían a formas, generalmente eran las de polígonos formados por las proyecciones (sobre el plano de la pantalla o del papel) de aristas que se cruzaban. Dependiendo de la figura en concreto, los argumentos de los niños se basaban en las aristas, en las caras, o en ambos elementos a la vez. Solían basarse en las caras reales de los poliedros, lo cual implica el uso de la habilidad de percepción de figuras y contexto, solamente cuando se basaban en propiedades matemáticas abstractas del cuerpo en cuestión (forma de cuadrado, rectángulo o triángulo equilátero, paralelismo de caras opuestas o perpendicularidad de caras consecutivas, etc.). Veamos un caso significativo por la diferencia de análisis que hacen M^a Carmen y Mercedes, que estaban trabajando juntas, de la misma figura. Al empezar a trabajar en la posición 6 de la actividad Pos-5c.5 (figura 44), M^a Carmen está tratando de "ver" el prisma:

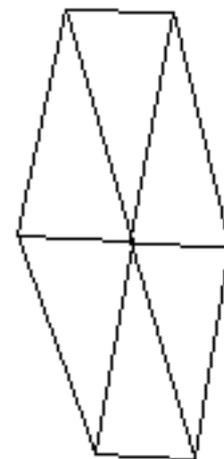


Figura 44.

C.: Huy, ésta es muy difícil ... ¡Ah!, ¡no! Ya veo lo que es. Mira, una cara lateral, otra cara lateral [señalando a los dos rombos, a la izquierda y derecha de la figura, que forman dichas caras] Ahora ya lo veo. Ya lo veo cómo es.

[A continuación, el Profesor le pregunta a Mercedes si ve esas caras y ella le señala un triángulo. Un rato

después, le planteamos la misma pregunta a Enrique, que estaba trabajando solo en el otro ordenador, y éste dio una respuesta similar a la de Mercedes; sólo después de algunas preguntas más, reconoce las verdaderas caras del prisma]

Un elemento importante del desarrollo de las capacidades de visualización y de interpretación de las representaciones de cuerpos 3-dimensionales en perspectiva exclusivo del trabajo con sólidos de varillas es el referente a la diferenciación entre los elementos de los poliedros (vértices, caras y aristas) situados más próximos y más alejados del observador. Un objetivo de este módulo del proyecto de investigación era intentar que los estudiantes aprendieran a analizar las figuras en estos términos, aplicando las propiedades de las representaciones en perspectiva de que i) cuanto más alejado está un elemento del sólido más pequeño se ve y ii) sólo se mantiene el paralelismo de los segmentos situados en los planos perpendiculares a la línea de visión (es decir, en los planos paralelos a la hoja de papel o a la pantalla del ordenador).

M^a Carmen era la única que conocía estas propiedades y las utilizaba con cierta frecuencia, mientras que Mercedes y Enrique las ignoraban por completo al empezar la experimentación; no obstante, con frecuencia M^a Carmen no se daba cuenta de que la figura de la pantalla y la de la lámina no estaban en la misma posición; sólo notaba la diferencia cuando ésta era bastante clara. Por otra parte, la figura que más problemas causó en este sentido fue el prisma, cuyos 3 pares de caras eran rectángulos diferentes, pues con frecuencia los niños fueron incapaces de determinar qué cara (grande, intermedia o pequeña) era cada una de las que veían.

El siguiente diálogo muestra cómo reaccionó Mercedes en la figura 5 de la actividad Pos-5c.3, realizada con Phoenix 3D:

M.: *Yo lo muevo como sea ...*

[Como parte de la estrategia habitual de trabajo de Mercedes, ésta había hecho varios movimientos del octaedro de la pantalla al azar, sin haber decidido previamente a qué posición iba a llevarlo]

P.: *¿No está muy cerquita de esa figura el 5?*

[Mercedes hizo algunos giros más para intentar llevar el tetraedro hasta la posición 5 de Pos-5c.3; tras el último giro, el cuerpo de la pantalla había acabado en la posición de la figura 45]

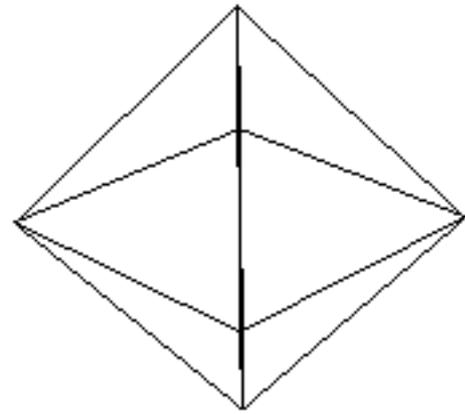


Figura 45.

P.: *¿Los ves igual? ¿en qué se diferencian?*

M.: *Eso* [señalando a los dos triángulos de la parte superior del octaedro de la lámina]

P.: *Este par de triángulos* [señalando a los mismos triángulos en la pantalla] *son más grandes que en el papel, ¿no?*

M.: *Hay que bajarlos.*

P.: *Hay que bajarlos. ¿Con cuál se bajan?*

[Mercedes hace un giro 

M.: *Es que entonces el* [par de triángulos] *de abajo se pone muy pequeño.*

P.: *El de abajo se pone más pequeño que el de arriba. Sin embargo, en el papel es al revés. ¿Por qué crees que es eso?*

M.: *No sé. Así* [el par de triángulos de arriba] *está como el de abajo.*

P.: *Así el de arriba está como el de abajo y el de abajo como el de arriba. ¿Qué puedes hacer para ponerlos bien?*

M.: *Girarlo todo.*

[Mercedes empezó a girar con  y logró llegar a la posición correcta]

P.: *¿Qué le pasaba? ¿Por qué antes salía el de abajo y ahora el de arriba más pequeñito?*

M.: *Porque tenía que girarlo todo.*

[Estaba claro que Mercedes no conocía la propiedad necesaria para reconocer que vértice está más cerca de ella y cuál más lejos, por lo que el Profesor dedicó algún tiempo a explicársela]

6.3. Actividades de representación de sólidos.

Como decíamos en el 2º objetivo general que planteábamos en la sección 1 de este módulo, la representación plana de cuerpos 3-dimensionales ha sido, junto a la realización de movimientos de dichos cuerpos, un objetivo principal de nuestra investigación. El objetivo de este apartado 6.3 es describir los diferentes tipos de actividades de representación de sólidos propuestos a los estudiantes y comentar y analizar sus respuestas.

Hemos utilizado 4 tipos diferentes de representaciones planas: Perspectiva, isométrica, ortogonal (que hemos llamado de vistas laterales) y ortogonal codificada (que hemos llamado de vistas numéricas). Para todas las clases de representaciones, hemos planteado actividades de

dibujo de cuerpos (reales o en el ordenador) y, para las 3 últimas clases, hemos planteado también actividades de construcción de módulos policubo a partir de las diferentes formas de representación plana. En los siguientes apartados recorreremos los distintos tipos de actividades.

6.3.1. Dibujo o emparejamiento de caras del cubo figurativo.

En primer lugar, nos referiremos a unas actividades planteadas sobre cubos figurativos, consistentes en emparejar las caras opuestas de un cubo o en completar representaciones en perspectiva en las que algunas caras estaban en blanco. En la figura 46 se puede ver una tabla que resume estas actividades. En la cabecera izquierda aparecen las diferentes formas de presentación de los cubos usadas y en la cabecera superior aparecen los tipos de actividades.

POSIC.	Dibujo	Emparej.
Real	9a	(*)
Ordenador	9b, 10 (#)	8a
Papel	(†)	8b

(*) Demasiado fácil para nuestros alumnos.

(#) En una actividad se puede mover el cubo y en la otra no.

(†) Es equivalente tener el modelo en papel o fijo en el ordenador.

Figura 46. Actividades de dibujo o emparejamiento de caras de cubos figurativos.

Todas las actividades de este grupo resultaron bastante o muy fáciles para nuestros estudiantes. En las actividades Pos-8a y Pos-8b, la única que cometió una cantidad significativa de errores fue Mercedes, si bien no pudimos captar su línea de razonamiento para saber por qué había asociado caras que aparecían consecutivas en al menos una de las representaciones del cubo que había en las láminas; posiblemente se debiera a una mala comprensión del enunciado de la actividad. Surgieron de manera espontánea varias estrategias de resolución, que describimos a continuación.

En la actividad Pos-8a, los 3 estudiantes utilizaron la misma estrategia, que surgió en cada uno de manera independiente de los demás: Para saber cuál era la cara opuesta a la del frente del cubo de la pantalla, giraban el cubo hacia abajo (es decir, según ) , con lo cual hacían que dicha cara oculta apareciera en la parte superior del cubo; después repetían el giro para ver qué cara era la opuesta a la que ahora estaba en el frente del cubo; por último, asociaban las dos caras restantes (izquierda y derecha del cubo). En un primer momento, todos hicieron un giro hacia la derecha (es decir, según ) para asociar las dos últimas caras, pero al pedirles que hicieran la

menor cantidad posible de giros, enseguida se dieron cuenta de que el último giro no hacía falta. La figura 47 resume este proceso.

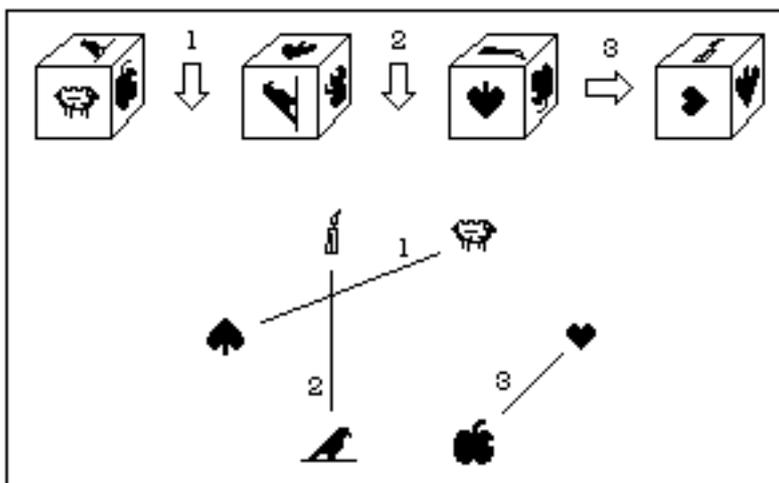


Figura 47.

En la actividad Pos-8b surgieron varias estrategias diferentes. Aunque hemos usado fragmentos de transcripciones para explicar en qué consiste cada método, los niños usaron unos u otros según las características de cada ejercicio en concreto y según qué información fueran capaces de obtener en cada caso. Estas estrategias fueron:

- M^a Carmen explicaba así su forma de resolver la actividad Pos-8b.1, basada en comparar las posiciones de diferentes cubos y deducir qué giros permitirían mover un cubo hasta la posición de otro:

C.: *Aquí [señalando al cubo 1] tenemos el pájaro. Y en este cubo [el cubo 4] lo que ha hecho es girarlo para abajo [haciendo con la mano el giro 

- Mercedes explicaba así otro procedimiento, que había usado para resolver la actividad Pos-8b.2, basado en la determinación de posiciones relativas entre las caras del cubo (es decir en el uso de la habilidad de conservación de la percepción):*

M.: *He mirado primero la oveja [señalando la del cubo 1] ... He mirado aquí [señalando el cubo 3] y he visto que el culo de la oveja está en la pica. Entonces he visto que la pica tendría que ir aquí [señalando la cara oculta de la izquierda del cubo 1], porque tendría que estar en el culo [de la oveja]. Entonces el pájaro va con la pica.*

- La siguiente transcripción describe cómo resolvió M^a Carmen la misma actividad Pos-8b.2, en la que utiliza la idea de que si un cubo gira 180°, las caras que no tocan al eje de giro van a para a la posición donde antes estaban sus caras opuestas:

C.: *Mira, aquí hay 2 velas iguales* [señalando los cubos 1 y 2], *bueno, una está para una parte ...* [con las manos hacía signos de que las velas estaban giradas 180°]. *Entonces, éstas dos* [señalando la manzana y la oveja] *tienen que ser caras opuestas y éstas dos* [señalando el corazón y el pájaro] *también.*

• Un último método, utilizado con frecuencia por los 3 niños, consistía en buscar una figura que apareciera varias veces en la lámina, lo cual les permitía eliminar como posibles caras opuestas a esa figura todas las que aparecían a sus costados. Por ejemplo, en una administración de la actividad Pos-8b.2 que hicimos como pre-test en la 2ª sesión, Mercedes explicaba:

M.: [La oveja] *no puede ir con éste* [señalando la pica], *ni con éste* [señalando el corazón], *ni con el pájaro ni con la vela. O sea que va con la manzana. ... La vela. No puede ir con el pájaro, no puede ir con la oveja* [señalando ambos en el cubo 1]. *... No puede ir ...* [señalando la pica y el corazón del cubo 2] *... Va con el corazón.*

En ocasiones los estudiantes usaban una mezcla de los métodos anteriores, cuando el primero que habían usado no les permitía obtener información sobre otros pares de caras. Un ejemplo es la forma como Enrique resolvió la actividad Pos-8b.2:

E.: *La oveja con la manzana ... porque aquí* [en el cubo 1] *tiene éstas 2* [señalando la vela y el pájaro] *y aquí tiene éstas 2* [señalando el corazón y la pica en el cubo 3]. *Entonces la única que queda es la manzana. ... La vela ... la vela estará aquí* [señalando la cara oculta del fondo del cubo 3] *¿no?*

P.: *¿Está ahí?*

E.: *O debajo.*

P.: *¿Dónde estará la vela?*

E.: *Si lo giramos* [indicando un giro con el lápiz sobre la lámina] *entonces se pone aquí ...* [se lió y abandonó esta línea de argumentación]. *A ver, la pica no puede ir ni con ésta ni con ésta* [señalando las otras caras del cubo 2] *ni con ésta ni con ésta* [señalando las otras caras del cubo 3]. *Entonces tiene que ir con el pájaro.*

En cuanto a la actividad Pos-9a, no hay ningún comentario que hacer, pues resultó tan fácil para nuestros alumnos que sólo hicieron una lámina. Obviamente, cada vez ponían en cubo real en la posición concordante con la representación que tenían que completar y se limitaban a copiar los dibujos de las caras.

Finalmente nos referiremos a la actividad Pos-10. A diferencia de la actividad Pos-8a, los modelos que tenían ahora en el ordenador no podían girar, por lo que sólo tenían información sobre 3 caras del cubo. Por eso, al empezar la actividad les dimos verbalmente la instrucción de que pusieran un interrogante en aquellas caras en las que no supieran qué figura había.

Se trata de una actividad parecida a las anteriores, ya que para resolverla se pueden imaginar los movimientos que ligan el cubo de la pantalla con los de la lámina y también se pueden usar las relaciones de posición relativa entre caras contiguas. En concreto, Enrique usó, salvo alguna excepción en la que alternó ambos métodos, el primer procedimiento, mientras que Mercedes y M^a Carmen usaron, también salvo alguna excepción, el segundo. Por ejemplo, al dibujar las caras del cubo 4 de Pos-10.1, Enrique empieza dibujando la oveja en la cara del frente (mirando a la izquierda y con las patas hacia arriba, que es la posición correcta) y después:

P.: *¿Cómo has visto que es esa posición?*

E.: *Porque es como mover hacia abajo [quiere decir hacer el giro ] porque el corazón sale por delante ... Esa [la vela] ya no está ahí.*

P.: *Y arriba, ¿qué?*

E.: *No sé. Cualquiera.*

Por su parte, M^a Carmen y Mercedes, que resolvieron juntas estas actividades, mantuvieron el siguiente diálogo a propósito del cubo 1 de Pos-10.3:

C.: *Aquí hay un interrogante [en realidad, M^a Carmen estaba haciendo el cubo 2]*

M.: *No. Sí se puede. Mira, la parte de atrás de la oveja da con la manzana.*

C.: *Es verdad, estoy empezando por el segundo. No me había dado cuenta.*

C. y M. al P.: *Mira: La punta de la pica está en la base de la manzana y la parte de atrás de la oveja está en el hueco de la manzana.*

Un resultado muy interesante obtenido en esta actividad fue la constatación de que Enrique no tenía plenamente adquirida la habilidad de conservación de la percepción, ya que admitía la posibilidad de que, al hacer un giro con el cubo, dos caras que antes de girar eran contiguas pasaran, después del giro, a ser opuestas. El siguiente diálogo se produjo durante la realización de la actividad Pos-10.2; Enrique estaba trabajando sólo y acababa de dibujar las caras del cubo 4 de dicha actividad:

P.: [Mirando el dibujo de Enrique en el cubo 4] *Pero eso no está muy claro. ¿A dónde mira la oveja?*

E.: *Mira hacia abajo.*

P.: *¿No mira hacia la manzana? [me refería al cubo de la pantalla. Por otra parte, en los cubos 1 y 2 Enrique había dibujado la oveja de esa manera y en el cubo 3 la oveja y la manzana eran datos de la actividad]*

E.: *Sí.*

P.: *En cambio aquí ya no.*

E.: *Claro, porque se mueve.*

P.: *pero, ¿se mueven todas a la vez o sólo una cara?*

E.: *Se mueve ésa así. Entonces ésa se mueve así* [señalando a dos caras del cubo]

P.: *¿Y sigue mirando la oveja a la manzana o ya no?*

E.: *Ya no.*

P.: *Entonces, dándole vueltas [al cubo], ¿tú puedes hacer que la oveja mire a diferentes figuras?*

E.: *Claro.*

Después, al resolver la actividad Pos-10.3, Enrique mantuvo una forma de razonamiento análoga, admitiendo que las caras podían cambiar de lugar o de orientación respecto a sus vecinas al girar el cubo.

6.3.2. Dibujo de sólidos en perspectiva.

En la figura 48 se puede ver una tabla que resume las actividades dedicadas al dibujo de sólidos en perspectiva. En la cabecera izquierda aparecen las diferentes formas de presentación de los sólidos y en la cabecera superior aparecen los tipos de sólidos utilizados.

POSIC.	Cubo figurat.	Sólido opaco	Sólido de varillas
Real	(*)	11a, 12a	13a, 14a
Ordenador	11b, 12b	11c, 12c	13b, 14b
Papel	(#)	(#)	(#)

(*) No hemos usado cubos figurativos para no poner énfasis en el dibujo del contenido de las caras.

(#) Al copiar dibujos de papel a papel apenas hace falta usar capacidades de visualización espacial.

Figura 48. Actividades de dibujo de sólidos en perspectiva.

Este reducido conjunto de actividades no tenía objetivos de enseñanza, sino sólo de observar la destreza de los estudiantes al dibujar en perspectiva, pues éste puede ser otro de los parámetros que permitan entender mejor los procesos de visualización espacial de los estudiantes y sus formas de internalización de las formas 3-dimensionales.

Como base para comprender las respuestas a estas actividades hemos utilizado los resultados de las investigaciones de M.C. Mitchelmore. Una de sus conclusiones, presentada por

este investigador en Mitchelmore (1980), es aplicable al análisis de las respuestas de nuestros alumnos y consiste en la definición de diversas etapas de desarrollo de la habilidad de representación de cuerpos 3-dimensionales regulares. Las cuatro etapas encontradas son:

Etapa 1 (Esquemática plana): Se representan las figuras dibujando una de sus caras ortogonalmente (es decir, vista desde su frente).

Etapa 2 (Esquemática espacial): Se representan las figuras dibujando varias de sus caras ortogonalmente y, a veces, incluyendo caras ocultas.

Etapa 3 (Pre-realista): Los dibujos muestran intentos de representar los cuerpos de una manera realista y de dotarlos de profundidad.

Etapa 4 (Realista): Los dibujos son correctos, tanto en el número como en la forma de las caras representadas, y siguen las reglas del dibujo en perspectiva, en particular la de representar como convergentes, pero casi paralelas, las aristas orientadas hacia el fondo.

En la figura 49 reproducimos un diagrama de Mitchelmore (1980) con ejemplos de cada etapa, presentando la tercera etapa dividida en 2 subetapas. Esta interpretación del proceso de desarrollo de las habilidades de representación en perspectiva es de tipo piagetiano, por lo cual puede resultar contradictoria su consideración dentro de una investigación en la que el marco teórico general es el modelo de Van Hiele, claramente incompatible con las teorías de Piaget. Sin embargo, tal contradicción no existe, desde nuestro punto de vista, ya que, por una parte y como hemos dicho antes, estas actividades no tienen objetivos de formación de los estudiantes y, por otra parte, no existen estudios dentro de los parámetros del modelo de Van Hiele que hayan tratado de interpretar este área.

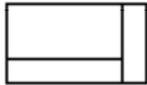
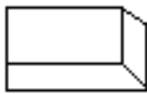
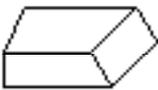
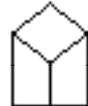
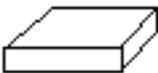
Etapa	Figura			
	Prisma recto	Cilindro	Pirámide	Cubo
1				
2				
3A				
3B				
4				

Figura 49.

Como parte del pre-test al que dedicamos la 2ª sesión, planteamos a Mercedes y Mª Carmen (Enrique no asistió ese día) las actividades Pos-11a, Pos-11b y Pos-13a. Posteriormente, aproximadamente 5 semanas después, los 3 niños realizaron todas las actividades mencionadas en la figura 48. En todos los casos, dibujaron con lápiz y disponían de gomas de borrar para poder corregir sus dibujos. Una vez más, las respuestas de nuestros alumnos han reflejado 3 grados de destreza diferentes, siendo Mª Carmen la que mostró mayor perfección y Mercedes la más pobre, quedando Enrique en una situación intermedia. En el Anexo 2 hemos incluido fotocopias de varios dibujos de cada niño.

Mª Carmen sabía cómo dibujar cubos con regla, por lo que utilizó este procedimiento en diversas ocasiones, obteniendo dibujos correctos de acuerdo con esa técnica³; cuando dibujó cubos a mano alzada, también obtuvo resultados correctos. En aquellas figuras más difíciles para ella (tetraedro y octaedro), Mª Carmen solía realizar varias correcciones para acercar su dibujo a la imagen real, pudiendo notarse claramente que era consciente de las diferencias que había

³ Consistente en dibujar 2 cuadrados iguales con sus lados paralelos, por lo que el dibujo resultante no es realmente en perspectiva.

entre el dibujo y el modelo. Por lo tanto, está claro que M^a Carmen estaba en la etapa 4, de dibujo realista.

Enrique mostró una habilidad de dibujo que creemos que es típica de la etapa 3B; incluso alguno de sus dibujos es casi idéntico a alguno de los modelos incluidos por Mitchelmore en la tabla de la figura 49. Como puede observarse en los dibujos incluidos en el Anexo 2, éstos presentan las deformaciones típicas del dibujo pre-realista, en el que algunas caras de los poliedros están representadas en perspectiva pero otras en vista frontal. Alguno de los dibujos puede catalogarse como de la etapa 4 y algún otro como de la etapa 3A, pero la mayor parte de ellos están claramente en la etapa 3B. Al analizar en las grabaciones de video la actividad de Enrique, se puede observar cómo éste borraba algunas líneas, o incluso figuras completas, que no le gustaban pero al volver a dibujarlas seguía produciendo deformaciones similares, sin avanzar hacia el dibujo correcto tanto como lo hacía M^a Carmen.

En cuanto a Mercedes, su destreza para el dibujo en perspectiva era bastante pobre, dándose el caso de que fue incapaz de hacer dibujos mínimamente correctos de algunos de los sólidos propuestos, de manera que ella misma se daba cuenta de que esos dibujos eran muy incorrectos y los borraba. Nos encontramos ante una niña situada en la etapa 2, algunos de cuyos dibujos, incluidos en el Anexo 2, son idénticos a los ejemplos incluidos en la figura 49 para esta etapa. Por otra parte, sus dibujos pueden resultar contradictorios ya que, junto a la imposibilidad absoluta para dibujar algunos de los sólidos, realizó algunos dibujos muy correctos, propios de las etapas 3B ó 4. Si consideramos el modelo propuesto por Mitchelmore como continuo, de manera que las etapas no son compartimentos estancos, podemos considerar a Mercedes en un momento de transición de la etapa 2 a la 3A, pues es capaz de dibujar cuerpos fáciles en la etapa superior pero los cuerpos más difíciles sólo puede dibujarlos en la etapa inferior.

6.3.3. Dibujo de módulos en representaciones isométrica, de vistas laterales y de vistas numéricas.

En la figura 50 se puede ver una tabla que resume las actividades de dibujo de representaciones de módulos policubo. En la cabecera izquierda aparecen las diferentes formas de presentación de los módulos usadas y en la cabecera superior aparecen los tipos de representación dibujados. Las actividades Rep-1a, Rep-1b y Rep-1c (en su componente de descripción de módulos) pertenecen a este grupo, aunque no se pueden situar en ninguna de las celdas pues los estudiantes tenían libertad para describir los módulos como ellos quisieran y utilizaron mezclas de descripción textual y gráfica que no corresponden a ninguno de los tipos recogidos en la tabla.

REPRES.	Isométr.	Vistas laterales	Vistas numér.
Real	4a, 4b (*), <i>10a</i>	4a, 4b (*), <i>10b</i>	4a, 4b (*)
Ordenador	<i>5a, 5b</i> (*)	<i>5a, 5b</i> (*)	<i>5a, 5b</i> (*)
Papel	6, 8, 9	6	6

(*) En una actividad se puede mover el módulo y en la otra no.

Figura 50. Actividades de representación no perspectiva de módulos.

Las primeras actividades de representación no perspectiva de sólidos que realizaron los estudiantes fueron, por este orden y en sesiones sucesivas, Rep-1b, Rep-1a y Rep-1c. En Rep-1a cada niño tenía un módulo policubo, que le habíamos proporcionado nosotros, y debía describirlo en una hoja de papel para que después otro compañero suyo pudiera construir un módulo igual a éste. En Rep-1b y Rep-1c, cada niño, por turnos, disponía de un módulo que nosotros le habíamos proporcionado y debía darle instrucciones a sus 2 compañeros para que construyeran otro módulo idéntico; los niños que construían el módulo estaban separados de su compañero que lo describía por una mampara para que no pudieran verlo. En la actividad Rep-1b el niño que hacía la descripción sí podía ver, a través del monitor de televisión, lo que construían sus compañeros, mientras que en Rep-1c no podía verlo.

La característica central de las descripciones verbales de Rep-1b y Rep-1c es que se basaron en propiedades internas del módulo, es decir en relaciones de posición entre unos cubitos y otros. Eran descripciones de tipo constructivo, que normalmente contenían instrucciones para añadir cubos en determinados sitios o sobre determinados cubos de la parte del módulo ya construida y que muy raramente aludían a la forma de un conjunto de cubos. Nosotros esperábamos que, a medida que avanzaban las actividades, los niños irían haciendo las sucesivas descripciones más sofisticadas y perfectas, como consecuencia de su experiencia al oír las descripciones de sus compañeros y al construir esos módulos. Sin embargo, esto no ocurrió así.

Otra característica común a todas las descripciones hechas en este par de actividades fue la aparición de ambigüedades en las instrucciones; por ejemplo, en Rep-1b los niños solían dar la instrucción de añadir un cubo sobre *el* cubo de cierto color cuando había varios cubos de ese color. Obviamente, en Rep-1c los estudiantes ya no se podían usar los colores como referencia, pero también había instrucciones ambiguas al pedir, por ejemplo, poner un cubo *al lado* de otro cuando éste tenía varias caras disponibles.

Si bien en las actividades de Representaciones realizadas en las sesiones siguientes se notaron enseguida las diferencias de capacidad de razonamiento y de visualización espacial entre los 3 niños que ya habíamos observado claramente en las sesiones anteriores, en estas primeras actividades no detectamos diferencias significativas entre unos niños y otros. A continuación incluimos la transcripción de la descripción del módulo de la figura 51 que hizo Enrique en la actividad Rep-1b (viendo en el monitor el módulo que iban construyendo Mercedes y M^a Carmen):

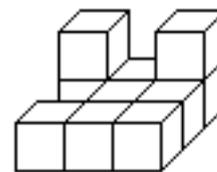


Figura 51.

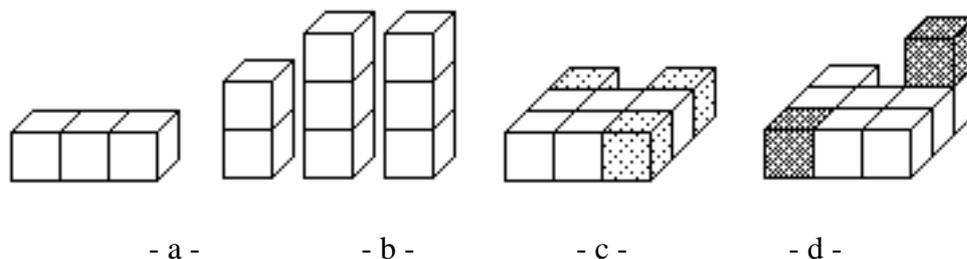


Figura 52.

E.: *Poned 3 figuras [cubos] una encima de la otra [figura 52-a; estas referencias a la figura 52 muestran las construcciones hechas como consecuencia de las últimas instrucciones].*

E.: *Ahora coged otros 2 ... aparte. Y ahora otros 3 [figura 52-b].*

E.: *Ahora juntadlos y el de 2 que esté en medio ... que esté acostado [figura 52-c].*

E.: *Ahora le poneis uno encima del verde.*

C.: *Es que hay 3 verdes [sombreados en la figura 52-c].*

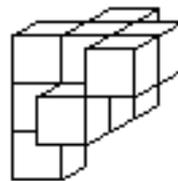
E.: *Colócalo en uno, a ver ... [M^a Carmen colocó un cubo sobre uno de los cubos verdes] No, en el otro ... [M^a Carmen cambió a otro cubo verde] Sí [figura 52-d].*

E.: *Ahora poned otro [cubo] encima del negro ... [M^a Carmen fue a colocar el cubo, pero Enrique les corrigió] No, encima de ése no, del otro ... del que está tocando Mercedes [se trataba de los dos cubos sombreados en la figura 52-d; realmente, el cubo al que hacía referencia Enrique era verde oscuro, pero en el monitor parecía negro].*

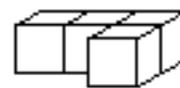
[Después de esta última instrucción, M^a Carmen y Mercedes construyeron un módulo correcto, igual al de la figura 51]

Una prueba de la igualdad de los 3 estudiantes en la realización de estas actividades es que M^a Carmen, la más inteligente de los 3, fue la única que no pudo dar unas instrucciones adecuadas para que Mercedes y Enrique construyeran su módulo en la actividad Rep-1c (sin ver lo que hacían sus compañeros). Realmente, parte de la culpa es nuestra porque, para comprobar la destreza de M^a Carmen, le habíamos dado un módulo más complicado que los que habíamos dado antes a los otros niños (figura 53-a; sus únicos cubos son los que están a la vista). Así fueron sus instrucciones de construcción:

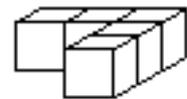
C.: *Haced dos filas de 2 [cubos cada una] y una de 1, pero sueltas ... Ahora juntad las de 2, pero no las junteis que coincidan. Es que no sé cómo expresarme ... Juntadlas que sólo se toquen en un cuadrado. Que las junteis un poco, así, desviadas [figura 53-b].*



- a -



- b -



- c -

Figura 53.

C.: *Ahora con el cubo ese que teneis solo, teneis que ponerlo en un sitio que forme una línea de 3 y sólo puede formar una línea de 3 en un sitio. ... Bien, eso lo poneis como base [figura 53-c]*

[M^a Carmen estaba describiendo la construcción de los 5 cubos que integran el plano superior, en la figura 53-a, de su módulo]

C.: *Haced una fila de 3. ... Y esa fila de 3 la teneis que poner arriba, acostada, horizontal encima de la del medio, encima de la de 2 que está en medio.*

E.: *Es que no hay ninguna fila de 2.*

[A continuación hubo una pequeña discusión entre los niños en la que quedó claro que tenían dos módulos completamente diferentes y que no se entendían. En vista de ello, decidimos que M^a Carmen empezara a describir otra vez el módulo, pero esta vez tampoco tuvo éxito, por lo que decidimos darle otro módulo más sencillo, que supo describir sin dificultades]

Si en las actividades anteriores hubo unanimidad entre nuestros 3 alumnos en el estilo de las descripciones y las propiedades utilizadas (colores y relaciones de contigüidad), en la actividad Rep-1a obtuvimos dos tipos diferentes de descripciones escritas. La de Enrique fue una descripción puramente textual que siguió el mismo estilo de la actividad Rep-1b, que habían hecho en la sesión anteriores (la figura 54 muestra el módulo descrito por Enrique):

Haz 3 filas de 3.

Junta de esas 3 filas 2.

En el cuadrado [cubo] del medio de cualquiera de las 2 filas pon uno en medio.

En la otra fila junta la fila de tres pero vertical y en el 1º ó el 3º en el que quieras.

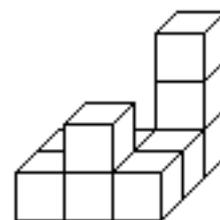


Figura 54.

Por el contrario, las descripciones hechas por Mercedes y por M^a Carmen, que eran del mismo tipo, consistieron en una combinación de instrucciones gráficas y textuales: Representaron gráficamente la base del módulo (es decir, su plano inferior, que se apoyaba en la mesa) y marcaron con letras o números cada cuadrado del dibujo.

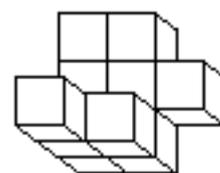
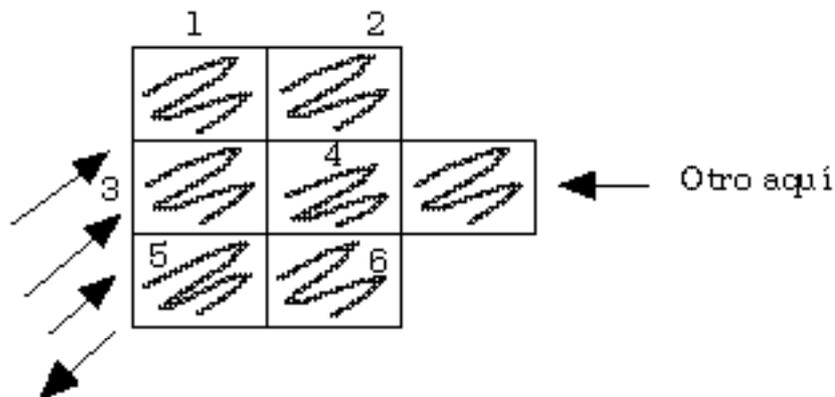


Figura 55.

Después completaron la descripción dando instrucciones textuales acerca de la cantidad de cubos que había que poner encima de cada uno de la base (en ambos casos la estructura de los módulos

que describieron era simple pues carecían de cubos que estuvieran "en el aire", es decir sujetos horizontalmente). Esta es la descripción que hizo Mercedes del módulo de la figura 55:

Pon 6 así



Ahora ponlo esto apoyado en la mesa.

Contando por arriba en el cinco pon dos más (encima) y al lado o sea en el 6 uno más (encima).

Como se puede ver, este tipo de descripción está próxima a la de vistas numéricas, si bien sólo es utilizable con módulos sencillos, como en éste caso. Hubiera sido interesante ver si M^a Carmen y Mercedes seguían usando este tipo de descripción con un módulo más complejo y cómo la modificaban.

En las sesiones siguientes a estas actividades de toma de contacto con el tema y observación de los conocimientos y estrategias intuitivos de nuestros alumnos, empezó el trabajo continuo en las actividades del bloque de Representaciones. Durante algunas sesiones seguimos un orden secuencial de las actividades, por lo que al empezar las actividades de dibujo de representaciones (Rep-4a y siguientes), nuestros alumnos ya habían trabajado en las actividades anteriores, interpretando las 3 diferentes formas de representación para construir módulos.

Las actividades Rep-4a y Rep-4b son similares, salvo que en la segunda el módulo real está fijo y los estudiantes no pueden tocarlo para hacer sus representaciones. En cuanto a las actividades Rep-5a y Rep-5b, se trata de las equivalentes a las anteriores pero sustituyendo el módulo real por uno en el ordenador.

Al empezar la actividad Rep-4a, les entregamos a los estudiantes hojas de papel punteado con trama isométrica y les dimos unas instrucciones sobre la estructura de la malla isométrica y la forma de dibujar los cubos sobre ella: Los vértices deben estar siempre en puntos de la malla y las aristas deben ser siempre segmentos de la retícula triangular. En primer lugar, les pedimos que copiaran en sus hojas de mallas el módulo de la actividad Rep-3b.2. Como en otras ocasiones, M^a Carmen fue la primera en entenderlo y lo dibujó bien y sin ninguna otra ayuda por nuestra parte. Sin embargo, Enrique y, sobre todo, Mercedes necesitaron más ayuda para copiar la representación isométrica del módulo, pues tenían el problema de no saber controlar

adecuadamente la longitud de los segmentos ni los cambios de dirección, lo cual mostraba una falta de adquisición de la habilidad de reconocimiento de relaciones espaciales. Después les dimos módulos reales para que dibujaran sus diferentes representaciones.

Desde el primer momento descubrimos que era mucho más fácil dibujar representaciones mediante vistas laterales o numéricas que isométricas. La causa de esta diferencia está en que para las vistas laterales sólo hace falta observar el módulo desde enfrente de las diversas caras y, en las vistas numéricas, además contar el número de cubos de cada línea, mientras que para hacer una representación isométrica hay que superar una combinación de varias dificultades: Es necesario coordinar bien las posiciones relativas de los cubos o de sus caras, y es conveniente observar el módulo desde un punto de vista muy concreto y abstraer algunas diferencias entre la visión en perspectiva y la isométrica, derivadas de la convergencia de las líneas y la disminución de tamaño con la distancia.

La prueba de dicha diferencia es que los 3 niños eran capaces de dibujar las vistas laterales y numéricas de cualquier módulo sin dificultad, mientras que sólo M^a Carmen fue capaz de dibujar bien las representaciones isométricas. La siguiente transcripción muestra la primera de las dificultades mencionadas antes, a las que se enfrentaban Mercedes y Enrique cada vez que tenían que dibujar una representación isométrica. En este caso, en la actividad Rep-4a, Mercedes tiene que dibujar en papel punteado isométrico un módulo muy simple (figura 56; los números son sólo para identificar cada cubo en el diálogo) que está apoyado en la mesa, por lo que el dibujo lo representaría visto desde arriba:

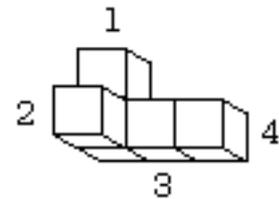


Figura 56.

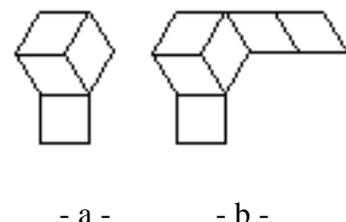
[En vista de los problemas que ha tenido Mercedes al intentar dibujar sola el módulo, el Profesor le dibuja la representación isométrica de un cubo Multilink (figura 57) y le pregunta sobre las caras y vértices, que relaciona correctamente con las del cubo real]



Figura 57.

P.: *Ahí tienes ese cubo [nº 1]. ¿dónde iría el blanco [nº 2]?*

M.: *Aquí [señalando la arista inferior del cubo ya dibujado y empezando a dibujar el nuevo] ... Ya [figura 58-a; después siguió dibujando los otros cubos del módulo (figura 58-b)]*



- a - - b -

Figura 58.

P.: *¿Cuántas caras se ven en el blanco [nº2]?*

M.: *Dos.*

P.: *¿Dos? No. Yo veo 3 ... Esta, ésta y ésta [señalando cada una en el módulo].*

M.: *¡Ah, sí!*

[Después de algunas explicaciones, Mercedes ya entendía que las caras se representan por rombos cuyos vértices están en la malla, pero siguió sin coordinar unas caras con otras. Tras borrar y corregir su dibujo anterior, el resultado fue el dibujo de la figura 59, en el que los 3 rombos inferiores querían representar las 3 caras del cubo n° 2, como se desprende del diálogo que siguió]

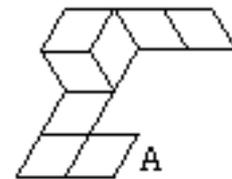


Figura 59.

P.: *Esta cara de aquí* [señalando la cara derecha del cubo n° 2], *¿cuál será?*

M.: *Esta* [señalando el rombo A].

P.: *Pero está pegada a la de arriba ... Esta blanca de arriba* [la cara superior del cubo n° 2] *¿cuál es?*

[Mercedes borró la cara A y la dibujó como en la figura 60]

P.: *Mira el de arriba* [el cubo n° 1 en la lámina]. *Mira aquí. Esta cara* [señalando la cara derecha del n° 1], *¿está igual que ésta* [señalando la cara derecha del n° 2]?

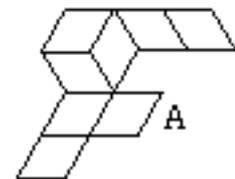


Figura 60.

M.: *Sí.*

P.: *Entonces, ahí* [en el dibujo] *tendrían que estar iguales las dos.*

M.: *Entonces no se puede* [hacer el dibujo].

P.: *Sí. Dibújala como la de arriba.*

M.: [Mientras empezaba a dibujarla] *No se puede* [pero hizo el dibujo de la figura 61].

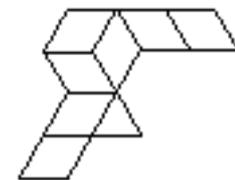


Figura 61.

P.: *¿Cómo que no se puede?*

M.: *Yo no sé.*

P.: *¿Tú no puedes dibujar un rombo como ése* [la cara derecha del n° 1]?

M.: *Sí* [y lo dibujó bien, pero separado de la representación del módulo].

P.: *Y ahí, ¿qué forma tiene esa cara?*

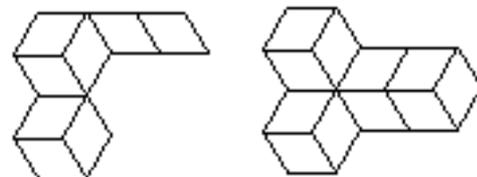
M.: *Un rombo.*

P.: *¿Y por qué no lo puedes dibujar igual?*

M.: *Porque no me sale ...*

P.: *A ver, intenta dibujar aquí* [borrando la cara mal dibujada del cubo n° 2 para ayudarle].

[Ahora Mercedes sí supo dibujar las dos caras del cubo correctamente (figura 62-a). Después, apoyándose en la idea de buscar una cara dibujada que estuviera en la misma posición que la que quería dibujar, logró completar correctamente la representación del módulo (figura 62-b)]



- a -

- b -

Figura 62.

La dificultad que acabamos de analizar se

mantuvo hasta el final de la experimentación: Mercedes siguió sin ser capaz de coordinar formas, posiciones y longitudes, por lo que, en las últimas sesiones, renunciamos a proponerle actividades de dibujo de representaciones isométricas. En cuanto a Enrique, progresó algo y sus dificultades se centraron más en la identificación de caras de cubos semiocultos (que no aparecen representadas por rombos, sino por triángulos), aunque también siguió teniendo hasta la última sesión algunas dificultades para coordinar las posiciones de las caras normales.

Mencionábamos como segunda dificultad fundamental la conveniencia de observar los módulos desde una posición concreta, la más próxima posible al punto de vista isométrico. Esta se les presentó a los 3 niños y su exponente más claro era cuando dibujaban alguna cara que ellos veían pero que en la representación isométrica debía quedar oculta. Ahora veremos a Enrique, también trabajando en la actividad Rep-4a, tratando de representar en papel isométrico el módulo de la figura 63, pero siendo incapaz de observar el módulo real desde la posición correcta (diálogos parecidos a éste tuvieron lugar también con M^a Carmen y Mercedes):

P.: *¿Qué pasa con el cubito blanco [n° 1]?*

E.: *Que no se ve.*

P.: *¿Cómo que no se ve? ¿Esa posición [la del módulo real] es la misma que tienes en la lámina?*

[Cuando Enrique logra observar el módulo desde una posición adecuada, empieza a hacer las cosas algo mejor, pero no del todo]

E.: *El blanco es éste [dibujando la media cara que se ve].*

P.: *¿Y qué pasa con el rosa [n° 4]?*

E.: *¡Ah! Pues entonces será la otra mitad [lo dibujó mal] ... después el verde [n° 2; también lo dibujó mal].*

P.: *¿El verde [n° 2] está a la altura del marrón éste [n° 3]?*

E.: *No ... Es que claro, es que el rosa [n° 4] es la mitad de este de aquí, detrás de éste ... Esta mitad.*

P.: *¿Esa mitad es el rosa? Vamos a ver: El rosa está detrás del rojo [n° 5; señalándolo en el módulo]. El rojo es éste de aquí [señalándolo en la hoja de papel]. Entonces, el rosa [n° 4] ¿dónde va?*

E.: *Pues aquí [y dibujó bien la media cara que se ve].*

P.: *Y ¿qué pasa con el verde [n° 2]?*

E.: *El verde se ve ... así [lo dibujó mal].*

P.: *¿Así? Pero el verde no engancha con el blanco. ¿Cómo se ve el verde? ¿O no se ve?*

E.: *No sé. Es que yo sí que lo veo, pero ... [empezaba a comprender algo]*

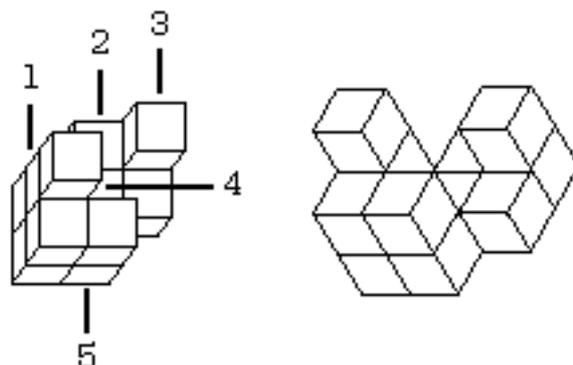


Figura 63.

P.: *Bueno, pero es que tú tienes que imaginarte un poco cómo se ve desde esta posición* [señalando a la hoja de papel].

E.: *Pues será este trozo de aquí* [y ahora sí lo dibujó bien].

Como consecuencia de las dificultades de Enrique y Mercedes con los dibujos de representaciones isométricas, en la actividad Rep-5a sólo les pedimos que dibujaran las vistas laterales y las numéricas (en realidad, lo que hicieron fue dibujar las vistas numéricas de frente, derecha o izquierda y superior). La estrategia seguida por los niños en esta actividad fue la misma que ya hemos comentado en las últimas páginas del apartado 6.1, consistente en poner en el plano de la pantalla, sucesivamente, las caras del frente, derecha o izquierda y superior y hacer con cada una pequeños giros hacia los lados para ver cuántos cubos hay en cada línea. Este tipo de movimientos los hacían con seguridad, usando giros de aproximadamente 90° para pasar de una vista a la siguiente.

Una característica del trabajo con módulos policubo en el ordenador era que, debido a la lentitud y dificultad de los movimientos, los estudiantes tenían más tendencia a hacer conjeturas sobre las posiciones relativas de los cubos que cuando se trataba de módulos reales, pues en este caso no tenían más que mirar el módulo o moverlo con la mano para ver esas relaciones. Esto supuso un aspecto interesante desde el punto de vista de la creación y desarrollo de destrezas de visualización espacial e interpretación de imágenes planas de cuerpos 3-dimensionales, como se aprecia en el siguiente diálogo, correspondiente a la actividad Rep-5a.2. Los 3 estudiantes estaban trabajando juntos en el dibujo de las vistas numéricas del módulo de la pantalla (figura 64) y, para poder completar la vista superior, debían decidir en qué línea se encontraba el cubo C:

P.: *¿Dónde está ese cubito* [el C]?

[Dicen algo que no se entiende con claridad, pero creen que está en la línea del centro de la cara]

P.: *En medio no puede estar porque hay un agujero ... Mercedes, vamos a ver: Lo que decías tú antes, que en medio no puede estar porque hay un agujero.*

M.: *Entonces está arriba.*

P.: *Pero arriba no, porque no está pegado a éste* [señalando al A].

