3. Forma, espacio y medida

Ángel Gutiérrez Rodríguez, Universidad de Valencia, España
Mariana Sáiz Roldán, Universidad Pedagógica Nacional, México

La enseñanza de la geometría en los niveles no universitarios tradicionalmente ha sido escasa y centrada en unos pocos polígonos y cuerpos espaciales, de los que se enseñan las características físicas destacadas, los principales elementos y algunas propiedades básicas. Algo similar se puede decir de la enseñanza de las medidas de longitud, área y volumen, centrada en lograr que los estudiantes memoricen el Sistema Métrico Decimal y las fórmulas de cálculo de perímetros, áreas y volúmenes de las principales figuras geométricas planas y espaciales.

Los nuevos programas oficiales mexicanos de educación básica (SEP, 2004, 2006, 2008) tratan de corregir esta carencia a partir de aumentar el énfasis y la cantidad de contenidos de geometría y medida que los estudiantes deben aprender. Para ayudar a los profesores a poner en práctica dicho cambio. En este capítulo presentamos información sobre los principales resultados de la Investigación Internacional en Educación Matemática referentes a los procesos de aprendizaje de los conceptos y las propiedades de geometría y medida para los niveles de preescolar, primaria y secundaria. La información ofrecida dará lugar a sugerencias didácticas que sirvan de apoyo a los profesores.

El capítulo se divide en dos secciones dedicadas a la geometría y a la medida de magnitudes. La primera sección tiene cuatro partes, en las que se abordan los problemas del desarrollo del razonamiento matemático, de la enseñanza de conceptos geométricos, del aprendizaje de la demostración y del papel de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. La segunda sección también incluye cuatro partes, la primera se enfoca a analizar los problemas comunes a las medidas de longitud, superficie y volumen, y las siguientes tres partes se dedican a analizar los problemas particulares de cada magnitud geométrica.

Aprendizaje de la geometría durante la educación básica

La geometría está formada por varios bloques de contenidos entre los que hay una multitud de relaciones. Por ello, su enseñanza y su aprendizaje se basarán en descubrir y explorar esas relaciones. La misión del profesor es organizar la actividad en clase para dar a los estudiantes oportunidades de aplicar los contenidos geométricos que estudian en situaciones diversas. En esta sección analizamos varios aspectos comunes a todos los contenidos de geometría, tanto en el plano como en el espacio.

El desarrollo del razonamiento matemático

La investigación didáctica muestra claramente que los *niveles de razonamiento matemático de Van Hiele* son un exitoso modelo de organización de la enseñanza y del aprendizaje de la geometría (Battista, 2007).

Los cinco niveles de razonamiento identificados por el modelo de Van Hiele ofrecen una descripción de las características de las diferentes formas de razonamiento matemático de los estudiantes, que se suceden desde que están en preescolar hasta que alcanzan el máximo desarrollo de su capacidad matemática, incluso como matemáticos profesionales. Sólo podemos hacer una breve descripción de los niveles 1 a 4, que son los relacionados con la educación básica.

Hay descripciones y análisis más detallados en Burger y Shaughnessy (1986), Jaime (1993), Jaime y Gutiérrez (1990) y Van Hiele (1986).

El razonamiento de *nivel 1* se caracteriza porque los estudiantes perciben las figuras geométricas globalmente y como objetos individuales; sólo razonan sobre propiedades llamativas relacionadas con los elementos físicos de las figuras; dan importancia a propiedades como posiciones, formas o tamaños, y no son capaces de generalizar. Un estudiante de nivel 1 puede decir que un rombo se diferencia de un rectángulo en que "el rectángulo es más largo" o que "el rombo es más picudo" (Jaime y Gutiérrez, 1990:307).

Los estudiantes que razonan en el *nivel 2* ya identifican y usan partes y propiedades matemáticas de las figuras, pero no son capaces de relacionar unas propiedades con otras; por ejemplo, en un rectángulo, no asocian la perpendicularidad con el paralelismo de los lados. El razonamiento de nivel 2 se basa en la observación de ejemplos para identificar regularidades, que se convierten en propiedades generales, y los propios ejemplos son la demostración o explicación de la veracidad de la propiedad descubierta. Así, por ejemplo, después de observar o manipular varios rombos, descubren que las diagonales de un rombo son perpendiculares y, desde ese momento, admiten que las diagonales de cualquier otro rombo también son perpendiculares sin necesidad de más comprobaciones (Jaime y Gutiérrez, 1990:309).

La principal característica del *nivel 3* de Van Hiele es que los estudiantes aprenden a realizar razonamiento deductivo abstracto, si bien todavía no pueden leer ni entender demostraciones complejas ni presentadas en lenguaje formal. Por ejemplo, entienden la demostración deductiva usual de que los ángulos de un triángulo suman 180° (figura 3.1), pero no sienten la necesidad de justificar las congruencias de ángulos, porque éstas son visualmente evidentes (Jaime y Gutiérrez, 1990:314). Por otra parte, los estudiantes pueden comprender cualquier definición dada en los libros de texto y realizar todo tipo de clasificación entre familias de figuras geométricas.

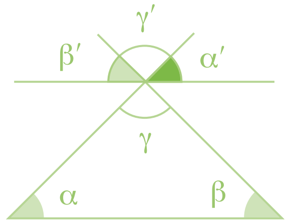


Figura 3.1.

Los estudiantes que razonan en el *nivel 4* son capaces de hacer y entender demostraciones matemáticas formales, así como entender las características de un sistema axiomático y aspectos más operativos, como la posibilidad de que un concepto tenga varias definiciones formales diferentes, pero equivalentes. Por ejemplo, un estudiante del nivel 4 admite que se defina un rectángulo como "el cuadrilátero que tiene dos ejes de simetría que pasan por los puntos medios de sus lados" y es capaz de demostrar formalmente que esta definición es equivalente a la usual.

Los niveles de Van Hiele permiten evaluar el progreso de la capacidad de razonamiento matemático de los estudiantes a medida que avanzan a lo largo del sistema educativo. Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991), Jaime (1993) y Gutiérrez y Jaime (1998) ofrecen ejemplos de cómo realizar estas evaluaciones y de resultados de evaluaciones ya hechos.

El conocimiento de los niveles de Van Hiele también puede ayudar a los profesores a diseñar tareas apropiadas para cada nivel y a establecer las condiciones para ayudar a sus alumnos a transitar al nivel inmediato superior. Van Hiele sostenía que el progreso por niveles depende en gran medida de la experiencia matemática que los estudiantes adquieren gracias a la enseñanza, por esto también propuso directrices para el diseño de actividades. En particular, sugiere que las actividades de aprendizaje estén organizadas siguiendo cinco fases: información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración.

En seguida se ofrece un ejemplo en el que se describe una actividad que tiene las fases propuestas por Van Hiele y que sigue las "orientaciones didácticas" del objetivo de segundo grado de primaria que propone "identificar caras de objetos a partir de sus representaciones planas y viceversa" (SEP, *Programa de estudio. Segundo grado. Educación básica. Primaria*: 60). Muchos de los niños de este grado están en el nivel 2 de Van Hiele: "Identifican y usan partes y propiedades matemáticas de las figuras, pero no son capaces de relacionar unas propiedades con otras". La actividad siguiente reconoce este hecho, pero tiene el propósito de establecer condiciones para que los niños superen el razonamiento de dicho nivel destacando las relaciones entre figuras planas y las caras de los cuerpos geométricos.

Información. Se les presentan figuras planas, como cuadrados, triángulos, rectángulos, círculos. Se les pregunta el nombre de cada figura; se les da el nombre de una figura y se les pide que la señalen. También se les presentan varios cuerpos sólidos: cubos, pirámides, prismas y cilindros. Se les pregunta por el nombre de cada cuerpo; si no los conocen se les enseña y se les pide que los repitan. Se les da el nombre de un cuerpo y se les pide que lo localicen; de esta manera el docente se asegura que aprendan el nombre de cada cuerpo.

Orientación dirigida. Se les pide a los alumnos que utilicen los cuerpos gométricos a manera de sellos para estampar figuras en papel o tela. Se les pide que identifiquen qué figuras planas se obtienen estampando sellos con los diferentes cuerpos; que elijan el cuerpo apropiado si se quiere estampar determinada figura (cuadrado, círculo, triángulo, rectángulo) y que lo comprueben. Imprimirán todas las caras de un solo cuerpo y observarán algunas de sus relaciones.

Explicación. Se les pide a los alumnos hablen de lo que han observado, que expresen las relaciones entre caras y cuerpos: "Una pirámide tiene caras que son triángulos", "el cilindro es el único que sirve para estampar círculos" o enunciados similares, y entre las caras de un solo cuerpo: "Todas sus caras son iguales", "sólo tiene cuatro caras", etcétera. El profesor tendrá que formular preguntas para propiciar que los niños formulen enunciados, pero sin inhibir su libertad de pensamiento y expresión.