C.: *Está con éste* [señalando al B]. *Está con éste.*

P.: *Está en la fila de la izquierda ... Pero, ¿pegado a cuál está? ... Enrique, ¿quieres marcar este cubo en la pantalla?* [señalando en

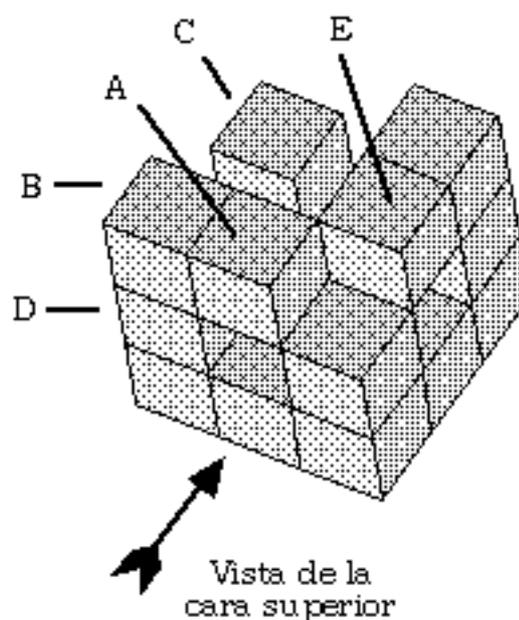


Figura 64.

el papel al correspondiente al B en la vista superior] ... *¿Cuántos [cubos] hay en esa posición?*

E.: *Dos.*

P.: *¿Cuál es el otro? [Enrique señaló al cubo C] ... Pero, ¿están pegados?*

E. y C.: *No.*

P.: *¿Entonces ...?*

E.: *Pues que tendrá ahí un eso que hace así y ése está así [señalando a los huecos del módulo que se ven en la pantalla].*

P.: *Entonces [el cubo C] estará más abajo, no estará en la línea de ése [señalando al B].*

C.: *No. Pero tampoco está en ésta [señalando al cubo A].*

M.: *Entonces se ha perdido. Estará por ahí, perdido.*

P.: *Estará en la segunda [fila], en la del medio, o en la de abajo.*

C.: *En ésta no puede estar [señalando al E].*

M.: *Aquí no [señalando el hueco de la cara superior del módulo] y aquí tampoco [señalando al A] porque se ve que está subido por arriba. Entonces, ¿dónde está?*

C.: *Está detrás de éste [señalando al B] ... o detrás de ése [señalando al D]. ¡Yo qué sé! Déjame una regla.*

[M^a Carmen cogió una regla, la puso sobre una arista del cubo C y comprobó que la regla pasaba por el vértice izquierdo común a los cubos B y D (figura 65)]

C.: *Que esta línea de aquí llega a este vértice. Entonces [el cubo C] está detrás de éste de aquí [señalando al D].*

[El Profesor les explicó a Mercedes y Enrique cómo tendrían que estar alineadas las aristas si el cubo C estuviera en la esquina del módulo; no obstante, Mercedes parece no haberse enterado, porque inmediatamente después dice que en la línea del cubo A hay 2 cubos, el A y el C]

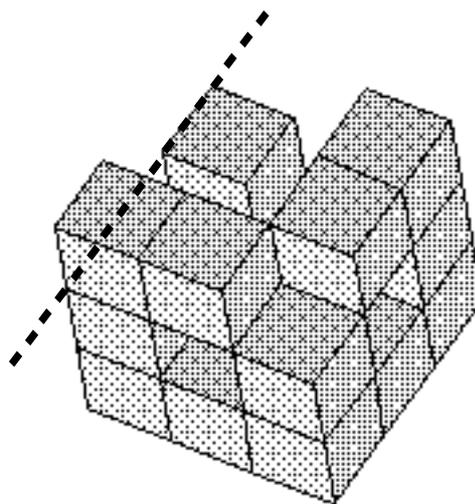


Figura 65.

Las actividades Rep-6, se la propusimos solamente a M^a Carmen y las actividades Rep-8 y Rep-9 se la propusimos solamente a M^a Carmen y Enrique, siendo la niña la única que obtuvo resultados positivos. De todas formas, éstas fueron las últimas actividades, realizadas en la última sesión y el final de la penúltima, por lo que no pudimos trabajar con detalle sobre ellas.

M^a Carmen resolvió bien y con rapidez los 3 casos de Rep-6.1, dándose cuenta enseguida de que en algunas posiciones de las vistas numéricas no se podía saber cuántos cubos había, debido a que podían quedar ocultos en la representación isométrica. En cuanto a Rep-8, Enrique no pudo resolver ningún ejercicio, por las dificultades que hemos comentado más arriba. M^a

Carmen resolvió bien sola el primer caso (Rep-8.1), necesitó ayuda para resolver Rep-8.2 y fue incapaz de hacer Rep-8.3, pues no veía qué forma tenía el módulo representado; en concreto, sus dificultades se centraron en las 2 caras consecutivas sombreadas, que no consiguió visualizar correctamente. Por último, M^a Carmen fue la única que trabajó en la actividad Rep-9, resolviendo bien los 3 ejercicios con facilidad y rapidez. Esto parece demostrar que es más fácil imaginar las modificaciones de los módulos cuando se transforman en otros con menos piezas que cuando lo hacen en otros con más piezas. Probablemente la clave está en que para construir las imágenes mentales de los módulos después de perder algunos cubos, se puede obtener toda la información necesaria de la figura dibujada en la lámina, mientras que para generar las imágenes mentales de los módulos con más piezas, es necesario imaginar qué caras inicialmente visibles quedarán ocultas o semi-ocultas en el nuevo módulo y esta información es más difícil de obtener a partir del módulo dibujado en la lámina.

6.4. Actividades de construcción de módulos.

En la figura 66 se puede ver una tabla que resume las actividades de construcción de módulos policubo a partir de sus diferentes formas de representación. En la cabecera izquierda aparecen los tipos de presentación de los módulos usadas y en la cabecera superior aparecen los tipos de representación. Las actividades Rep-1a, Rep-1b y Rep-1c (en su componente de construcción de módulos) pertenecen a este grupo, aunque no se pueden situar en ninguna de las celdas pues los estudiantes tuvieron que construir módulos a partir de descripciones verbales o escritas de sus compañeros y éstos, que tenían libertad para hacer la descripción de la forma que ellos quisieran, no se ajustaron a ninguno de los tipos de representación reflejados en la tabla.

REPRES.	Isométr.	Vistas laterales	Vistas numér.
Ordenador	3a	3a	3a
Papel	3b	3b, 7	3b, 7

Figura 66. Actividades de construcción de módulos.

Al igual que en el apartado 6.3.3, vamos a empezar refiriéndonos a las actividades Rep-1a, Rep-1b y Rep-1c. En las páginas anteriores hemos discutido las descripciones hechas por los estudiantes y ahora analizaremos estas actividades desde la perspectiva de la construcción de los módulos a partir de dichas descripciones.

En la actividad Rep-1a, Enrique construyó un módulo en base a la descripción hecha por Mercedes. A pesar de que la descripción hecha por Mercedes (incluida en el apartado 6.3.3, figura 55) es correcta y no presenta ambigüedades ni lagunas, no coincidió con el original porque Enrique no colocó donde debía las piezas que tenían que ir sobre los cubos 5 y 6.

En la misma actividad, Mercedes construyó el módulo descrito por M^a Carmen y el resultado tampoco coincidió con el original, a pesar de que también en este caso la descripción era correcta. El módulo construido por Mercedes era simétrico del original, lo cual parece indicar que Mercedes cambió la posición de la base al colocar encima de ella las otras piezas.

Finalmente, en la actividad Rep-1a, M^a Carmen construyó el módulo descrito por Enrique (descripción incluida en el apartado 6.3.3, figura 54). A pesar de que éste módulo era muy simple, la descripción de Enrique no era correcta, lo cual hizo que M^a Carmen no fuera capaz de construir un módulo igual al original. En concreto, las dificultades surgieron por la última instrucción: "En la otra fila junta la fila de tres pero vertical y en el 1º ó el 3º en el que quieras". La propia instrucción indica una libertad para decidir la posición de esta tercera fila de 3 cubos, que puede dar lugar tanto al módulo original como a su simétrico. Enrique tampoco marcó claramente en esta instrucción la cara del cubo a la que había que unir esta fila, pues tanto el primer como el tercer cubos a los que aludía tenían 4 caras disponibles.

No hubo nada especialmente destacable en las actividades Rep-1b y Rep-1c desde la perspectiva de quienes construían los módulos. Trataban de reproducir lo más fielmente posible las instrucciones que recibían y pedían aclaraciones cuando detectaban ambigüedades.

Nos referiremos ahora a las otras actividades de este conjunto, Rep-3a, Rep-3b y Rep-7. La actividad Rep-3a se basó en un programa de ordenador que mostraba los diferentes tipos de representaciones de sólidos, pudiendo los estudiantes mover las representaciones (figura 18), es decir observar el sólido desde diferentes posiciones.

La construcción de sólidos a partir de sus representaciones isométricas resultó, por lo general, más fácil que a partir de las ortogonales, cosa lógica si pensamos que la representación isométrica es más realista que las de vistas laterales o numéricas. Dentro de las representaciones isométricas, la construcción a partir de las representaciones del ordenador solía ser más complicada para nuestros alumnos que a partir de las láminas, debido a que el ordenador daba una información completa sobre la forma de los sólidos, mientras que en la lámina sólo se disponía de la imagen desde un punto de vista, por lo que la parte oculta del módulo no importaba cómo quedara. Además, como el ángulo de giro para pasar de una vista ortogonal de un módulo a otra es de 120°, algunas veces los niños tenían dificultades para colocar el módulo real que estaban construyendo en la misma posición que la representación de la pantalla del ordenador.

Un problema presente en estas construcciones fue el inverso del que hemos comentado en el apartado 6.3.3, sobre la dificultad de nuestros alumnos para interpretar una representación isométrica y decidir qué cubos están alineados, cuáles forman ángulos y cuáles no están en el mismo plano. M^a Carmen no experimentó este problema más que de manera esporádica, pero las dificultades de Enrique y, sobre todo, Mercedes fueron mayores. En Rep-3a.1, Enrique construyó

una fila de cubos más larga de lo debido porque incluyó en ella un cubo que, realmente, pertenecía a otra fila paralela que sobresalía por detrás. Las mayores dificultades las sufrió Mercedes al construir el sólido de Rep-3b.2; a pesar de que se trata de un cuerpo bastante sencillo que no tiene ningún cubo semi-oculto, tiene muchos cambios de dirección y se ven juntos los cubos de líneas diferentes. En la transcripción correspondiente a esta actividad, se puede apreciar claramente que esta niña no era capaz de orientar adecuadamente los cubos y de que no usaba la habilidad de reconocimiento de las relaciones espaciales, pues no sabía qué caras correspondían al mismo cubo ni cuándo dos cubos estaban en línea recta o en ángulo. La sucesión de módulos (de izquierda a derecha y de arriba a abajo) mostrada en la figura 67 es el resumen del trabajo de Mercedes en esta actividad, pues son sus sucesivas construcciones hasta llegar al módulo correcto completo (los asteriscos * indican construcciones hechas por el profesor):

Se pueden observar dos componentes importantes de la forma de construir el módulo de Mercedes, que deberían ser objeto de atención destacada en una secuencia de enseñanza correctiva más detallada que la seguida en este experimento: El primero es la tendencia a construir figuras planas, interpretando los cambios de dirección 3-dimensionales como cambios de dirección planos; esta tendencia es totalmente clara en la primera parte del proceso de construcción, hasta el momento en que empieza a intervenir más directamente el profesor y a añadir cubos en los lugares correctos. Esta interpretación viene también apoyada por el hecho de que Mercedes construyó con mucha más facilidad el módulo de Rep-3b.1, en el que la mayoría

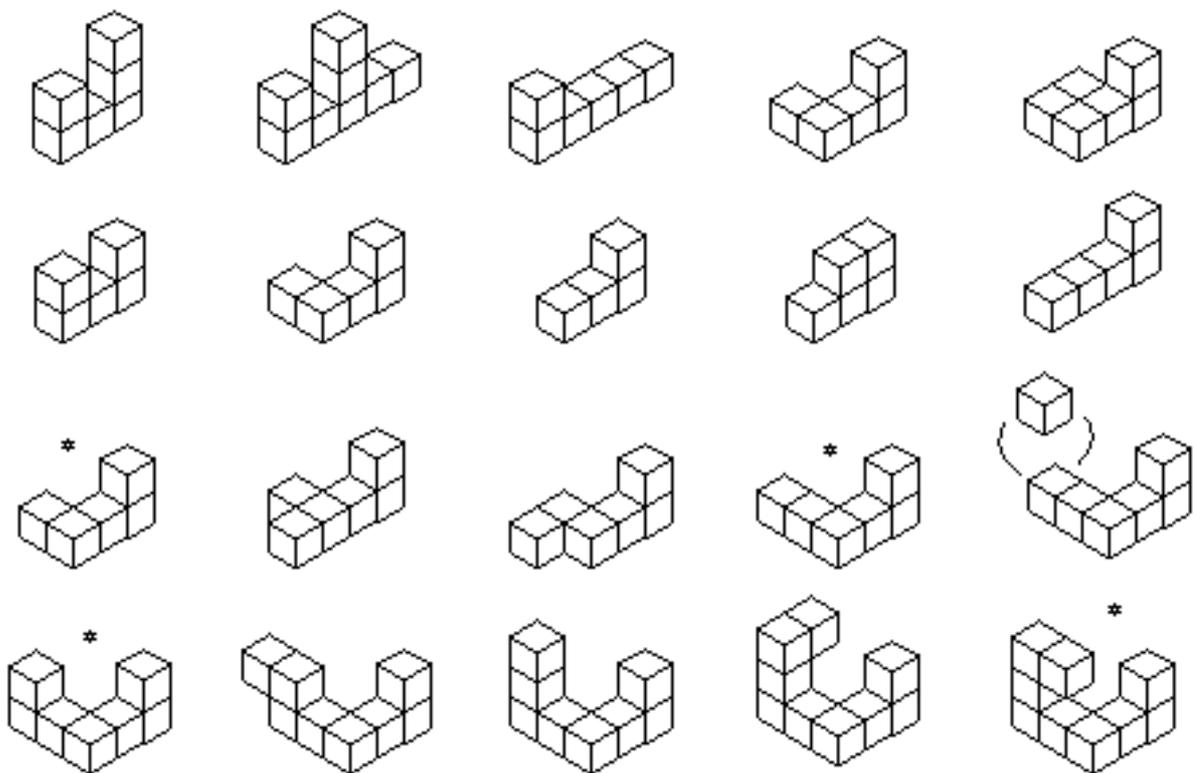


Figura 67.

de las piezas están conectadas y en el mismo plano. El segundo componente es la incapacidad para hacer un análisis detallado de los cubos que integran el módulo y las relaciones de cada cubo con sus vecinos (tanto reales como aparentes); esto puede interpretarse, en términos de los niveles de razonamiento de Van Hiele, como un razonamiento del nivel 1 ó, como máximo, de transición hacia el nivel 2.

Otro elemento de las representaciones isométricas que requiere un aprendizaje más detallado y una mayor capacidad de visualización espacial es la interpretación de los huecos y los cubos semi-ocultos. Por ejemplo, tanto M^a Carmen como Mercedes construyeron mal el sólido de Rep-3a.1 porque pusieron un cubo de menos o de más, respectivamente, como consecuencia de una falsa interpretación de las representaciones.

Por lo que se refiere a las vistas laterales y vistas numéricas, la única diferencia entre las actividades Rep-3a y Rep-3b es que en la primera los estudiantes disponían de las vistas desde 5 posiciones diferentes (frente, izquierda, detrás, derecha y arriba), mientras que en la segunda actividad sólo disponían de las 2 ó 3 vistas presentadas en las láminas. No obstante, a efectos prácticos, no percibimos ninguna diferencia en las formas de los estudiantes de construir los sólidos a partir del ordenador o de las láminas de papel.

En las técnicas de construcción a partir de las vistas laterales empleadas por nuestros alumnos, pudimos observar una interesante evolución de M^a Carmen. En los primeros ejercicios, los 3 estudiantes usaban la misma estrategia, consistente en construir una figura plana que correspondiese a, por ejemplo, la vista frontal. Después, se fijaban en otra vista y añadían cubos para formar esa vista; sólo en caso necesario cambiaban de sitio alguno de los cubos de la primera parte de la construcción. Por último, se fijaban en la tercera vista lateral e intentaban ajustar su construcción a esta vista. Normalmente, la construcción de un módulo que responda a las 2 primeras vistas laterales consideradas es fácil, pero los problemas surgen realmente cuando hay que ajustar también la tercera vista lateral y hay que añadir y quitar piezas o cambiarlas de sitio.

Al cabo de algunos ejercicios, M^a Carmen descubrió que era más económico no encajar los cubos, sino ponerlos unos junto o sobre los otros pero sin unir; de esta manera podía cambiar las posiciones con más rapidez y llegar más fácilmente a la solución. Esta niña no tuvo, realmente, problemas con este tipo de ejercicios que, desde el principio, resolvió con rapidez. Por el contrario, Mercedes y Enrique siguieron hasta el final utilizando la misma estrategia inicial o con pequeñas variaciones.

La construcción de módulos a partir de vistas numéricas tiene, en relación con las vistas laterales, dos características que la hacen más fácil: i) Desde el principio se dispone de la cantidad exacta de cubos, por lo que, después de ajustar una de las vistas, ya no hay que añadir o quitar cubos, y ii) cuando se construye un módulo de acuerdo con una de las vistas, existen

bastantes probabilidades de que las demás vistas coincidan casi totalmente y sólo hagan falta pocas modificaciones. En la primera actividad de este tipo (Rep-3a.5) es donde M^a Carmen descubrió la estrategia comentada antes de no fijar los cubos:

C.: Yo ya lo tengo [se refiere a la vista del frente] ... Es que estoy indecisa si ponerlo aquí, aquí o aquí. Lo dejo sin poner y cuando vea la derecha ya lo pongo.

Mercedes tuvo bastantes dificultades con este tipo de ejercicios debido a que no acababa de entender bien qué significaban los números de las vistas y en algunas ocasiones se fijaba sólo en la forma (silueta) de las vistas. Esto le creaba dificultades adicionales. Con el fin de ayudarla, le propusimos descomponer cada tarea de construcción de un módulo en 3 sub-tareas, de manera que, primero, sólo se preocupara de construir la planta inferior del módulo, cuidando de que coincidiera con todas las vistas laterales, después sólo se ocupara de construir la planta intermedia y, por último, sólo se ocupara de construir la planta superior. Sin embargo, no tuvimos mucho éxito, pues no observamos ningún avance significativo y, aparentemente, el tener que fijarse sólo en parte de los cuadrados de las vistas le producía dificultades.

El objetivo de la actividad Rep-7 es mostrar que las representaciones por vistas laterales o numéricas pueden corresponder a varios módulos diferentes, es decir, que a veces se pueden construir varios módulos distintos a partir de un solo conjunto de vistas. En realidad, esto surgió espontáneamente en la primera actividad de construcción de módulos que hicieron (Rep-3a.3), pero en la actividad Rep-7 se pide a los estudiantes de manera explícita que observen sus construcciones para ver cuándo y cómo pueden modificarlas de manera que sigan correspondiendo al mismo conjunto de vistas. Esta actividad se reveló difícil y, por falta de tiempo, sólo dedicamos a ella parte de una sesión, por lo que no pudimos ver si nuestros alumnos eran capaces de entenderla y progresar. En esta sesión, la única que hizo algún progreso fue M^a Carmen, que entendió cuál era el problema planteado y cómo se podía resolver, pero sólo llegó a resolver bien las actividades con guía y explicaciones nuestras.

7. CONCLUSIONES FINALES

A modo de resumen final de la experimentación realizada de este módulo, creemos que contiene una serie de elementos valiosos que, con mejoras derivadas de esta experimentación y de otras que llevaremos a cabo en el futuro, pueden formar una unidad de investigación y enseñanza de destrezas de visualización espacial para un amplio espectro de estudiantes. Ha quedado claro que la mayoría de las actividades con cubos figurativos eran muy fáciles para nuestros alumnos (estudiantes de 6° de E.G.B.), por lo que se impone la necesidad de una ampliación de esta investigación para observar la reacción de niños de 1 a 3 años más pequeños (3° a 5° de Primaria). También ha quedado claro que un grupo de actividades de movimientos y

de representaciones eran muy difíciles para estos niños, por lo que deberemos ampliar la investigación también hacia los cursos de la nueva Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Otro objetivo de esta parte del proyecto de investigación era experimentar con diferentes materiales y entornos en los que se puedan plantear actividades de visualización espacial. Ha quedado demostrada plenamente nuestra previsión en la mayoría de las variables consideradas (descritas en la sección 4 y resumidas en las figuras 19 y 20), pues hemos podido observar diferencias significativas en las actividades correspondientes a cada valor de las variables, tanto en la dificultad como en la necesidad de uso de distintos procesos y habilidades de visualización. Podemos resumir estas diferencias:

1) Movimiento de sólidos reales o en el ordenador: Las actividades de movimiento de cuerpos reales fueron siempre mucho más fáciles que las de movimiento en el ordenador. Sin embargo, la utilidad formativa de las primeras fue muy inferior a la de las segundas, pues los niños movían los sólidos reales con una rapidez y facilidad que les impedía reflexionar conscientemente sobre sus acciones, mientras que el ordenador, al limitar los movimientos a los giros alrededor de los ejes de coordenadas, les obligaba a hacer conscientes los movimientos y a pre-planificar sus acciones, lo cual ayudaba a desarrollar las habilidades de visualización espacial.

2) Utilización de sólidos opacos o de varillas: Los cuerpos de varillas fomentaron un análisis más complejo de su estructura y un mayor uso de sus componentes y propiedades, pues todos los elementos del sólido (caras, aristas y vértices) eran visibles y los cruces de aristas generaban figuras que podían actuar como distractores. Por el contrario, en los sólidos opacos no existía esta posibilidad. Por otra parte, aunque las características visuales de las representaciones en perspectiva (principalmente la convergencia de las líneas paralelas que no están en el plano de la pantalla) se podían observar tanto en los sólidos opacos como en los transparentes, los segundos presentaban dichas propiedades de una forma más clara, ya que permitían ver también las aristas situadas más alejadas del plano frontal.

Las representaciones planas de los sólidos de varillas (tanto en papel como en la pantalla del ordenador) pierden la sensación de profundidad que dan los reales, al convertir las aristas en segmentos. Esto, que puede considerarse como un defecto en otros contextos, dio lugar a la aparición del conocido fenómeno de las dos posibles formas de "ver" los sólidos (figura 68).

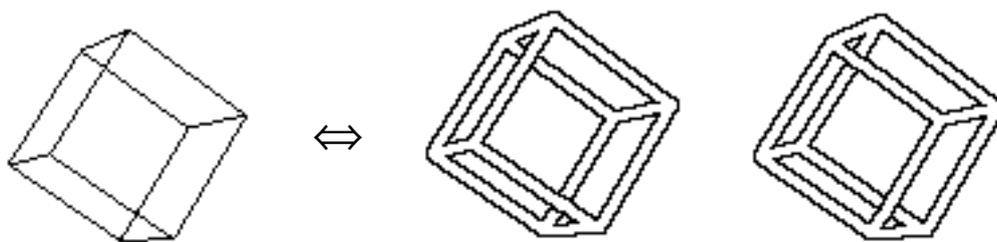


Figura 68. La representación en perspectiva del cubo (izquierda) se puede "ver" de dos formas (derecha). Sólo una de ellas puede ser un cubo.

3) Movimiento continuo o movimiento instantáneo en el ordenador: Hemos trabajado con un programa que permite ver cómo se mueven los sólidos de forma automática, continua e ininterrumpida y con otro programa en el que es necesario seleccionar la amplitud del giro que se desea realizar y el programa dibuja en la pantalla la posición resultante por ese giro, sin ningún movimiento ni posición intermedia. En esta experimentación hemos observado que el primer tipo de programa es más fácil de utilizar que el segundo y que es apropiado para niños más pequeños, si bien en un momento dado es conveniente abandonarlo y sustituirlo por el segundo tipo, pues fomenta la búsqueda por tanteo y dificulta el desarrollo de algunas habilidades de visualización.

4) Caras decoradas (figurativas), sombreadas o transparentes: Los dibujos figurativos en las caras ayudaron notablemente a los estudiantes para realizar los movimientos, pues les permitían determinar con claridad, rapidez y seguridad si dos cubos estaban en la misma posición o no, mientras que en los cuerpos de caras sombreadas o de varillas tenían que analizar las caras con más detalle, por lo que las actividades eran más difíciles.

Aunque las caras sombreadas constituyeron un factor de facilidad frente a los sólidos de varillas, por otra parte la bivalencia de posiciones en algunos cuerpos de varillas, debida a que los estudiantes casi nunca percibían las diferencias entre ciertas posiciones, hizo que aumentara la facilidad del movimiento con estos cuerpos. De hecho, en cuerpos como el prisma recto, en los que casi nunca existía esa bivalencia, los estudiantes se daban cuenta muy pocas veces de por qué habían llegado a una posición incorrecta y les resultaba más difícil resolver los ejercicios.

Para resolver bien las actividades de movimientos con sólidos de varillas es necesario desarrollar ciertas habilidades de visión espacial complementadas con el conocimiento de códigos propios de la representación en perspectiva, principalmente la conversión de algunas líneas paralelas en líneas convergentes y la reducción del tamaño de las caras cuando éstas se encuentran más alejadas del observador.

5) Movimiento libre o limitado: Todas las actividades de realización de movimientos tenían enunciados similares, siendo las únicas variables destacables el tipo de sólido y el

software empleados. Ya hemos comentado en 4) la primera variable. Los programas Phoenix 3D y 3D Images permitían giros de cualquier amplitud, mientras que los paquetes de fichas de Hypercard que movían los cubos de caras decoradas sólo permitían realizar giros de 90°. La experimentación realizada apoya la idea de que el cubo figurativo es notablemente más fácil de manejar que los otros cuerpos debido al tipo de caras y a la limitación de los ángulos de giro.

6) Representaciones isométrica, de vistas laterales o de vistas numéricas: El papel de las diferentes formas de representación se ha revelado diferente según que se tratara de dibujarlas a partir de módulos reales o de construir módulos a partir de ellas. Por ser la más realista, la representación isométrica es la que daba más información a nuestros alumnos sobre la forma del módulo, por lo que era la más fácil para construir a partir de ella. Pero, por otra parte, el dibujo de las vistas laterales y numéricas no tiene ninguna complicación técnica, por lo que éstas eran las formas de representación más fáciles de obtener. Entre las vistas laterales y las numéricas no hemos observado ninguna diferencia significativa en las actividades de dibujo, pero sí han surgido indicios de una mayor facilidad de las construcciones de módulos a partir de las vistas numéricas, pues los alumnos sabían desde el principio cuántos módulos debían usar.

Las conclusiones anteriores nos permiten hacer una ordenación de dificultad de los tres tipos de sólidos empleados y los tres tipos de programas, que debería ser tenida en cuenta al realizar futuras investigaciones sobre enseñanza basada en este tipo de materiales, ordenación que aparece resumida en la tabla de la figura 69.

Naturalmente, la facilidad de manejo de los sólidos está en relación inversa a la calidad de las destrezas de visualización espacial requeridas para resolver correctamente y de manera eficaz los problemas. Por lo tanto, una forma adecuada de organizar la instrucción para fomentar la adquisición de destrezas de visualización espacial con un micromundo similar al que hemos diseñado será utilizando sólo movimientos de 90° y sólidos figurativos con los estudiantes más jóvenes y los peor dotados, para pasar después a usar un programa que realice giros libres continuos (con sólidos opacos y después de varillas) y por último utilizar un programa que realice movimientos instantaneos.

	Facilidad		
	Alta	Intermedia	Baja
Caras de los cuerpos	Figurativas	Opacas con trama	Transparentes
Tipos de giros	Sólo de 90°	Libre continuo	Libre instantáneo
Representaciones (en constr.)	Isométrica	Vistas numéricas	Vistas laterales
Representaciones (en dibujo)	Vistas laterales y numéricas	-----	Isométrica

Figura 69.

8. BIBLIOGRAFÍA

8.1. Referencias.

- Ben-Haim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 16.4, 389-409.
- Bishop, A.J. (1980). Spatial abilities and mathematics education - A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 257-269.
- Bishop, A.J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh & M. Landau (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 176-203). N. York: Academic Press.
- Bishop, A.J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11.1, 7-16.
- Bishop, A.J. & Nickson, M. (1983). *A review of research in mathematical education, part B: Research on the social context of mathematics education*. G. Bretaña: NFER-Nelson.
- Del Grande, J. (1987). Spatial perception and primary mathematics. En NCTM (Ed.), *Learning and teaching geometry, K—12 (1987 yearbook)* (pp. 126-135). Reston, USA: N.C.T.M.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37.6, 14-20.
- Gaulin, C. & Puchalska, E. (1987). Coded graphical representations: A valuable but neglected means of communicating spatial information in geometry. En I. Wirszup & R. Streit (Ed.), *Developments in school mathematics education around the world. Applications-oriented curricula and technology-supported learning for all students* (pp. 514-539). Reston, USA: N.C.T.M.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher*, 74.1, 11-18.
- Hoffer, A. (1987). Technology-supported learning. En I. Wirszup & R. Streit (Ed.), *Developments in school mathematics education around the world. Applications-oriented*

- curricula and technology-supported learning for all students* (pp. 637-646). Reston, USA: N.C.T.M.
- Hoffer, A. (1988). Geometry and visual thinking. En T.R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8. Research based methods* (pp. 232-261). Londres: Allyn & Bacon.
- Lunkenbein, D. (1983a). Observations concerning the child's concept of space and its consequences for the teaching of geometry to younger children. En M. Zweng et al. (Ed.), *Proceedings of the 4th I.C.M.E.* (pp. 172-174). Boston: Birkhauser.
- Lunkenbein, D. (1983b). Mental structural images characterizing van Hiele levels of thinking. En J.C. Bergeron & N. Herscovics (Ed.), *Proceedings of the 5th annual meeting of the P.M.E.-N.A.* (vol. 2, pp. 255-262). Montreal: Los autores.
- Lunkenbein, D. (1984). Interior structuring of geometric objects: An example of infralogical groupings. En J.M. Moser (Ed.), *Proceedings of the 6th PME-NA* (pp. 107-112). Madison, USA: Univ. of Wisconsin.
- Mitchelmore, M.C. (1976). Cross-cultural research on concepts of space and geometry. En J.L. Martin & D.A. Bradbard (Ed.), *Space and geometry* (pp. 143-184). Columbus, USA: ERIC.
- Mitchelmore, M.C. (1980). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11.2, 83-93.
- Mitchelmore, M. (1983). Geometry and spatial learning: Some lessons from a jamaican experience. *For the Learning of Mathematics*, 3.3, 2-7.
- Nesher, P. & Kilpatrick, J. (1990). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge, G.B.: Cambridge U.P.
- Presmeg, N.C. (1986a). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.
- Presmeg, N.C. (1986b). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6.3, 42-46.
- Winter, M.J., Lappan, G., Phillips, E.A. & Fitzgerald, W. (1986). *Spatial visualization*. Reading, MS, USA: Addison Wesley.

8.2. Otra bibliografía relacionada consultada.

- Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. (Matemáticas: Cultura y aprendizaje n° 12). Madrid: Síntesis.
- Clements, K. (1981). Visual imagery and school mathematics (1). *For the Learning of Mathematics*, 2.2, 2-9.
- Clements, K. (1982). Visual imagery and school mathematics (2). *For the Learning of Mathematics*, 2.3, 33-38.

- Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the 9th international conference of the P.M.E.* (pp. 53-71). Utrecht, Holanda: State Univ. of Utrecht.
- Hoffer, A. R. (1979). *Geometry. A model of the universe*. Londres: Addison Wesley.
- IEPS (1986). *La geometría en el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Narcea.
- Izard, J. (1990). Developing spatial skills with three-dimensional puzzles. *Arithmetic Teacher*, 37.6, 44-47.
- Lahrizi, H. (1984). *Etude de l'habilité à visualiser des relations géométriques dans trois dimensions chez les élèves et les élèves-professeurs au Maroc* (tesis doctoral; Université Laval, Quebec, Canadá). Preprint.
- Lappan, G., Phillips, E. A., & Winter, M. J. (1984). Spatial visualization. *The Mathematics Teacher*, 77, 618-625.
- NCTM (1982). *Mathematics for the middle grades (5-9) (1982 yearbook)*. Reston, USA: N.C.T.M.
- NCTM (1987). *Learning and teaching geometry, K—12 (1987 yearbook)*. Reston, USA: N.C.T.M.
- SMP (1985). *Three dimensions, 2 y 3*. Cambridge: Cambridge U.P.

ANEXO 1

Texto de las actividades del Módulo III

Objetivos de los bloques de actividades de posiciones:

Actividad POS 1

Objetivos: Identificar diferentes vistas de cuerpos opacos.

Materiales: Cuerpos (Cartulina, Polydron o Multilink) con las caras decoradas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos.

Para cada cuerpo, una lámina (papel blanco) con varias vistas en perspectiva del cuerpo y de otros parecidos.

Actividad POS 2a

Objetivos: Relacionar los cuerpos de varillas con sus representaciones en perspectiva en el papel blanco.

Materiales: Varios cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos.

Para cada cuerpo, una lámina (papel blanco) con varias vistas del cuerpo y de otros parecidos.

Actividad POS 2b

Objetivos: Relacionar las representaciones en perspectiva de cuerpos de varillas en el ordenador y en el papel blanco.

Materiales: El programa Images con varios cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide y prisma.

Para cada cuerpo, una láminas (papel blanco) con varias vistas del cuerpo y de otros parecidos.

Actividad POS 3a

Objetivos: Relacionar los cubos opacos y sus representaciones en perspectiva en el ordenador.

Materiales: El programa Fotos de Sólidos con cubos de caras decoradas.

Un cubo Polydron igual al de la pantalla.

Actividad POS 3b

Objetivos: Relacionar los cuerpos opacos y sus representaciones en perspectiva en el ordenador. Trabajo en grupo.

Materiales: El programa Phoenix con varios cuerpos con las caras sombreadas: Tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos.

Los mismos cuerpos anteriores contruidos con Cartulina, Polydron o Multilink.

Actividad POS 3c

Objetivos: Relacionar los cubos opacos y sus representaciones en perspectiva en el ordenador.

Materiales: El programa Vistas de Cubos.

Un cubo Polydron igual al de la pantalla. Colocar el cubo real en una posición fija.

Actividad POS 3d

Objetivos: Relacionar los cuerpos opacos y sus representaciones en perspectiva en el ordenador. Trabajo en grupo.

Materiales: El programa Phoenix con varios cuerpos con las caras sombreadas: Tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos.

Los mismos cuerpos anteriores contruidos con Cartulina, Polydron o Multilink. Colocar los cuerpos reales en una posición fija.

Actividad POS 4a

Objetivos: Relacionar los cuerpos de varillas y sus representaciones en perspectiva en el ordenador. Trabajo en grupo.

Materiales: El programa Images con varios cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide y prisma.

Los mismos cuerpos anteriores contruidos con varillas.

Actividad POS 4b

Objetivos: Relacionar los sólidos de varillas y sus representaciones en perspectiva en el ordenador. Trabajo en grupo.

Materiales: El programa Images con varios cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide y prisma.

Los mismos cuerpos anteriores contruidos con varillas. Colocar estos cuerpos en una posición fija.

Actividad POS 5a

Objetivos: Relacionar las representaciones en perspectiva de cubos opacos en el papel blanco y en el ordenador.

Materiales: El programa Vistas de Cubos.

Láminas (papel blanco) con varias vistas en perspectiva del cubo que aparece en la pantalla.

Actividad POS 5b

Objetivos: Relacionar las representaciones en perspectiva de sólidos opacos en el papel blanco y en el ordenador.

Materiales: El programa Phoenix con diferentes cuerpos de caras sombreadas: Tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos.

Para cada cuerpo, una lámina (papel blanco) con varias vistas en perspectiva del cuerpo.

Actividad POS 5c

Objetivos: Relacionar las representaciones en perspectiva de sólidos de varillas en el papel blanco y en el ordenador.

Materiales: El programa Images con diferentes cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos.

Para cada cuerpo, una lámina (papel blanco) con varias vistas en perspectiva del cuerpo.

Actividad POS 6a

Objetivos: Relacionar las representaciones en perspectiva de sólidos de varillas en el papel blanco y en el ordenador.

Materiales: El programa Images con diferentes cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos.

Para cada cuerpo, una lámina (papel blanco) con varias vistas en perspectiva del cuerpo.

Actividad POS 6b

Objetivos: Relacionar las representaciones en perspectiva de sólidos de varillas en el papel punteado y en el ordenador.

Materiales: El programa Images con diferentes cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide y prisma.

Para cada cuerpo, una láminas (papel punteado) con varias vistas en perspectiva del cuerpo.

Actividad POS 7a

Objetivos: Relacionar las representaciones en perspectiva de cubos opacos en el papel blanco y en el ordenador.

Materiales: El programa Vistas de Cubos.

Láminas (papel blanco) con varias vistas en perspectiva diferentes del cubo que aparece en la pantalla y de otros cubos.

Actividad POS 7b

Objetivos: Identificar diferentes vistas de cuerpos.

Materiales: El programa Phoenix con diferentes cuerpos de caras sombreadas: Tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos.

Para cada cuerpo, una lámina (papel blanco) con varias vistas en perspectiva del cuerpo que aparece en la pantalla y de otros parecidos.

Actividad POS 8a

Objetivos: Analizar la información proporcionada por varias vistas en perspectiva de un cubo opaco.

Materiales: El programa Juegos de Cubos.

Láminas (papel blanco) con una vista frontal de cada cara del cubo.

Actividad POS 8b

Objetivos: Analizar la información proporcionada por varias vistas en perspectiva de un cuerpo opaco sobre papel blanco.

Materiales: Láminas (papel blanco) con varias vistas en perspectiva de algunos cuerpos con caras decoradas: Cubo y prisma. Hacer las láminas con números cada vez menores de vistas, hasta el mínimo posible. Además, cada lámina tiene una vista frontal de cada cara de ese cuerpo.

Actividad POS 9a

Objetivos: Relacionar los cubos opacos con sus representaciones en perspectiva en el papel punteado.

Materiales: Un cubo Polydron con las caras decoradas.

Láminas (papel punteado) con varias vistas en perspectiva diferentes del cubo. Cada vista tiene una o dos caras en blanco.

Lápiz y goma de borrar.

Actividad POS 9b

Objetivos: Relacionar representaciones en perspectiva de cubos opacos en el ordenador y en el papel punteado.

Materiales: El programa Vistas de Cubos.

Láminas (papel punteado) con varias vistas en perspectiva diferentes del cubo de la pantalla. Cada vista tiene una o dos caras en blanco.

Lápiz y goma de borrar.

Actividad POS 10

Objetivos: Relacionar las representaciones en perspectiva de cubos opacos en el ordenador y en el papel blanco.

Materiales: El programa Fotos de Sólidos.

Láminas (papel blanco) con varias vistas en perspectiva diferentes de las caras visibles del cubo de la pantalla. Cada vista tiene una o más caras en blanco y al menos una decorada.

Lápiz y goma de borrar.

Actividad POS 11a

Objetivos: Dibujar sobre papel blanco representaciones en perspectiva de cuerpos opacos.

Materiales: Cuerpos (Cartulina, Polydron o Multilink) con las caras sombreadas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos. Situar cada cuerpo en una posición fija.

Hojas (papel blanco) en blanco.

Actividad POS 11b

Objetivos: Dibujar sobre papel blanco representaciones en perspectiva de cubos de caras decoradas a partir de otras representaciones en perspectiva en el ordenador.

Materiales: El programa Juegos de Cubos.

Hojas (papel blanco) en blanco.

Actividad POS 11c

Objetivos: Dibujar sobre papel blanco representaciones en perspectiva de cuerpos opacos a partir de otras representaciones en perspectiva en el ordenador.

Materiales: El programa Fotos de Sólidos con varios cuerpos con las caras sombreadas: Tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos.

Hojas (papel blanco) en blanco.

Actividad POS 12a

Objetivos: Dibujar sobre papel punteado representaciones en perspectiva de cuerpos opacos.

Materiales: Cuerpos (Cartulina, Polydron o Multilink) con las caras sombreadas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos. Situar cada cuerpo en una posición fija.

Hojas (papel punteado) en blanco.

Actividad POS 12b

Objetivos: Dibujar sobre papel punteado representaciones en perspectiva de cubos opacos a partir de otras representaciones en perspectiva en el ordenador.

Materiales: El programa Juegos de Cubos.

Hojas (papel punteado) en blanco.

Actividad POS 12c

Objetivos: Dibujar sobre papel punteado representaciones en perspectiva de cuerpos opacos a partir de otras representaciones en perspectiva en el ordenador.

Materiales: El programa Fotos de Sólidos con varios cuerpos con las caras sombreadas: Tetraedro, octaedro, pirámide, prisma y módulo de cubos.

Hojas (papel punteado) en blanco.

Actividad POS 13a

Objetivos: Dibujar sobre papel blanco representaciones en perspectiva de cuerpos de varillas.

Materiales: Cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide y prisma. Situar cada cuerpo en una posición fija.

Hojas (papel blanco) en blanco.

Actividad POS 13b

Objetivos: Dibujar sobre papel blanco representaciones en perspectiva de cuerpos de varillas a partir de otras representaciones en perspectiva en el ordenador.

Materiales: El programa Fotos de Sólidos con varios cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide y prisma.

Hojas (papel blanco) en blanco.

Actividad POS 14a

Objetivos: Dibujar sobre papel punteado representaciones en perspectiva de cuerpos de varillas.

Materiales: Cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide y prisma. Situar cada cuerpo en una posición fija.

Hojas (papel punteado) en blanco.

Actividad POS 14b

Objetivos: Dibujar sobre papel punteado representaciones en perspectiva de cuerpos de varillas a partir de otras representaciones en perspectiva en el ordenador.

Materiales: El programa Fotos de Sólidos con varios cuerpos de varillas: Cubo, tetraedro, octaedro, pirámide y prisma.

Hojas (papel punteado) en blanco.

Objetivos de los bloques de actividades de representación:

Actividad REP 1a

Objetivos: Toma de contacto con el problema de la descripción de cuerpos. Trabajo en grupo. Establecer un diálogo sobre las descripciones de cada niño.

Materiales: Tres módulos de cubos (Multilink) diferentes. Cubos Multilink sueltos.

Hojas (papel blanco) en blanco.

Actividad REP 1b

Objetivos: Toma de contacto con el problema de la descripción de cuerpos: Introducción a las diferentes formas de representación. Trabajo en grupo. Establecer un diálogo sobre las estrategias de construcción de los niños.

Materiales: Tres módulos de cubos (Multilink) diferentes. Cubos Multilink sueltos.

Cubos Multilink sueltos.

El estudiante que hace la descripción puede ver, en el monitor de TV, lo que hacen sus compañeros.

Actividad REP 1c

Objetivos: Toma de contacto con el problema de la descripción de cuerpos: Introducción a las diferentes formas de representación. Trabajo individual. Establecer un diálogo sobre las construcciones de los niños que sean diferentes.

Materiales: Tres módulos de cubos (Multilink) diferentes para el profesor.

Cubos Multilink sueltos.

El estudiante que hace la descripción no puede ver lo que hacen sus compañeros.

Actividad REP 2a

Objetivos: Relacionar los cuerpos con sus diferentes representaciones planas, mediante la identificación de vistas correspondientes a módulos de cubos dados.

Materiales: Módulos de cubos (Multilink).

Láminas con vistas (isométrica, laterales y numéricas) de módulos de cubos.

Actividad REP 2b

Objetivos: Relacionar los cuerpos con sus diferentes representaciones planas, mediante la identificación de vistas correspondientes a módulos de cubos dados.

Materiales: El programa Phoenix (Módulos Sólidos) con diferentes módulos de cubos en proyección ortográfica.

Láminas con vistas (isométrica, laterales y numéricas) de módulos de cubos.

Actividad REP 3a

Objetivos: Relacionar los cuerpos con sus diferentes representaciones planas, mediante la construcción de módulos de cubos a partir de sus vistas.

Materiales: Cubos Multilink sueltos.

El programa Vistas de Módulos con vistas (isométricas, laterales y numéricas) de módulos de cubos.

Actividad REP 3b

Objetivos: Relacionar los cuerpos con sus diferentes representaciones planas, mediante la construcción de módulos de cubos a partir de sus vistas.

Materiales: Cubos Multilink sueltos.

Láminas con vistas (isométricas, laterales y numéricas) de módulos de cubos.

Actividad REP 4a

Objetivos: Relacionar los cuerpos con sus diferentes representaciones planas.

Materiales: Módulos de cubos (Multilink).

Hojas (papel punteado y blanco) en blanco.

Actividad REP 4b

Objetivos: Relacionar los cuerpos con sus diferentes representaciones planas.

Materiales: Módulos de cubos (Multilink).

Hojas (papel punteado y blanco) en blanco.

Actividad REP 5a

Objetivos: Relacionar los cuerpos con sus diferentes representaciones planas.

Materiales: El programa Phoenix (Módulos Sólidos) con vistas en perspectiva de módulos de cubos de caras sombreadas.

Hojas (papel punteado y blanco) en blanco.

Actividad REP 5b

Objetivos: Relacionar los cuerpos con sus diferentes representaciones planas.

Materiales: El programa Fotos de Sólidos con vistas en perspectiva de módulos de cubos de caras sombreadas.

Hojas (papel punteado y blanco) en blanco.

Actividad REP 6

Objetivos: Interpretar las diferentes formas de representación plana de los cuerpos (isométrica, laterales y numérica) y traducir la información a los otros tipos de representación.

Materiales: Láminas con representaciones planas (isométrica, laterales y numérica) de módulos de cubos.

Hojas (papel punteado y blanco) en blanco.

Actividad REP 7

Objetivos: Estudiar casos de representaciones planas de cuerpos que proporcionan información incompleta.

Materiales: Cubos Multilink sueltos.

Láminas con vistas laterales o numéricas que admitan varios módulos de cubos.

Actividad REP 8

Objetivos: Convertir la vista isométrica de un módulo de cubos en la vista isométrica de otro al añadir algunos cubos.

Materiales: Una lámina con la vista isométrica de un módulo de cubos. Algunas de las caras están sombreadas.

Hojas (papel punteado) en blanco.

Actividad REP 9

Objetivos: Convertir la vista isométrica de un módulo de cubos en la vista isométrica de otro al quitar parte de los cubos.

Materiales: Una lámina con la vista isométrica de un módulo de cubos. Algunas de las caras están sombreadas.

Hojas (papel punteado) en blanco.

Actividad REP 10a

Objetivos: Dibujar representaciones isométricas de sólidos de caras opacas en general.

Materiales: Varios sólidos de caras opacas: Cubo, tetraedro, octaedro, cono, cilindro y pirámide.

Hojas (papel punteado) en blanco.

Actividad REP 10b

Objetivos: Dibujar representaciones de vistas laterales de sólidos de caras opacas en general.

Materiales: Varios sólidos de caras opacas: Cubo, tetraedro, octaedro, cono, cilindro y pirámide.

Hojas (papel blanco) en blanco.

Actividad REP 11a

Objetivos: Identificar representaciones isométricas de sólidos de caras opacas en general.

Materiales: Una lámina con vistas isométricas de varios sólidos de caras opacas: Cubo, tetraedro, cono, octaedro, cilindro y pirámide.

Varios sólidos de cada uno de los tipos anteriores.

Actividad REP 11b

Objetivos: Identificar representaciones de vistas laterales de sólidos de caras opacas en general.

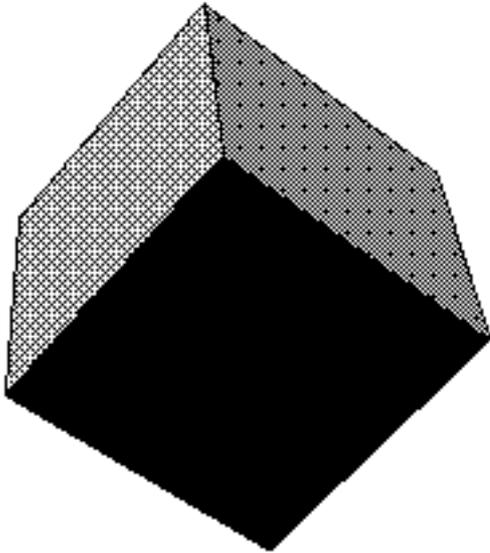
Materiales: Láminas con vistas laterales de varios sólidos de caras opacas: Cubo, tetraedro, cono, octaedro, cilindro y pirámide.

Varios sólidos de cada uno de los tipos anteriores.

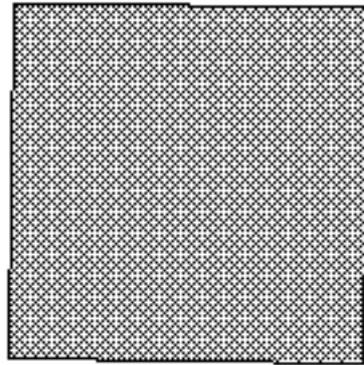
Actividades de Posiciones de Sólidos

Actividad POS 1 (1/6)

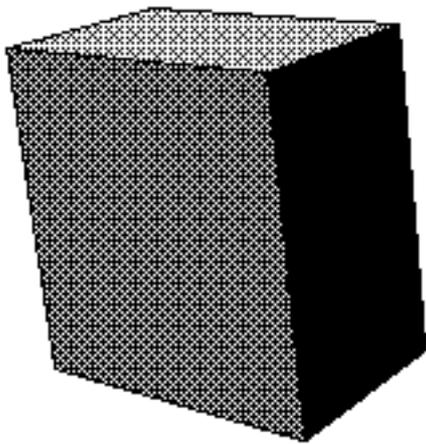
Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al cubo que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover el cubo.



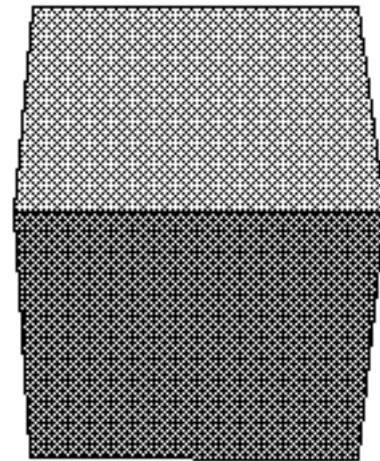
1



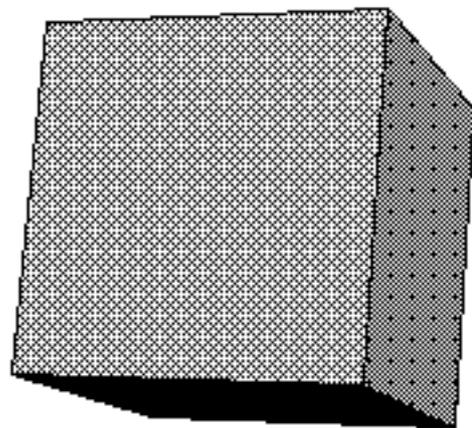
2



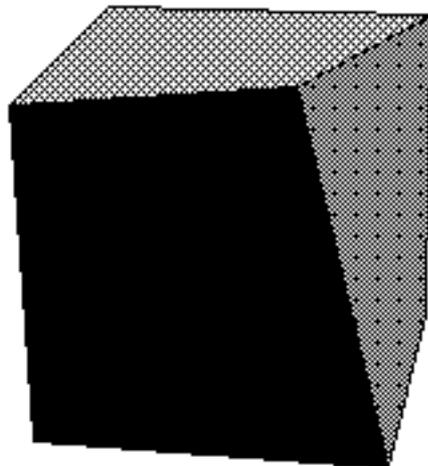
3



4



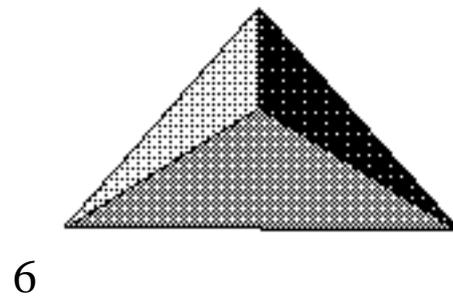
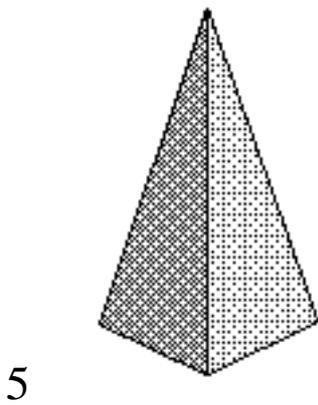
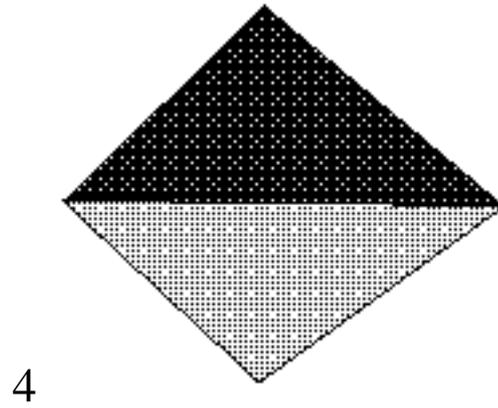
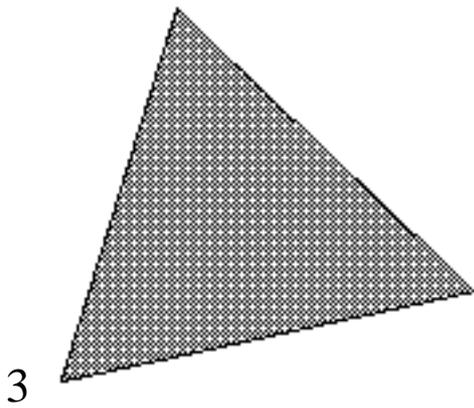
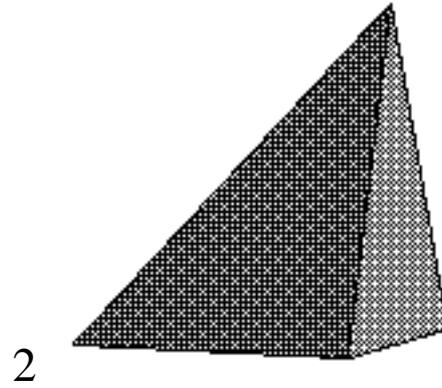
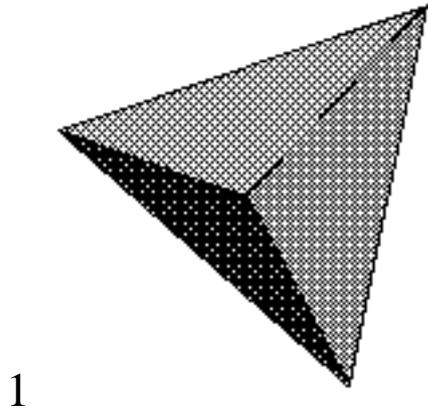
5



6

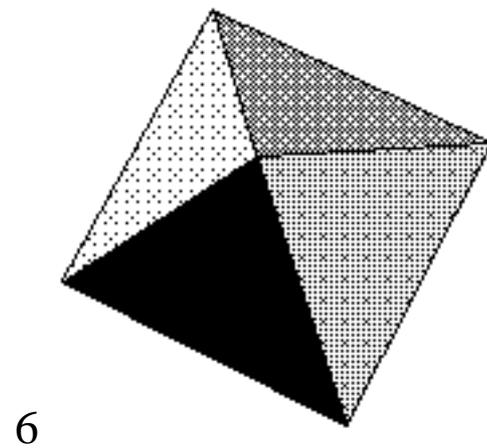
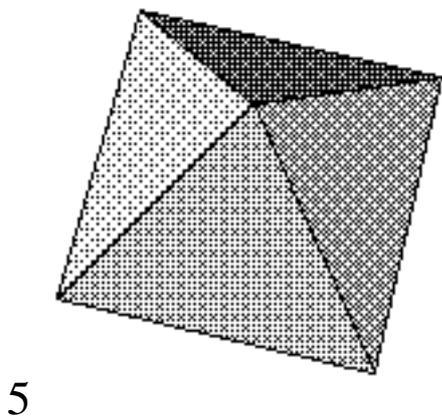
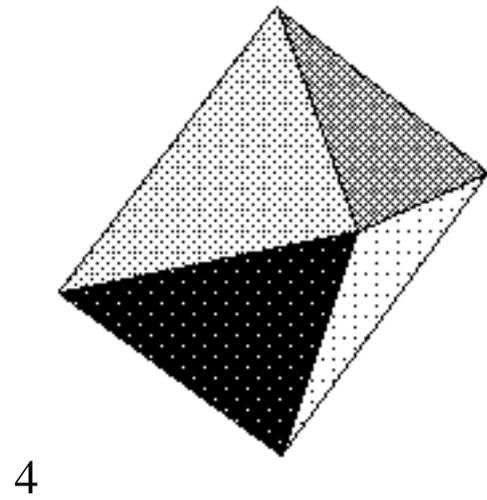
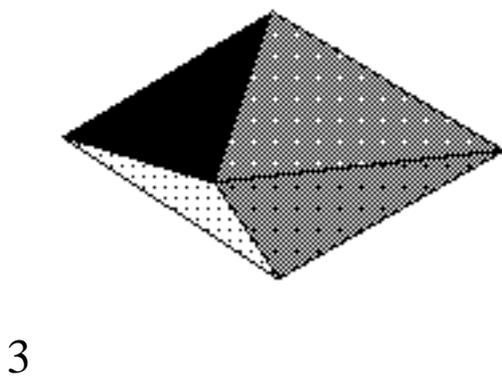
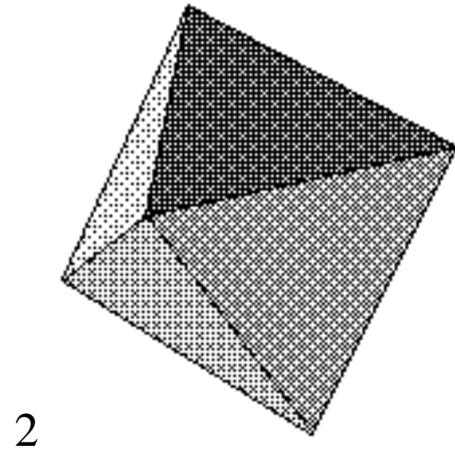
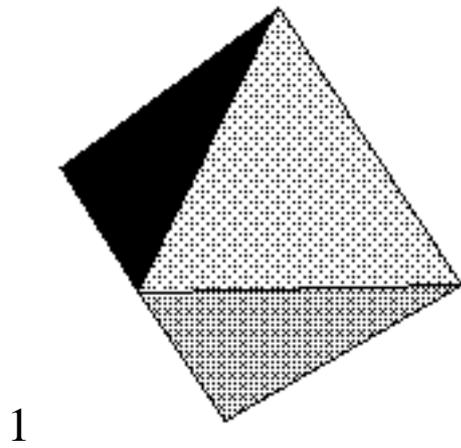
Actividad POS 1 (2/6)

Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al tetraedro que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover el tetraedro.



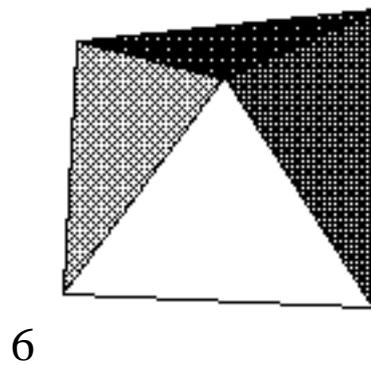
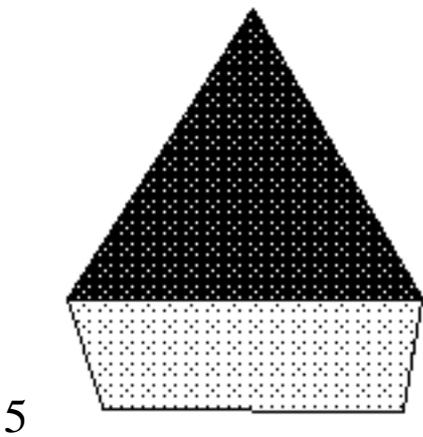
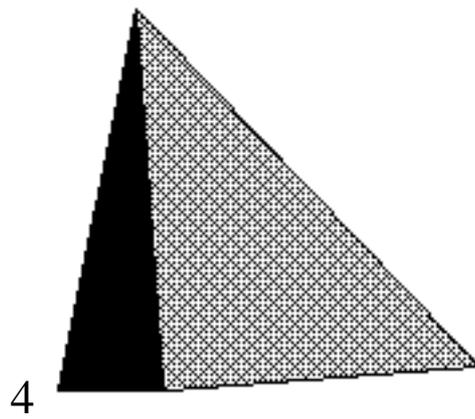
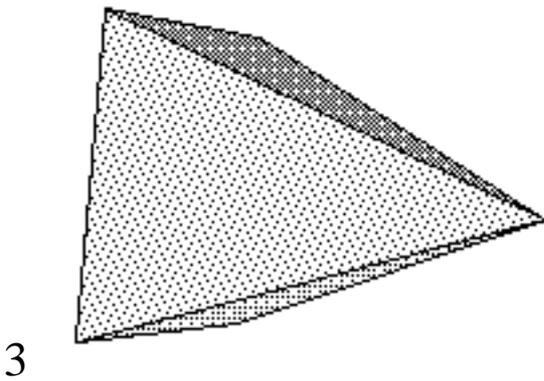
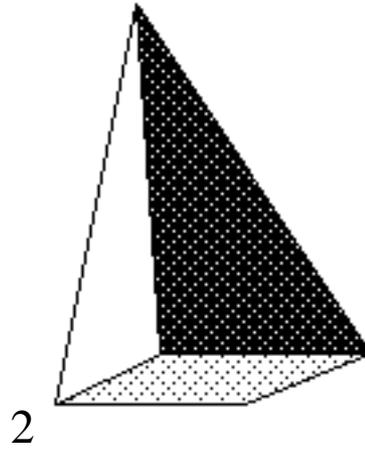
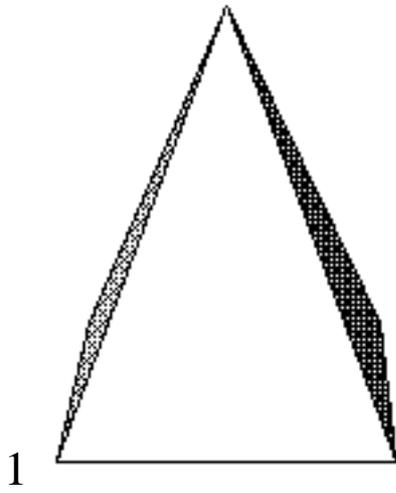
Actividad POS 1 (3/6)

Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al octaedro que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover el octaedro.



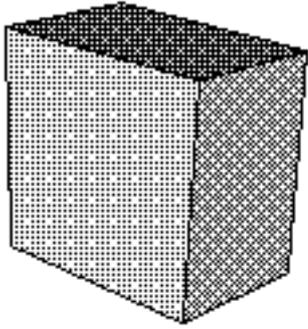
Actividad POS 1 (4/6)

Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no a la pirámide que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover la pirámide.

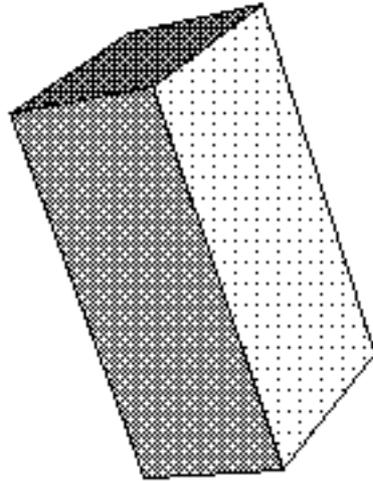


Actividad POS 1 (5/6)

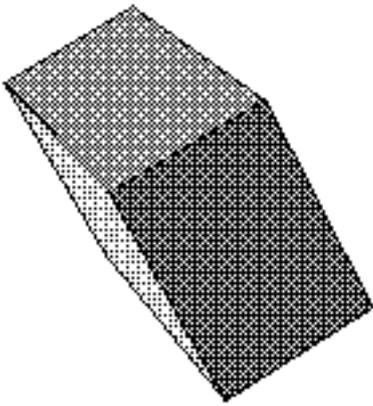
Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al prisma que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover el prisma.



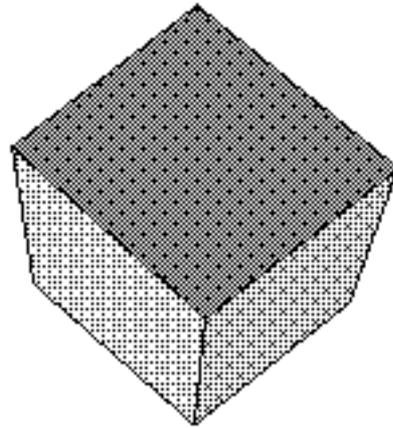
1



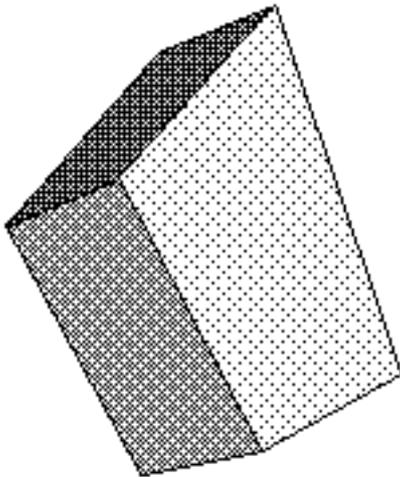
2



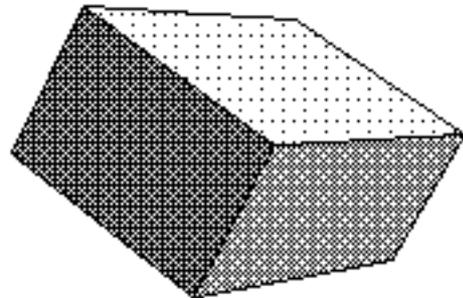
3



4



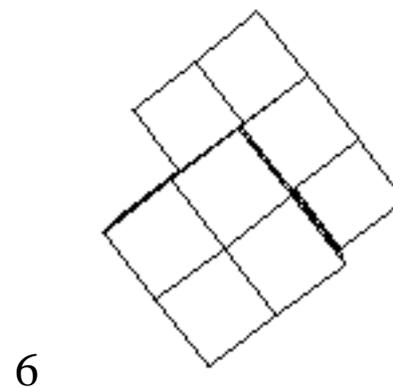
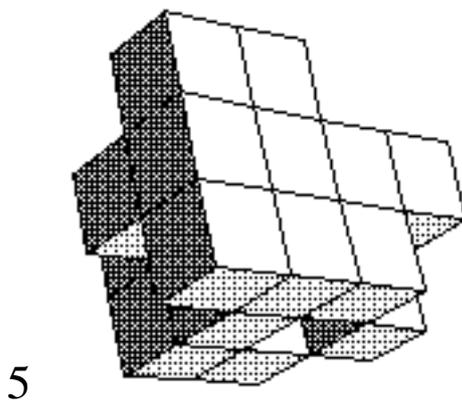
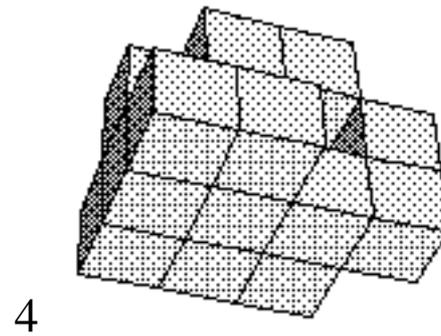
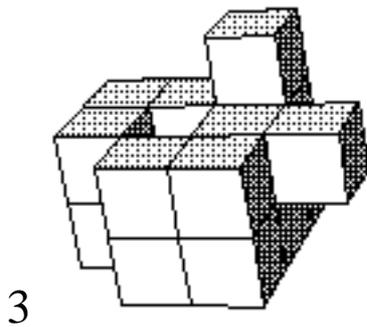
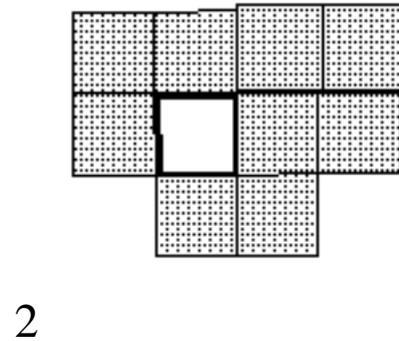
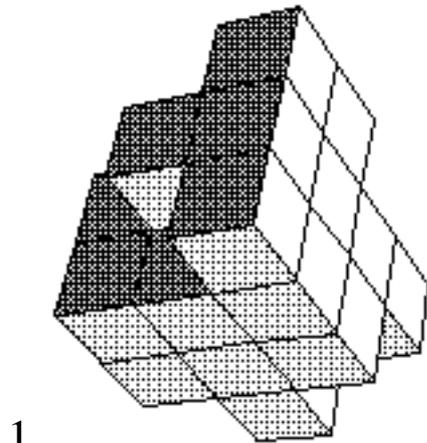
5



6

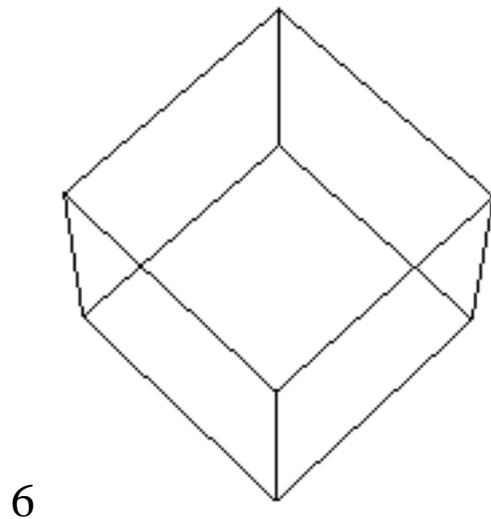
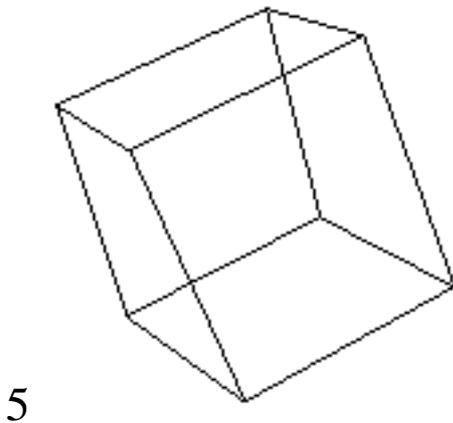
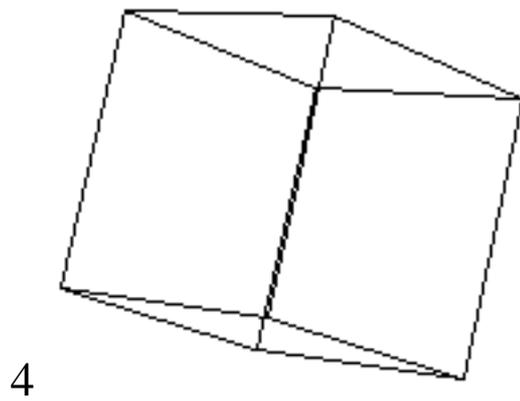
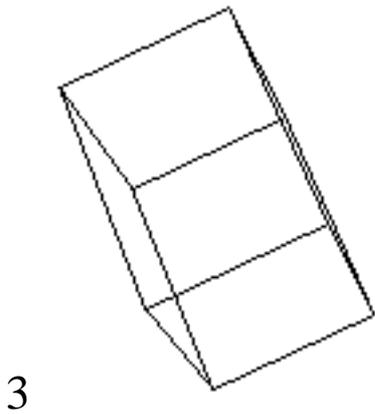
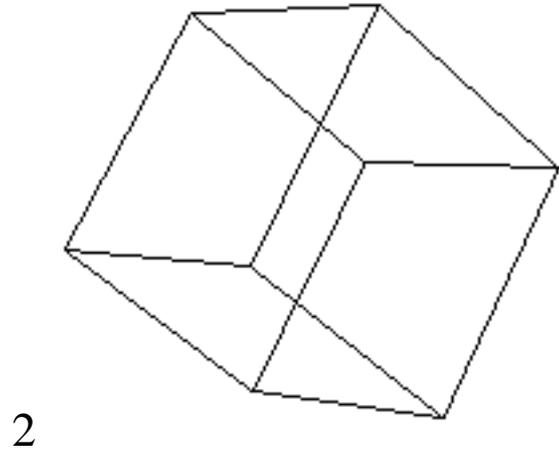
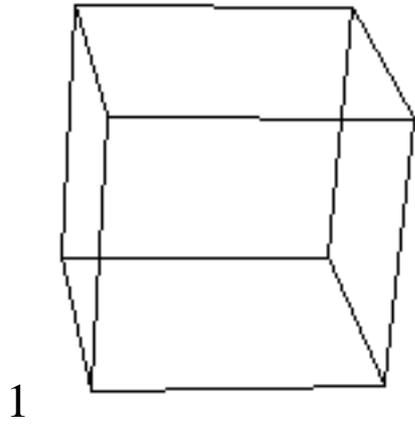
Actividad POS 1 (6/6)

Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al módulo que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover el módulo.



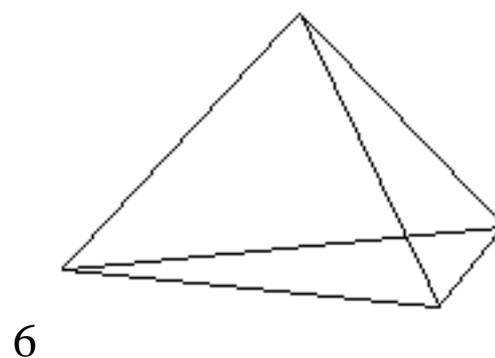
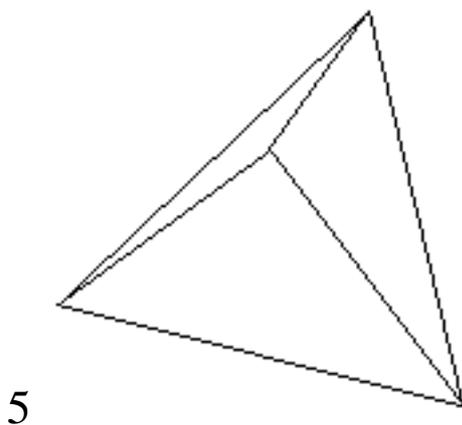
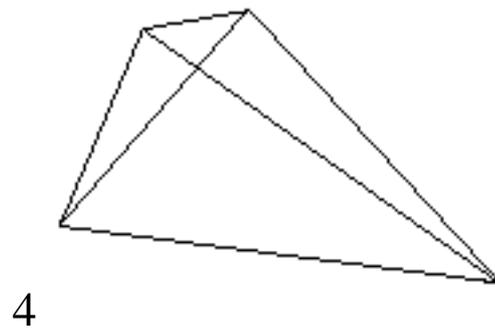
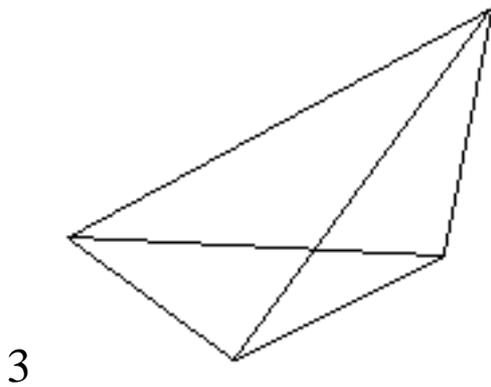
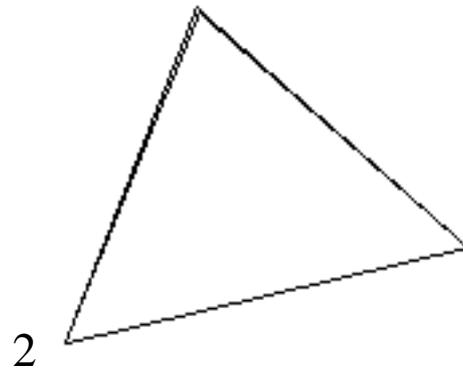
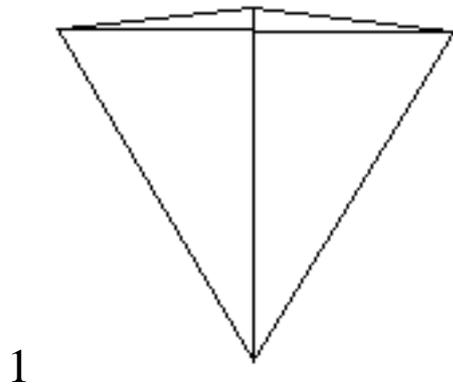
Actividad POS 2a (1/6)

Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al cubo que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover el cubo.



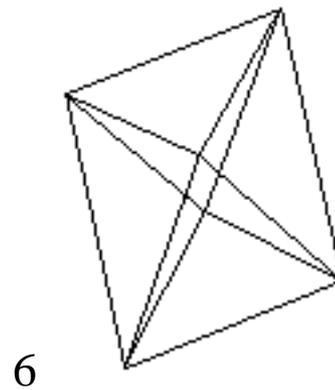
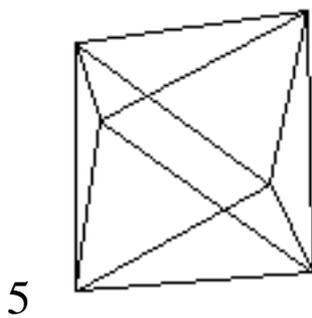
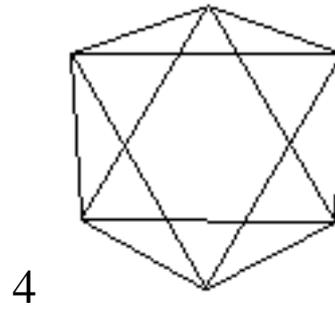
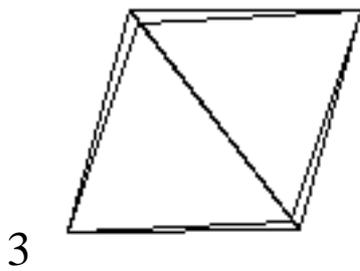
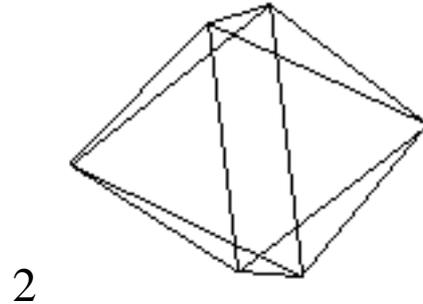
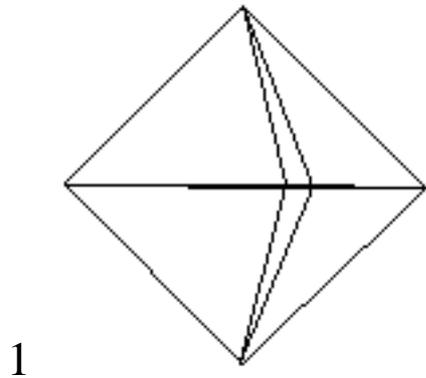
Actividad POS 2a (2/6)

Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al tetraedro que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover el tetraedro.



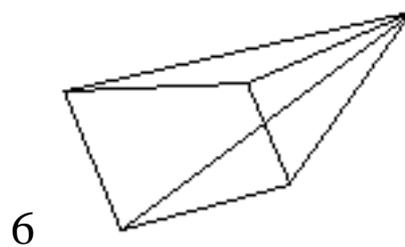
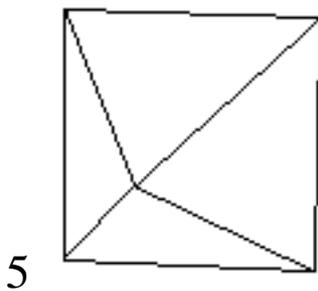
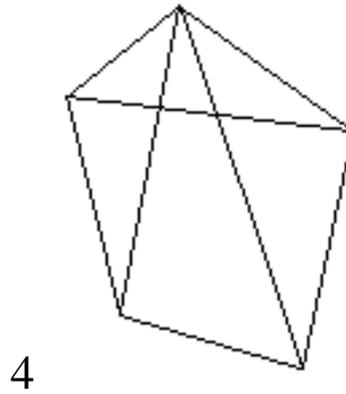
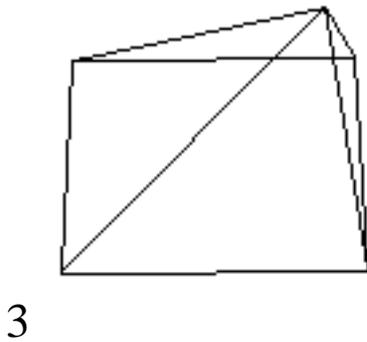
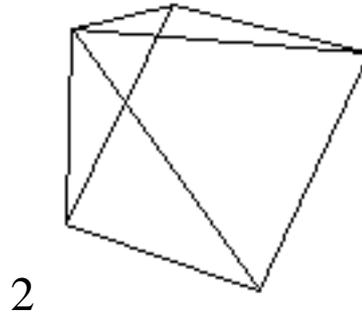
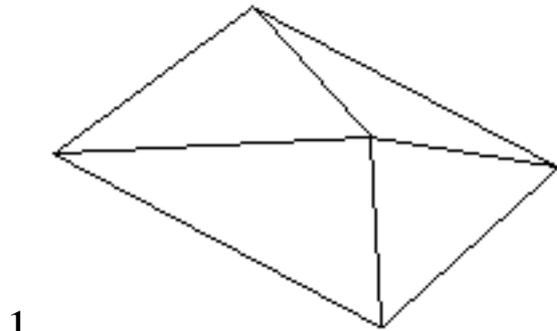
Actividad POS 2a (3/6)

Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al octaedro que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover el octaedro.



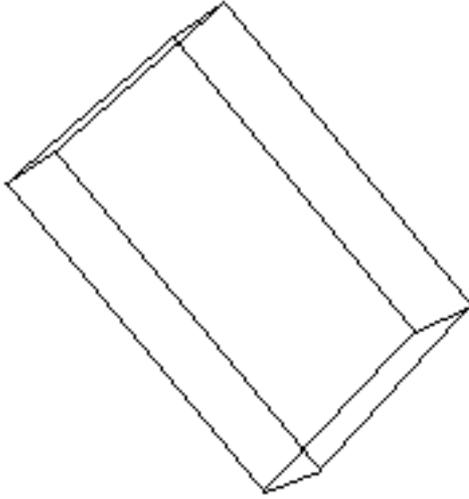
Actividad POS 2a (4/6)

Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no a la pirámide que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover la pirámide.

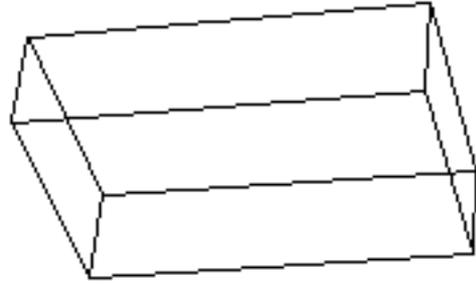


Actividad POS 2a (5/6)

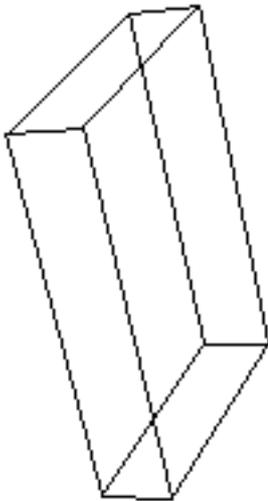
Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al prisma que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover el prisma.



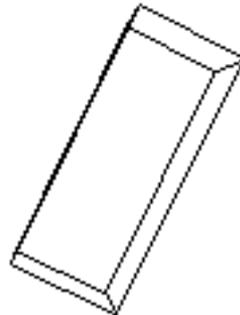
1



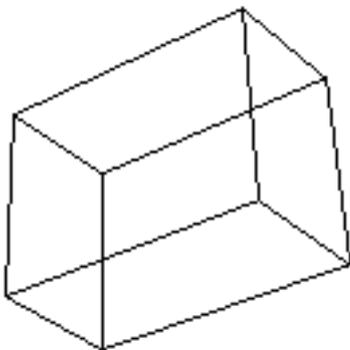
2



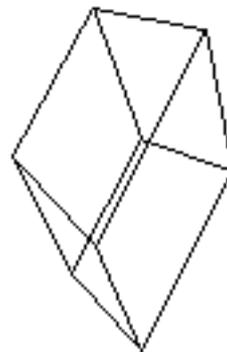
3



4



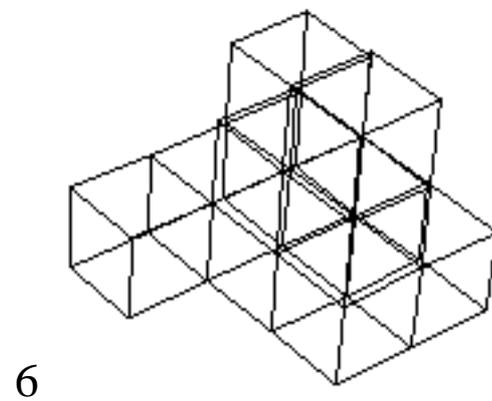
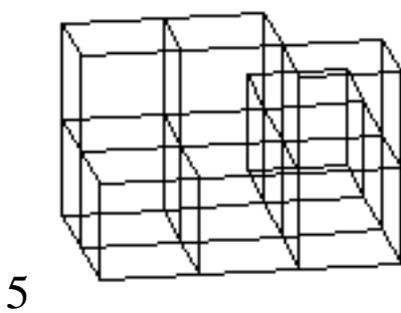
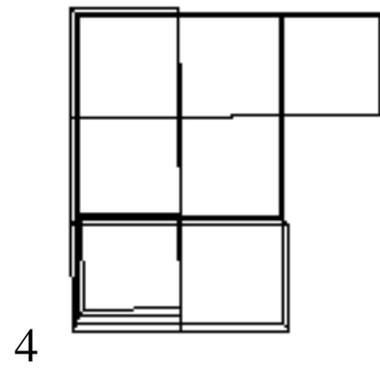
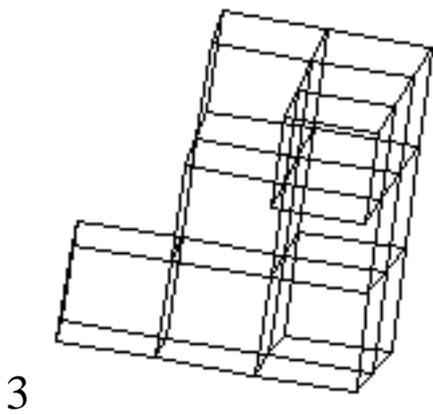
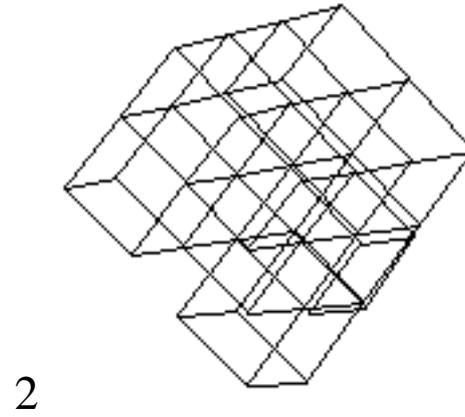
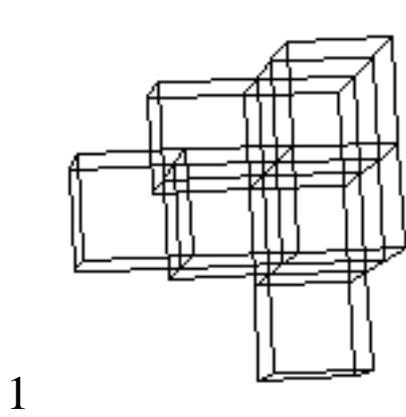
5



6

Actividad POS 2a (6/6)

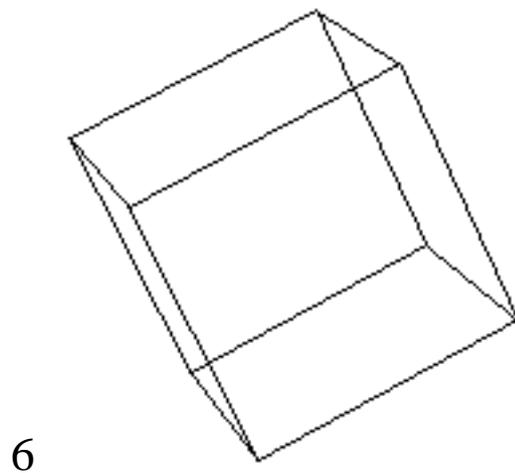
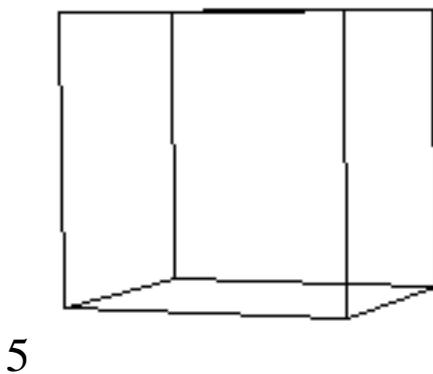
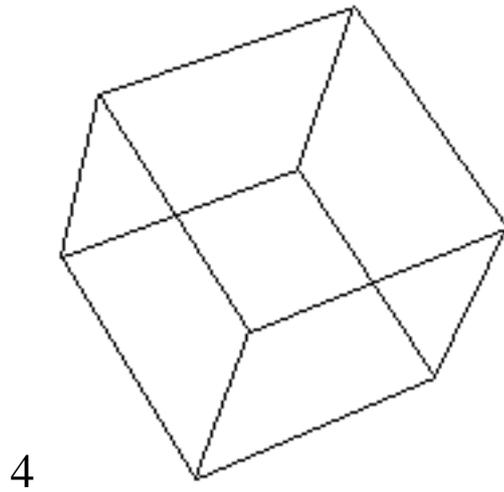
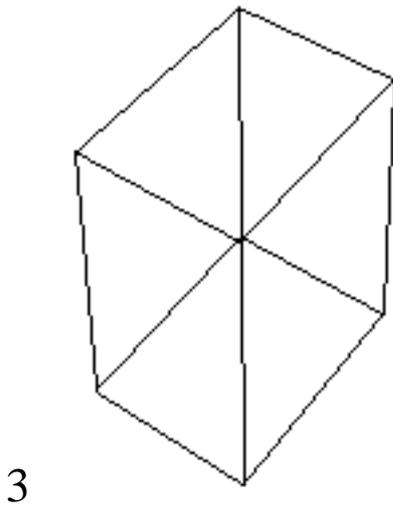
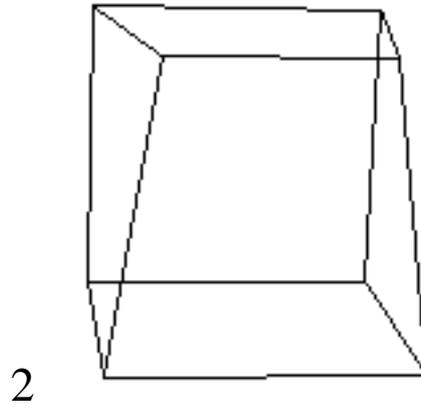
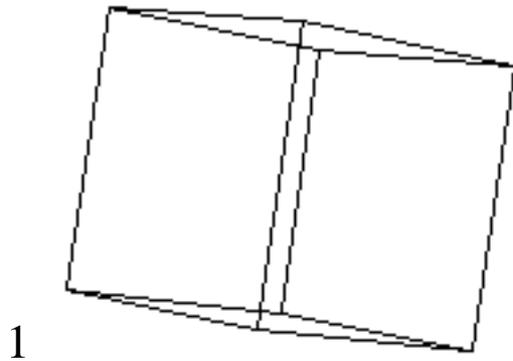
Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al módulo de cubos que tienes en la mano. Si quieres, puedes mover el módulo de cubos.



Actividad POS 2b (1/5)

Abre el programa "Cubo varillas".

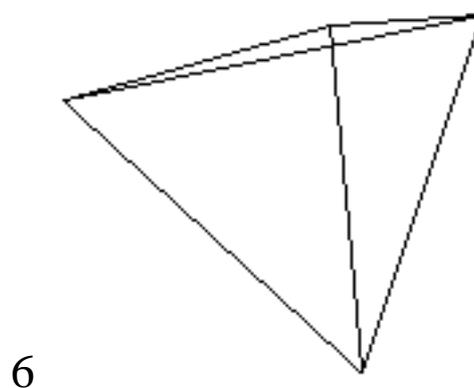
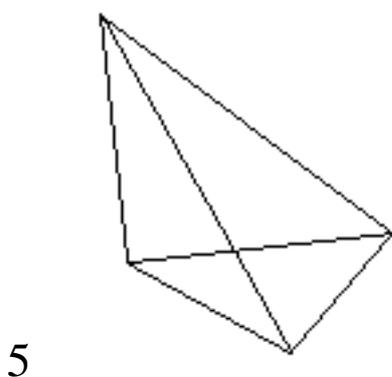
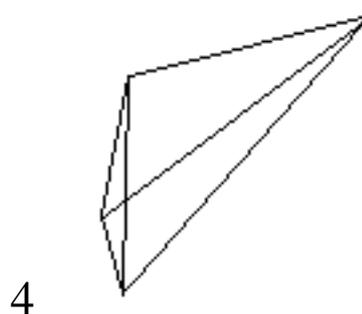
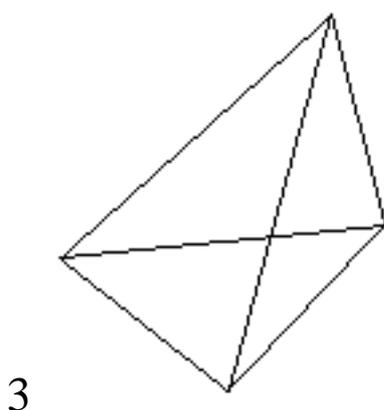
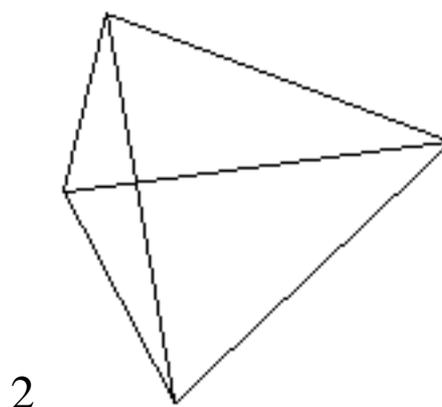
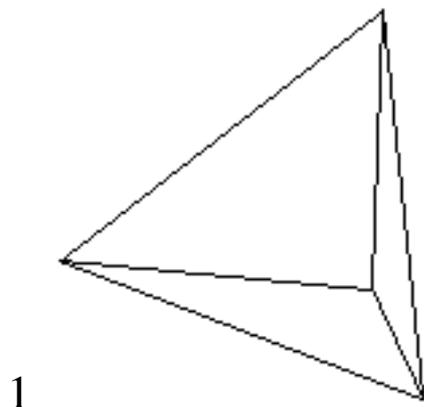
Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al cubo que ves en la pantalla. Si quieres, puedes mover el cubo.



Actividad POS 2b (2/5)

Abre el programa "Tetraedro varillas".

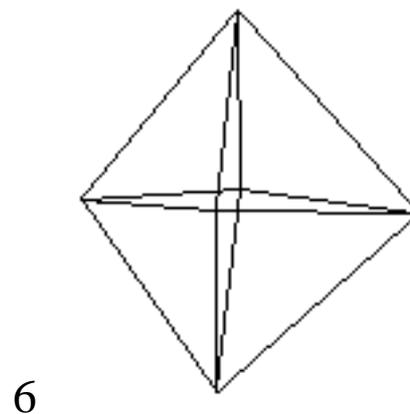
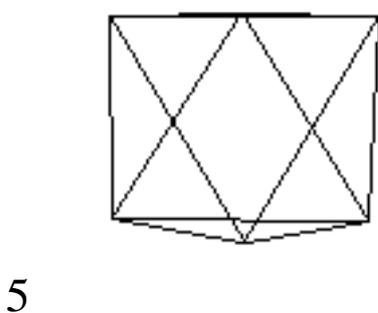
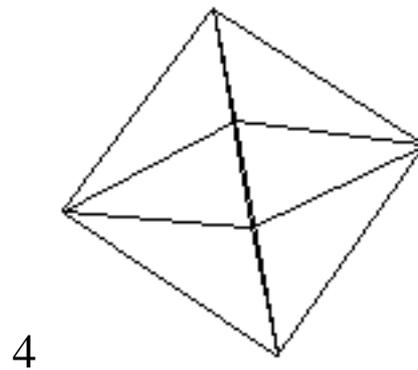
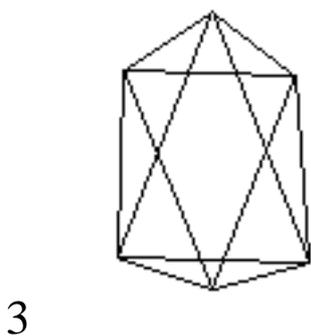
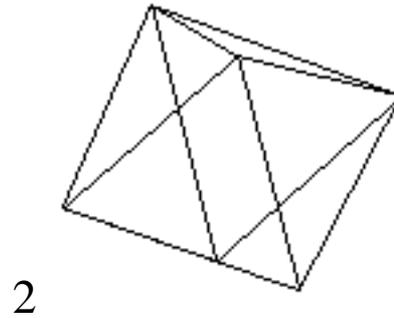
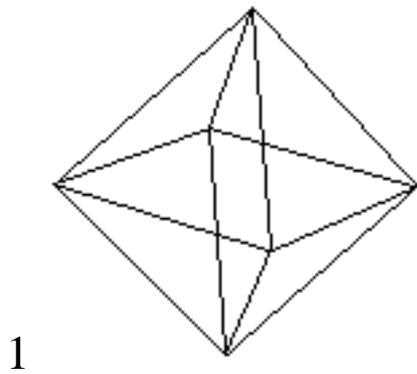
Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al tetraedro que ves en la pantalla. Si quieres, puedes mover el tetraedro.