Orientación libre. Se deja que los niños hagan estampados propios en los que combinen libremente las figuras. Después se les presentan configuraciones estampadas en las que no se aprecian directamente las figuras básicas (triángulo, cuadrado, rectángulo, círculo) sino que se ven figuras compuestas (paralelogramos, rombos, "casitas", etc.) y se les pide que las reproduzcan utilizando los cuerpos disponibles.

Integración. Los niños repasan y resumen lo que han aprendido acerca de los cuerpos y sus caras. El profesor les ayuda en esta tarea señalando aspectos que considere importantes de la actividad, pero sin añadir conocimientos que no correspondan a experiencias realizadas. El profesor puede, por ejemplo, proporcionar a los niños tarjetas en las que están escritos nombres de polígonos o cuerpos, y otras tarjetas en las que están escritas propiedades, como número de lados, de caras, de vértices, etcétera. Los niños deben colocar las tarjetas en su mesa ordenadas y unir mediante líneas las que tengan relación (por ejemplo, la tarjeta con el nombre de un sólido unida a las tarjetas con los nombres de los polígonos de sus caras y a las tarjetas con los números de caras o de vértices).

La enseñanza de nuevos conceptos geométricos

Las matemáticas no son algo que existe independiente de los seres sino un producto social creado para resolver determinados problemas prácticos (De Villiers, 1993; Harel y Sowder, 1998; Clements y Battista, 1992). Esta idea da lugar a que existan "diferentes matemáticas" en distintos contextos. Tal diversidad también existe, a menor escala, en el contexto escolar. Un caso importante son las diferentes definiciones que se encuentran en los libros de texto de educación básica de algunas familias de triángulos y cuadriláteros: para Santillana (2006) (figura 3.2) los cuadrados son rectángulos y rombos, y estas tres familias son parte de los romboides; pero para SM Ediciones (2007) (figura 3.3) los cuadrados no son rectángulos[1] ni rombos, y ninguna de las tres familias es parte de los romboides.

[1] Para los autores de los libros de texto españoles, la frase "iguales 2 a 2" quiere decir que el polígono tiene dos pares de lados (ángulos) congruentes pero siendo cada par no congruente con el otro.

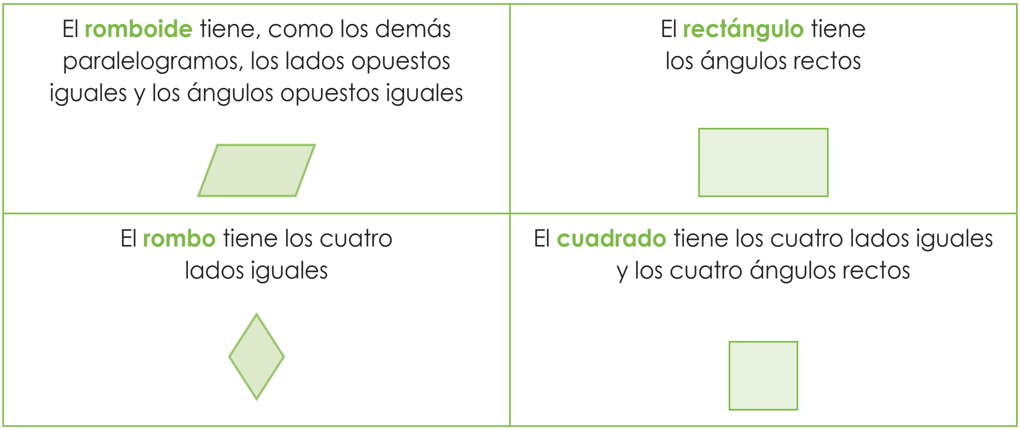


Figura 3.2.

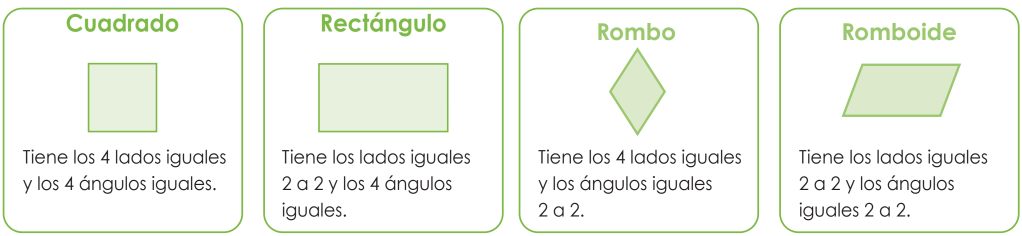


Figura 3.3.