Actividad POS 2b (3/5)

Abre el programa "Octaedro varillas".

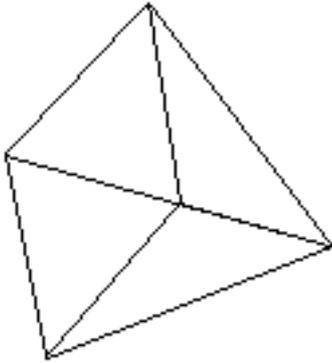
Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al octaedro que ves en la pantalla. Si quieres, puedes mover el octaedro.



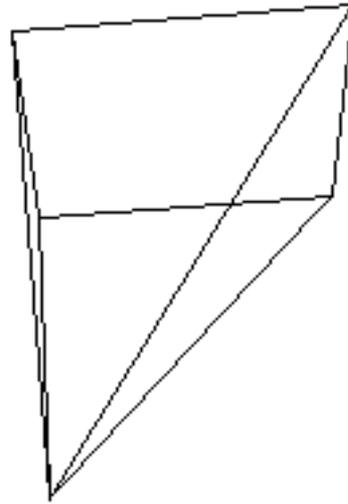
Actividad POS 2b (4/5)

Abre el programa "Pirámide varillas".

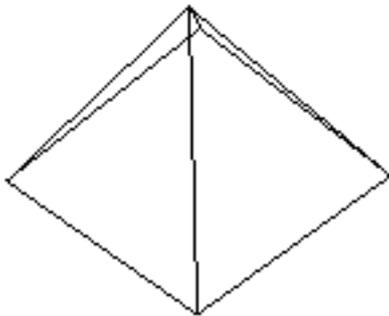
Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no a la pirámide que ves en la pantalla. Si quieres, puedes mover la pirámide.



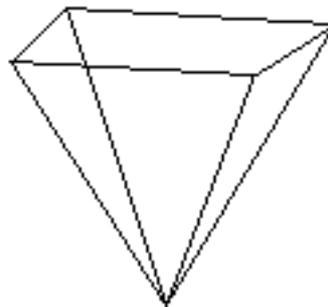
1



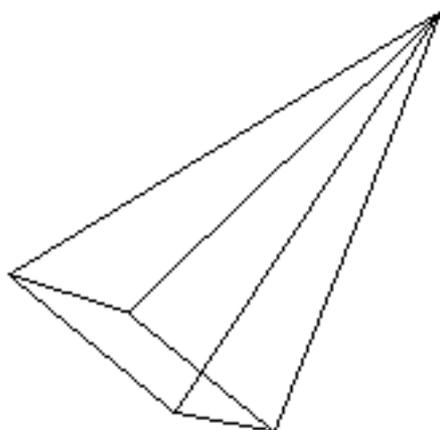
2



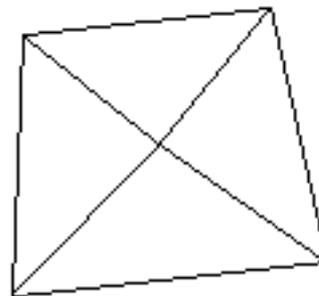
3



4



5

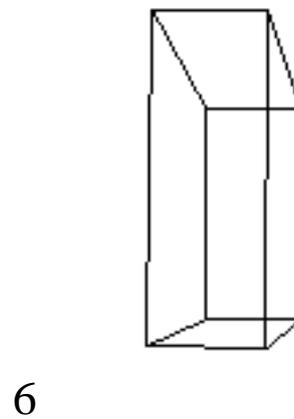
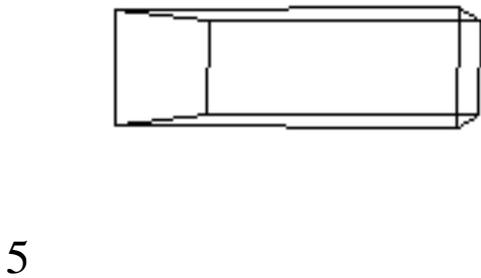
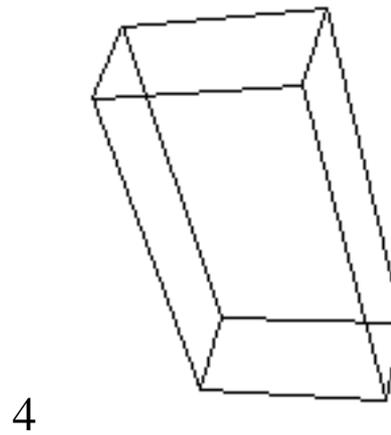
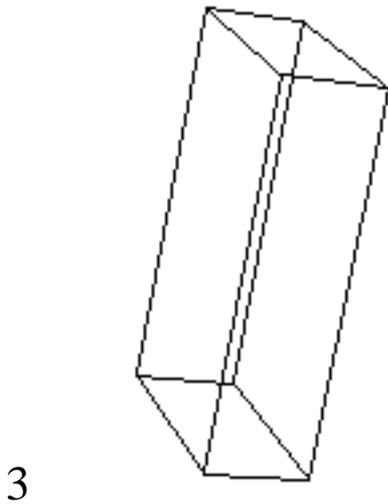
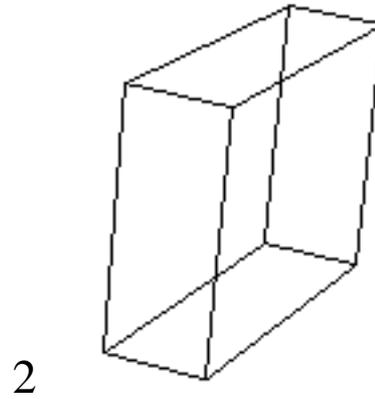
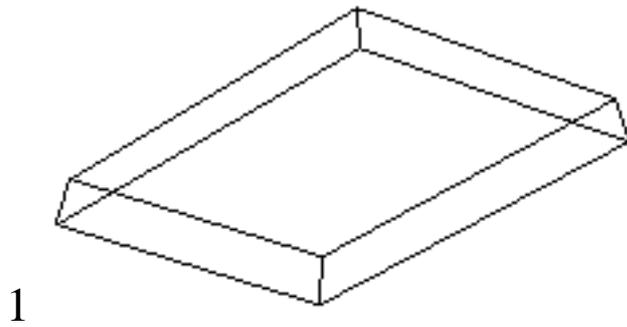


6

Actividad POS 2b (5/5)

Abre el programa "Prisma varillas".

Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al prisma que ves en la pantalla. Si quieres, puedes mover el prisma.



Actividad POS 3a

1) Abre el programa "Fotos de Sólidos" y elige el sólido **4**. Coloca el cubo que tienes en la mano en la misma posición que el de la pantalla.

Cuando lo hayas hecho, pulsa el botón "Siguiente" y repite la actividad (hay 3 posiciones diferentes).

Actividad POS 3b

1) Abre el programa "Tetraedro sólido". Sin mover el cuerpo de la pantalla, coloca el cuerpo que tienes en la mano en la misma posición que el de la pantalla.

2) Ahora un miembro del grupo hace algunos movimientos con el cuerpo de la pantalla y los otros compañeros colocan el cuerpo real en su misma posición. Después otro miembro del grupo repite la actividad.

3) Repetir las actividades 1) y 2) anteriores con los programas "Octaedro sólido", "Pirámide sólida", "Prisma sólido" y "Módulo sólido".

Actividad POS 3c

1) Abre el programa "Vistas de Cubos" y elige el cubo **0.5**. Sin mover el cubo real, coloca el cubo de la pantalla en su misma posición. Intenta hacerlo con la menor cantidad posible de movimientos.

2) Repite la actividad 1) eligiendo el cubo **1.15** en el ordenador.

3) Repite la actividad 1) eligiendo el cubo **3.8** en el ordenador.

Actividad POS 3d

1) Abre el programa "Tetraedro sólido". Sin mover el cuerpo real, coloca el cuerpo del ordenador en su misma posición.

2) Ahora un miembro del grupo mueve el cuerpo real y los otros compañeros colocan el cuerpo de la pantalla en su misma posición. Después otro miembro del grupo repite la actividad.

3) Repetir las actividades 1) y 2) anteriores con los programas "Octaedro sólido", "Pirámide sólida", "Prisma sólido" y "Módulo sólido".

Actividad POS 4a

1) Abre el programa "Cubo varillas". Sin mover el cubo de la pantalla, coloca el cubo que tienes en la mano en su misma posición.

2) Ahora un miembro del grupo realiza algunos movimientos con el cuerpo de la pantalla y los otros compañeros colocan el cuerpo de varillas en su misma posición. Después otro miembro del grupo repite la actividad.

3) Repetir las actividades 1) y 2) anteriores con los programas "Tetraedro varillas", "Octaedro varillas", "Pirámide varillas", "Prisma varillas" y "Módulo varillas".

Actividad POS 4b

1) Abre el programa "Cubo varillas". Sin mover el cubo real, coloca el cubo de la pantalla en su misma posición.

2) Ahora un miembro del grupo mueve el cuerpo de varillas y los otros compañeros colocan el cuerpo de la pantalla en su misma posición. Después otro miembro del grupo repite la actividad.

3) Repetir las actividades 1) y 2) anteriores con los programas "Tetraedro varillas", "Octaedro varillas", "Pirámide varillas", "Prisma varillas" y "Módulo varillas".

Actividad POS 5a (1/3)

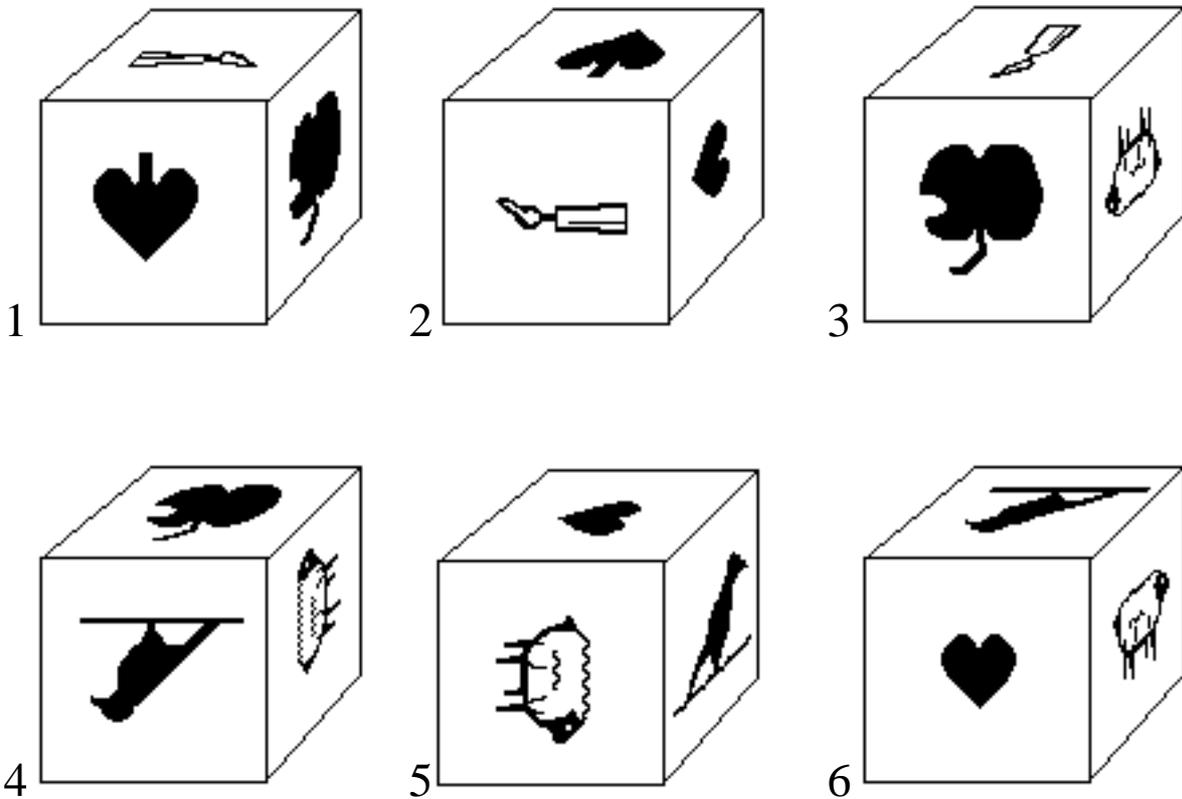
Abre el programa "Vistas de Cubos" y elige el cubo **2.1**.

Mueve el cubo de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.

Intenta llegar a cada posición en la menor cantidad posible de movimientos.

Cuando hayas llegado a la posición n° 6, pulsa el botón "Terminar" y pasa a la siguiente actividad.



Actividad POS 5a (2/3)

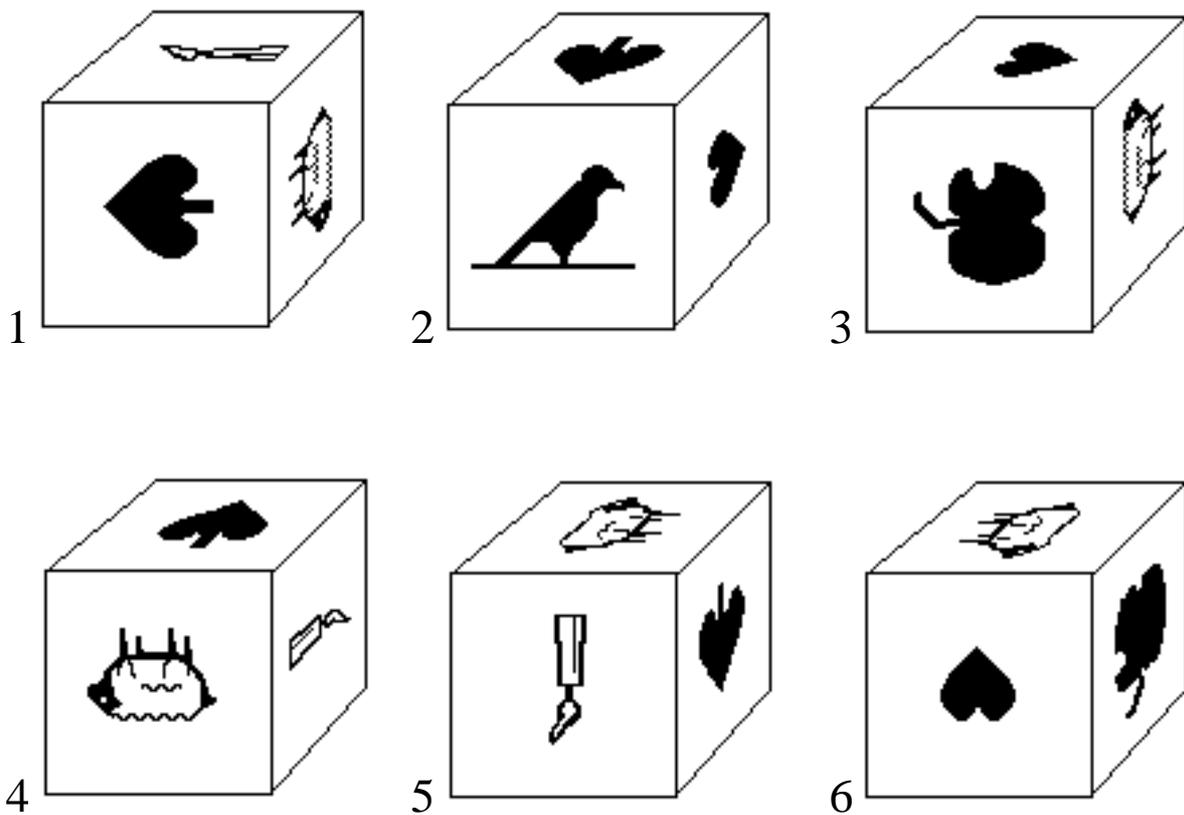
Elige el cubo 6.1 en el programa "Vistas de Cubos".

Mueve el cubo de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.

Intenta llegar a cada posición en la menor cantidad posible de movimientos.

Cuando hayas llegado a la posición n° 6, pulsa el botón "Terminar" y pasa a la siguiente actividad.



Actividad POS 5a (3/3)

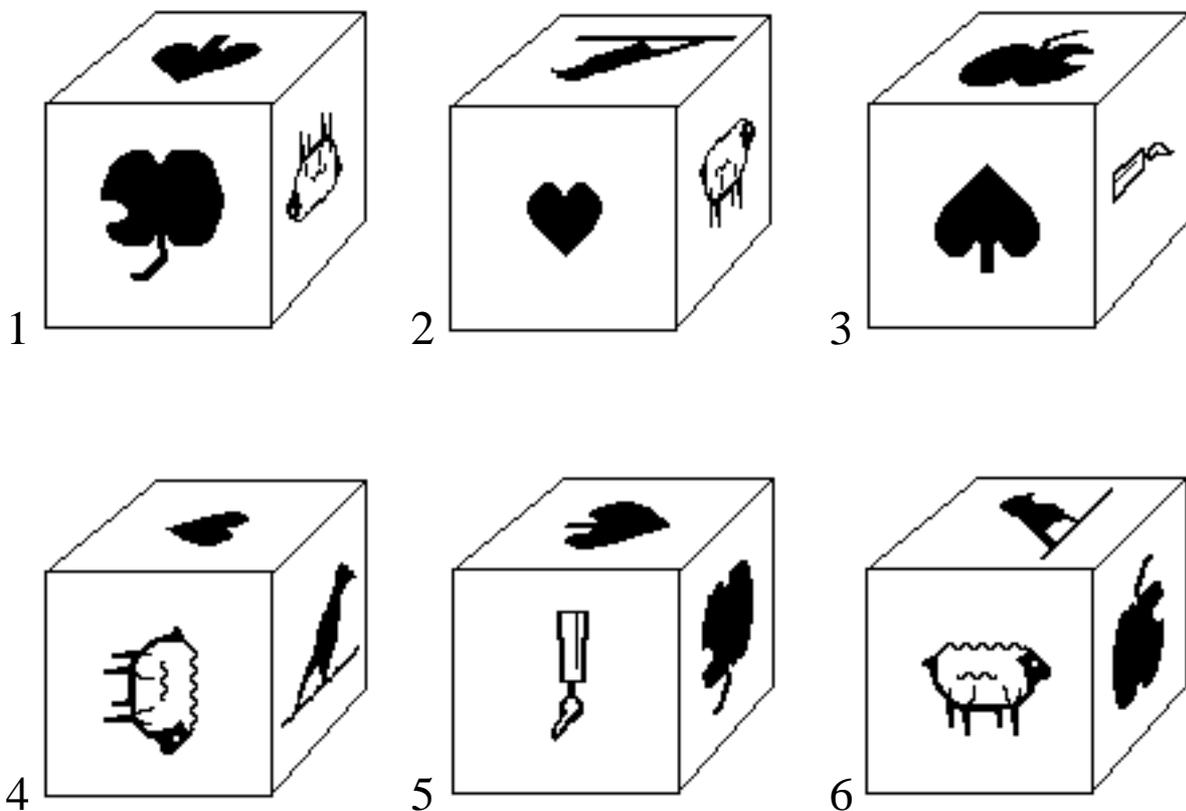
Elige el cubo **4.1** en el programa "Vistas de Cubos".

Mueve el cubo de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.

Intenta llegar a cada posición en la menor cantidad posible de movimientos.

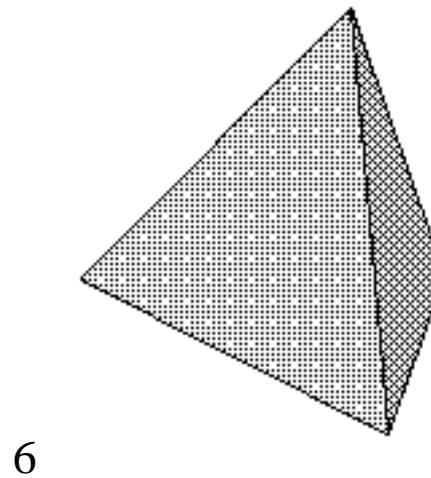
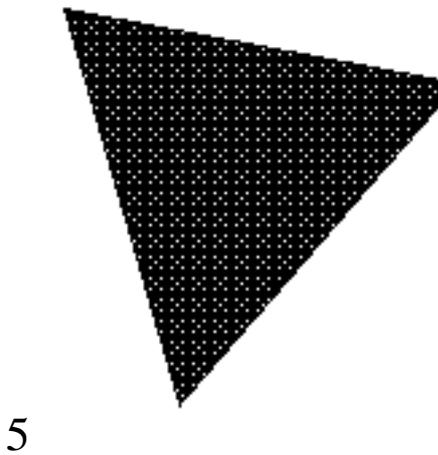
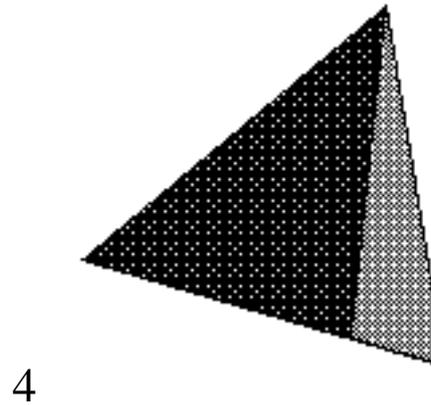
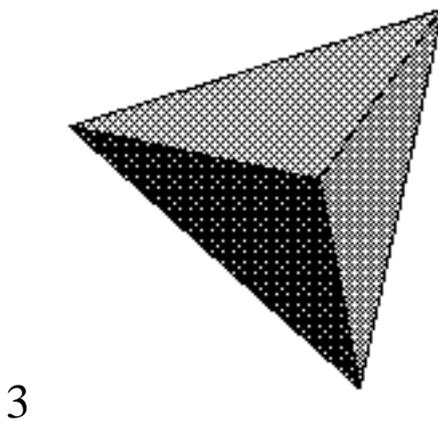
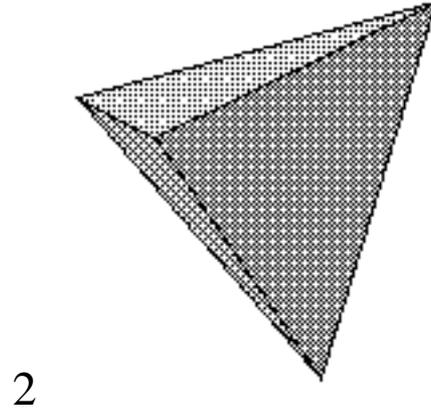
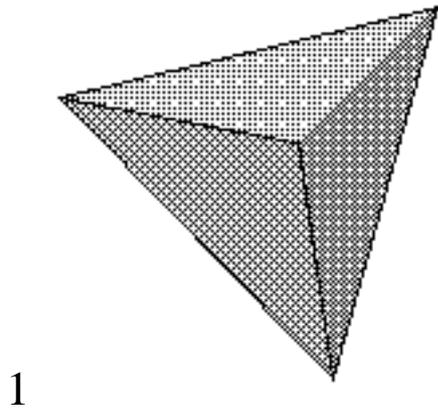
Cuando hayas llegado a la posición n° 6, pulsa los botones "Terminar" y "Salir".



Actividad POS 5b (1/5)

Abre el programa "Tetraedro sólido". Mueve el tetraedro de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

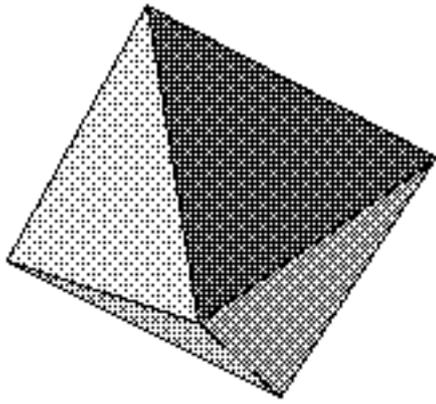
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



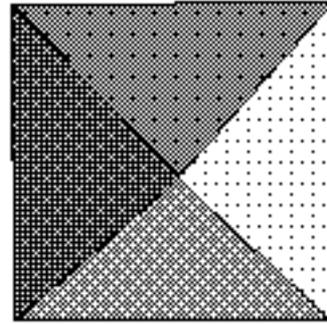
Actividad POS 5b (2/5)

Abre el programa "Octaedro sólido". Mueve el octaedro de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

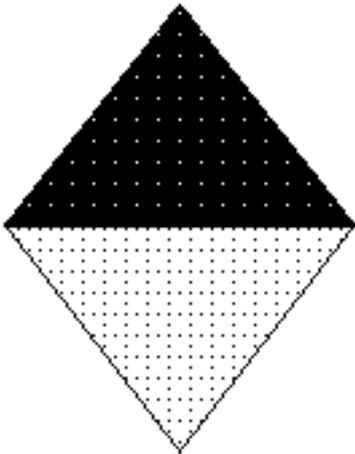
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



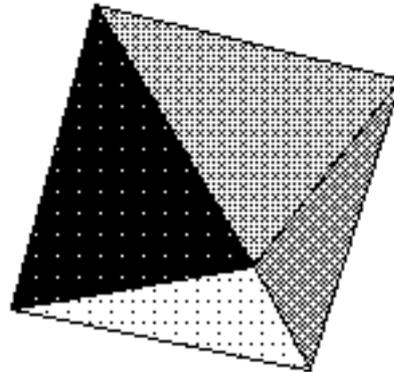
1



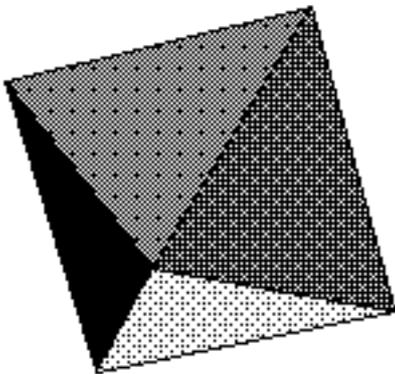
2



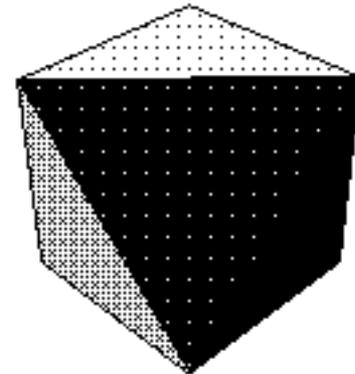
3



4



5

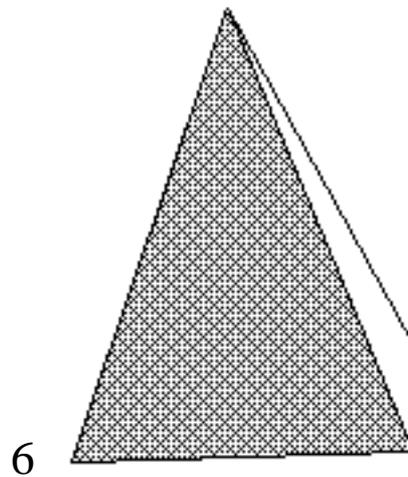
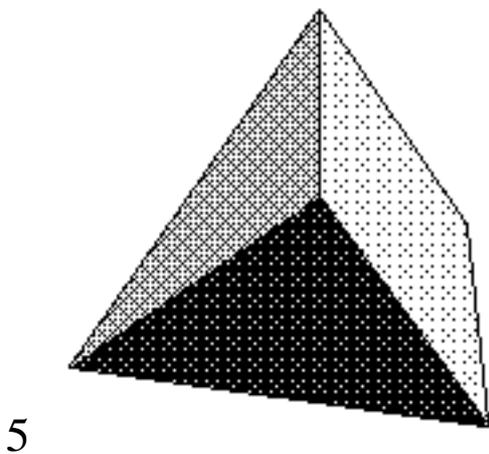
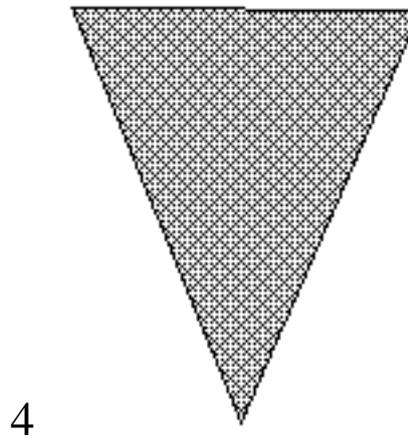
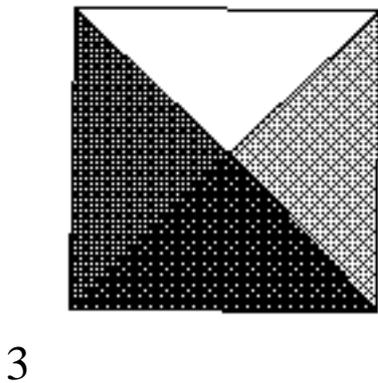
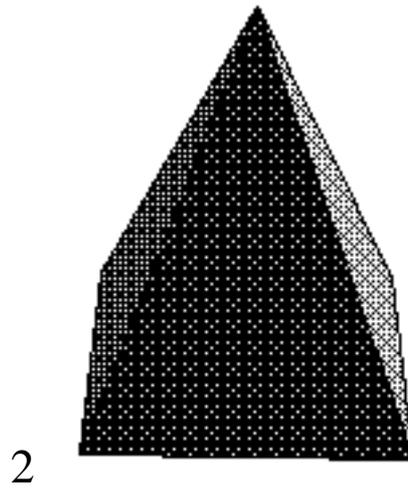
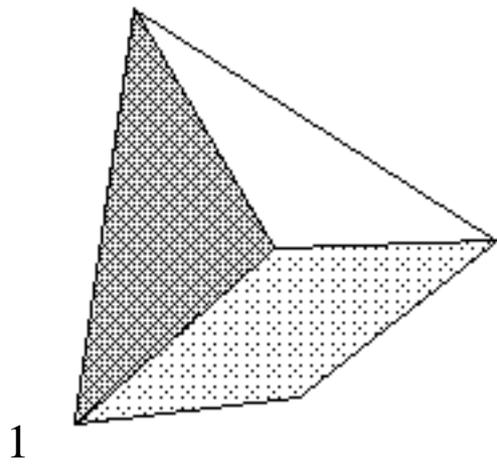


6

Actividad POS 5b (3/5)

Abre el programa "Pirámide sólida". Mueve la pirámide de la pantalla para colocarla en la primera de las posiciones que ves a continuación.

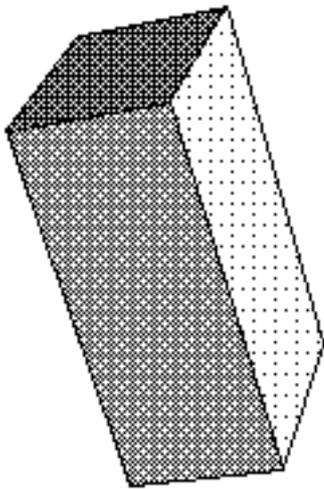
Después, colócala en la segunda posición, y así sucesivamente.



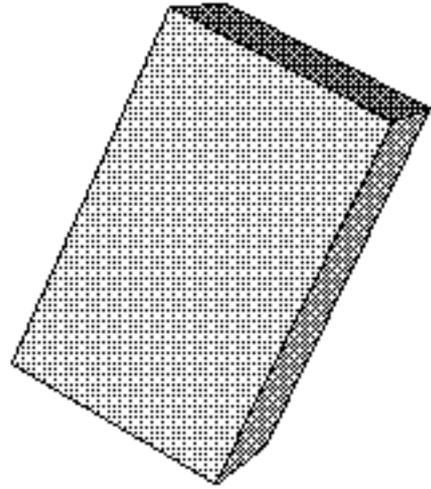
Actividad POS 5b (4/5)

Abre el programa "Prisma sólido". Mueve el prisma de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

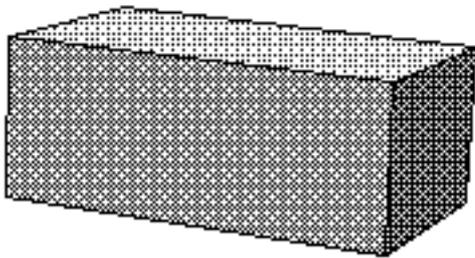
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



1



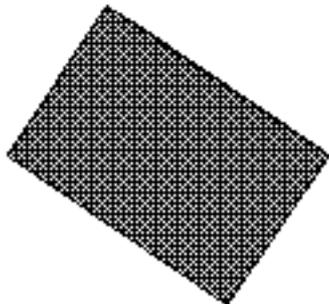
2



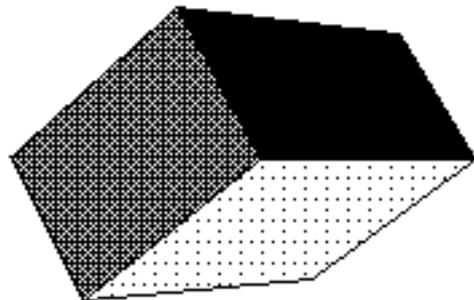
3



4



5

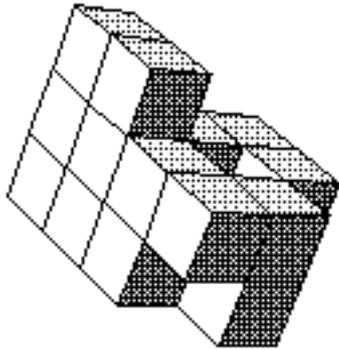


6

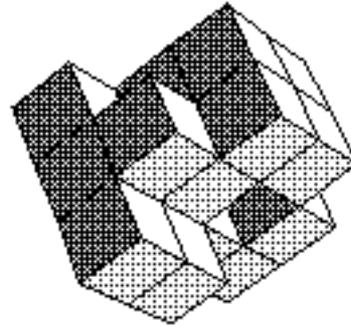
Actividad POS 5b (5/5)

Abre el programa "Módulo sólido". Mueve el cuerpo de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

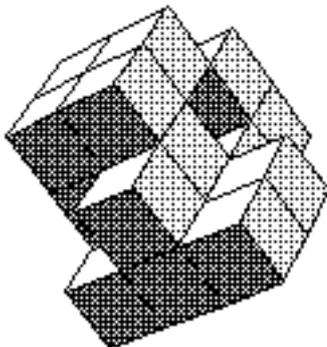
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



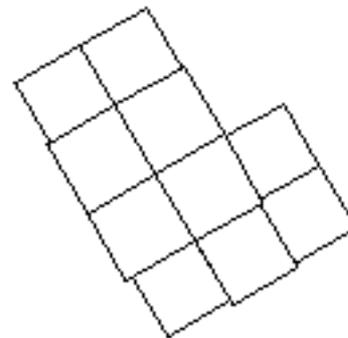
1



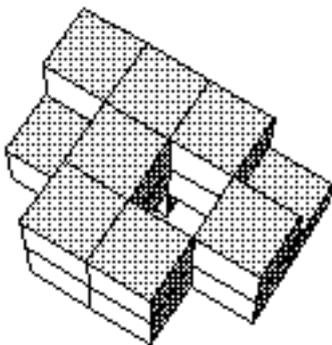
2



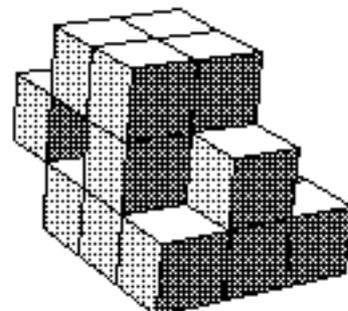
3



4



5

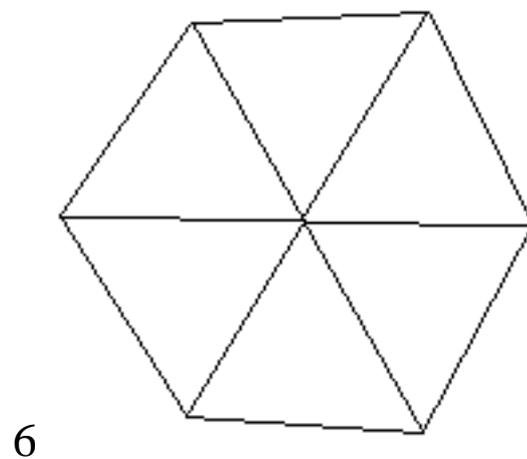
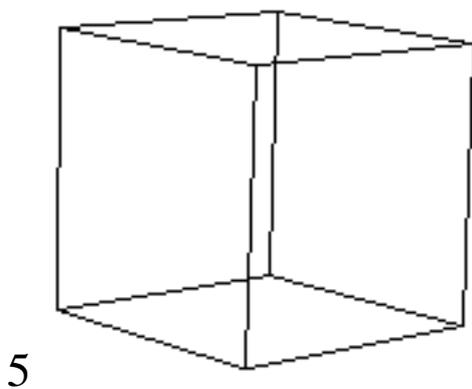
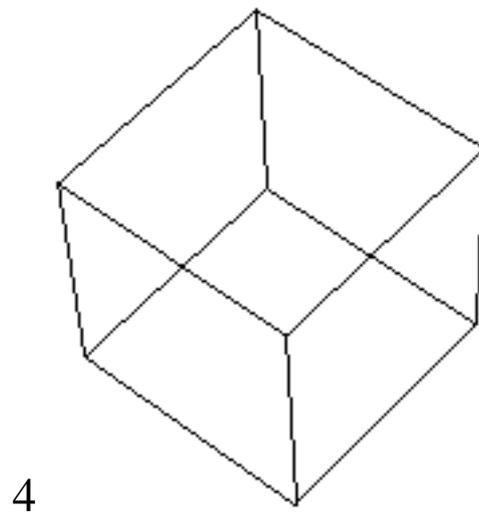
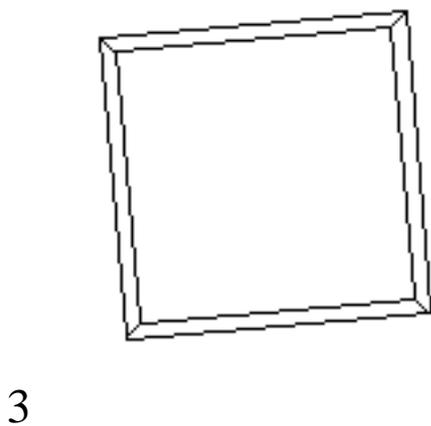
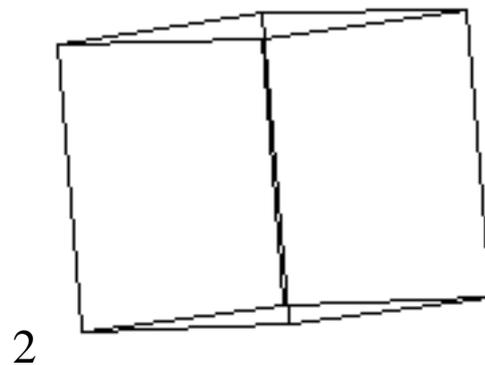
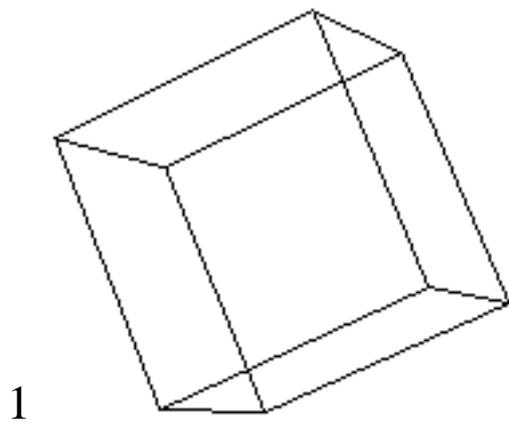


6

Actividad POS 5c (1/6)

Abre el programa "Cubo varillas". Mueve el cubo de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

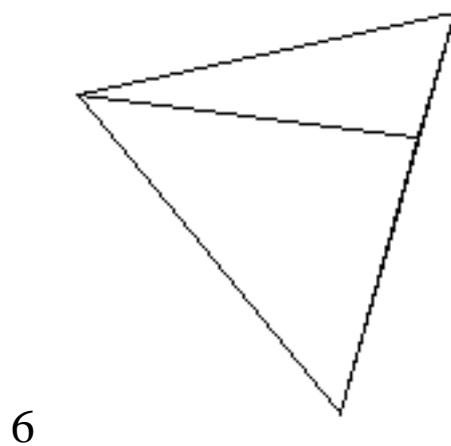
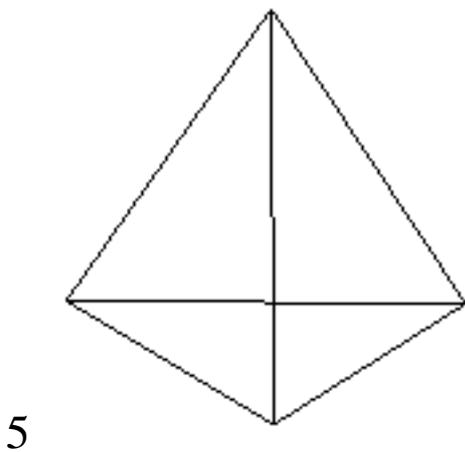
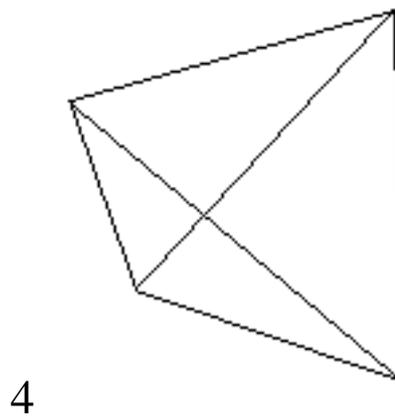
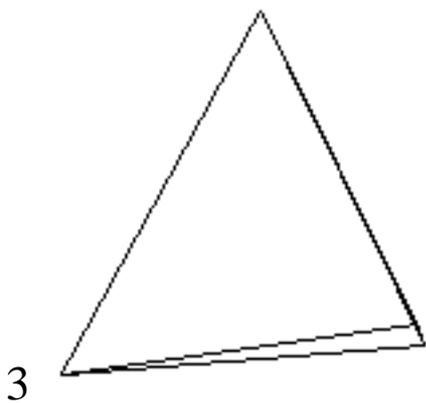
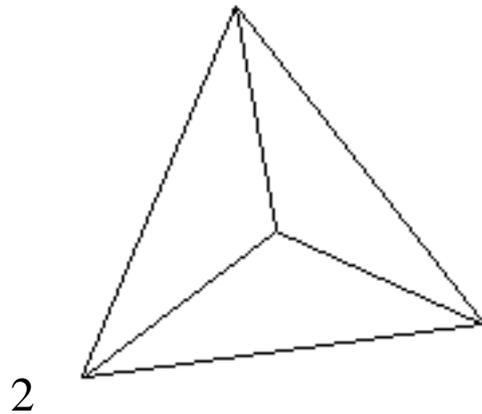
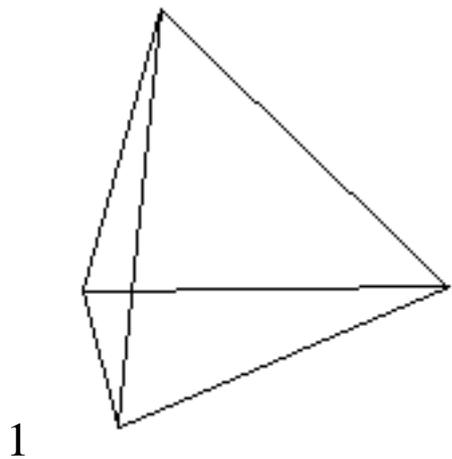
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 5c (2/6)

Abre el programa "Tetraedro varillas". Mueve el tetraedro de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

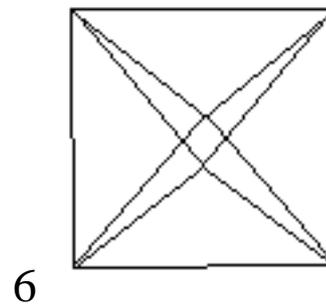
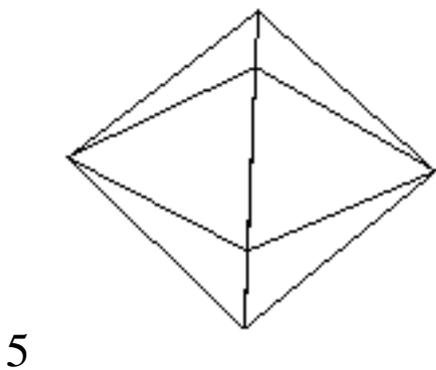
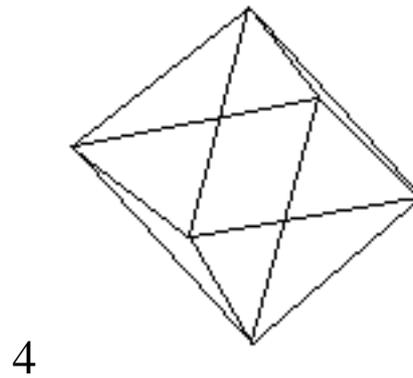
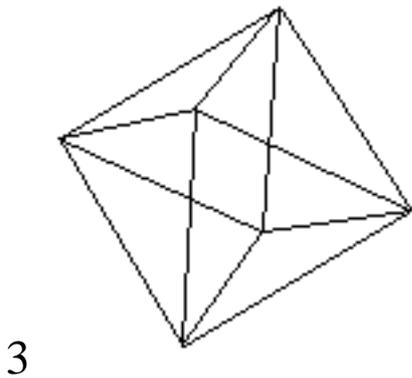
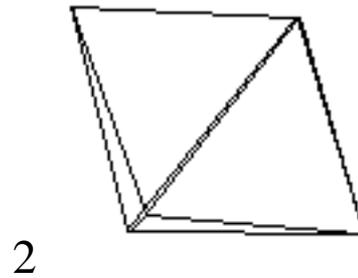
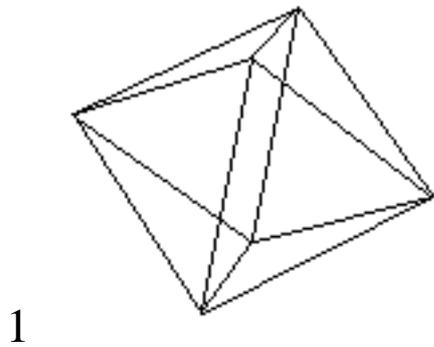
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 5c (3/6)

Abre el programa "Octaedro varillas". Mueve el octaedro de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

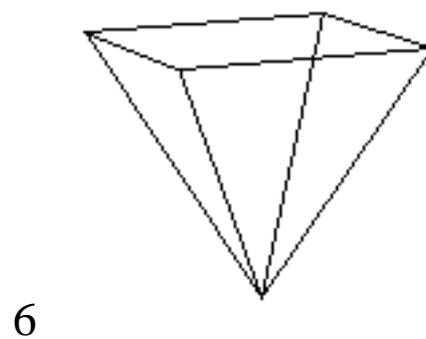
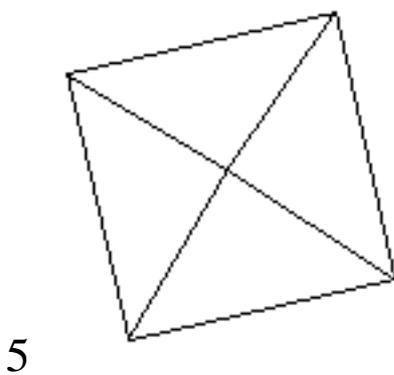
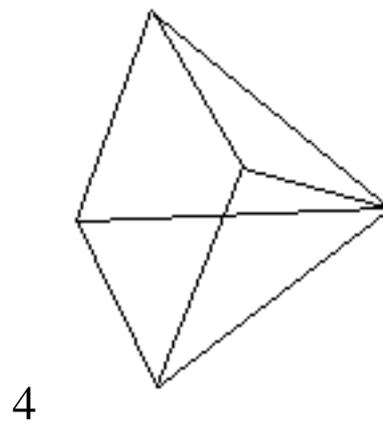
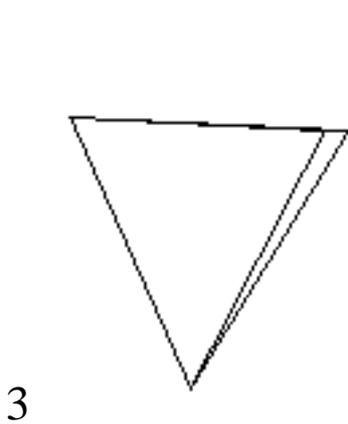
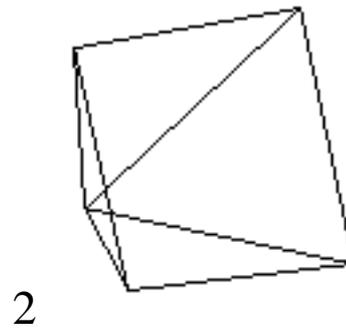
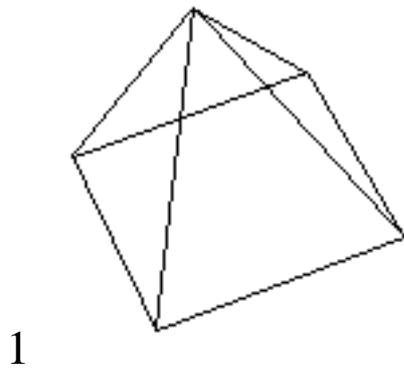
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 5c (4/6)

Abre el programa "Pirámide varillas". Mueve la pirámide de la pantalla para colocarla en la primera de las posiciones que ves a continuación.

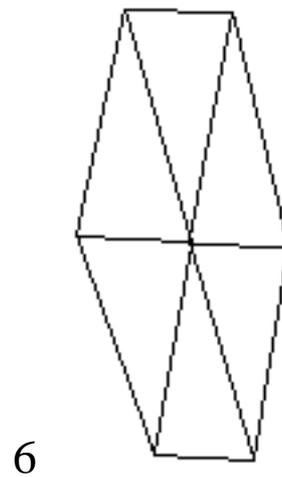
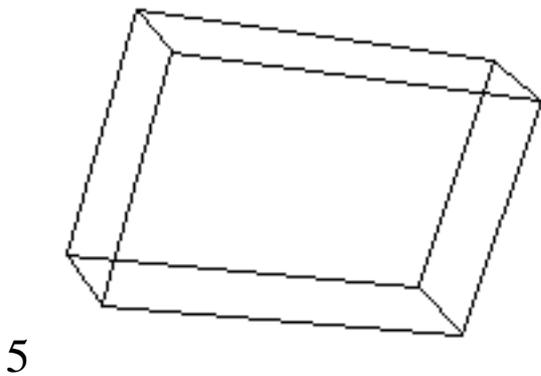
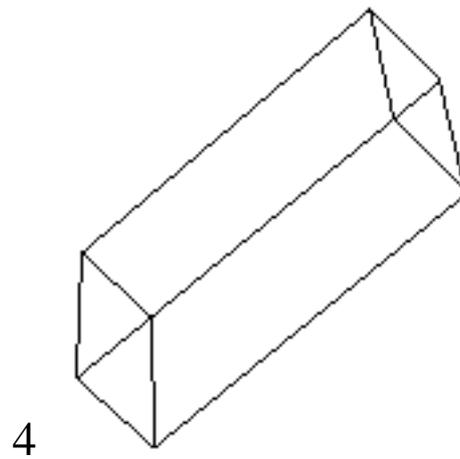
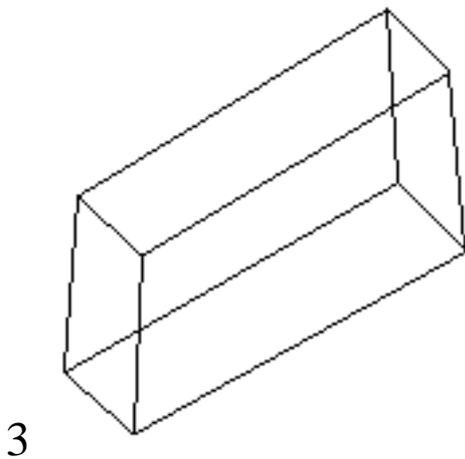
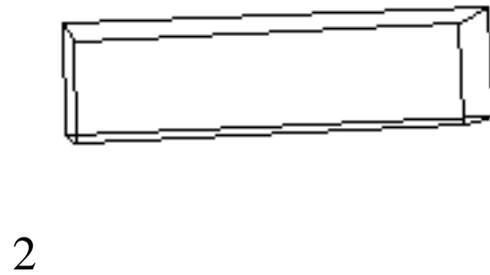
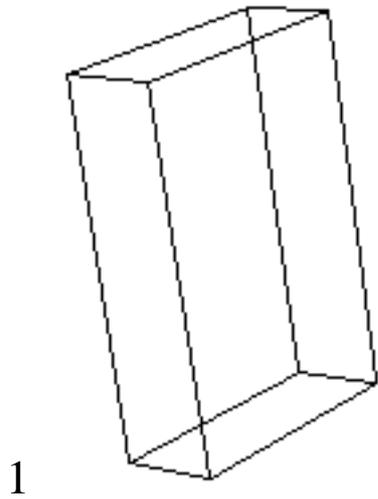
Después, colócala en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 5c (5/6)

Abre el programa "Prisma varillas". Mueve el prisma de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

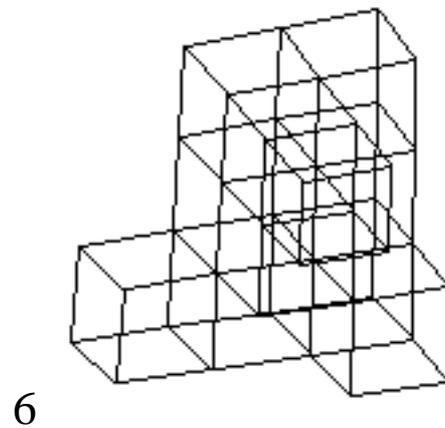
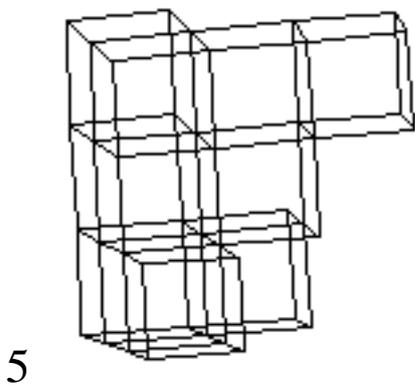
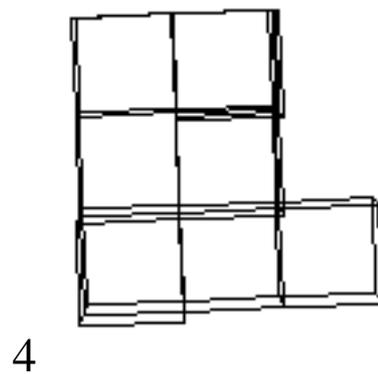
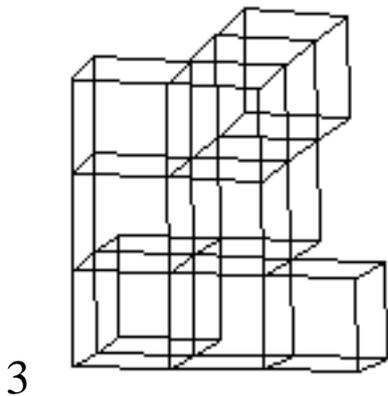
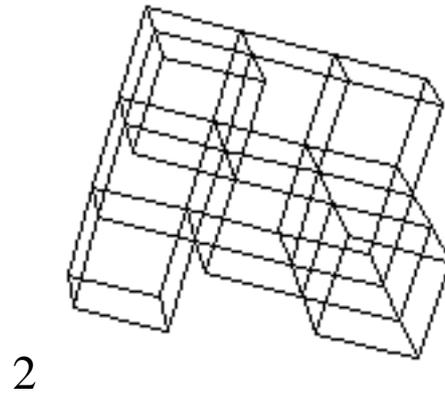
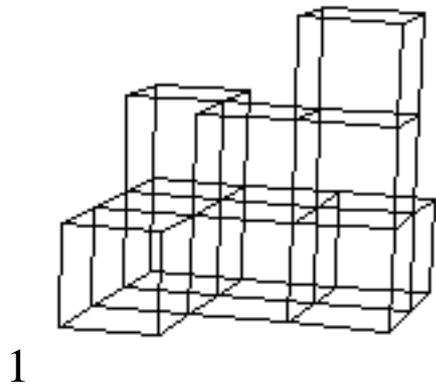
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 5c (6/6)

Abre el programa "Módulo varillas". Mueve el cuerpo de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

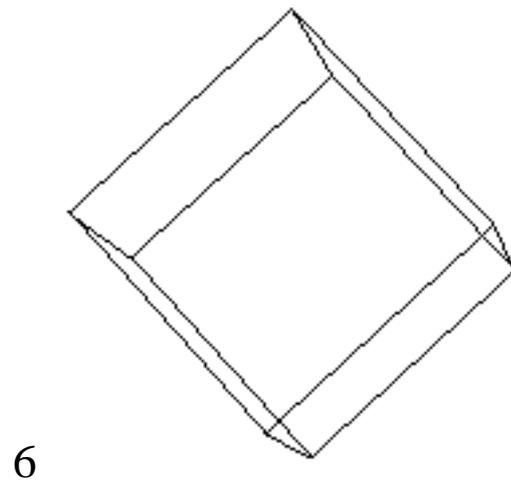
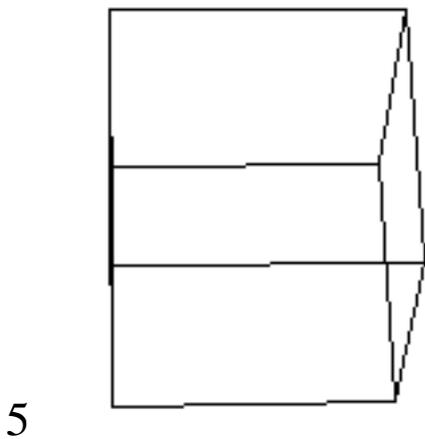
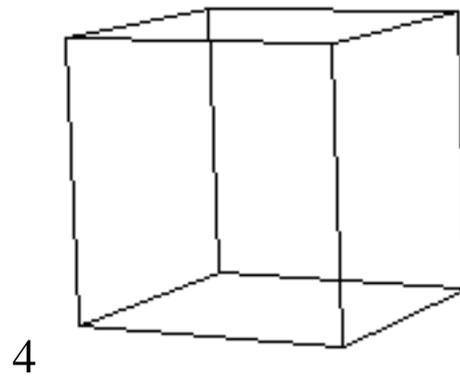
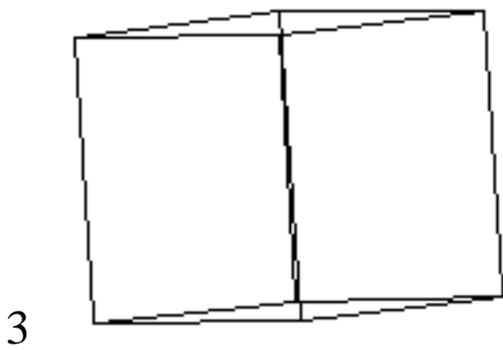
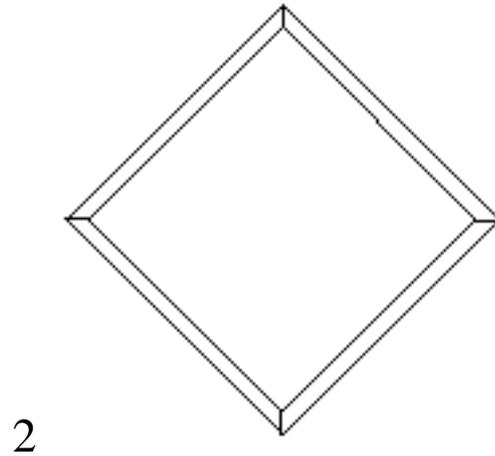
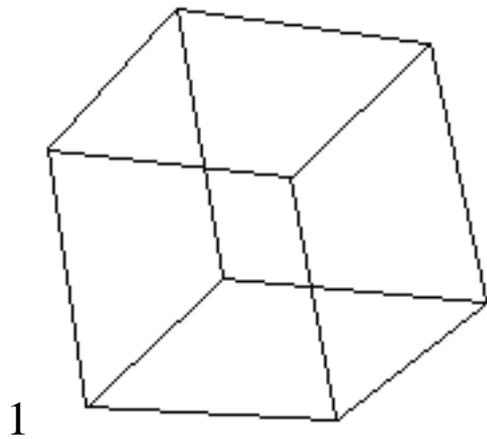
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 6a (1/6)

Abre el programa "Cubo varillas". Mueve el cubo de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

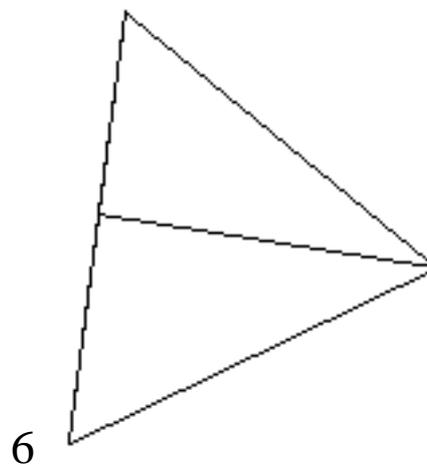
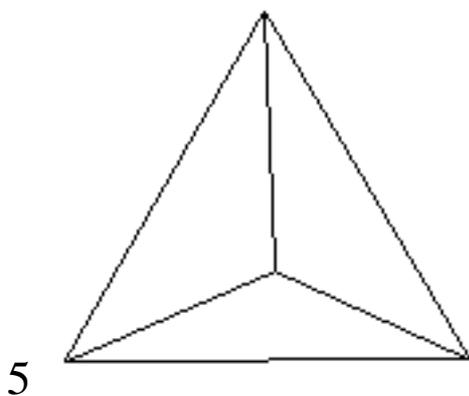
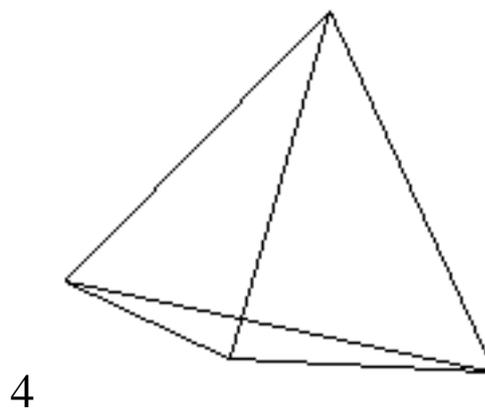
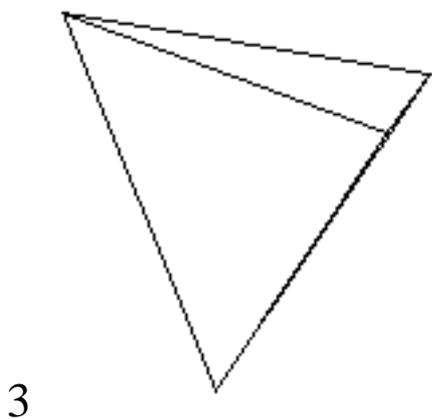
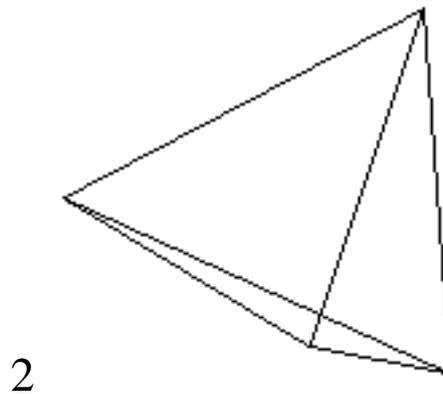
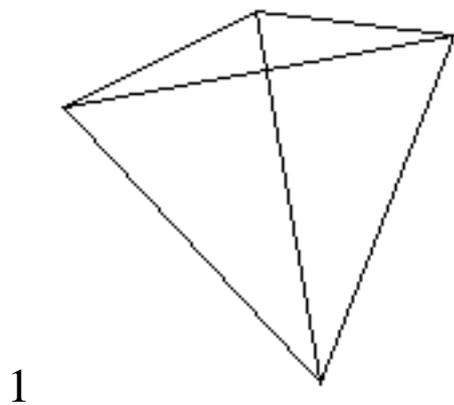
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 6a (2/6)

Abre el programa "Tetraedro varillas". Mueve el tetraedro de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

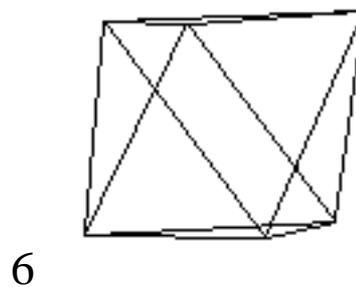
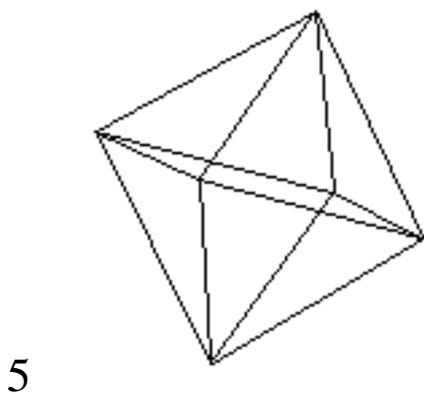
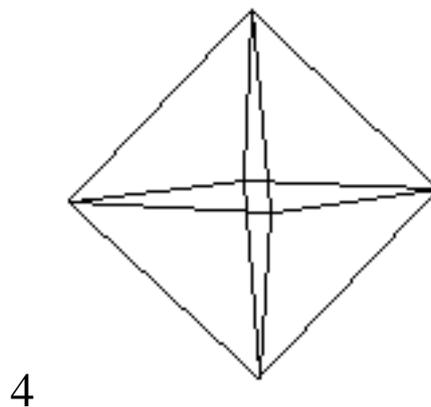
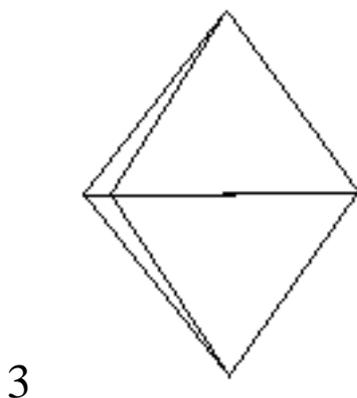
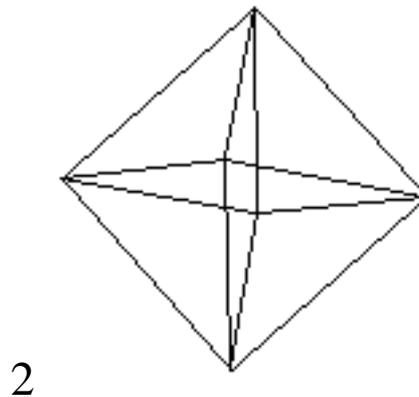
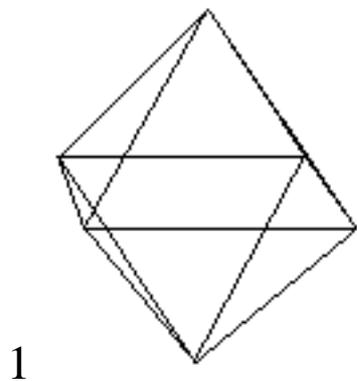
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 6a (3/6)

Abre el programa "Octaedro varillas". Mueve el octaedro de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

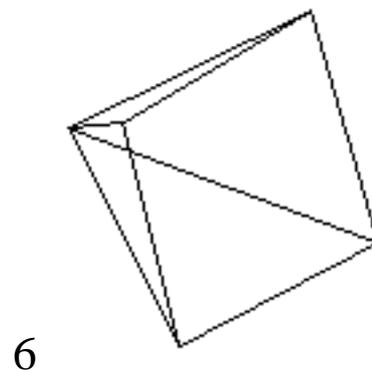
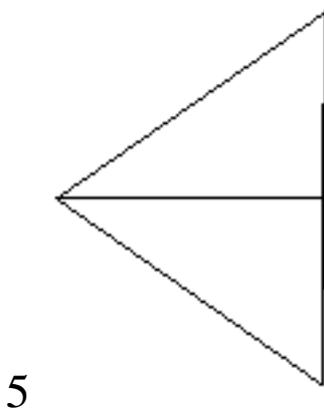
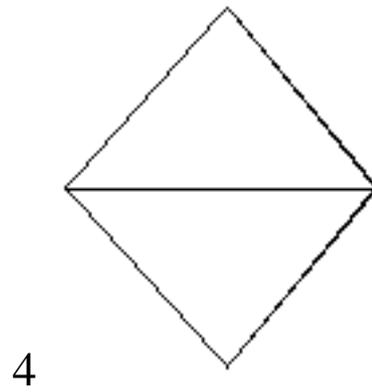
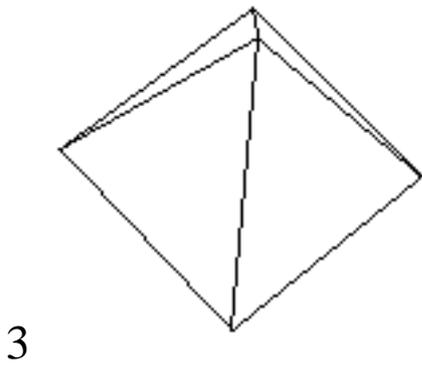
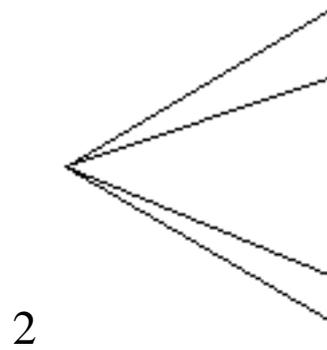
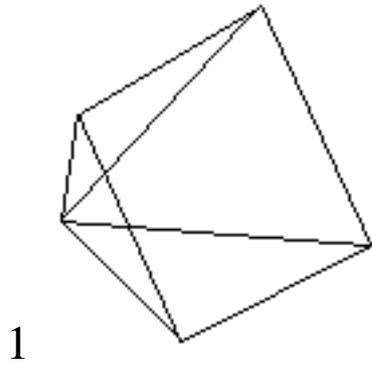
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 6a (4/6)

Abre el programa "Pirámide varillas". Mueve la pirámide de la pantalla para colocarla en la primera de las posiciones que ves a continuación.

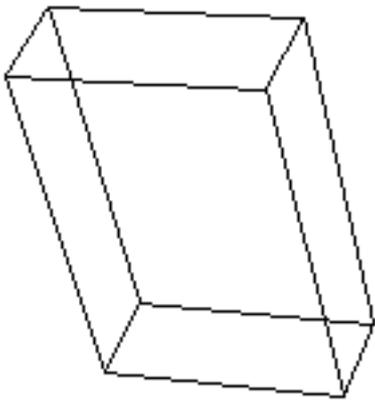
Después, colócala en la segunda posición, y así sucesivamente.



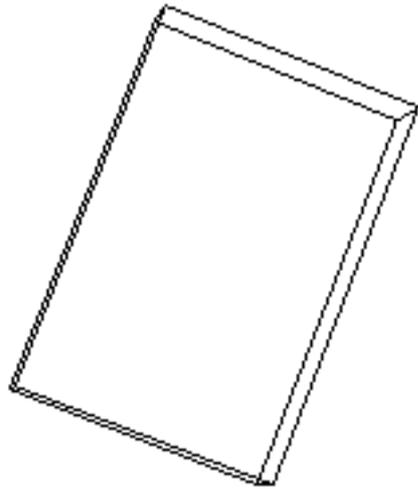
Actividad POS 6a (5/6)

Abre el programa "Prisma varillas". Mueve el prisma de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

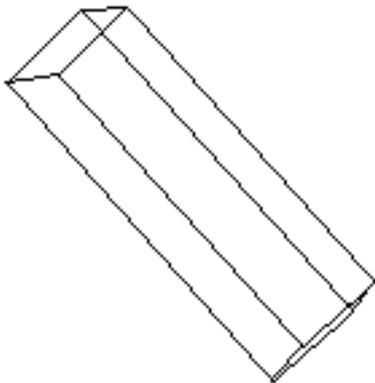
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



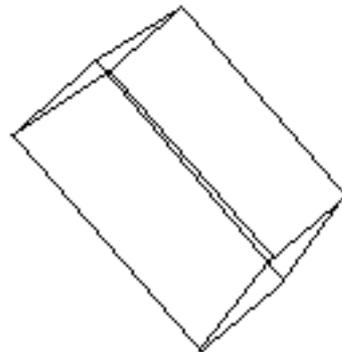
1



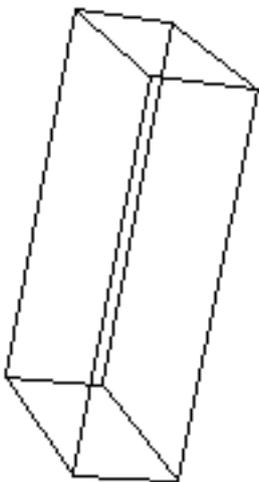
2



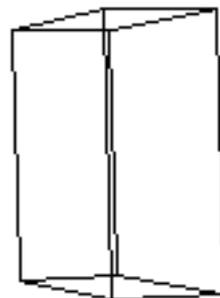
3



4



5

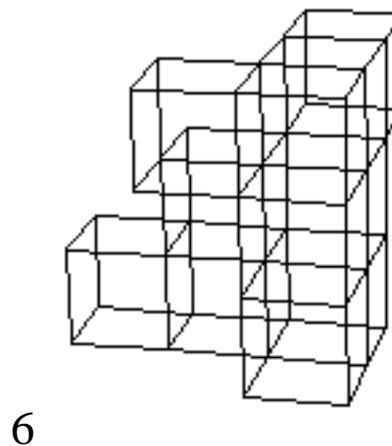
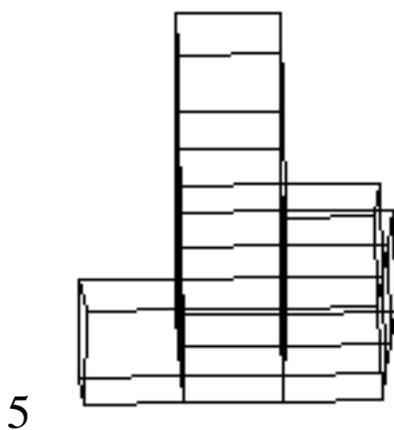
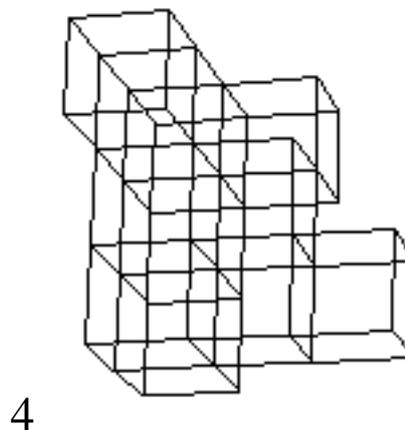
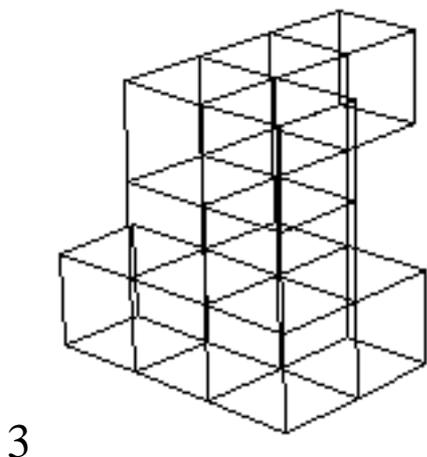
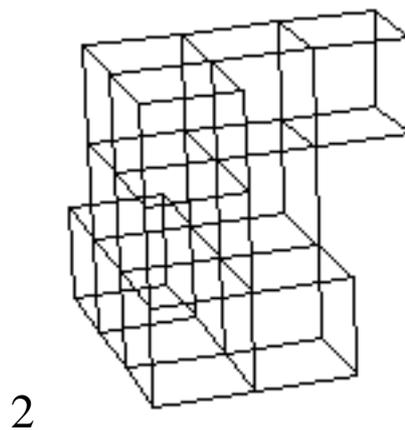
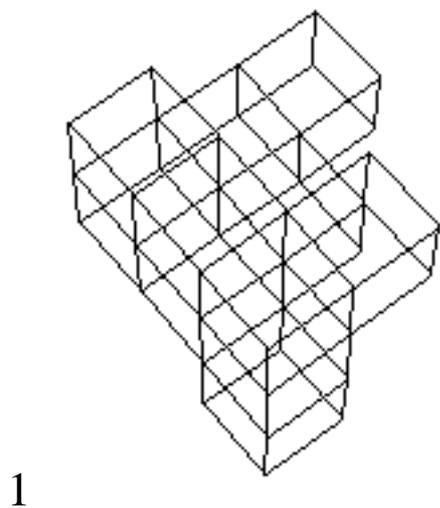


6

Actividad POS 6a (6/6)

Abre el programa "Módulo varillas". Mueve el cuerpo de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

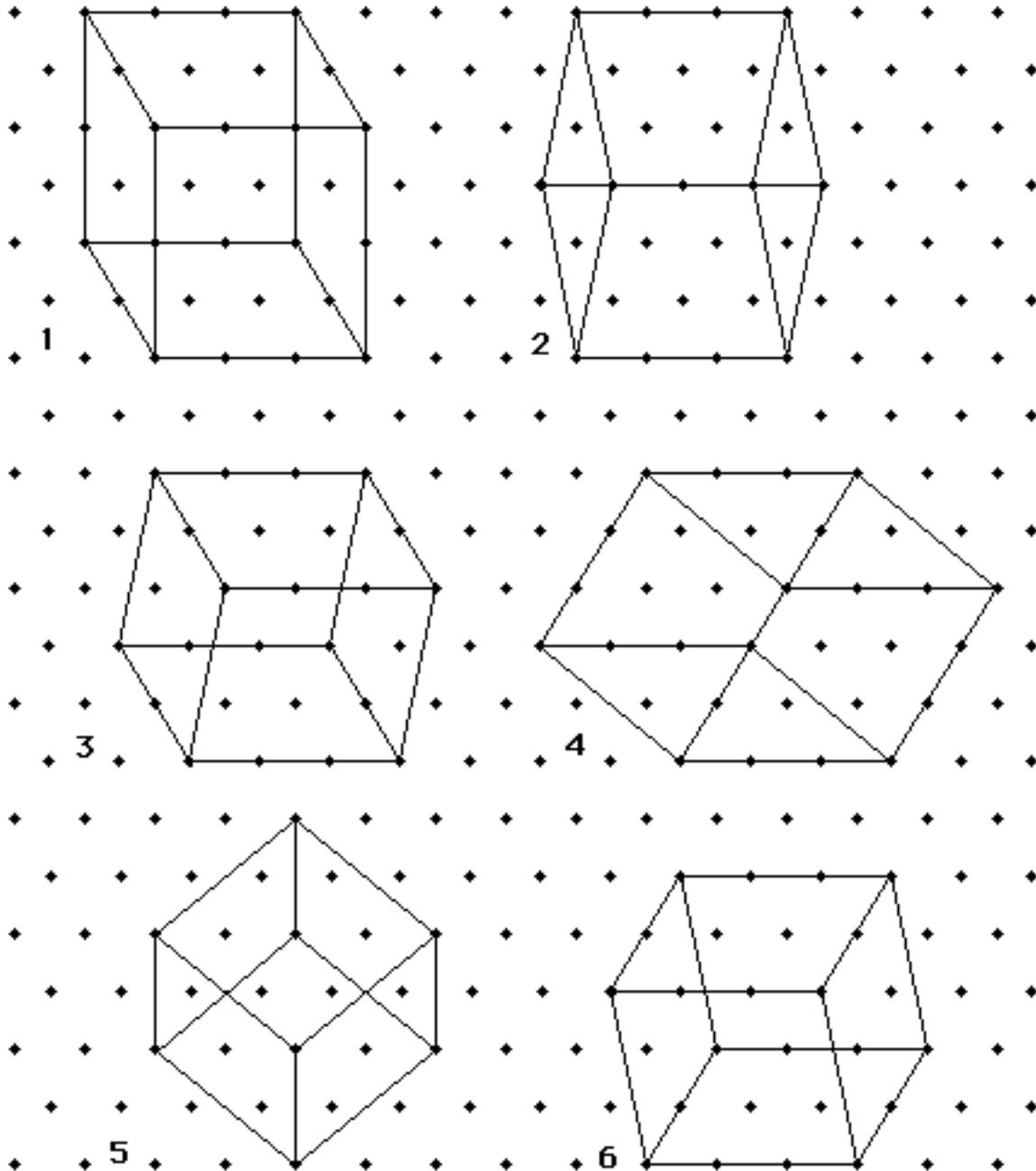
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 6b (1/5)

Abre el programa "Cubo varillas". Mueve el cubo de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

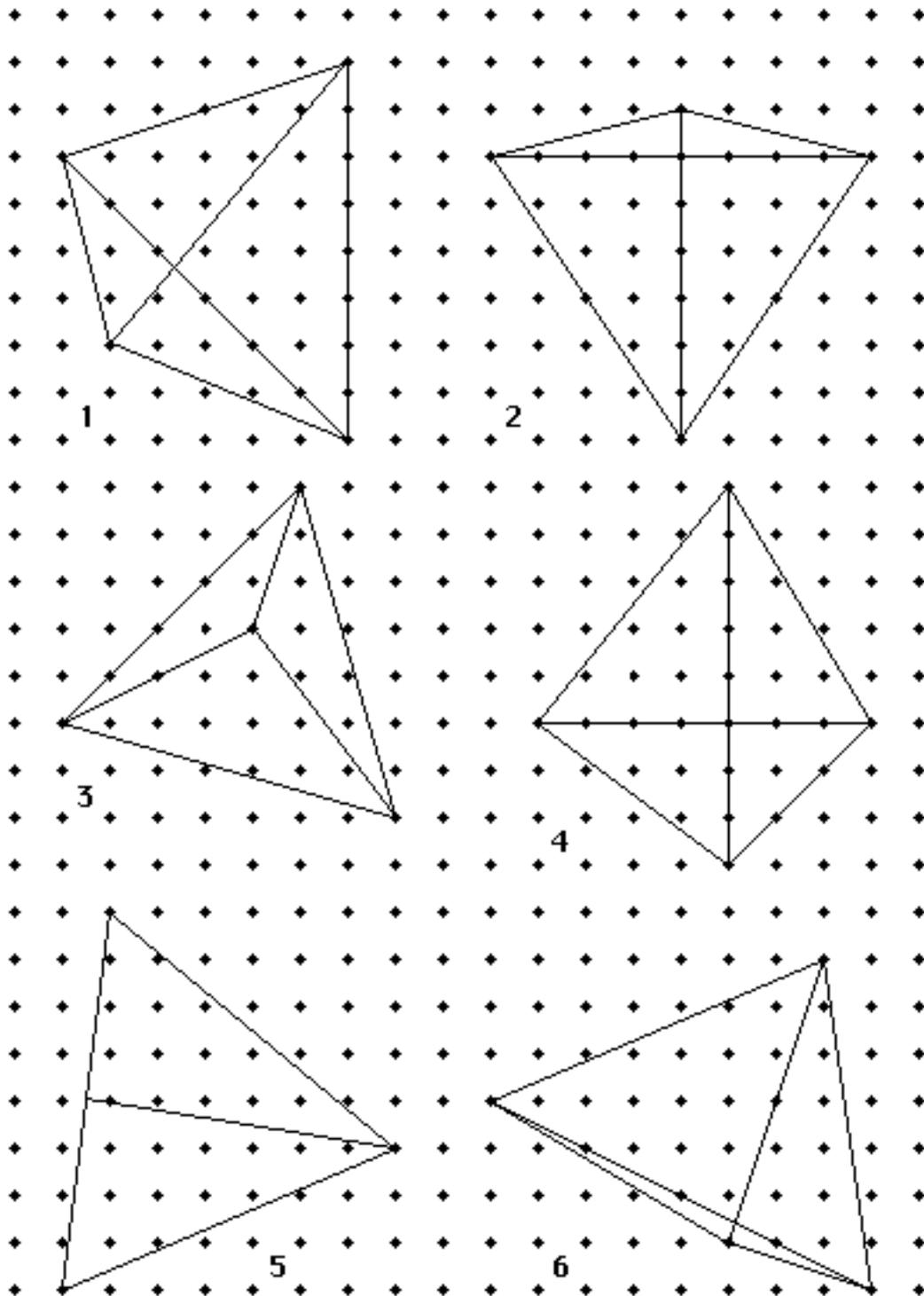
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 6b (2/5)

Abre el programa "Tetraedro varillas". Mueve el tetraedro de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

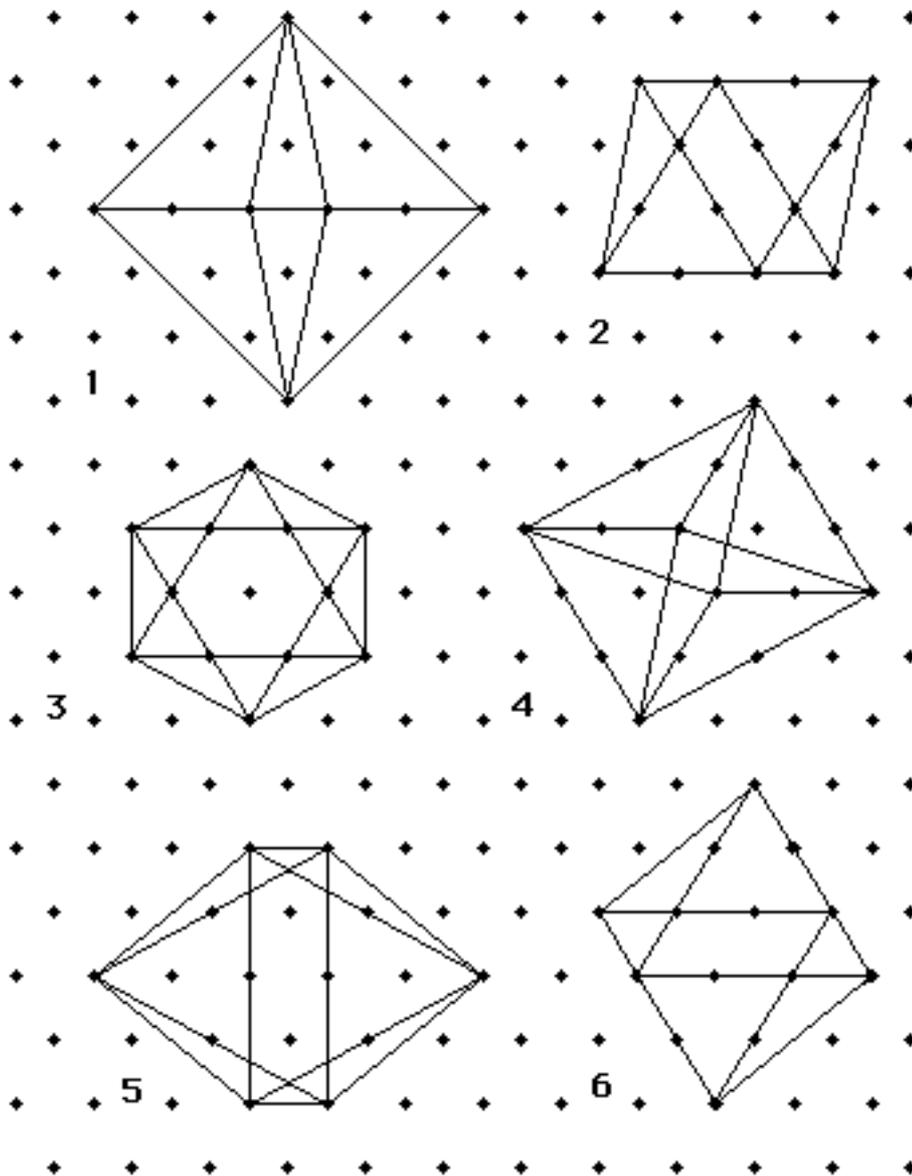
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 6b (3/5)

Abre el programa "Octaedro varillas". Mueve el octaedro de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

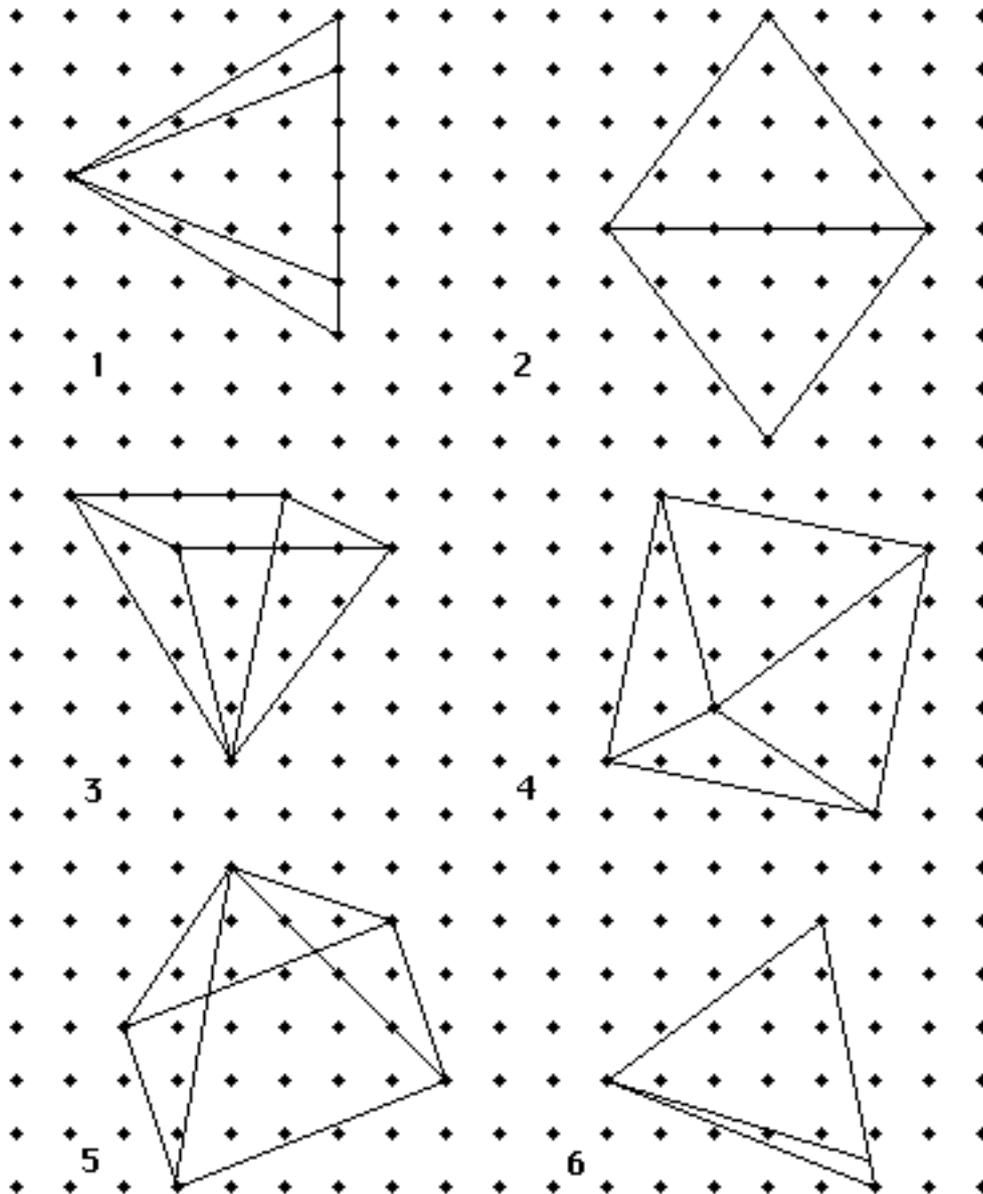
Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 6b (4/5)

Abre el programa "Pirámide varillas". Mueve la pirámide de la pantalla para colocarla en la primera de las posiciones que ves a continuación.

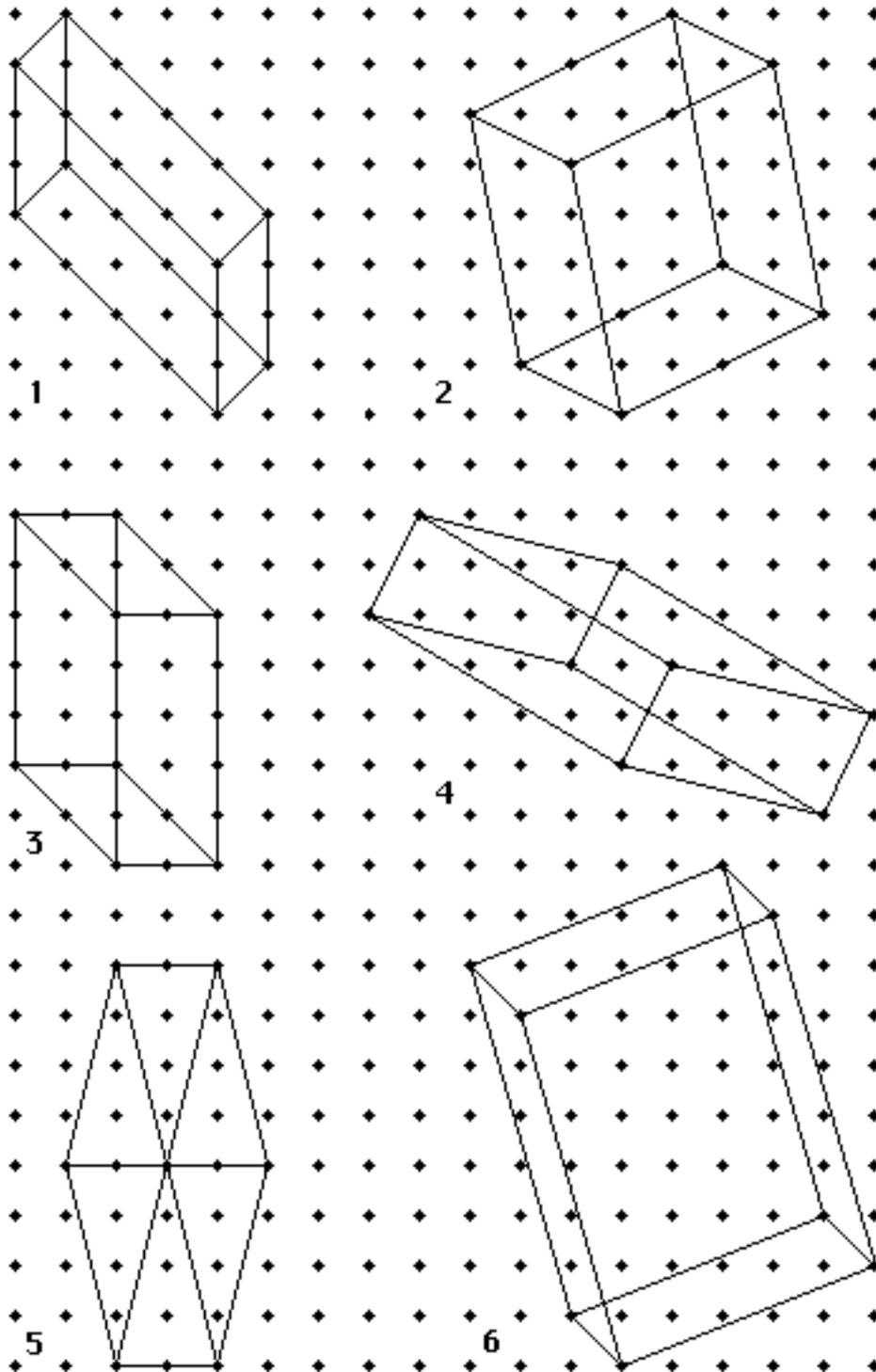
Después, colócala en la segunda posición, y así sucesivamente.



Actividad POS 6b (5/5)

Abre el programa "Prisma varillas". Mueve el prisma de la pantalla para colocarlo en la primera de las posiciones que ves a continuación.

Después, colócalo en la segunda posición, y así sucesivamente.