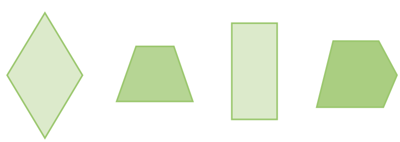
La diversidad de definiciones lleva a un problema en el contexto de la educación básica que han analizado los investigadores (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992) y que se relaciona con el nivel de razonamiento de los estudiantes (Jaime y Gutiérrez, 1990): los estudiantes que razonan en el nivel 1 sólo son capaces de manejar clasificaciones exclusivas, ya que nada más basan su razonamiento en atributos visuales diferenciadores de las figuras, que son los más llamativos; así, piensan que los cuadrados no son rectángulos, porque visualmente tienen formas diferentes; los estudiantes que razonan en el nivel 2 pueden realizar algunas clasificaciones inclusivas, pero no otras, dependiendo de la complejidad lógica de las relaciones; por ejemplo, admiten que cuadrados, rectángulos y rombos son paralelogramos, pero no que los cuadrados sean rectángulos ni rombos (Corberán y Gutiérrez, 1994).

Un ejemplo de actividades que intentan que los estudiantes caractericen las figuras por sus propiedades geométricas (lados iguales, lados paralelos, ángulos rectos, etc.) y no sólo por su forma visual consiste en las que se les pide que discriminen una propiedad a partir de casos particulares. Por ejemplo, para nivel secundaria, Sánchez, Hoyos, Guzmán y Sáiz (2008) sugieren el siguiente problema para que los niños traten de dar una definición de paralelogramo, en lugar de tomarla del texto o que el profesor se las dicte:

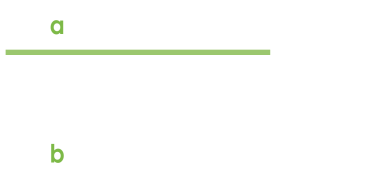
a) Observa y responde la pregunta:

Estos son paralelogramos — Estos no son paralelogramos

¿Cuáles de las siguientes figuras son paralelogramos?



b) Con los dos segmentos siguientes dibuja un paralelogramo:



c) Define con tus palabras lo que debe entenderse por paralelogramo.

Puede observarse que el problema anterior es apropiado para realizar una actividad del nivel 2, donde intervengan los elementos propuestos por las fases de Van Hiele: información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración. Asimismo, se pueden diseñar problemas similares para ayudar a caracterizar otras figuras.

Aprender a demostrar en matemáticas

Las demostraciones formales se consideran la principal seña de identidad de las matemáticas. Su aprendizaje es un objetivo de los últimos cursos de bachillerato, pero se trata de una actividad compleja, por lo que no puede pretenderse que los estudiantes aprendan a demostrar antes de terminar el bachillerato si no empiezan mucho antes, incluso desde los primeros cursos de primaria. Los profesores deben pedir a sus alumnos que justifiquen sus afirmaciones, que expliquen cómo resolvieron los problemas o por qué es cierto el resultado que obtuvieron; estas justificaciones serán diferentes de las demostraciones formales, pero su objetivo es crear en los estudiantes el hábito de dar y pedir razones para asegurar la veracidad de las afirmaciones que hagan (Gutiérrez, 2007). La investigación didáctica indica que hay varios componentes que configuran la actividad de demostrar y es necesario tenerlos en cuenta al planificar su aprendizaje. Aquí mencionamos sólo los más importantes, pero Mariotti (2006) y Harel y Sowder (2007) ofrecen información sobre los resultados de la investigación en este tema.

El primer objetivo es lograr que los estudiantes entiendan la necesidad de demostrar siguiendo unas reglas previamente aceptadas por la comunidad del salón de clases (Mariotti, 2006). De Villiers (1993) propone la conveniencia de que los estudiantes experimenten diversas funciones de las demostraciones matemáticas, que corresponden a diferentes necesidades de demostrar.

La parte más difícil del proceso de aprender a demostrar es el salto del razonamiento inductivo al deductivo; es decir, pasar de considerar los ejemplos específicos como elementos de convicción a tomarlos como ayudas para elaborar las demostraciones deductivas, pero sin ser parte de ellas.

Una actividad previa a la demostración sugerida para secundaria (o incluso en quinto o sexto de primaria si se modifica adecuadamente) fue realizada por Monaghan (2000) a 24 estudiantes (de 11 a 16 años). Se les pidió responder algunas preguntas como las siguientes:

1. ¿Cuál es la diferencia entre un cuadrado y un rectángulo?
2. ¿Cuál es la diferencia entre un rectángulo y un paralelogramo?

A la primera pregunta cuatro niños respondieron señalando las similitudes y no las diferencias de las dos figuras, como los dos siguientes:

> La diferencia es que el cuadrado tiene cuatro ángulos rectos y en un rectángulo todos los lados opuestos son iguales (Matthew).
>
> Ambos son cuadriláteros y tienen cuatro lados (Chris).

En estos casos el maestro debe hacerles notar que aunque lo que dicen es correcto, mencionan lo que tienen en común las figuras y no las diferencias. Puede entonces pedirles una segunda respuesta o invitarlos a que en equipos las analicen con sus compañeros. Posiblemente, después de la discusión en equipos surjan afirmaciones propias del nivel 1 de Van Hiele, que se enfoquen en la comparación de longitudes de un lado del rectángulo (más larga) y del cuadrado (más corta) o en la cualidad de horizontalidad que adquiere el rectángulo si se coloca sobre uno de sus lados mayores, como sucedió con otros 16 de los niños de la investigación. Por ejemplo:

> La longitud de un cuadrado es más corta que la del rectángulo (Celina).
>
> Un rectángulo tiene los lados opuestos que son iguales. Los de arriba y los de abajo son iguales, y el cuadrado tiene todos los lados y ángulos iguales (Ghalib).

Ante respuestas como la de Celina, la maestra (o el maestro) puede dibujar en el pizarrón un rectángulo pequeño y un cuadrado grande y preguntar: "Con estas figuras, ¿ocurre que la longitud del cuadrado es más corta que la del rectángulo? Como este lado es más corto (señala la base del rectángulo), ¿es este polígono es un cuadrado?". El mismo niño –u otro– puede decir algo como: "No, porque también el rectángulo tiene lados cortos" y así, el docente puede de nuevo intervenir para pedir que alguien responda como lo hizo Celina, la niña del ejemplo: "¿Estás de acuerdo?"

El profesor debe buscar siempre que los alumnos den justificaciones más exactas y usen términos más precisos (fase de explicación), lo que permitirá que en el futuro lleguen a justificar con más precisión sus ideas y sus razonamientos empiecen a ser del nivel superior.

La visualización en el aprendizaje de la geometría

Entendemos por visualización (o imaginación espacial) la actividad mental intelectual que tiene que ver con la creación, el análisis y la transformación de representaciones mentales de conceptos, propiedades o relaciones matemáticos (Gutiérrez, 1996). Krutetskii (1976) y Presmeg (1986) alertan a los profesores acerca de la existencia de tres tipos de individuos según sus preferencias, de uso de la visualización para resolver problemas de matemáticas: *a)* los visualizadores, que prefieren el uso de representaciones visuales; *b)* los analíticos, que prefieren el uso de representaciones simbólicas textuales, y *c)* los armónicos, que usan unas u otras según sea el caso. Las dificultades en el aprendizaje de la geometría de muchos estudiantes están relacionan con formas de enseñanza que inhiben sus preferencias de visualización.

Profesores y libros de texto continuamente usan dibujos, figuras o diagramas en las lecciones de geometría para ayudar a sus alumnos a comprender los conceptos y las propiedades que deben aprender. Sin embargo, con frecuencia los docentes no tienen en cuenta que estos dibujos, estas figuras, etc., que representan objetos geométricos —en particular, si son representaciones planas de cuerpos espaciales— incluyen *codificaciones* que los estudiantes deben aprender a “leer”.

Figura 3.4

Parzysz (1988) nos recuerda que cualquier representación plana que hagamos de un objeto, o conjunto de objetos espaciales, pierde una parte de la información contenida en los objetos; por ejemplo, al dibujar un sólido opaco, una parte del cuerpo queda oculta. Así, la actividad de introducción a la medida del volumen típica de los textos de primaria, en la que se pregunta a los estudiantes cuántos cubos tiene el sólido de la figura 3.4a, puede tener una o varias soluciones dependiendo del código implícito que usen los estudiantes para saber cuántos cubos están ocultos. Generalmente profesores y libros de texto asumen que la parte oculta no tiene huecos ni protuberancias, y concluyen que el sólido de la figura 3.4a está formado por ocho cubos. Sin embargo, el diagrama de la figura 3.4b, que es una vista superior del mismo sólido con la cantidad de cubos en cada columna, indica que realmente tiene nueve cubos, pues hay un cubo oculto. Estos convenios y formas de representación son parte de lo que los estudiantes deben aprender. Gutiérrez (1998) describe de forma detallada el problema del aprendizaje y uso de diferentes formas de representación plana de objetos 3-dimensionales.