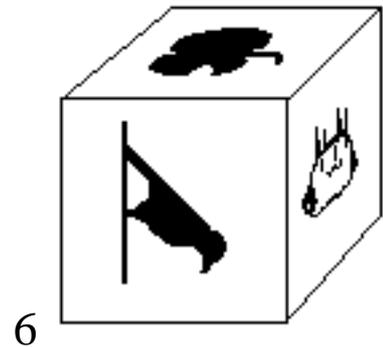
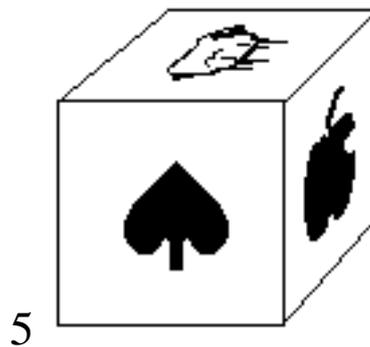
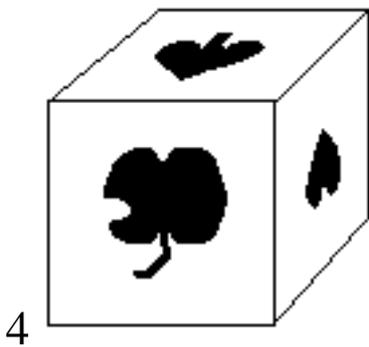
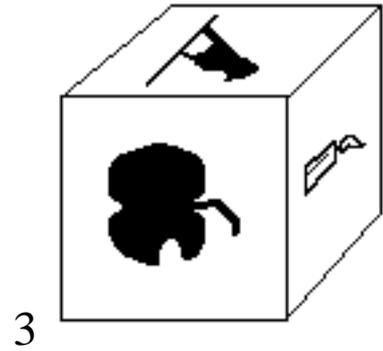
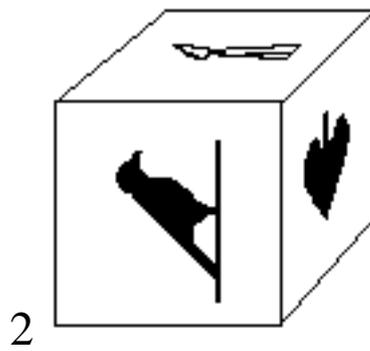
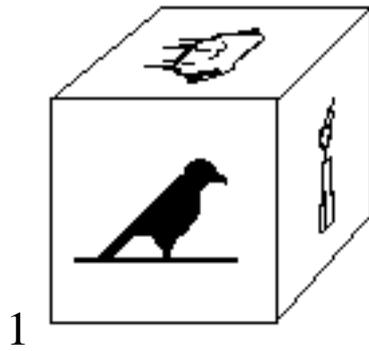


Actividad POS 7a (1/3)

Abre el programa "Vistas de Cubos" y elige el cubo **1.8**.

Escribe SI o NO en las vistas de cubos que hay debajo, según que correspondan o no al cubo que ves en el ordenador. Si quieres, puedes mover el cubo de la pantalla.

Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Terminar" y pasa a la siguiente actividad.

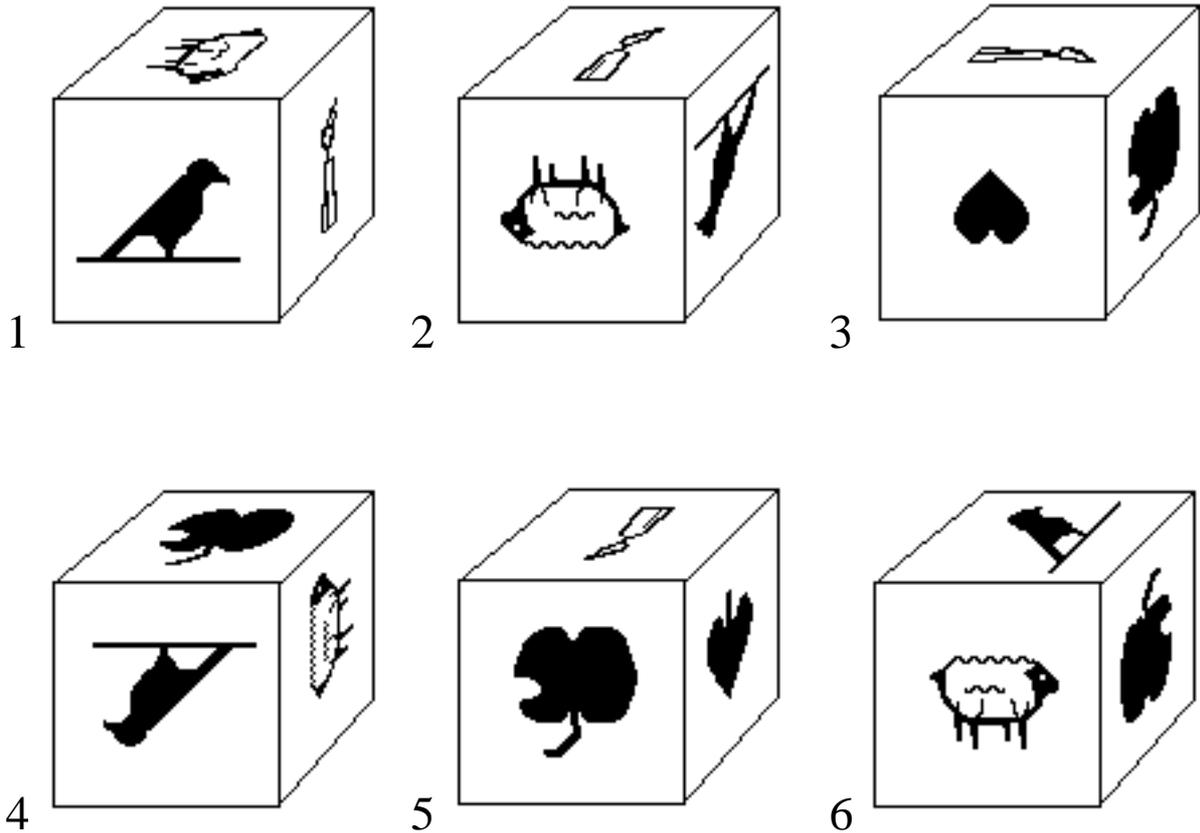


Actividad POS 7a (2/3)

Elige el cubo 7.1 en el programa "Vistas de Cubos".

Escribe SI o NO en las vistas de cubos que hay debajo, según que correspondan o no al cubo que ves en el ordenador. Si quieres, puedes mover el cubo de la pantalla.

Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Terminar" y pasa a la siguiente actividad.

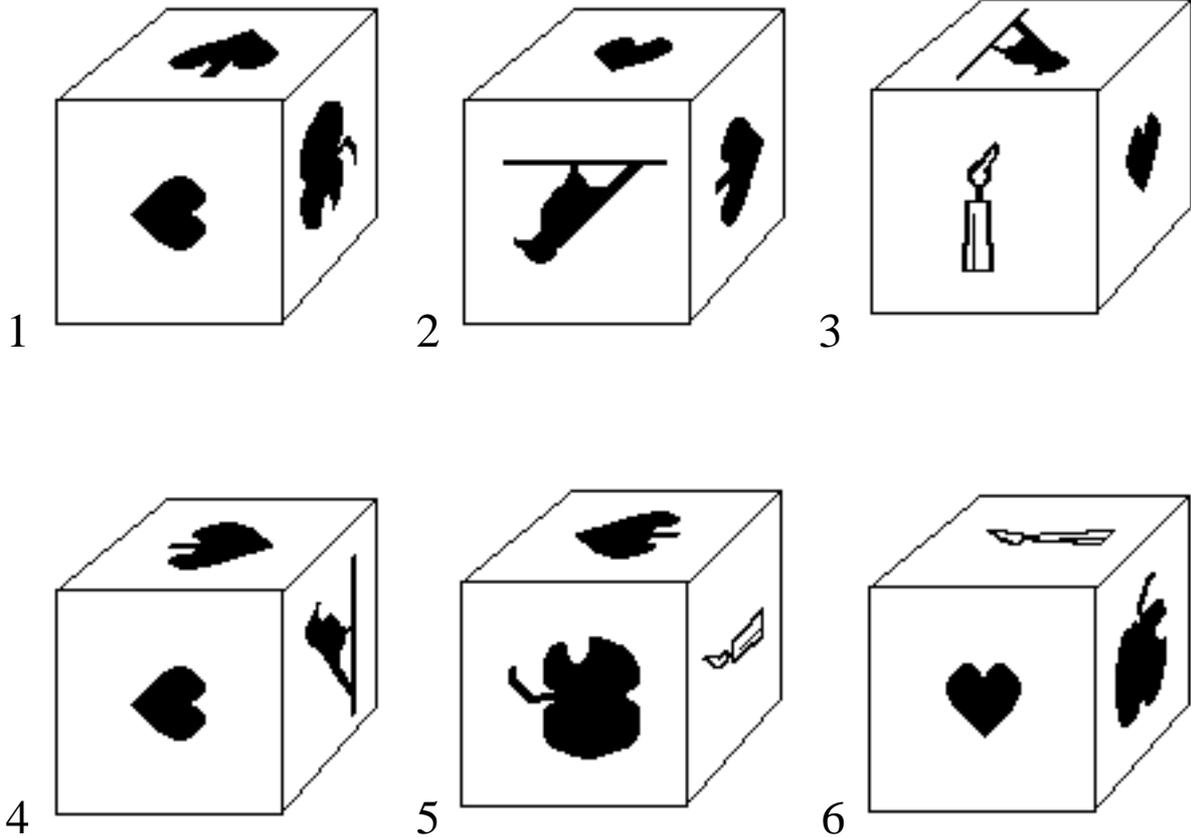


Actividad POS 7a (3/3)

Elige el cubo 8.3 en el programa "Vistas de Cubos".

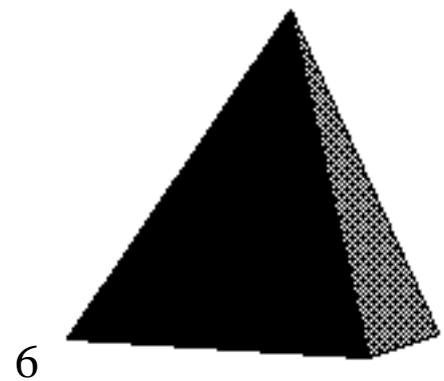
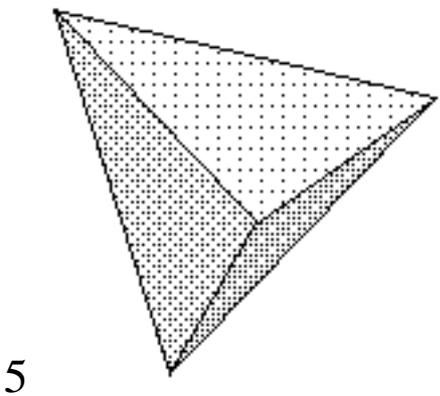
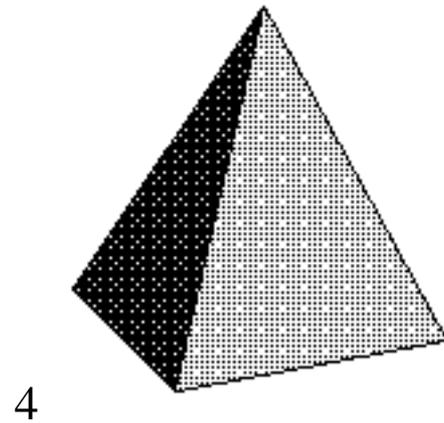
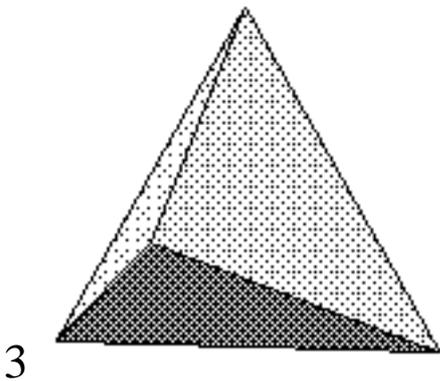
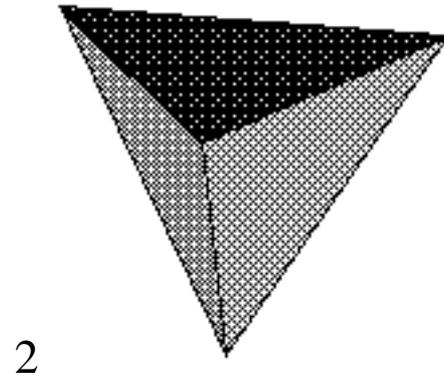
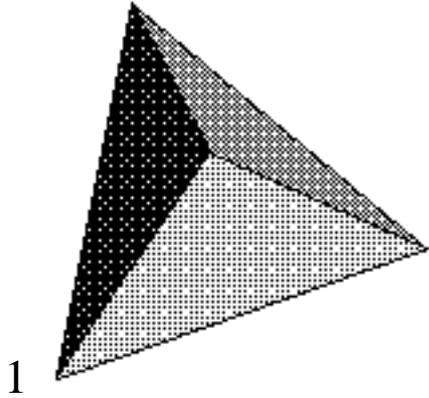
Escribe SI o NO en las vistas de cubos que hay debajo, según que correspondan o no al cubo que ves en el ordenador. Si quieres, puedes mover el cubo de la pantalla.

Cuando hayas terminado, pulsa los botones "Terminar" y "Salir".



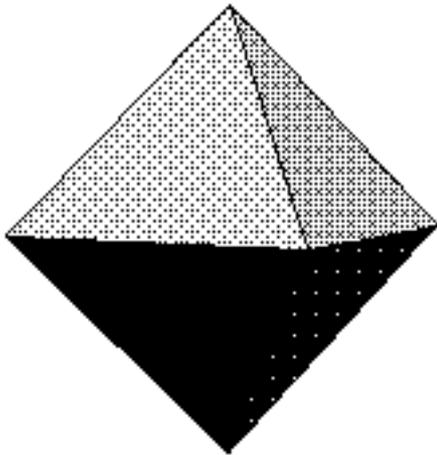
Actividad POS 7b (1/5)

Abre el programa "Tetraedro sólido". Escribe SI o NO en las vistas de tetraedros que hay debajo, según que correspondan o no al tetraedro que ves en el ordenador. Si quieres, puedes mover el tetraedro de la pantalla.

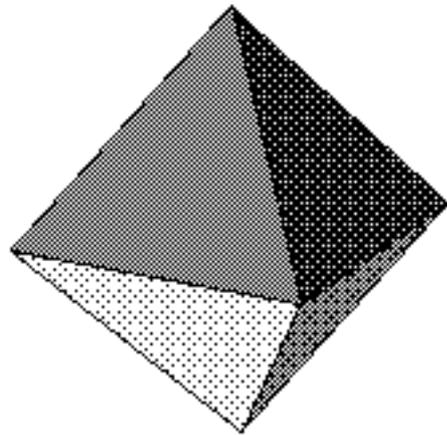


Actividad POS 7b (2/5)

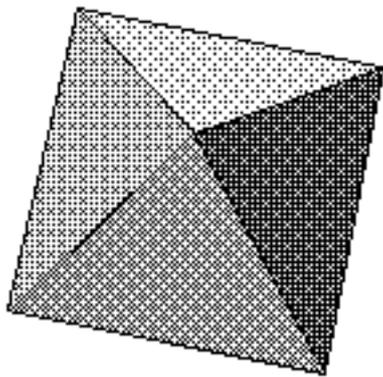
Abre el programa "Octaedro sólido". Escribe SI o NO en las vistas de octaedros que hay debajo, según que correspondan o no al octaedro que ves en el ordenador. Si quieres, puedes mover el octaedro de la pantalla.



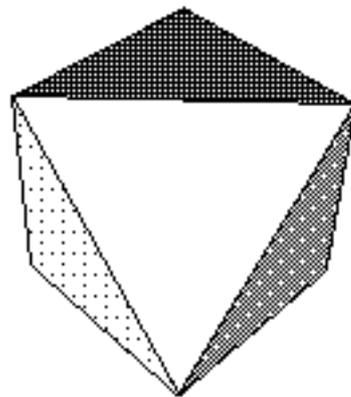
1



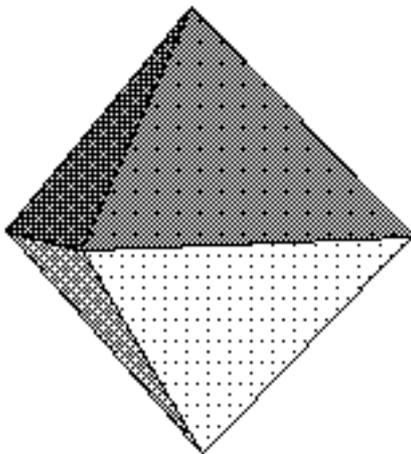
2



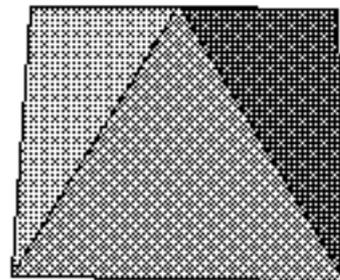
3



4



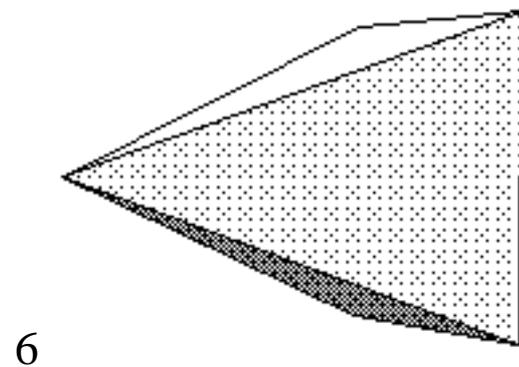
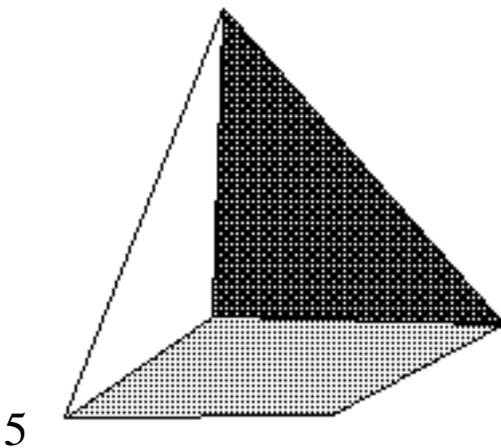
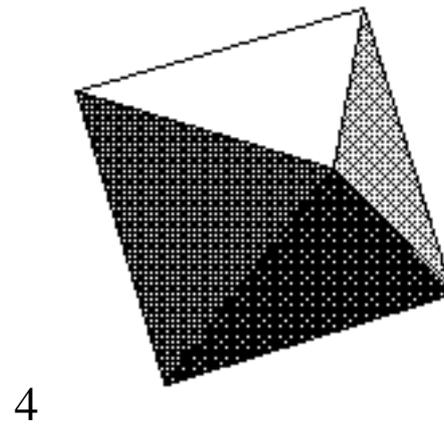
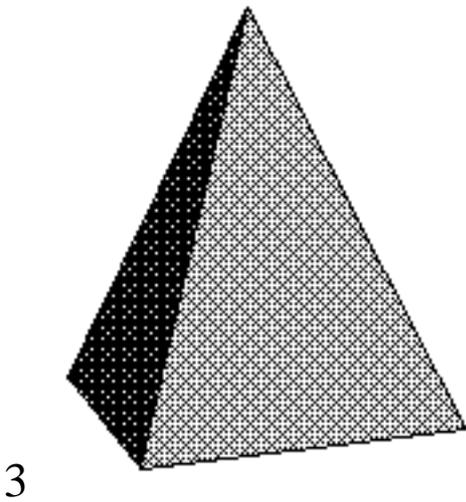
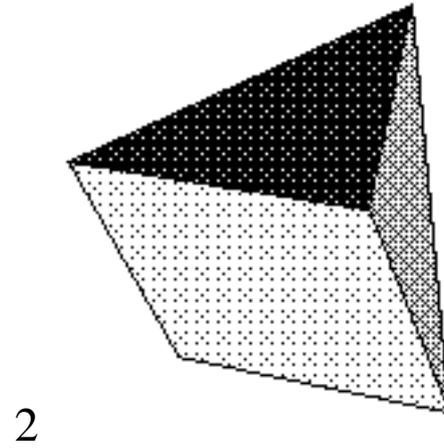
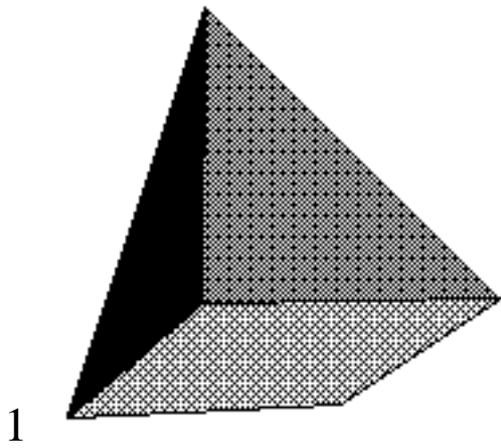
5



6

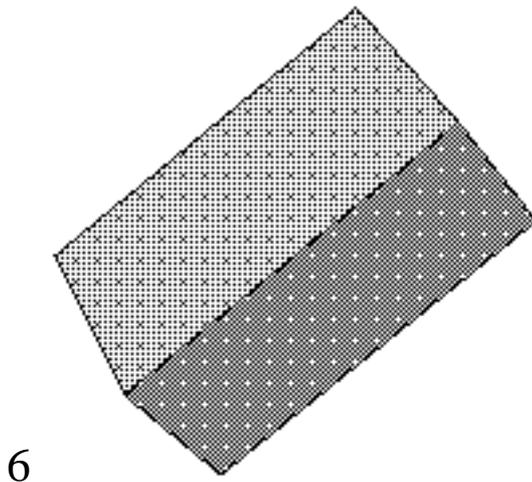
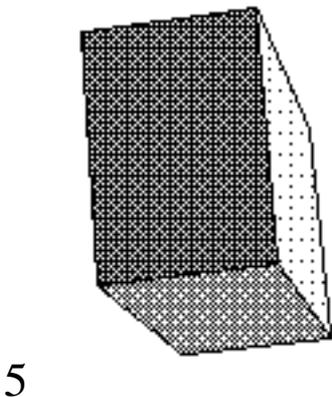
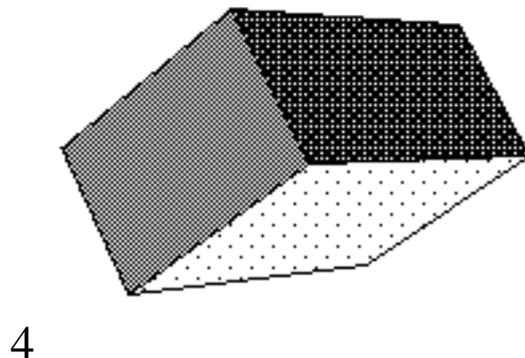
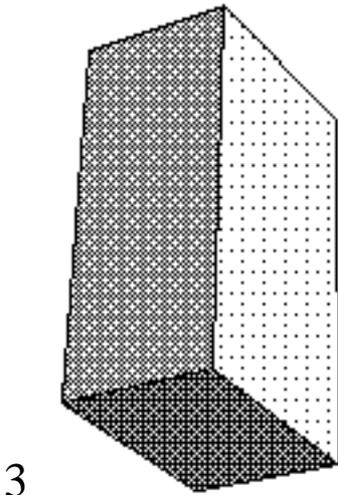
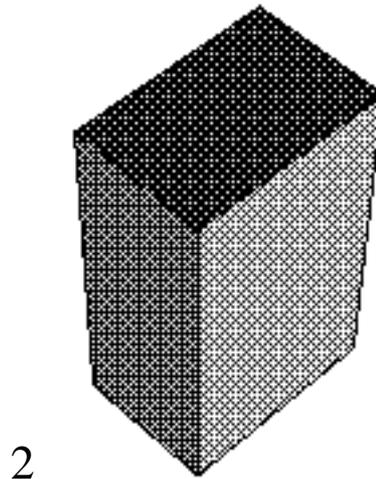
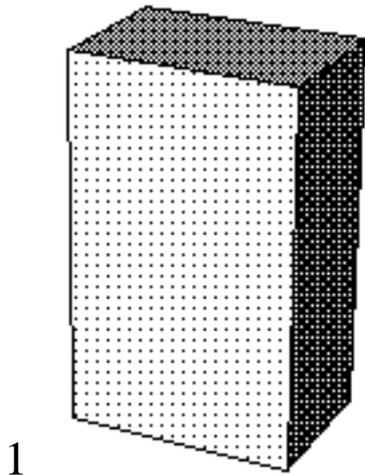
Actividad POS 7b (3/5)

Abre el programa "Pirámide sólida". Escribe SI o NO en las vistas de pirámides que hay debajo, según que correspondan o no a la pirámide que ves en el ordenador. Si quieres, puedes mover la pirámide de la pantalla.



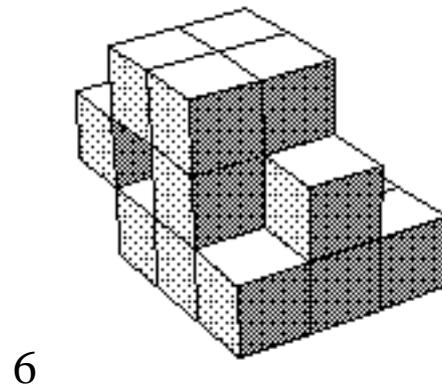
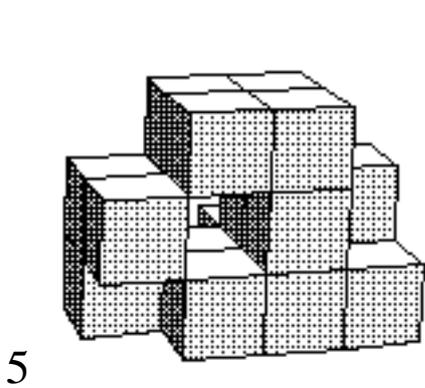
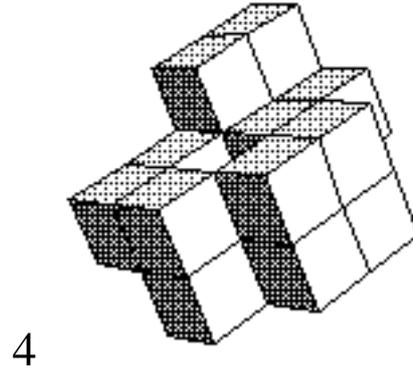
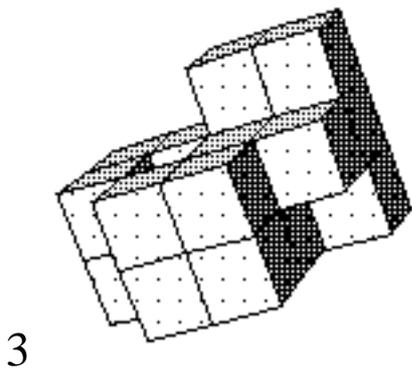
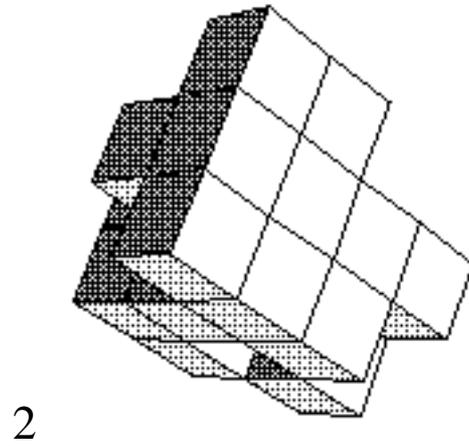
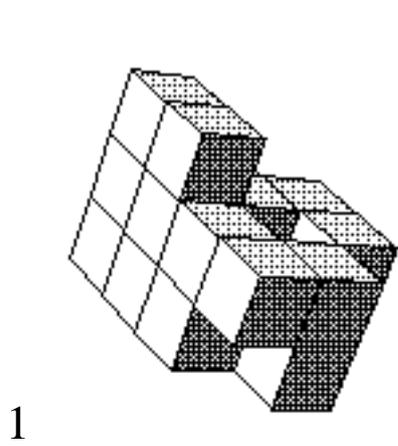
Actividad POS 7b (4/5)

Abre el programa "Prisma sólido". Escribe SI o NO en las vistas de prismas que hay debajo, según que correspondan o no al prisma que ves en el ordenador. Si quieres, puedes mover el prisma de la pantalla.



Actividad POS 7b (5/5)

Abre el programa "Módulo sólido". Escribe SI o NO en las vistas de cuerpos que hay debajo, según que correspondan o no al cuerpo que ves en el ordenador. Si quieres, puedes mover el cuerpo de la pantalla.



Actividad POS 8a

1) Abre el programa "Juegos de Cubos". Traza 3 líneas en el papel que unan los pares de caras opuestas del cubo del ordenador. Puedes mover el cubo de la pantalla, pero intenta encontrar la solución con la menor cantidad posible de movimientos.

2) Repite la actividad para otros dos cubos diferentes. Para pasar de un cubo al siguiente, pulsa los botones "Salir" y "Empezar".

Cuando hayas completado los tres cubos, pulsa los botones "Salir" y "Terminar".

Primer cubo.



Segundo cubo.

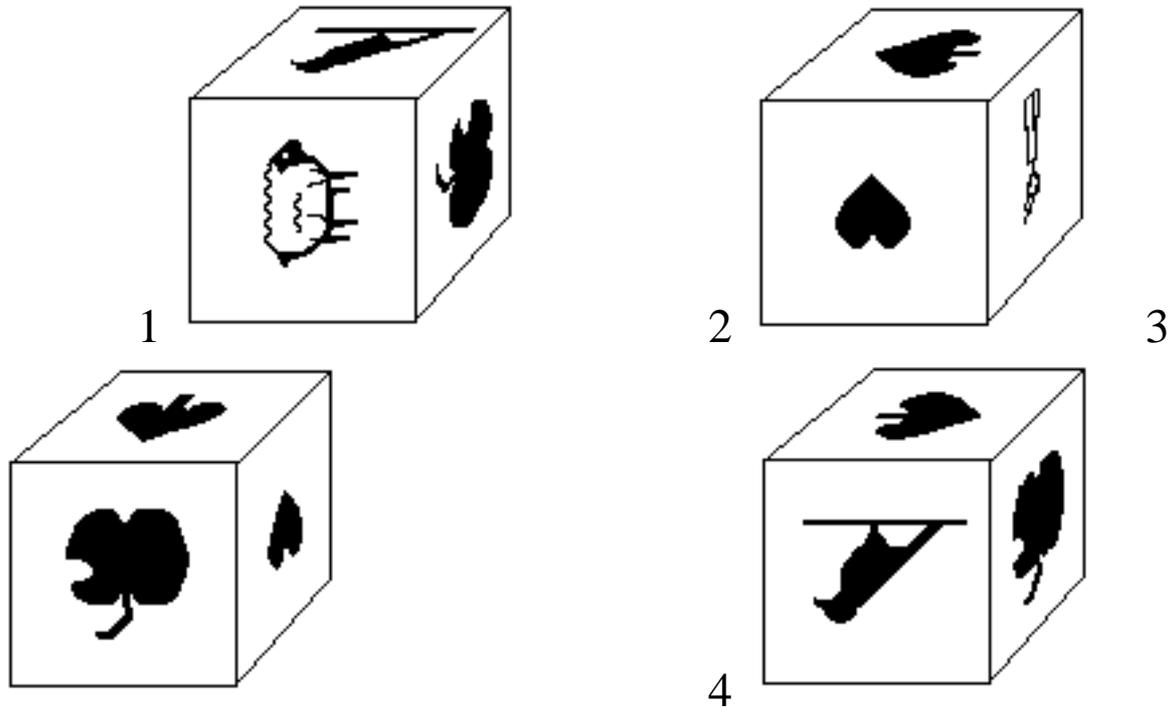


Tercer cubo.



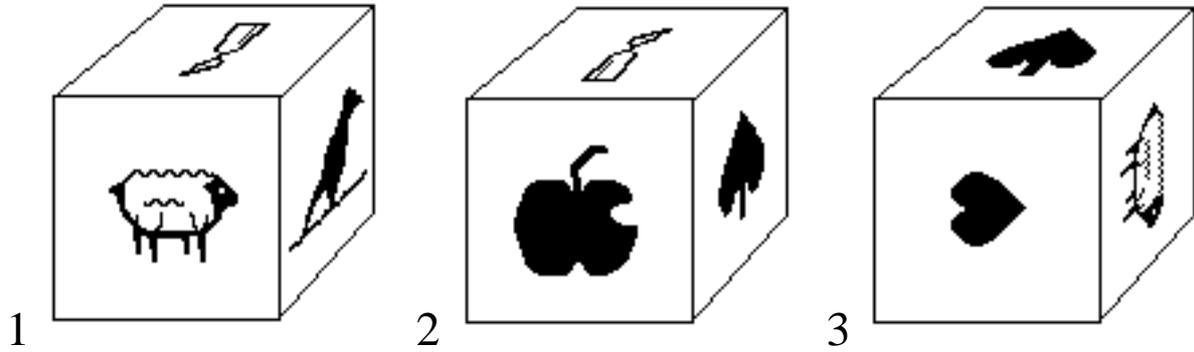
Actividad POS 8b (1/6)

A partir de las vistas del cubo que hay en la lámina, traza 3 líneas en el papel que unan los pares de caras opuestas de ese cubo.



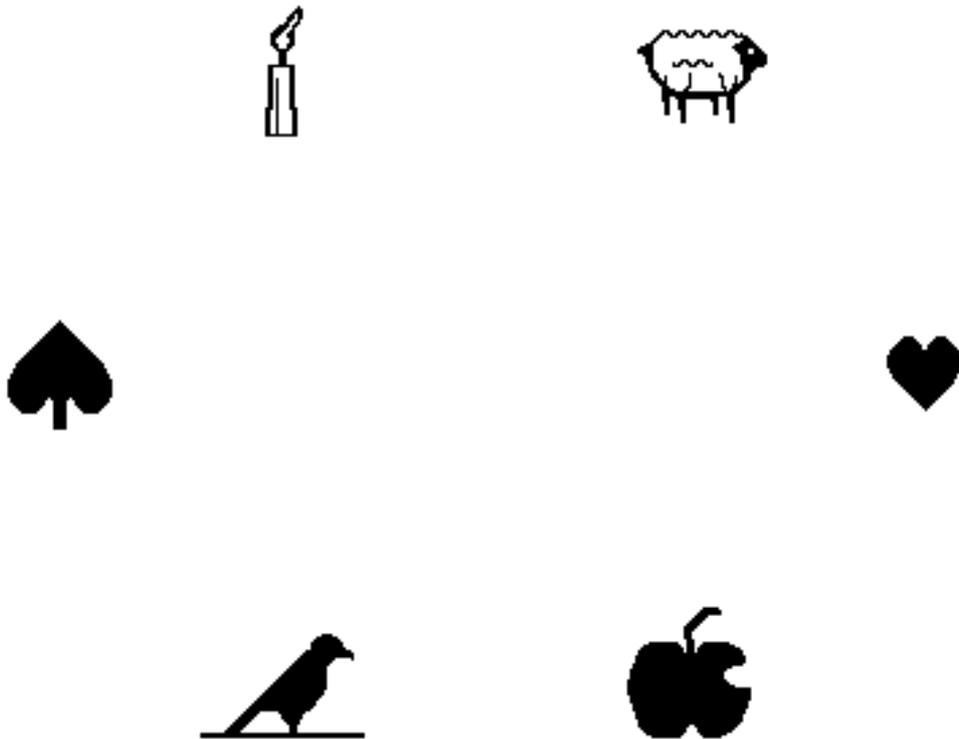
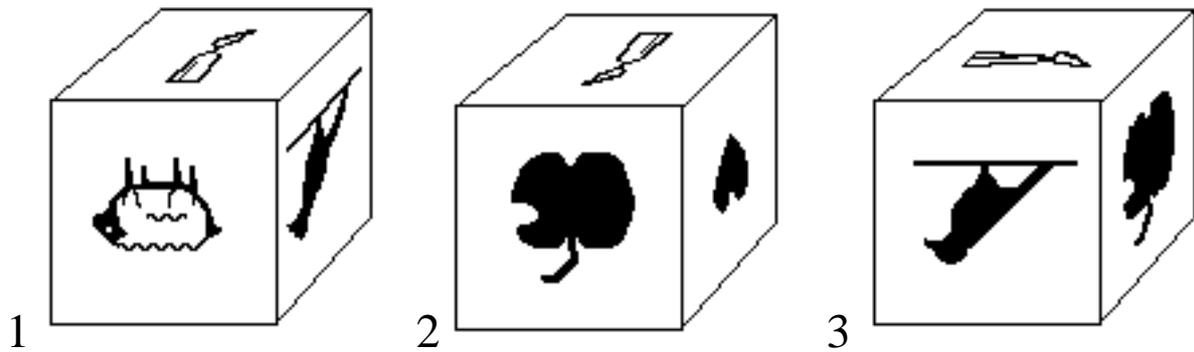
Actividad POS 8b (2/6)

A partir de las vistas del cubo que hay en la lámina, traza 3 líneas en el papel que unan los pares de caras opuestas de ese cubo.



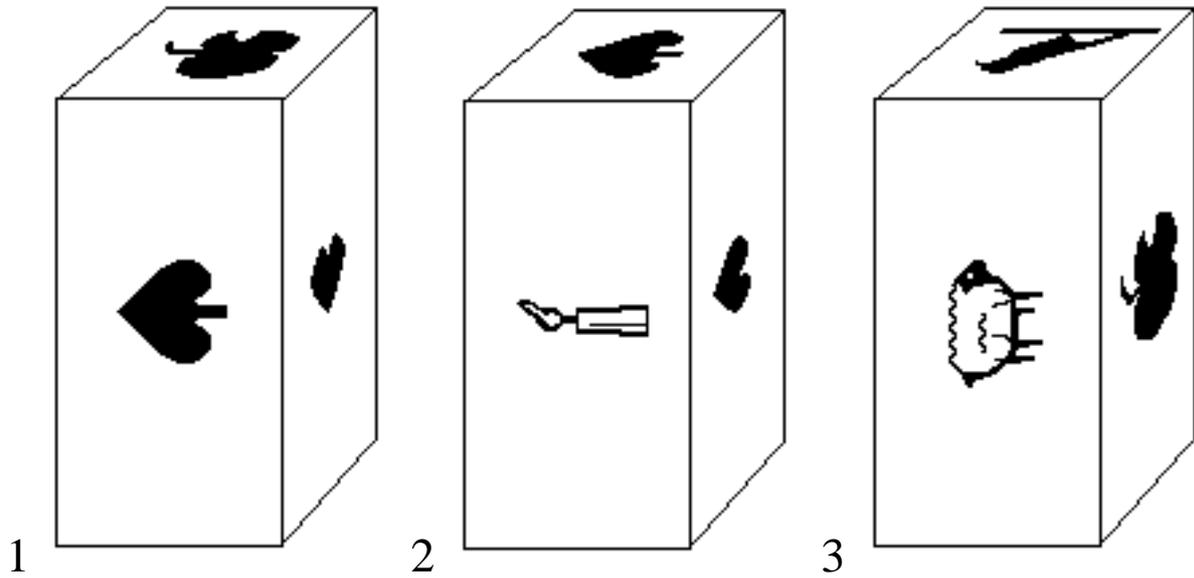
Actividad POS 8b (3/6)

A partir de las vistas del cubo que hay en la lámina, traza 3 líneas en el papel que unan los pares de caras opuestas de ese cubo.



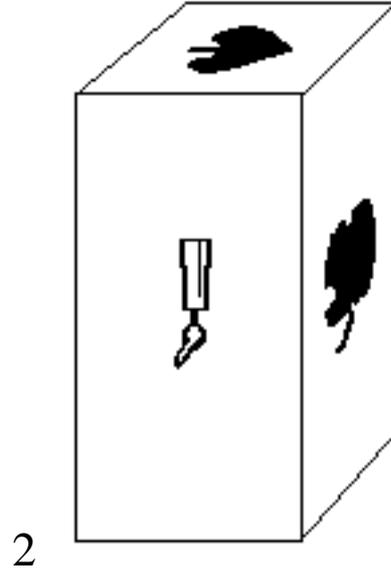
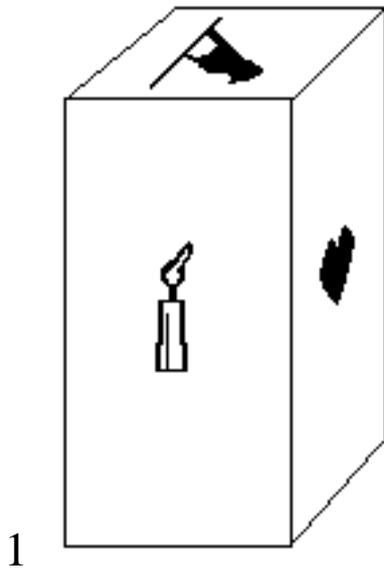
Actividad POS 8b (4/6)

A partir de las vistas del prisma que hay en la lámina, traza 3 líneas en el papel que unan los pares de caras opuestas de ese prisma.



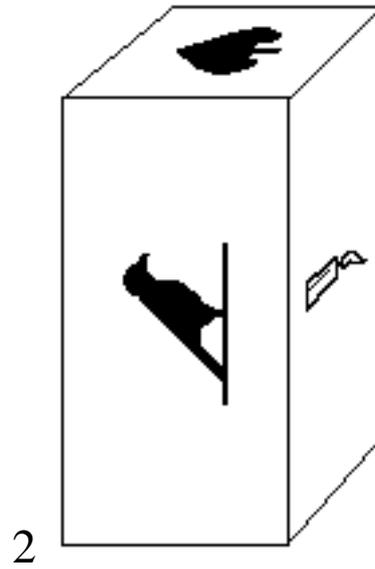
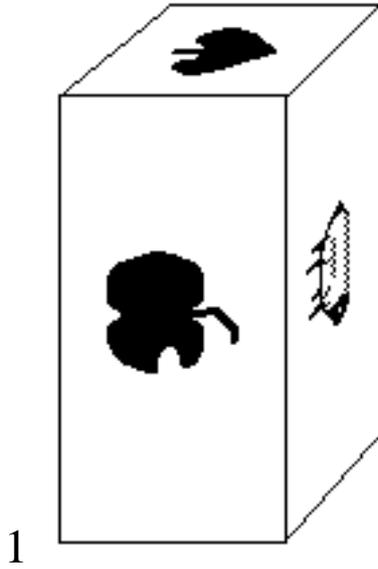
Actividad POS 8b (5/6)

A partir de las vistas del prisma que hay en la lámina, traza 3 líneas en el papel que unan los pares de caras opuestas de ese prisma.



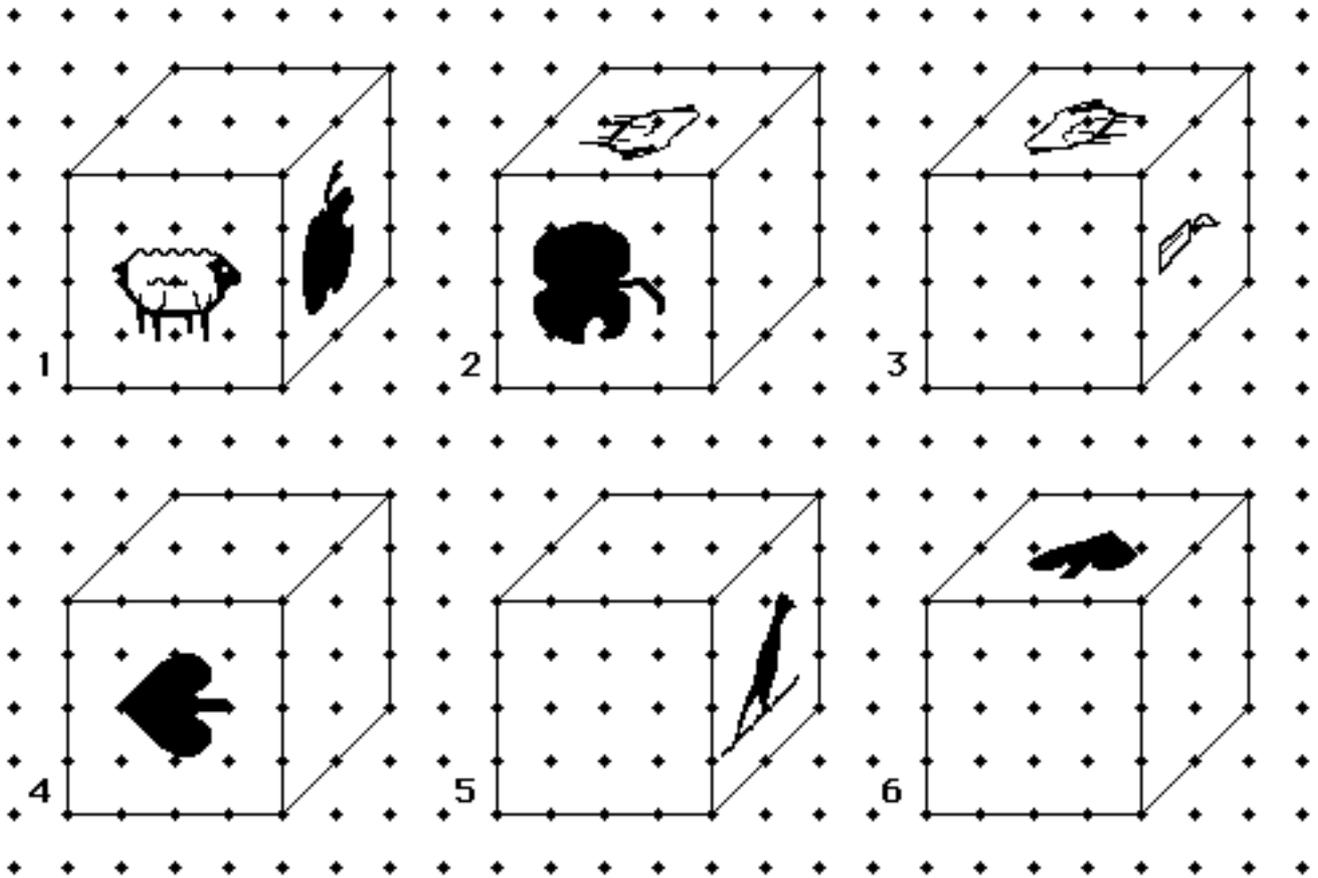
Actividad POS 8b (6/6)

A partir de las vistas del prisma que hay en la lámina, traza 3 líneas en el papel que unan los pares de caras opuestas de ese prisma.



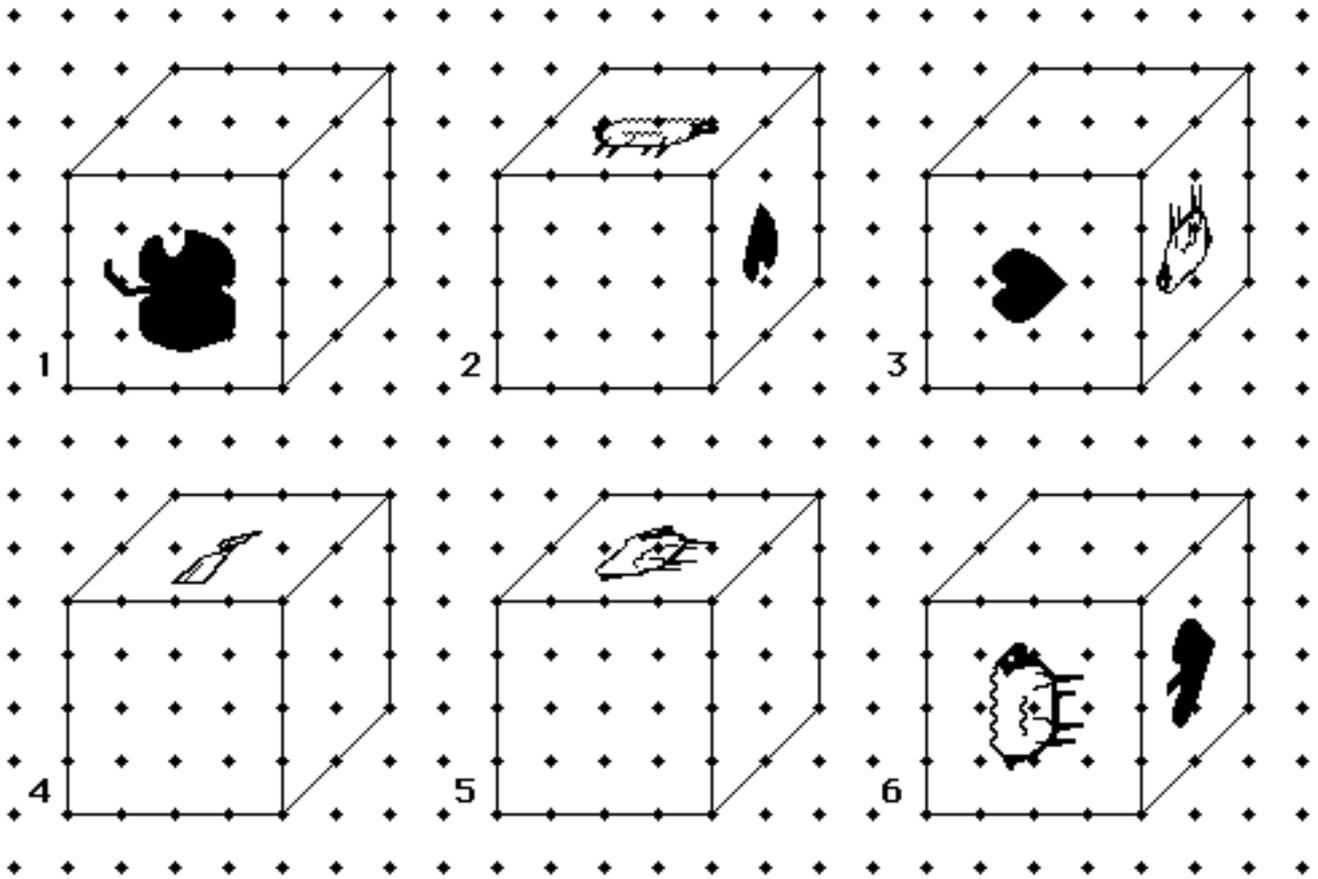
Actividad POS 9a (1/3)

En la lámina hay varias vistas del cubo que tienes en la mano. Intenta dibujar el contenido de las caras que hay en blanco en las vistas de la lámina, teniendo cuidado de dibujar cada figura en la posición adecuada. Si quieres, puedes mover el cubo.