Es un buen ejercicio utilizar este tipo de representaciones de los sólidos en la clase. Primero, a los alumnos se les pueden dar cubos de madera o plástico y un diagrama como el que aparece en la figura 3.4b y pedirles que construyan la estructura señalada en el diagrama. Posteriormente, se les indica que dibujen la estructura que han obtenido con los cubos, vista desde diferentes puntos, para obtener diagramas como el de la figura 3.4a. Después se les sugiere que hagan el proceso inverso; es decir, que construyan una estructura con cubos y dibujen un diagrama como el de la figura 3.4b para que otros compañeros la reconstruyan.

Aprendizaje de la medida de magnitudes durante la educación básica

Desde una perspectiva didáctica, algunos aspectos de las diferentes magnitudes geométricas pueden tratarse de forma conjunta, pues son elementos comunes a todas éstas. Los principales son la conservación de la magnitud por transformaciones, la transitividad de la medida y la concepción de unidad de medida. Es de esperar que estas ideas, una vez tratadas en una magnitud, sirvan de base en el estudio de otras magnitudes (Osborne, 1976), aunque los profesores no deben esperar que sus alumnos hagan estas transferencias fácilmente. Muchos de estos aspectos los estudiaron Piaget, Inhelder y Szeminska (1970) y después otros investigadores que corroboraron los resultados de los primeros. Un resumen de los resultados de Piaget, en torno a las edades en que los niños consiguen la conservación de diferentes magnitudes, lo ofrecen Chamorro y Belmonte (1991:23):

> [...] parece ser que la longitud, capacidad y masa pueden ser comprendidas por niños del intervalo comprendido entre los 6 y 8 años; la noción de superficie y tiempo, hacia los 7 u 8 años, mientras que las de volumen y amplitud angular no podrán ser comprendidas sino hasta los 10 a 12 años.

Aprendizaje de la medida de longitudes

Una de las magnitudes que más se puede trabajar en preescolar, y los primeros años de primaria, es la longitud. Para lo cual se recomienda hacer comparaciones y ordenamientos (en lugar de mediciones) con cualquier tipo de unidades, tanto de objetos de los propios niños como de partes de sus cuerpos. Esto puede resultar interesante y divertido en primero y segundo grados de educación primaria.

Aunque la recomendación de usar unidades e instrumentos no convencionales para el estudio de la longitud se prolonga hasta tercero y cuarto grados, esta determinación no debe ser inflexible. Clements (1999) afirma que, al comparar el de la regla con el uso de un cordel en niños de tercer grado, los resultados fueron casi dos veces mejores cuando usaron la regla.

Nunes, Light y Mason (1993) cuestionan si el uso de los instrumentos de medición convencionales debe relegarse hasta el final de la secuencia tradicional de enseñanza. Para ello se basaron en una investigación que consistió en poner a niños de 6 a 8 años de edad a comunicarse acerca de situaciones de medición "hablando" por teléfono. Cada uno tenía un papel con un segmento de recta dibujado. Ellos jugaban un "juego" cooperativo en el que el objetivo era medir con un objeto, para descubrir si el segmento de recta en sus hojas era más grande, más corto o igual que el de su compañero en el otro lado del teléfono. Había tres situaciones, cada una de las cuales tenía un objeto diferente para medir. En cada caso, los compañeros sabían que tenían objetos idénticos; por ejemplo, si el objeto era un cordón, cada uno contaba con un cordón de la misma longitud que su compañero. A lo largo de las tareas, los segmentos podían ser de la misma longitud que el cordón, el doble, etc. Los compañeros podían usar el cordón y discutir la tarea, tanto como quisieran, hasta determinar si las rectas en sus hojas eran de la misma longitud. En la segunda situación, los niños tenían reglas marcadas en centímetros para determinar hasta dónde podrían usar una regla sin entendimiento. En la tercera situación un niño, en cada pareja, tenía una regla rota que empezaba en el centímetro 4, mientras que el otro tenía una regla normal.

Este último experimento puede llevarse al aula como una actividad relacionada con la medición en tercero y cuarto grados, así el docente puede comparar los resultados con los de los investigadores, mismos que se resumen a continuación.