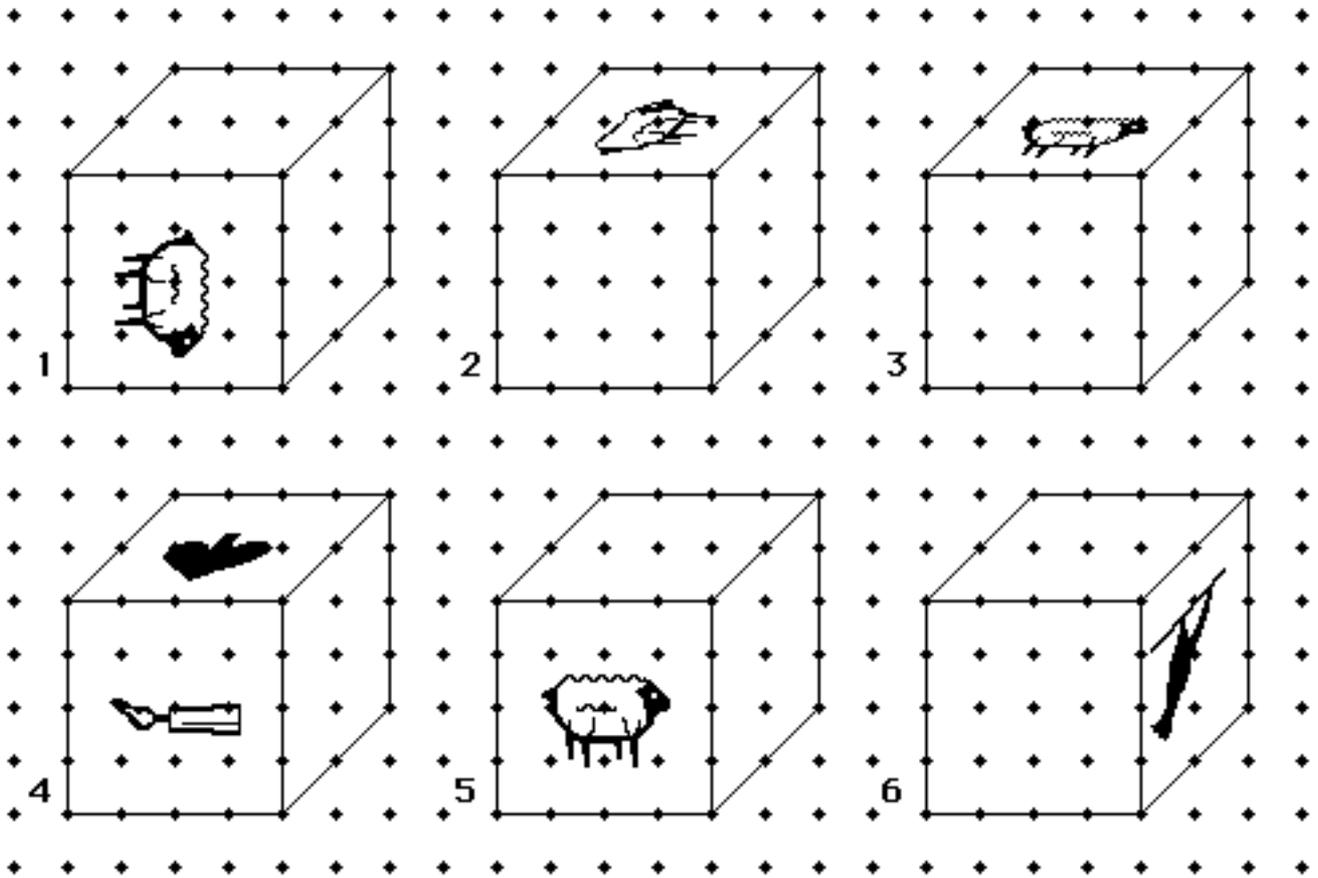
Actividad POS 9a (2/3)

En la lámina hay varias vistas del cubo que tienes en la mano. Intenta dibujar el contenido de las caras que hay en blanco en las vistas de la lámina, teniendo cuidado de dibujar cada figura en la posición adecuada. Si quieres, puedes mover el cubo.



Actividad POS 9a (3/3)

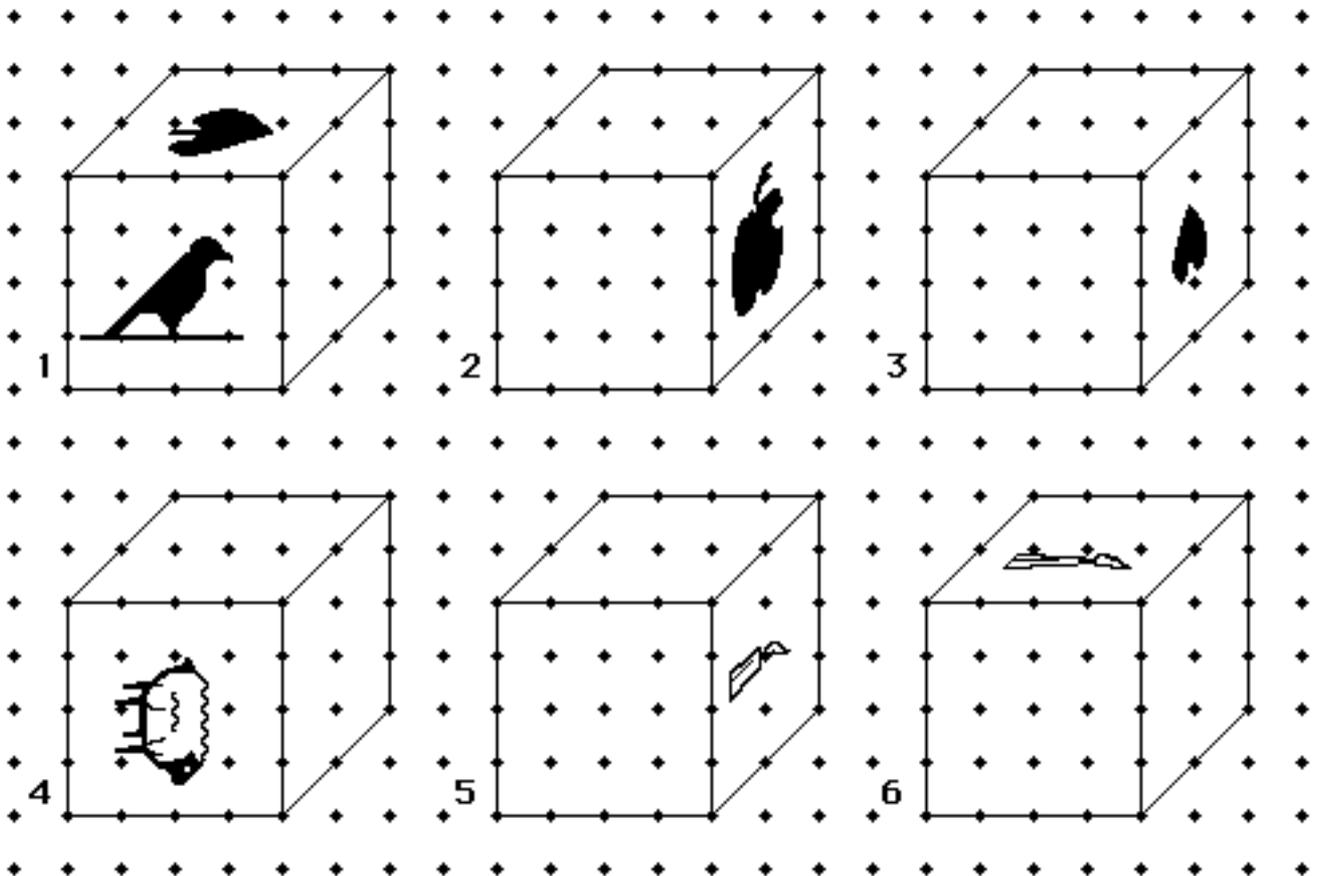
En la lámina hay varias vistas del cubo que tienes en la mano. Intenta dibujar el contenido de las caras que hay en blanco en las vistas de la lámina, teniendo cuidado de dibujar cada figura en la posición adecuada. Si quieres, puedes mover el cubo.



Actividad POS 9b (1/3)

Abre el programa "Vistas de Cubos" y elige el cubo **3.2**. En la lámina hay varias vistas del cubo del ordenador. Intenta dibujar el contenido de las caras en blanco de las vistas de la lámina, teniendo cuidado de dibujar cada figura en la posición adecuada. Puedes mover el cubo de la pantalla, pero intenta hacer la menos cantidad posible de movimientos.

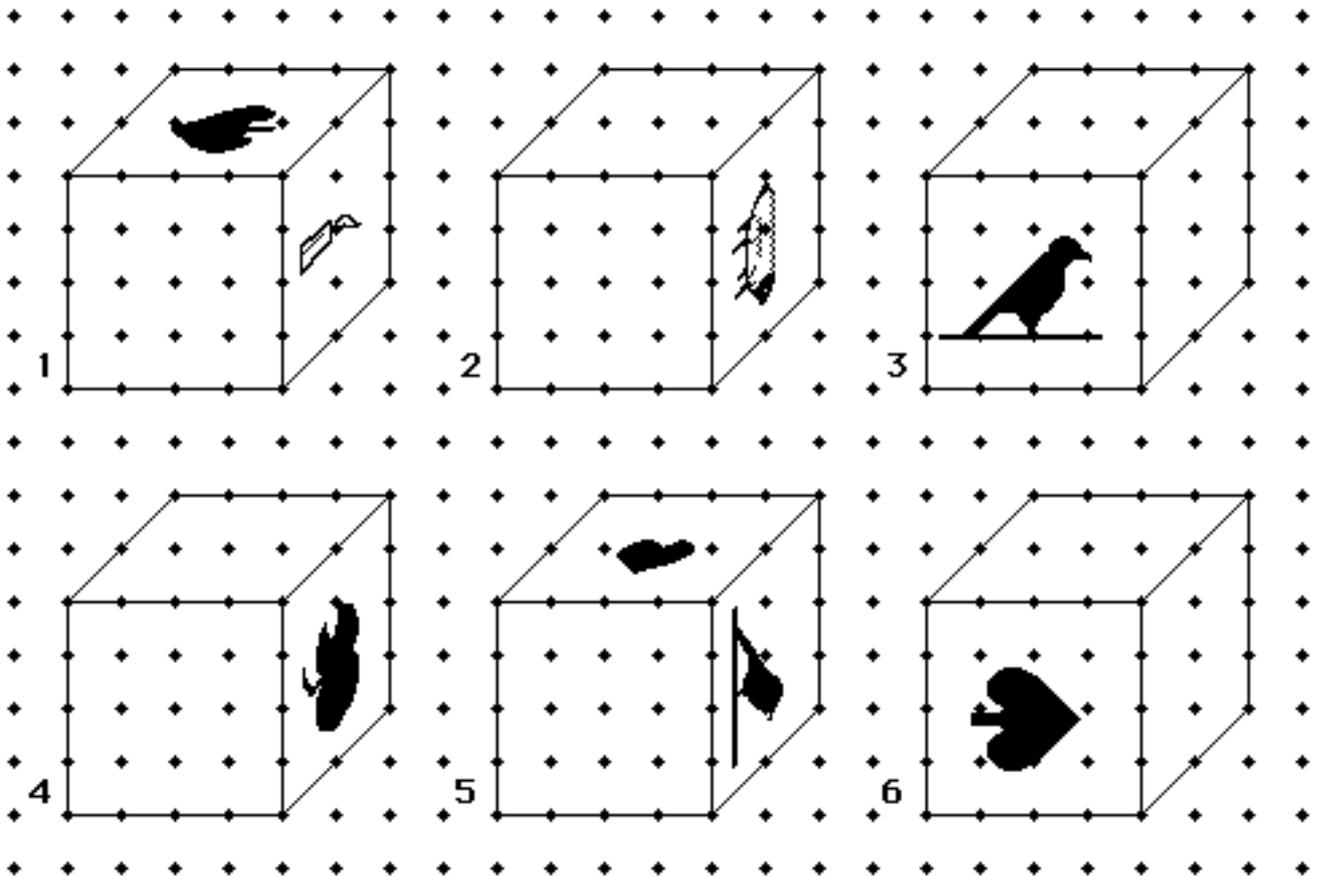
Cuando completes todas las vistas, puedes mover el cubo de la pantalla para ver si son correctas o no tus respuestas. Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Terminar" y pasa a la siguiente actividad.



Actividad POS 9b (2/3)

Elige el cubo **7.12** en el programa "Vistas de Cubos". En la lámina hay varias vistas del cubo del ordenador. Intenta dibujar el contenido de las caras en blanco de las vistas de la lámina, teniendo cuidado de dibujar cada figura en la posición adecuada. Puedes mover el cubo de la pantalla, pero intenta hacer la menos cantidad posible de movimientos.

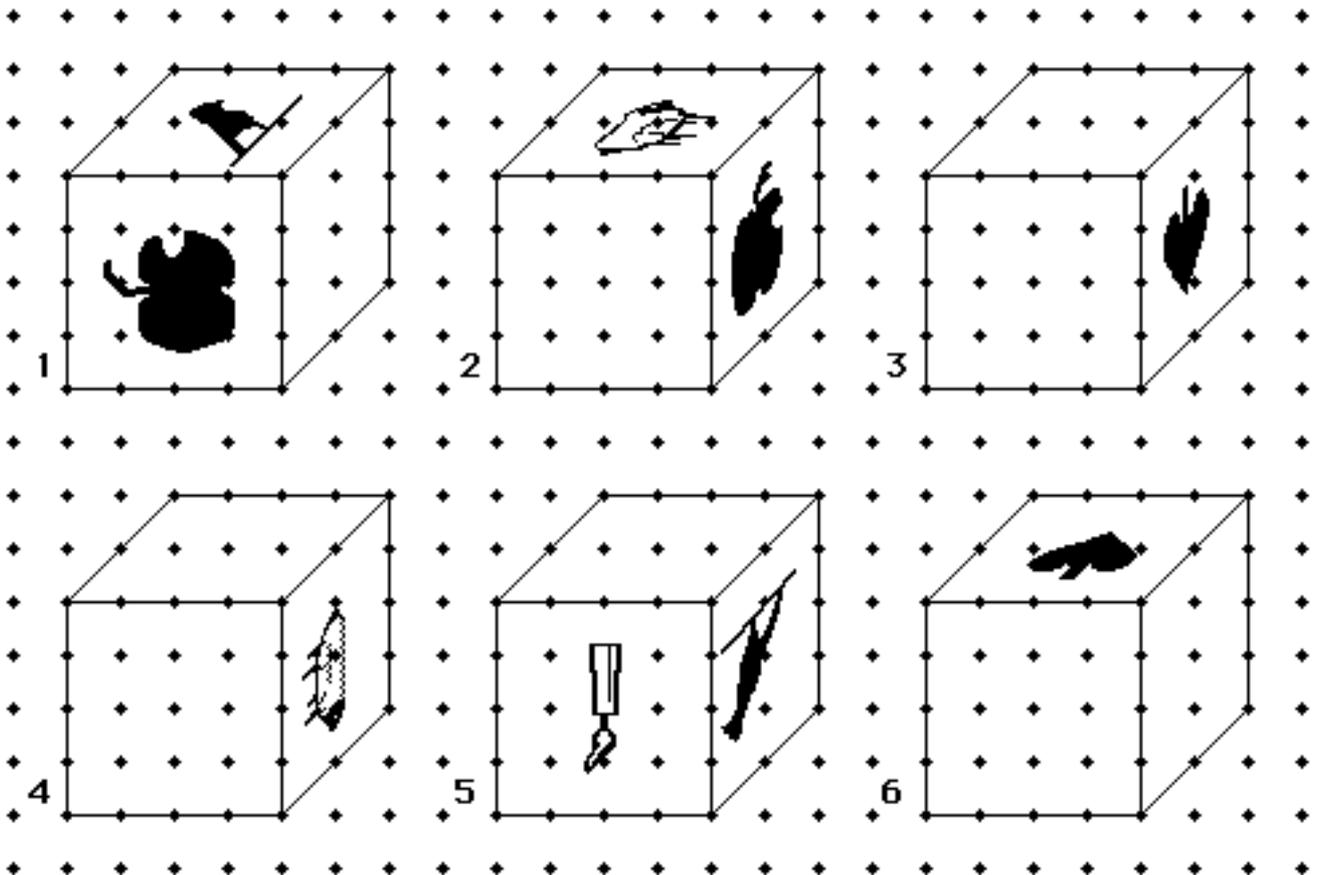
Cuando completes todas las vistas, puedes mover el cubo de la pantalla para ver si son correctas o no tus respuestas. Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Terminar" y pasa a la siguiente actividad.



Actividad POS 9b (3/3)

Elige el cubo **9.4** en el programa "Vistas de Cubos". En la lámina hay varias vistas del cubo del ordenador. Intenta dibujar el contenido de las caras en blanco de las vistas de la lámina, teniendo cuidado de dibujar cada figura en la posición adecuada. Puedes mover el cubo de la pantalla, pero intenta hacer la menos cantidad posible de movimientos.

Cuando completes todas las vistas, puedes mover el cubo de la pantalla para ver si son correctas o no tus respuestas. Cuando hayas terminado, pulsa los botones "Terminar" y "Salir".

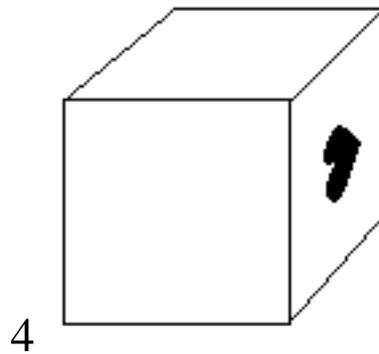
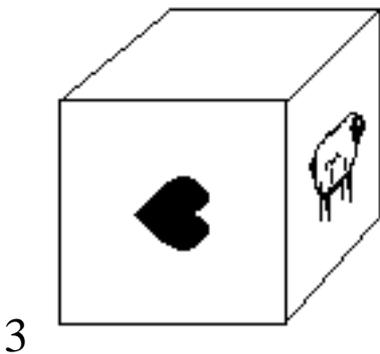
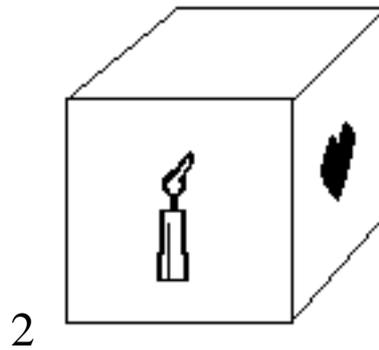
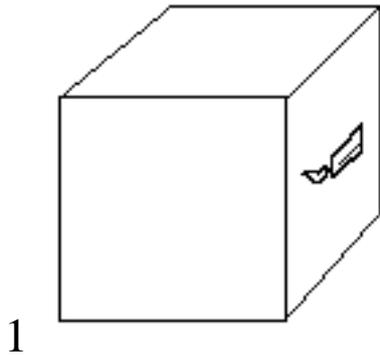


Actividad POS 10^(1/3)

Abre el programa "Fotos de Sólidos" y elige el sólido **1**.

En la lámina tienes varias vistas del cubo del ordenador. Intenta dibujar el contenido de las caras que hay en blanco en las vistas de la lámina, teniendo cuidado de dibujar cada figura en la posición adecuada.

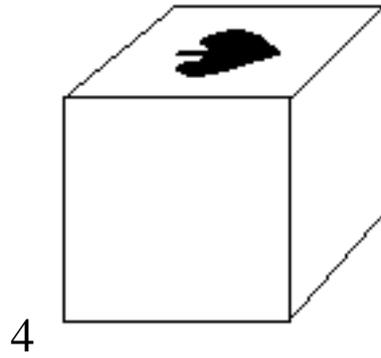
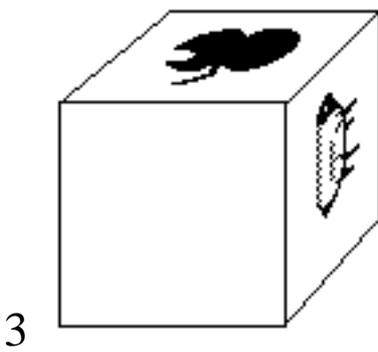
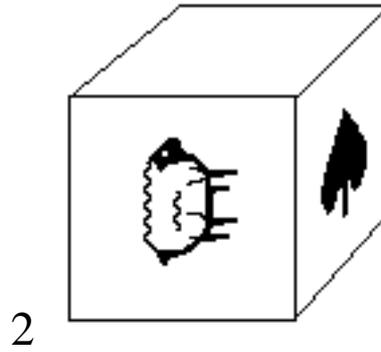
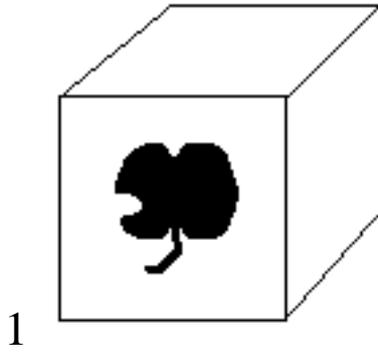
Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Siguiete" y pasa a la actividad siguiente.



Actividad POS 10 (2/3)

En la lámina tienes varias vistas del cubo del ordenador. Intenta dibujar el contenido de las caras que hay en blanco en las vistas de la lámina, teniendo cuidado de dibujar cada figura en la posición adecuada.

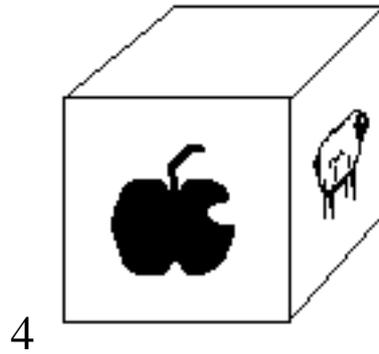
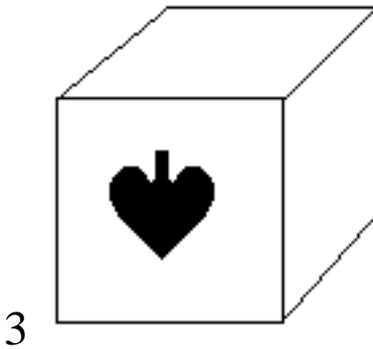
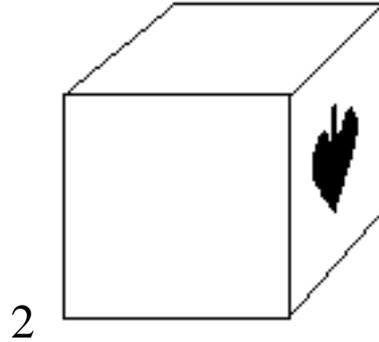
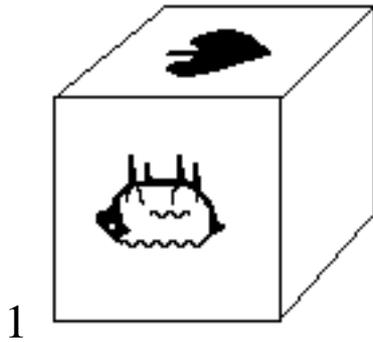
Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Siguiente" y pasa a la actividad siguiente.



Actividad POS 10 (3/3)

En la lámina tienes varias vistas del cubo del ordenador. Intenta dibujar el contenido de las caras que hay en blanco en las vistas de la lámina, teniendo cuidado de dibujar cada figura en la posición adecuada.

Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Salir".



Actividad POS 11a

Sin mover los cuerpos que tienes delante, intenta dibujar en hojas de papel blanco la vista en perspectiva de cada uno de ellos.

Actividad POS 11b

1) Abre el programa "Juegos de Cubos". Sin mover el cubo de la pantalla, intenta dibujar en una hoja de papel blanco su vista en perspectiva.

2) Repite la actividad para otros dos cubos diferentes, pulsando los botones "Salir" y "Empezar" cada vez.

Cuando hayas dibujado los tres cubos, pulsa los botones "Salir" y "Terminar".

Actividad POS 11c

Abre el programa "Fotos de Sólidos" y elige el sólido **2**. Intenta dibujar en una hoja de papel blanco su vista en perspectiva.

Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Siguiente" y repite la actividad (hay 5 cuerpos en total). Después del último cuerpo, pulsa los botones "Salir" y "Terminar".

Actividad POS 12a

Sin mover los cuerpos que tienes delante, intenta dibujar en hojas de papel punteado la vista en perspectiva de cada uno de ellos.

Actividad POS 12b

1) Abre el el programa "Juegos de Cubos". Sin mover el cubo de la pantalla, intenta dibujar en una hoja de papel punteado su vista en perspectiva.

2) Repite la actividad para otros dos cubos diferentes, pulsando los botones "Salir" y "Empezar" cada vez.

Cuando hayas dibujado los tres cubos, pulsa los botones "Salir" y "Terminar".

Actividad POS 12c

Abre el programa "Fotos de Sólidos" y elige el sólido **3**. Intenta dibujar en una hoja de papel punteado la vista en perspectiva del cuerpo de la pantalla.

Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Siguiete" y repite la actividad (hay 5 cuerpos en total). Después del último cuerpo, pulsa los botones "Salir" y "Terminar".

Actividad POS 13a

Sin mover los cuerpos que tienes delante, intenta dibujar en hojas de papel blanco la vista en perspectiva de cada uno de ellos.

Actividad POS 13b

Abre el programa "Fotos de Sólidos" y elige el sólido **5**. Intenta dibujar en una hoja de papel blanco la vista en perspectiva del cuerpo de la pantalla.

Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Siguiete" y repite la actividad (hay 5 cuerpos en total). Después del último cuerpo, pulsa los botones "Salir" y "Terminar".

Actividad POS 14a

Sin mover los cuerpos que tienes delante, intenta dibujar en hojas de papel punteado la vista en perspectiva de cada uno de ellos.

Actividad POS 14b

Abre el programa "Fotos de Sólidos" y elige el sólido **6**. Intenta dibujar en una hoja de papel blanco la vista en perspectiva del cuerpo de la pantalla.

Cuando hayas terminado, pulsa el botón "Siguiente" y repite la actividad (hay 5 cuerpos en total). Después del último cuerpo, pulsa los botones "Salir" y "Terminar".

Actividades de Representaciones de Sólidos

Actividad REP 1a (1/3)

Describe en una hoja de papel el cuerpo que tienes en la mano para que un compañero tuyo pueda saber, sin verlo, cómo es. Si quieres, puedes mover el cuerpo.

Intercambia con un compañero las descripciones que habéis hecho y trata de construir el sólido de tu compañero a partir de la descripción que él ha escrito.

Actividad REP 1a (2/3)

Describe en una hoja de papel el cuerpo que tienes en la mano para que un compañero tuyo pueda saber, sin verlo, cómo es. Si quieres, puedes mover el cuerpo.

Intercambia con un compañero las descripciones que habéis hecho y trata de construir el sólido de tu compañero a partir de la descripción que él ha escrito.

Actividad REP 1a (3/3)

Describe en una hoja de papel el cuerpo que tienes en la mano para que un compañero tuyo pueda saber, sin verlo, cómo es. Si quieres, puedes mover el cuerpo.

Intercambia con un compañero las descripciones que habéis hecho y trata de construir el sólido de tu compañero a partir de la descripción que él ha escrito.

Actividad REP 1b (1/3)

Un compañero va a describir un cuerpo que tiene en la mano pero que tú no puedes ver. Trabajando con tus otros compañeros, intenta construir el cuerpo de tu compañero de acuerdo con la descripción que haga.

Actividad REP 1b (2/3)

Un compañero va a describir un cuerpo que tiene en la mano pero que tú no puedes ver. Trabajando con tus otros compañeros, intenta construir el cuerpo de tu compañero de acuerdo con la descripción que haga.

Actividad REP 1b (3/3)

Un compañero va a describir un cuerpo que tiene en la mano pero que tú no puedes ver. Trabajando con tus otros compañeros, intenta construir el cuerpo de tu compañero de acuerdo con la descripción que haga.

Actividad REP 1c (1/3)

Un compañero va a describir un cuerpo que tiene en la mano pero que tú no puedes ver. Trabajando con tus otros compañeros, intenta construir el cuerpo de tu compañero de acuerdo con la descripción que haga.

Actividad REP 1c (2/3)

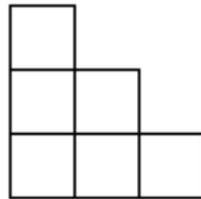
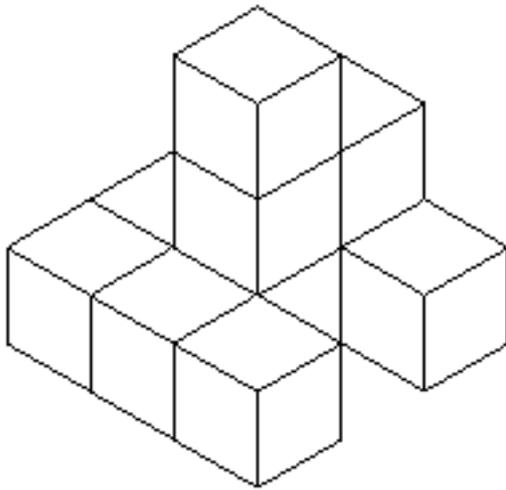
Un compañero va a describir un cuerpo que tiene en la mano pero que tú no puedes ver. Trabajando con tus otros compañeros, intenta construir el cuerpo de tu compañero de acuerdo con la descripción que haga.

Actividad REP 1c (3/3)

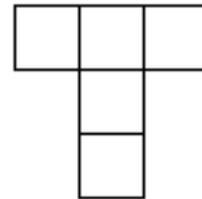
Un compañero va a describir un cuerpo que tiene en la mano pero que tú no puedes ver. Trabajando con tus otros compañeros, intenta construir el cuerpo de tu compañero de acuerdo con la descripción que haga.

Actividad REP 2a (1/3)

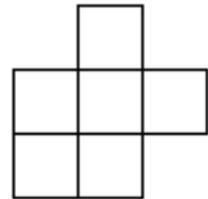
Escribe SI o NO en las vistas de módulos de cubos que hay debajo según que correspondan o no al que tienes en la mano. Si quieres puedes mover el módulo.



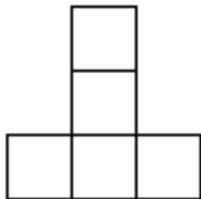
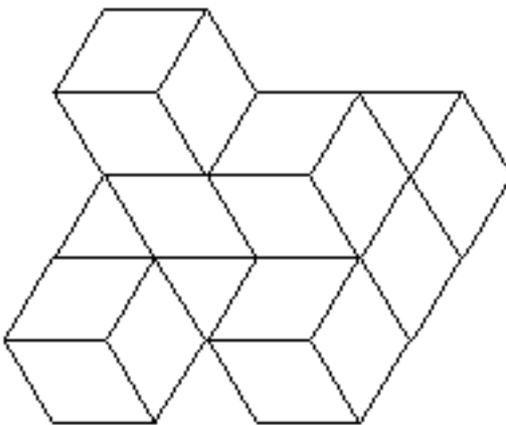
Frente



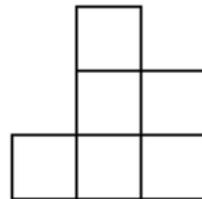
Derecha



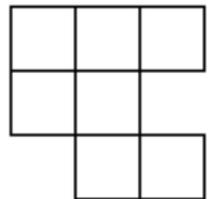
Arriba



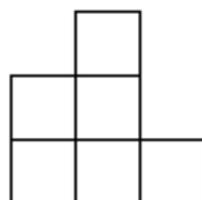
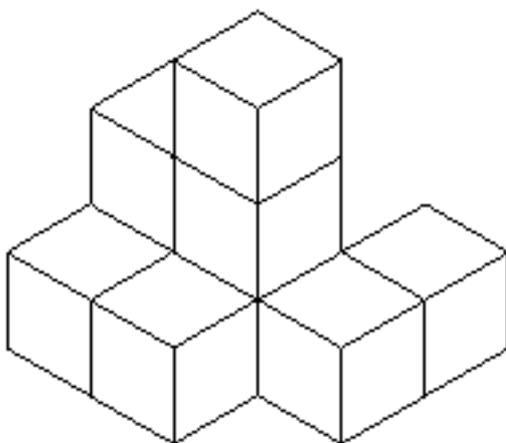
Frente



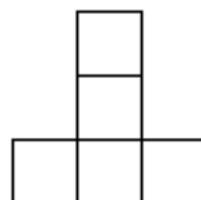
Derecha



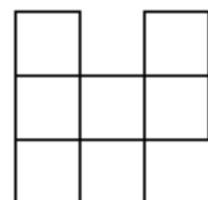
Arriba



Frente



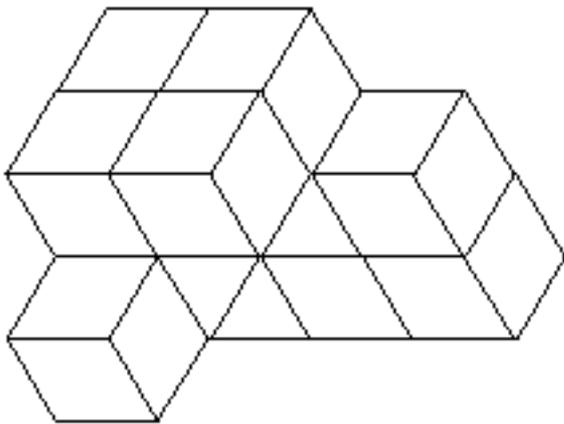
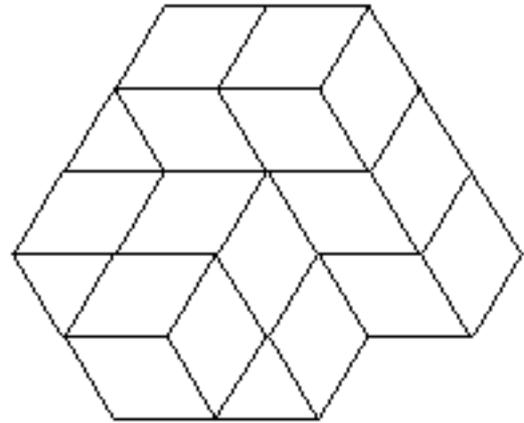
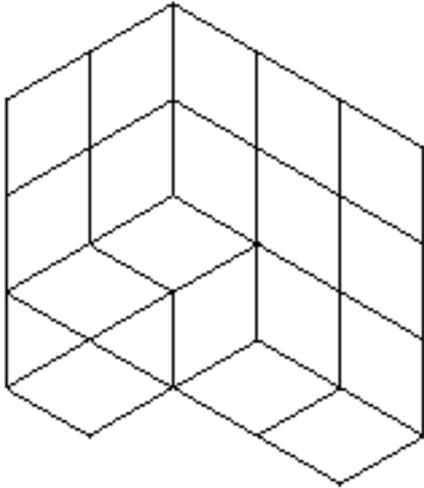
Derecha



Arriba

Actividad REP 2a (2/3)

Escribe SI o NO en las vistas de módulos de cubos que hay debajo según que correspondan o no al que tienes en la mano. Si quieres puedes mover el módulo.



	1	
2	2	
3	3	2

Frente

	1	
	2	2
3	3	2

Derecha

	1	1
2	3	1
2	2	1

Frente

		2
1	2	3
	2	3

Derecha

1	1	
2	3	1
1	1	1

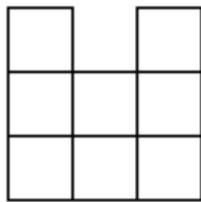
Frente

		2
1	2	3
		3

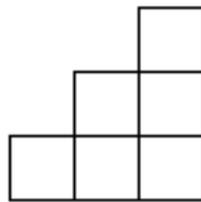
Derecha

Actividad REP 2a (3/3)

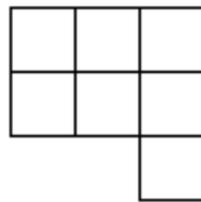
Escribe SI o NO en las vistas de módulos de cubos que hay debajo según que correspondan o no al que tienes en la mano. Si quieres puedes mover el módulo.



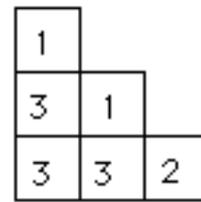
Frente



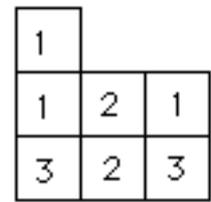
Derecha



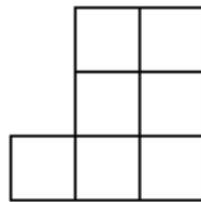
Arriba



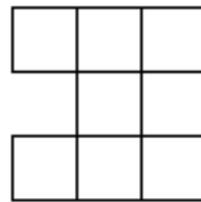
Frente



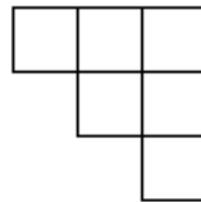
Derecha



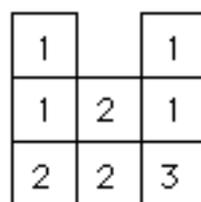
Frente



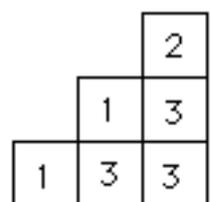
Derecha



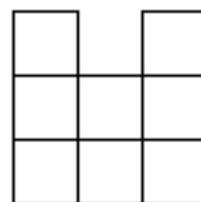
Arriba



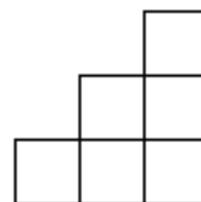
Frente



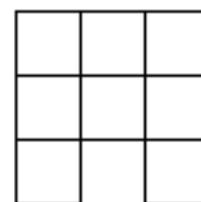
Derecha



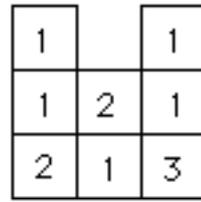
Frente



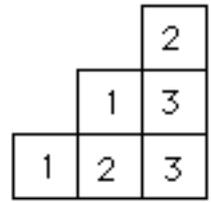
Derecha



Arriba



Frente

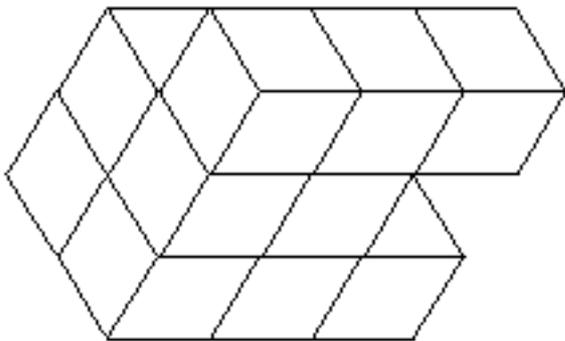
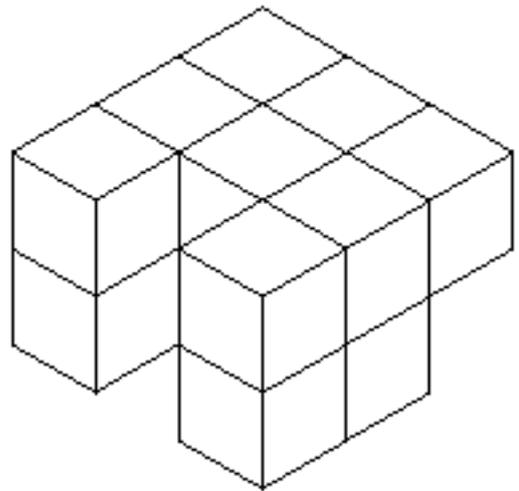
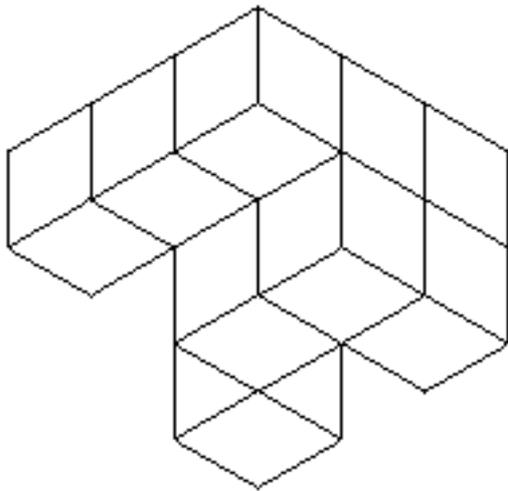


Derecha

Actividad REP 2b (1/3)

Abre el programa "Módulos Sólidos", elige el módulo 1 y activa "Sombra Ort.".

Escribe SI o NO en las vistas de módulos de cubos que hay debajo según que correspondan o no al módulo que ves en la pantalla del ordenador. Si quieres puedes mover el módulo de la pantalla.



3	
2	2
3	2

Frente

1	1	1
	2	2
2	1	2

Derecha

2	1	1
3	3	2

Frente

2	2	
3	2	3

Izquierda

	1	
	2	2
3	2	3

Frente

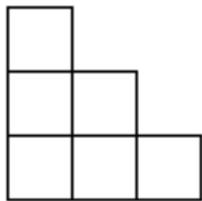
	1	
1	1	2
2	3	3

Derecha

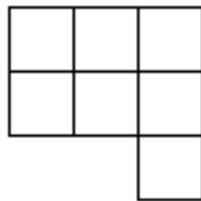
Actividad REP 2b (2/3)

Abre el programa "Módulos Sólidos", elige el módulo 2 y activa "Sombra Ort."

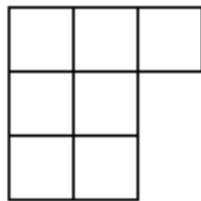
Escribe SI o NO en las vistas de módulos de cubos que hay debajo según que correspondan o no al módulo que ves en la pantalla del ordenador. Si quieres puedes mover el módulo de la pantalla.



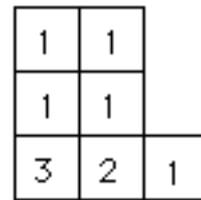
Frente



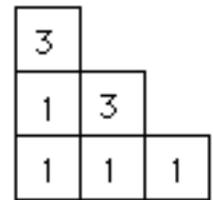
Derecha



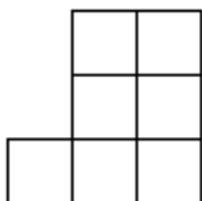
Arriba



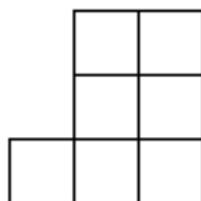
Frente



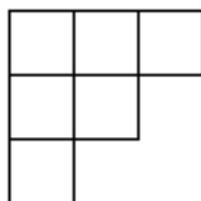
Arriba



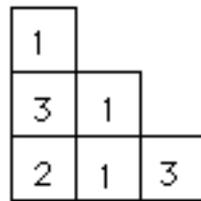
Frente



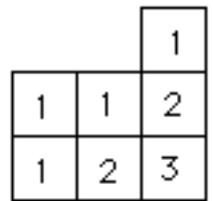
Derecha



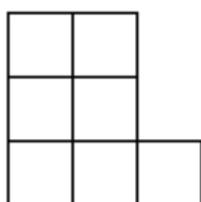
Arriba



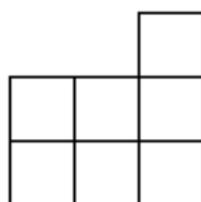
Frente



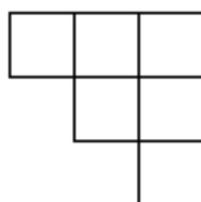
Derecha



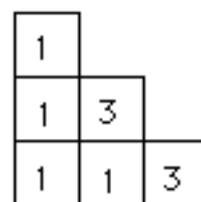
Frente



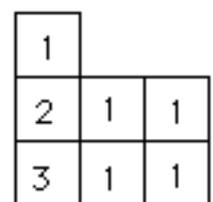
Derecha



Arriba



Frente

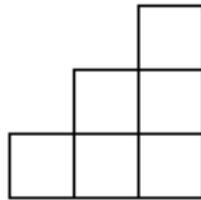
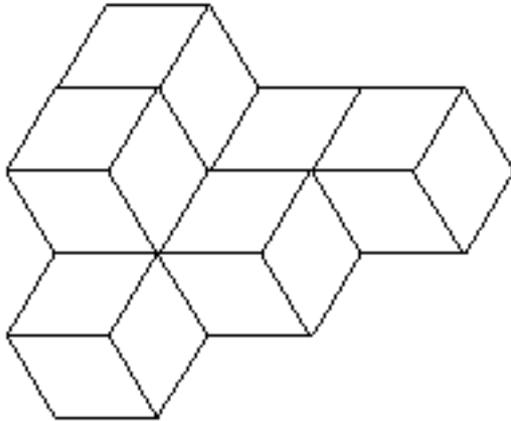


Derecha

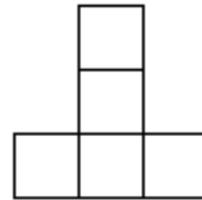
Actividad REP 2b (3/3)

Abre el programa "Módulos Sólidos", elige el módulo 3 y activa "Sombra Ort."

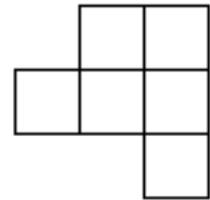
Escribe SI o NO en las vistas de módulos de cubos que hay debajo según que correspondan o no al módulo que ves en la pantalla del ordenador. Si quieres puedes mover el módulo de la pantalla.



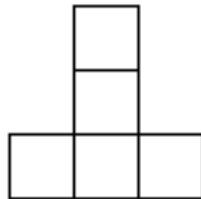
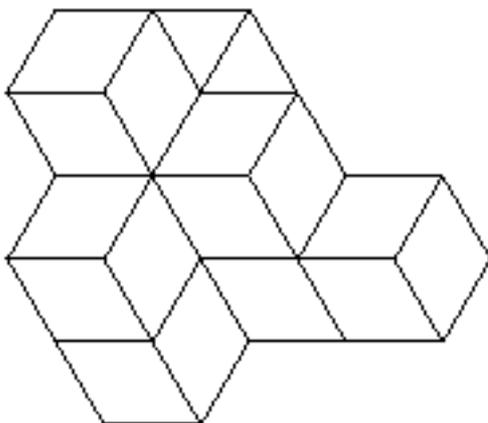
Frente



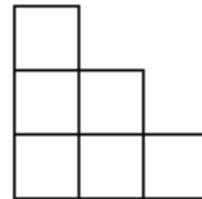
Derecha



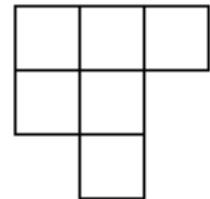
Arriba



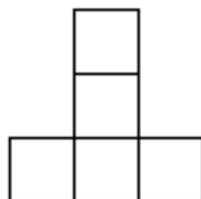
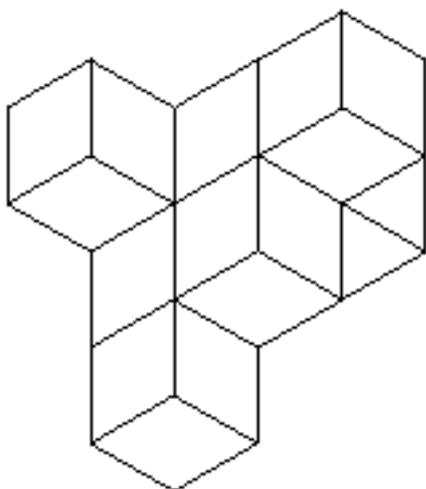
Frente



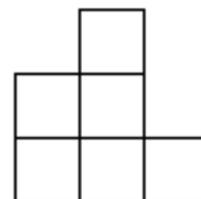
Izquierda



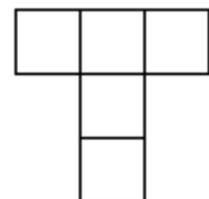
Arriba



Frente



Derecha



Arriba

Actividad REP 3a (1/6)

Abre el programa "Vistas de Módulos" y elige el módulo **1**.

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas isométricas que hay en el ordenador. Si quieres puedes mover el módulo del ordenador.

Actividad REP 3a (2/6)

Abre el programa "Vistas de Módulos" y elige el módulo **2**.

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas isométricas que hay en el ordenador. Si quieres puedes mover el módulo del ordenador.