Como resultado de la investigación se encontró que la regla tradicional respaldó el razonamiento de los niños de manera más eficiente que el cordón, pues su desempeño de los niños fue casi dos veces mejor con la regla. Sus estrategias y el lenguaje ("es tan larga como", “la línea pequeña, después del tres”) indicaron que los niños dan “respuestas correctas basadas en procedimientos rigurosos, beneficiándose claramente de la representación numérica en la regla” (Nunes, Light y Mason, 1993: 46). Incluso con la regla *rota* se desempeñaron mejor que con el cordón, mostrando que no sólo estaban “leyendo números”. La situación poco común sólo confundió a los niños alrededor de 20% de las veces. Los investigadores concluyeron que las unidades convencionales ya dadas en la regla no hacen más difícil la medición. De hecho, los niños se beneficiaron de la representación numérica aun con la regla rota.

En el caso de alumnos de secundaria, medir, comparar y usar la medición de longitudes con unidades e instrumentos convencionales y no convencionales no representa mayor problema. Los problemas en este nivel surgen con la introducción de otros conceptos, como perímetro y área, pues los estudiantes los confunden con frecuencia (Corberán, 1996; Furinghetti y Paola, 1999). Se ha reportado que alumnos de 7º. grado (primero de secundaria en México) creen que existe una relación directa entre área y perímetro; esta creencia parece más resistente al cambio que la confusión misma entre área y perímetro (Moreira y Contente, 1997). Un ejercicio para superar este tipo de confusión que puede realizarse con los alumnos es construir rectángulos diferentes que tengan como perímetro, por ejemplo, 12 cm. Después se les solicita que calculen las áreas de todos los cuadriláteros que construyeron y que comparen y discutan los resultados. Algunos niños puede haber construido un rectángulo de 5 por 1 cm, otros uno de 4 por 2 cm, algunos más pueden haber dibujado un cuadrado de 3 cm de lado. Las áreas de todos estos rectángulos son distintas. Al hacer los cálculos y comparar muchos niños y niñas pensarán incluso que han equivocado los cálculos, porque para ellos una vez determinado el perímetro el área también queda fija.

Aprendizaje de la medida de áreas

El estudio del concepto de área inicia en México desde el tercer grado y, al igual que en la mayor parte del mundo, no se plantea en grados anteriores. En consecuencia, no hay muchas investigaciones qué reportar sobre este concepto en estos niveles; sin embargo, Outhred y Mitchelmore (2000) llevaron a cabo un estudio con 115 niños de 1° a 4° grados de primaria en Australia. Su objetivo era conocer sus ideas intuitivas sobre este concepto, ya que en ese país su estudio comienza hasta 4° grado. El estudio consistió en entrevistar a estos niños proponiéndoles algunas tareas de medición. La primera consistió en entregar a cada niño una unidad movible: un mosaico cuadrado de 2 cm de lado y una hoja en la que aparecía dibujado un cuadrado de 8 cm de lado y se les pidió que respondieran cuántos mosaicos unidad se requerían para cubrir el cuadrado en el dibujo. En la tabla 1 se muestran los resultados obtenidos por los niños al usar diferentes estrategias.

Tabla 1. Resultados de la primera tarea.

Alumnos que obtienen respuesta →	Correcta	Incorrecta
Estrategias ↓	%	%
Mueven el mosaico y cuentan, pero no sistemáticamente y no logran cubrir el cuadrado.	0	27
Hacen un recubrimiento visual de la superficie a medir.	1	6
Mueven el mosaico sistemáticamente y cuentan hasta cubrir el cuadrado.	32	14
Usan la regla para medir el mosaico unidad, con la medida hacen marcas en el cuadrado grande y multiplican los resultados obtenidos.	18	2

En la segunda tarea se dio a los niños una hoja en la que aparecía dibujado un mosaico cuadrado de 1 cm de lado como unidad y un rectángulo de 6 cm por 5 cm, se pidió a los niños decir cuántos mosaicos se requerían para cubrir el rectángulo. La diferencia fundamental con la tarea anterior fue que ahora el mosaico unidad no se podía mover. Los resultados obtenidos y las estrategias utilizadas en esta tarea se muestran en la tabla 2. Ambas tareas pueden aplicarse en el aula con niños de 3° y 4° grados.

Tabla 2. Resultados de la segunda tarea.

Alumnos que obtienen respuesta →	Correcta	Incorrecta
Estrategias ↓	%	%
Hacen un recubrimiento del rectángulo dibujando las unidades pero de forma incompleta.	0	11
Hacen un arreglo de cuadritos completo pero las unidades no son del mismo tamaño ni hay la misma cantidad de unidades por renglón.	0	9
Hacen un arreglo de cuadritos pero no lo relacionan con la unidad.	2	29
Miden en una dimensión y de la otra hacen una estimación, después cuentan por renglón.	1	17
Miden en dos dimensiones y hacen una suma repetida o una multiplicación.	27	4

Aprendizaje de la medida de volúmenes

En México, el estudio del volumen se inicia en 5° y 6° de primaria, y así es también en la mayoría de países, por lo que no existen estudios centrados en este concepto con niños de grados anteriores. En cambio, se puede constatar que la noción de capacidad en algunos países se estudia antes que la de volumen. No deben confundirse estos conceptos, aun cuando estén relacionados. Piénsese que cualquier objeto es susceptible de ser medido en relación con su volumen, pero no en cuanto a su capacidad, magnitud reservada a los recipientes, cajas, etcétera.