Actividad REP 3a (3/6)

Abre el programa "Vistas de Módulos" y elige el módulo **3**.

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas laterales que hay en el ordenador. Si quieres puedes mover el módulo del ordenador.

Actividad REP 3a (4/6)

Abre el programa "Vistas de Módulos" y elige el módulo **4**.

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas laterales que hay en el ordenador. Si quieres puedes mover el módulo del ordenador.

Actividad REP 3a (5/6)

Abre el programa "Vistas de Módulos" y elige el módulo **5**.

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas numéricas que hay en el ordenador. Si quieres puedes mover el módulo del ordenador.

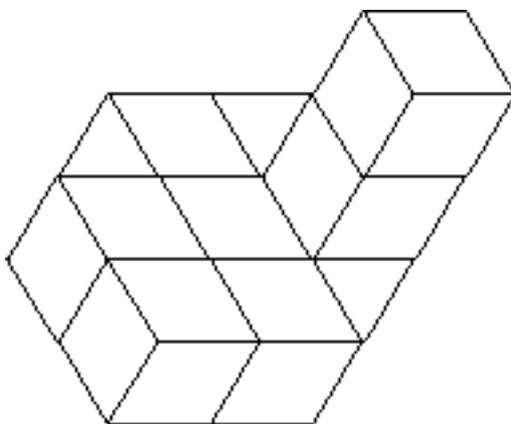
Actividad REP 3a (6/6)

Abre el programa "Vistas de Módulos" y elige el módulo **6**.

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas numéricas que hay en el ordenador. Si quieres puedes mover el módulo del ordenador.

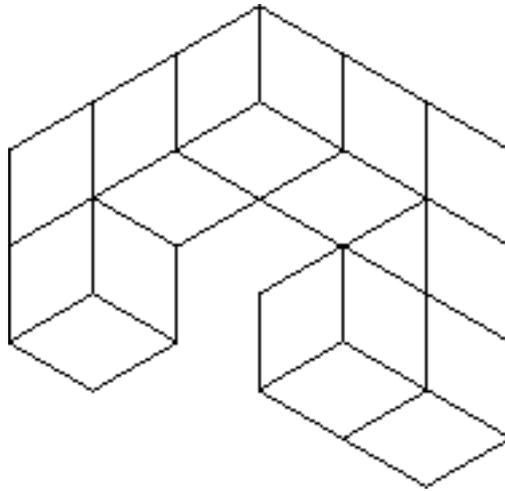
Actividad REP 3b (1/6)

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a la vista isométrica que hay debajo.



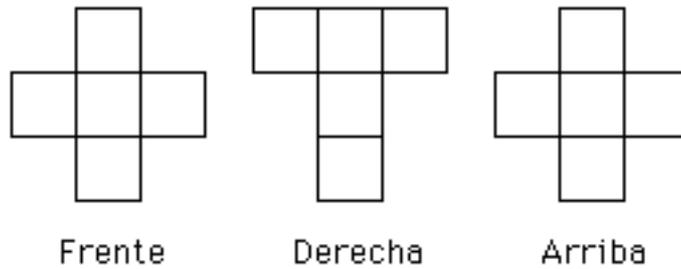
Actividad REP 3b (2/6)

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a la vista isométrica que hay debajo.



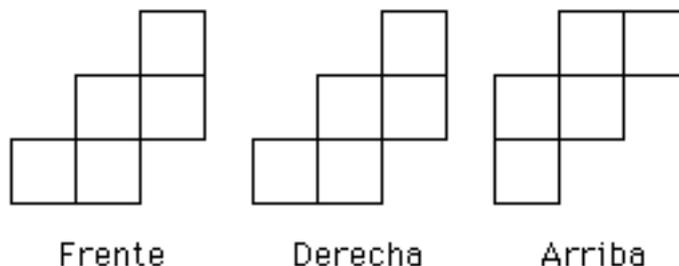
Actividad REP 3b (3/6)

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas laterales que hay debajo.



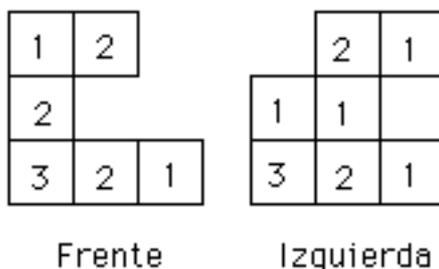
Actividad REP 3b (4/6)

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas laterales que hay debajo.



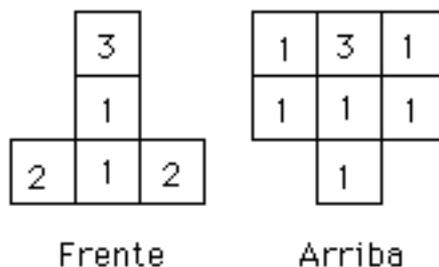
Actividad REP 3b (5/6)

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas numéricas que hay debajo.



Actividad REP 3b (6/6)

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas numéricas que hay debajo.



Actividad REP 4a (1/2)

Trata de dibujar la vista isométrica, las vistas laterales y las vistas numéricas del módulo de cubos que tienes delante. Si quieres puedes mover el módulo.

Actividad REP 4a (2/2)

Trata de dibujar la vista isométrica, las vistas laterales y las vistas numéricas del módulo de cubos que tienes delante. Si quieres puedes mover el módulo.

Actividad REP 4b (1/2)

Sin mover el módulo de cubos que tienes en la mesa, trata de dibujar su vista isométrica, sus vistas laterales y sus vistas numéricas.

Actividad REP 4b (2/2)

Sin mover el módulo de cubos que tienes en la mesa, trata de dibujar su vista isométrica, sus vistas laterales y sus vistas numéricas.

Actividad REP 5a (1/2)

Abre el programa "Módulos Sólidos", elige el módulo **4** y activa "Sombra Persp."

Trata de dibujar la vista isométrica, las vistas laterales y las vistas numéricas del módulo de cubos que tienes en el ordenador. Si quieres puedes mover el módulo de la pantalla.

Actividad REP 5a (2/2)

Abre el programa "Módulos Sólidos", elige el módulo **5** y activa "Sombra Persp."

Trata de dibujar la vista isométrica, las vistas laterales y las vistas numéricas del módulo de cubos que tienes delante. Si quieres puedes mover el módulo de la pantalla.

Actividad REP 5b (1/2)

Abre el programa "Fotos de Sólidos" y elige el sólido **7**.

Trata de dibujar la vista isométrica, las vistas laterales y las vistas numéricas del módulo que tienes en la pantalla. No puedes mover el módulo de la pantalla.

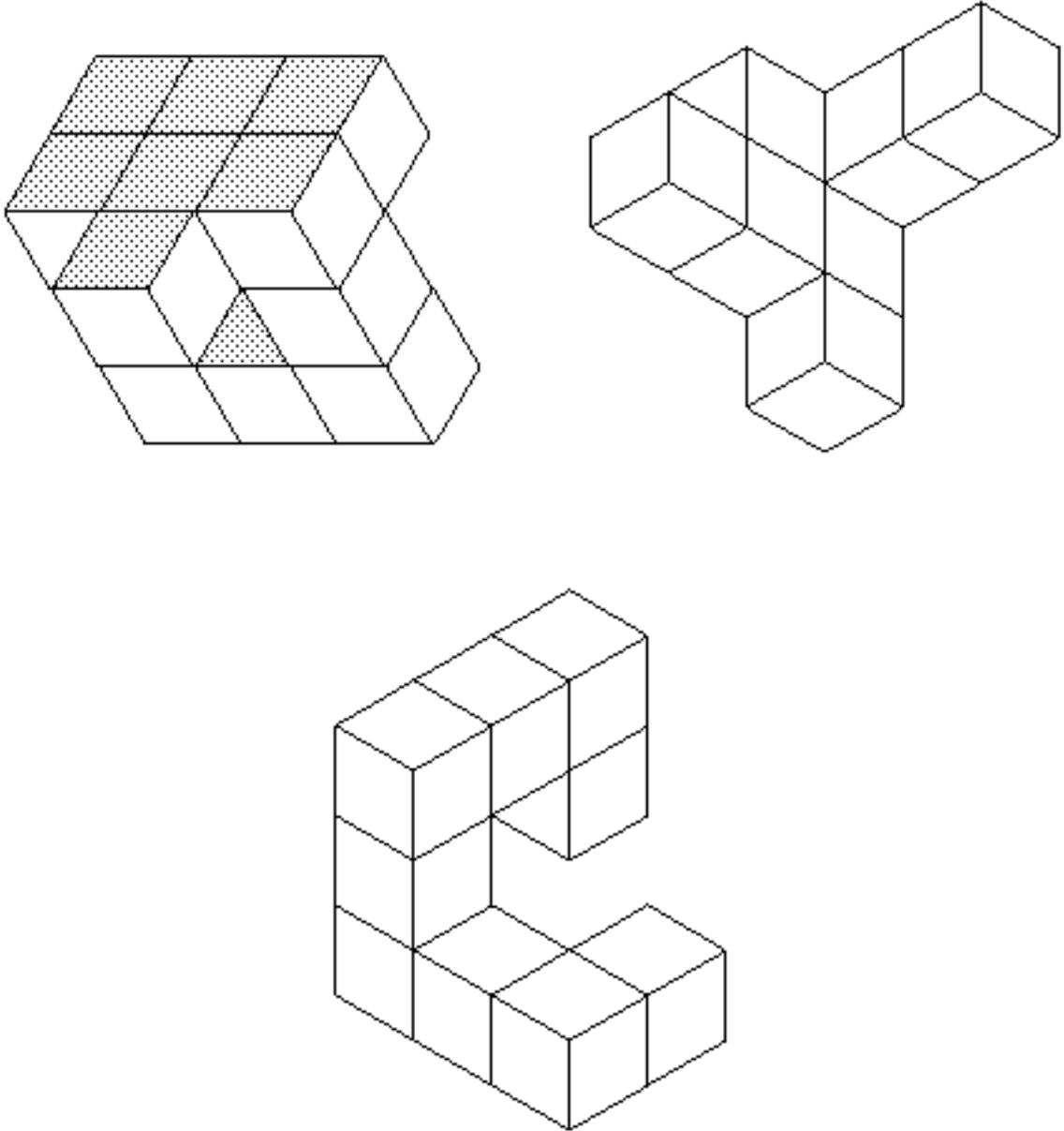
Actividad REP 5b (2/2)

Abre el programa "Fotos de Sólidos" y elige el sólido **8**.

Trata de dibujar la vista isométrica, las vistas laterales y las vistas numéricas del módulo que tienes en la pantalla. No puedes mover el módulo de la pantalla.

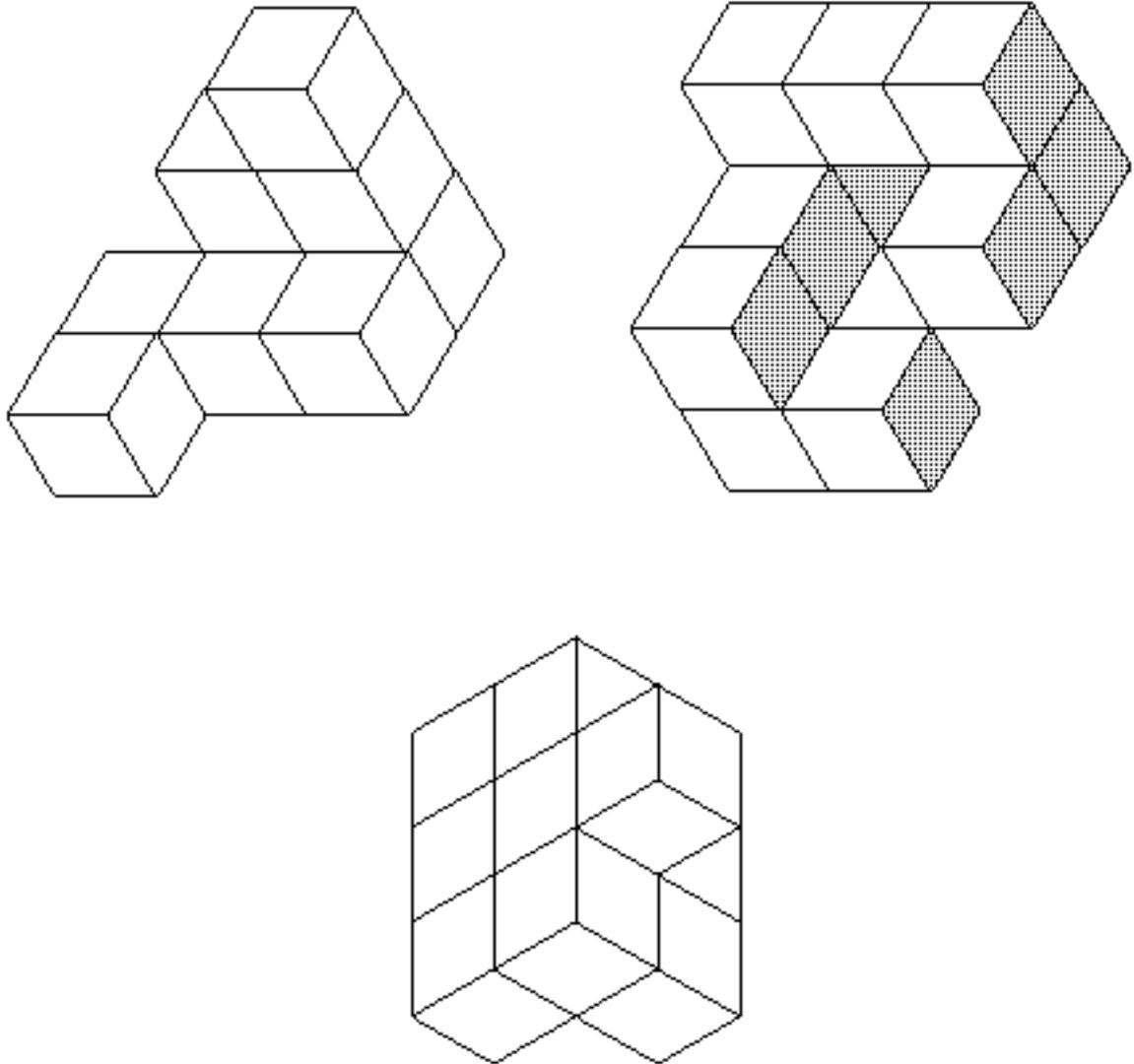
Actividad REP 6 (1/6)

A continuación tienes las representaciones isométricas de tres módulos de cubos diferentes. Intenta dibujar esos mismos módulos por medio de sus vistas laterales (frente, superior y derecha).



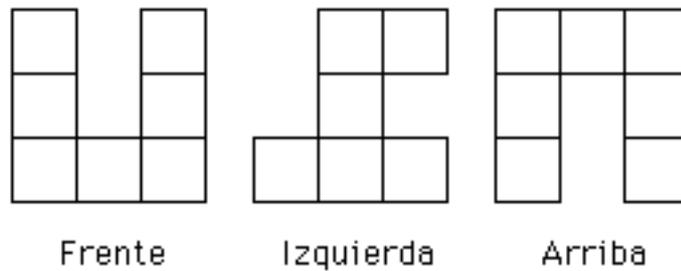
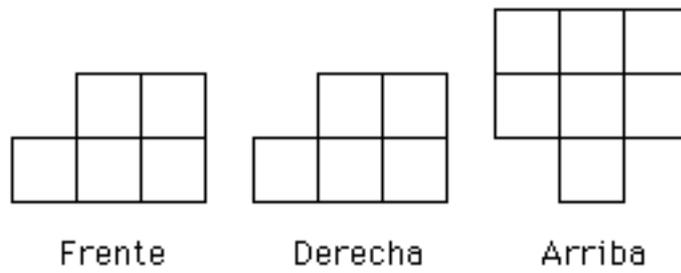
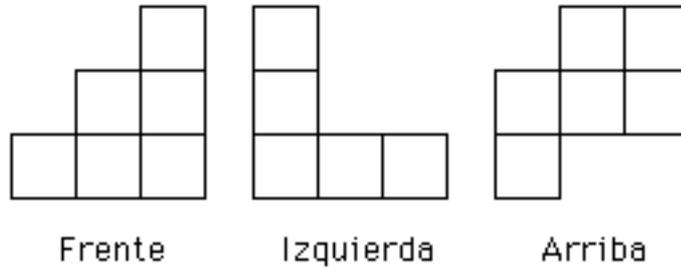
Actividad REP 6 (2/6)

A continuación tienes las representaciones isométricas de tres módulos de cubos diferentes. Intenta dibujar esos mismos módulos por medio de sus representaciones numéricas.



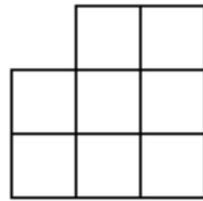
Actividad REP 6 (3/6)

A continuación tienes las vistas laterales de tres módulos de cubos diferentes. Intenta dibujar esos mismos módulos por medio de sus representaciones isométricas.



Actividad REP 6 (4/6)

A continuación tienes las vistas laterales de tres módulos de cubos diferentes. Intenta dibujar esos mismos módulos por medio de sus representaciones numéricas.



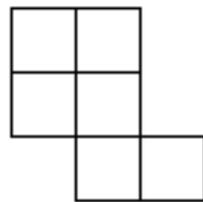
Frente



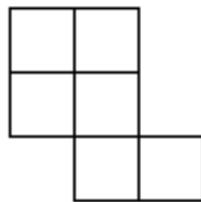
Derecha



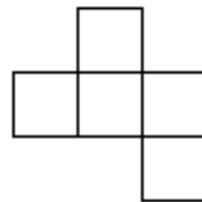
Arriba



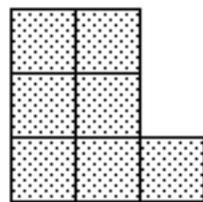
Frente



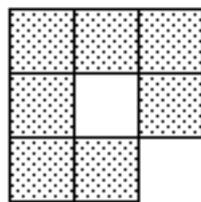
Izquierda



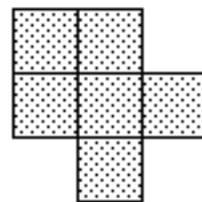
Arriba



Frente



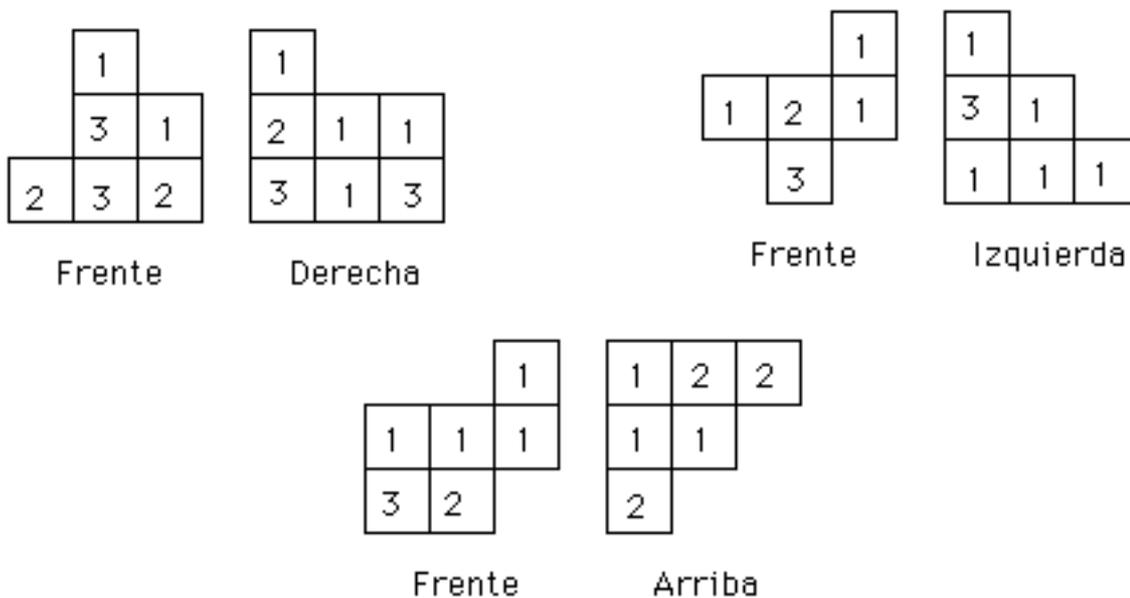
Izquierda



Arriba

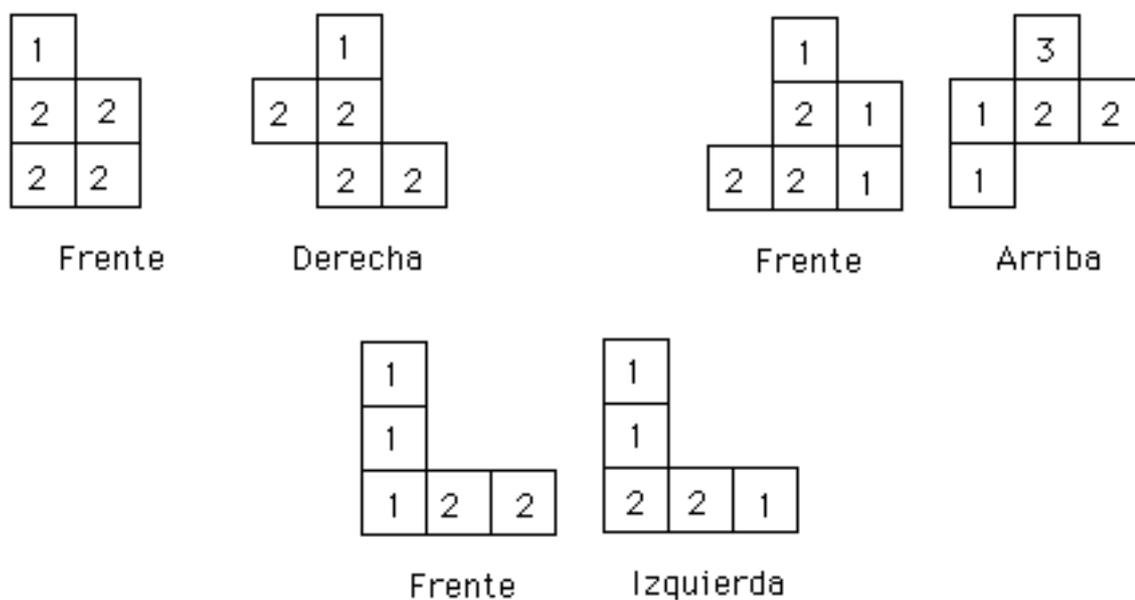
Actividad REP 6 (5/6)

A continuación tienes las representaciones numéricas de tres módulos de cubos diferentes. Intenta dibujar esos mismos módulos por medio de sus representaciones isométricas.



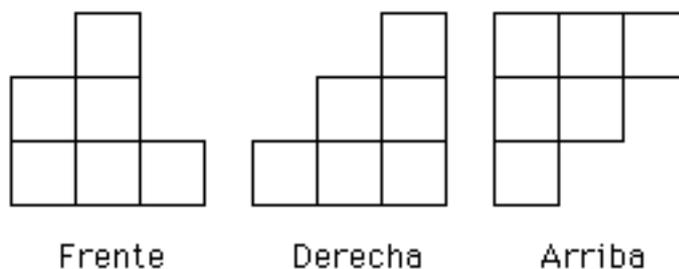
Actividad REP 6 (6/6)

A continuación tienes las representaciones numéricas de tres módulos de cubos diferentes. Intenta dibujar esos mismos módulos por medio de sus vistas laterales (frente, superior y derecha).



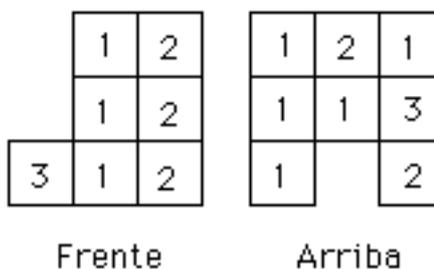
Actividad REP 7 (1/6)

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas laterales que hay debajo.



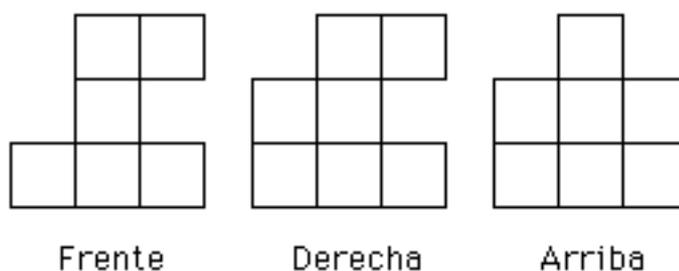
Actividad REP 7 (2/6)

Trata de construir un módulo de cubos que corresponda a las vistas numéricas que hay debajo.



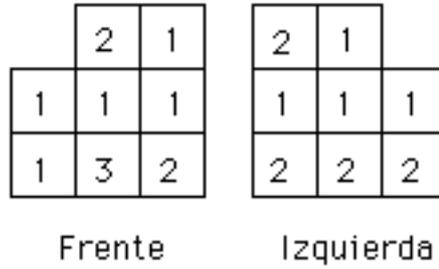
Actividad REP 7 (3/6)

Trata de construir dos módulos de cubos diferentes que correspondan a las vistas laterales que hay debajo.



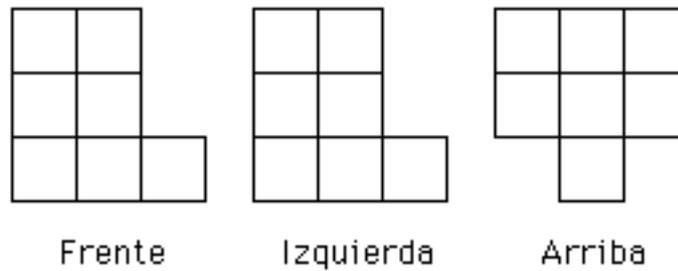
Actividad REP 7 (4/6)

Trata de construir dos módulos de cubos diferentes que correspondan a las vistas numéricas que hay debajo.



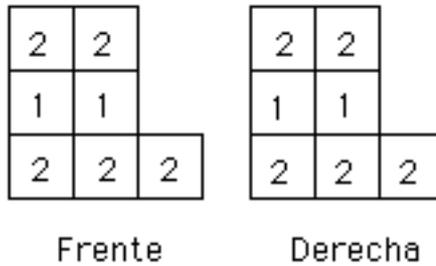
Actividad REP 7 (5/6)

Analiza las vistas laterales de módulos de cubos que hay debajo. Construye todos los módulos de cubos que puedas que correspondan a esas vistas.



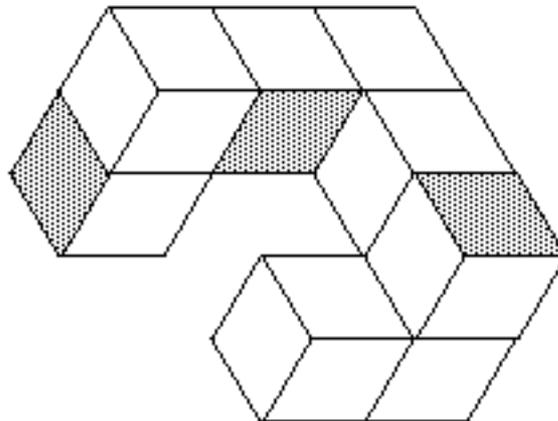
Actividad REP 7 (6/6)

Analiza las vistas numéricas de módulos de cubos que hay debajo. Construye todos los módulos de cubos que puedas que correspondan a esas vistas.



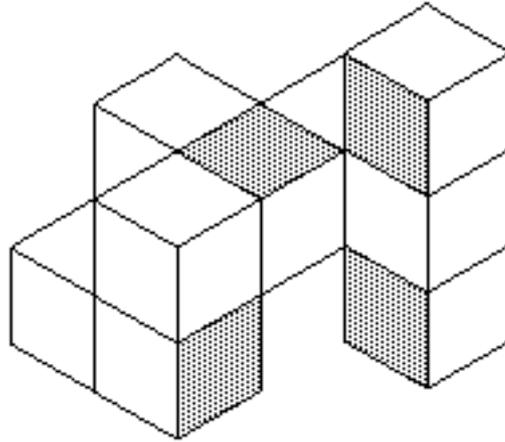
Actividad REP 8 (1/3)

En la lámina tienes la vista isométrica de un módulo de cubos; observa que algunas de sus caras están sombreadas. Dibuja la vista isométrica del módulo de cubos que queda al añadir un cubo sobre cada una de las caras sombreadas.



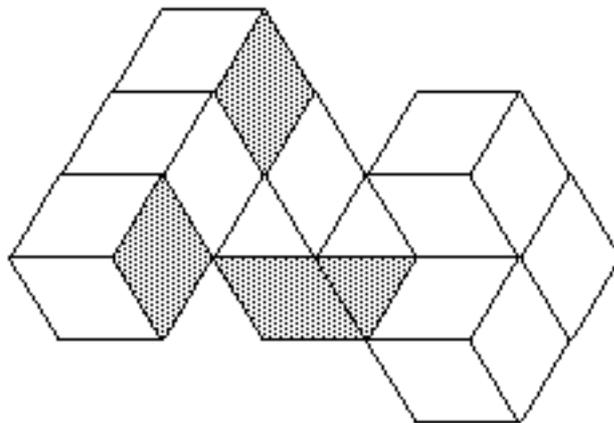
Actividad REP 8 (2/3)

En la lámina tienes la vista isométrica de un módulo de cubos; observa que algunas de sus caras están sombreadas. Dibuja la vista isométrica del módulo de cubos que queda al añadir un cubo sobre cada una de las caras sombreadas.



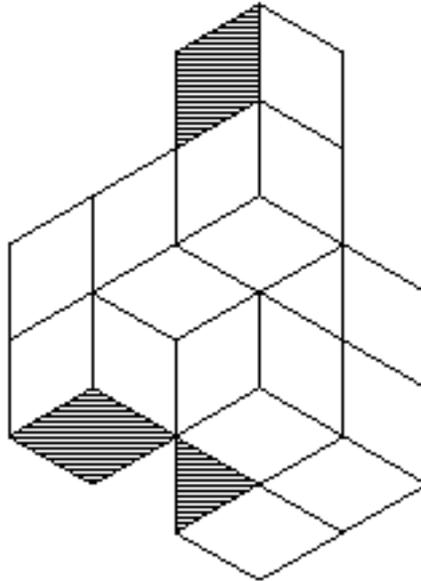
Actividad REP 8 (3/3)

En la lámina tienes la vista isométrica de un módulo de cubos; observa que algunas de sus caras están sombreadas. Dibuja la vista isométrica del módulo de cubos que queda al añadir un cubo sobre cada una de las caras sombreadas.



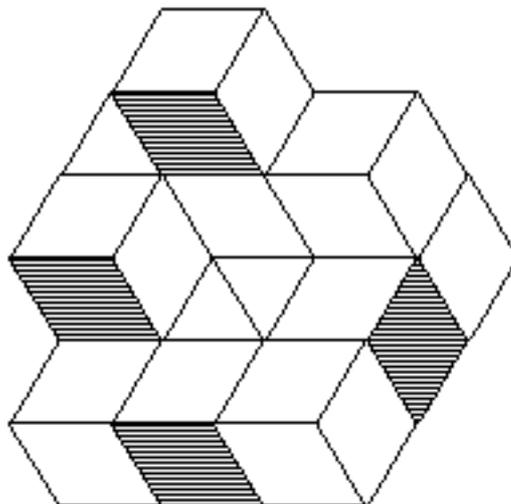
Actividad REP 9 (1/3)

En la lámina tienes la vista isométrica de un módulo de cubos; observa que algunas de sus caras están sombreadas. Dibuja la vista isométrica del módulo de cubos que queda al eliminar los cubos cuyas caras están sombreadas.



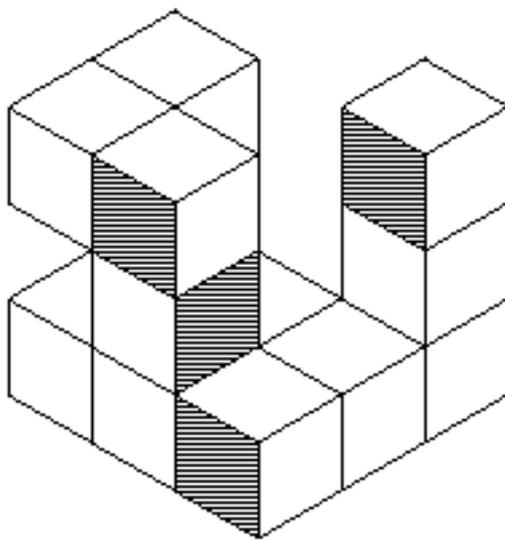
Actividad REP 9 (2/3)

En la lámina tienes la vista isométrica de un módulo de cubos; observa que algunas de sus caras están sombreadas. Dibuja la vista isométrica del módulo de cubos que queda al eliminar los cubos cuyas caras están sombreadas.



Actividad REP 9 (3/3)

En la lámina tienes la vista isométrica de un módulo de cubos; observa que algunas de sus caras están sombreadas. Dibuja la vista isométrica del módulo de cubos que queda al eliminar los cubos cuyas caras están sombreadas.



Actividad REP 10a (1/6)

Dibuja la vista isométrica del cubo que tienes en la mesa. Puedes mover el cubo si quieres.

Actividad REP 10a (2/6)

Dibuja la vista isométrica del tetraedro que tienes en la mesa. Puedes mover el tetraedro si quieres.

Actividad REP 10a (3/6)

Dibuja la vista isométrica del cono que tienes en la mesa. Puedes mover el cono si quieres.

Actividad REP 10a (4/6)

Dibuja la vista isométrica del octaedro que tienes en la mesa. Puedes mover el octaedro si quieres.

Actividad REP 10a (5/6)

Dibuja la vista isométrica del cilindro que tienes en la mesa. Puedes mover el cilindro si quieres.

Actividad REP 10a (6/6)

Dibuja la vista isométrica de la pirámide que tienes en la mesa. Puedes mover la pirámide si quieres.

Actividad REP 10b (1/6)

Dibuja las 3 vistas laterales del cubo que tienes en la mesa. Puedes mover el cubo si quieres.

Actividad REP 10b (2/6)

Dibuja las 3 vistas laterales del tetraedro que tienes en la mesa. Puedes mover el tetraedro si quieres.

Actividad REP 10b (3/6)

Dibuja las 3 vistas laterales del cono que tienes en la mesa. Puedes mover el cono si quieres.

Actividad REP 10b (4/6)

Dibuja las 3 vistas laterales del octaedro que tienes en la mesa. Puedes mover el octaedro si quieres.

Actividad REP 10b (5/6)

Dibuja las 3 vistas laterales del cilindro que tienes en la mesa. Puedes mover el cilindro si quieres.

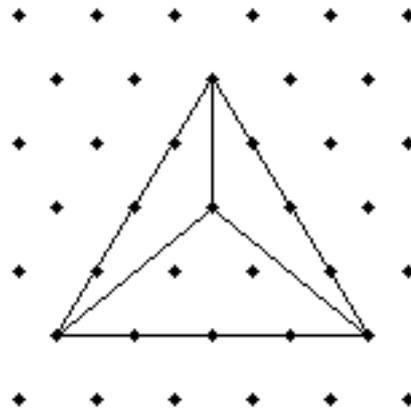
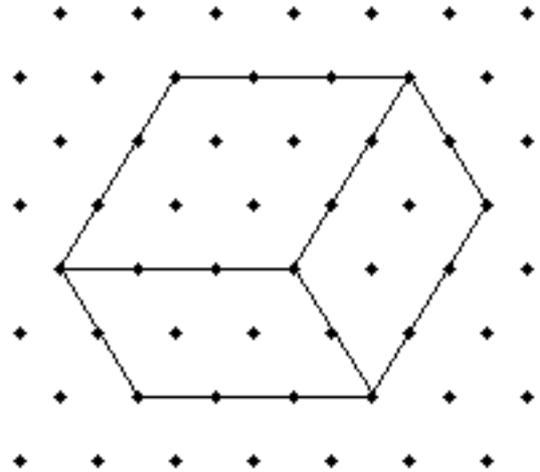
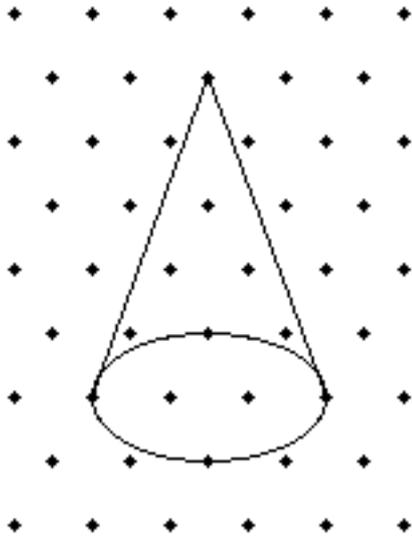
Actividad REP 10b (6/6)

Dibuja las 3 vistas laterales de la pirámide que tienes en la mesa. Puedes mover la pirámide si quieres.

Actividad REP 11a (1/3)

En la lámina tienes las vistas isométricas de varios sólidos. Escribe el nombre del sólido que representa cada vista.

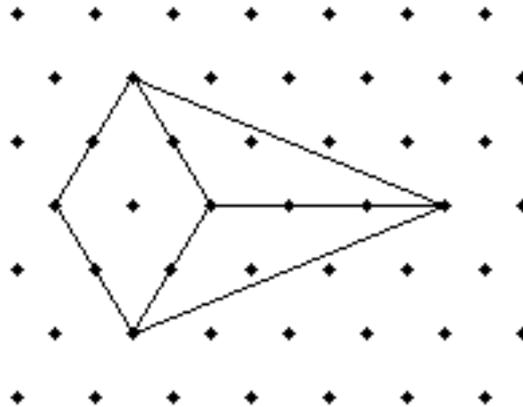
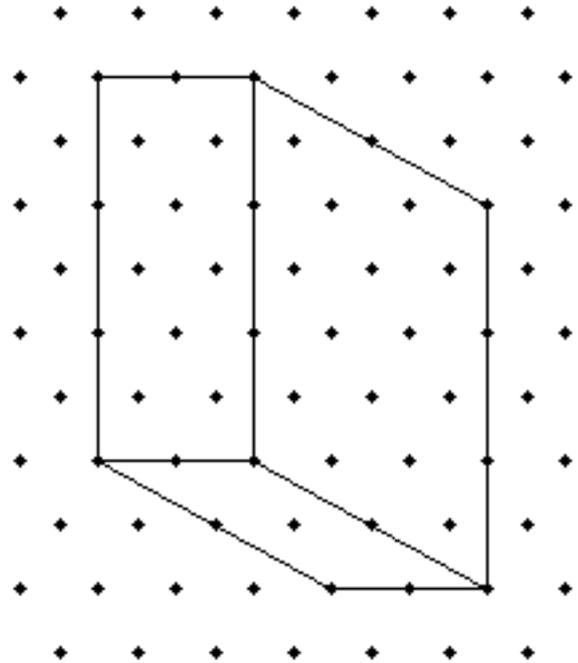
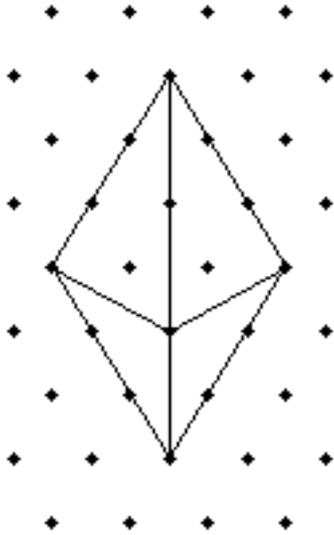
Elige, de los sólidos que tienes delante, el que corresponde a cada vista.



Actividad REP 11a (2/3)

En la lámina tienes las vistas isométricas de varios sólidos. Escribe el nombre del sólido que representa cada vista.

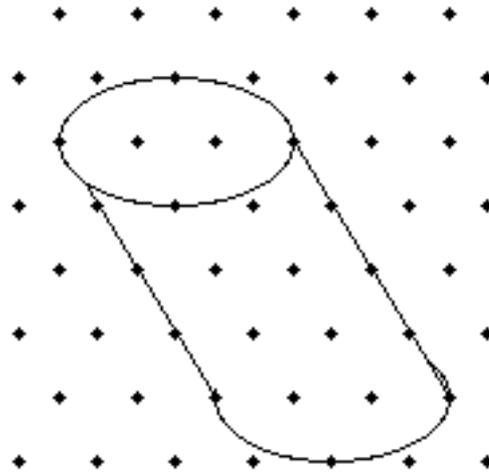
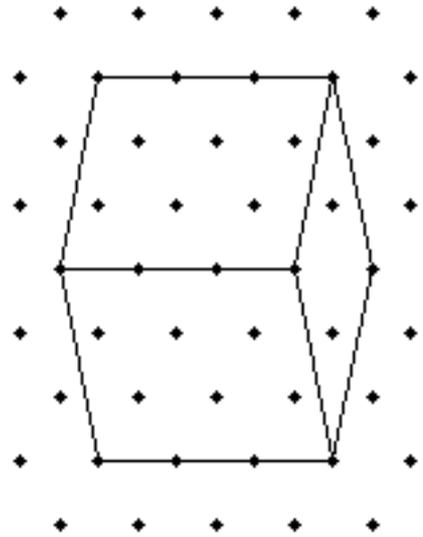
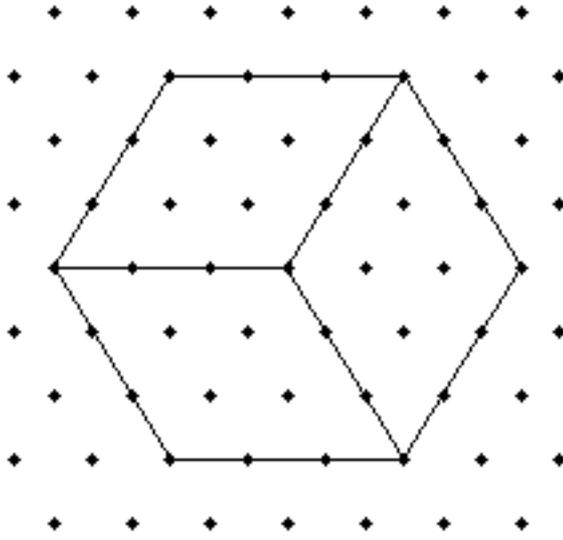
Elige, de los sólidos que tienes delante, el que corresponde a cada vista.



Actividad REP 11a (3/3)

En la lámina tienes las vistas isométricas de varios sólidos. Escribe el nombre del sólido que representa cada vista.

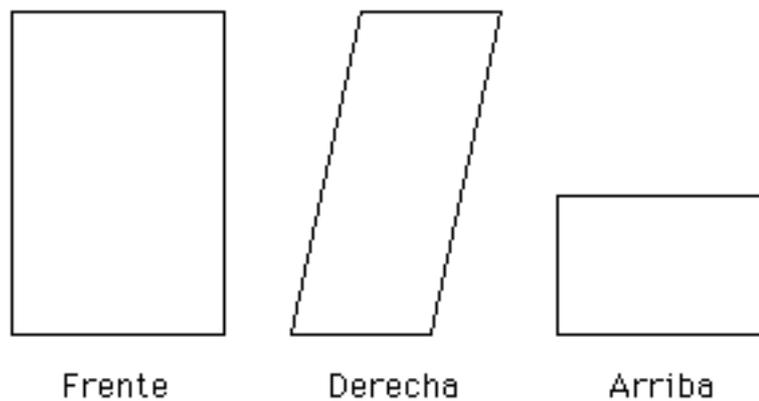
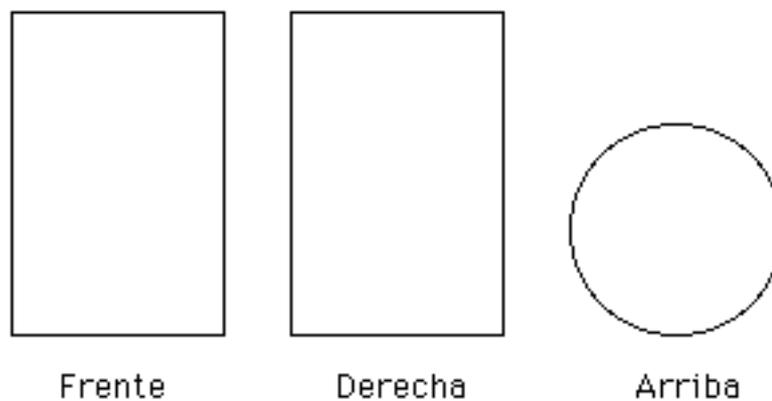
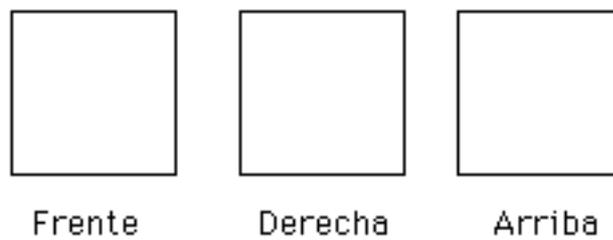
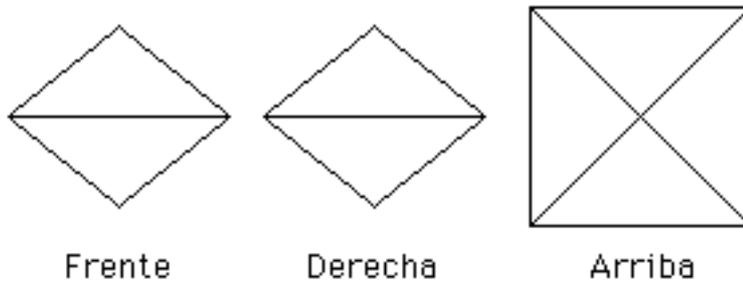
Elige, de los sólidos que tienes delante, el que corresponde a cada vista.



Actividad REP 11b (1/3)

En la lámina tienes las vistas laterales de varios sólidos. Escribe el nombre del sólido que representa cada grupo de vistas.

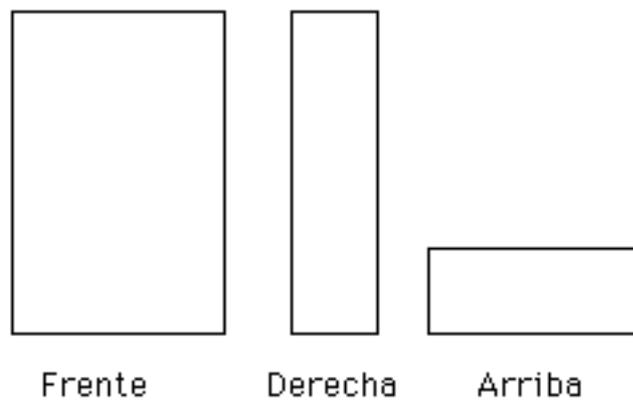
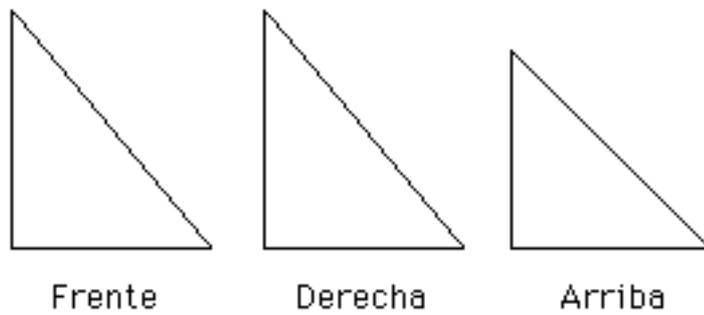
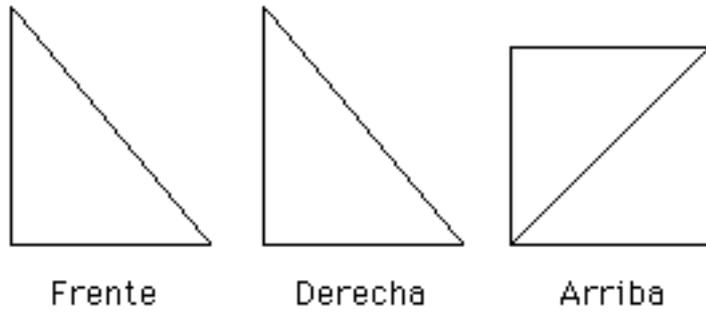
Elige, de los sólidos que tienes delante, el que corresponde a cada grupo de vistas.



Actividad REP 11b (2/3)

En la lámina tienes las vistas laterales de varios sólidos. Escribe el nombre del sólido que representa cada grupo de vistas.

Elige, de los sólidos que tienes delante, el que corresponde a cada grupo de vistas.



Actividad REP 11b (3/3)

En la lámina tienes las vistas laterales de varios sólidos. Escribe el nombre del sólido que representa cada grupo de vistas.

Elige, de los sólidos que tienes delante, el que corresponde a cada grupo de vistas.