Potari y Spiliotopoulou (1996) llevaron a cabo un estudio con 38 niños de 5° de primaria en Grecia. Encontraron que algunas características físicas de los objetos, tales como estar cerrado o abierto, ser sólido o hueco, estar lleno o vacío afectan las concepciones de los alumnos acerca del concepto de volumen. Este estudio pone en evidencia que la noción de volumen es rica en significados y asociaciones y apunta hacia las dificultades de su conceptualización. Parte de la investigación de los autores consistió en mostrar a los niños el dibujo de una copa de cristal vacía y preguntarles: "¿Qué es el volumen de la copa?". Luego se les mostraba otro dibujo de la misma copa, pero llena de agua y de nuevo se les preguntaba sobre el volumen.

Tabla 3. Respuestas a ¿qué es el volumen de la copa?

Respuesta	Copa vacía	Copa llena	
Espacio ocupado	12	Agua	6
		Cristal	4
		Cristal y agua	2
Capacidad	9	Capacidad	6
		Cristal	3
Cristal	4	Agua (capacidad)	3
		Cristal y agua	1
Otras	13	No clasificadas	

La tabla 3 muestra la frecuencia de las respuestas. En el caso de la copa vacía hubo 4 tipos de respuestas. Cuando se pregunta por la copa llena, algunos niños cambian de opinión respecto a lo que es el volumen de la copa; por ejemplo, de los 12 que responden (con relación a la copa vacía) que el volumen es el espacio ocupado por la copa, 6 piensan que el volumen de la copa llena es el agua que contiene, 4 que el cristal y 2 que el cristal con el agua.

El que el material, el peso o el hecho de estar cerrado, abierto, ser sólido o hueco influyan en las concepciones de los alumnos sobre el concepto de volumen, llevó a los autores a sugerir que algunos conceptos matemáticos, como el volumen, deben enseñarse junto con la materia de Ciencias. Queda claro que el volumen es difícil de conceptualizar y debe trabajarse continuamente desde la primaria hasta el bachillerato.

En la primaria es preferible que los alumnos se enfrenten sólo a problemas en los que no sea necesario cuantificar, pero en que el volumen se presente en contextos diferentes que los lleven a observar que es una magnitud que tiene muchas interpretaciones. Por ejemplo, un problema que se puede plantear a los niños es uno en que se requiera calcular el volumen de una misma taza en tres casos distintos: *a)* para saber cuánto barro necesita un alfarero para hacerla; *b)* para conocer cuál es su capacidad; y *c)* para entender si es posible acomodar, por decir algo, cuatro de estas tazas en una repisa o un mueble.

Cálculo de medidas y razonamiento proporcional

Un problema común en el aprendizaje de áreas y volúmenes es el error de aplicar la proporcionalidad directa para calcular el área o el volumen conociendo las proporciones de las magnitudes lineales; por ejemplo, si alguien con este problema sabe que el área de un cuadrado de lado 2 es 4, entonces cree erróneamente que el área del cuadrado de lado 4 es 8. De Bock, Van Dooren, Verschaffel y Janssens (2001) propusieron a estudiantes de secundaria el siguiente problema:

> Un pintor de publicidad necesita 5 ml de pintura para hacer un dibujo de Santa Claus de 40 cm de alto en el aparador de una tienda. ¿Cuánta pintura requerirá para hacer un Santa Claus de la misma forma, pero que mida 120 cm de alto?

Este problema se aplicó a los estudiantes en tres fases sucesivas. En la primera se les pidió que lo resolvieran. En la segunda se les mostraron respuestas correctas e incorrectas de supuestos compañeros con variadas explicaciones para que las analizaran y respondieran nuevamente al problema, ratificando su respuesta anterior o rectificándola. En la tercera fase se les explicó el razonamiento correcto que había llevado a sus supuestos compañeros a elegir la respuesta correcta (sin decirles que esa era la respuesta correcta).

La cantidad de alumnos que dieron la respuesta correcta en cada fase de acuerdo con el grupo de edad se muestran en la tabla 4.

Tabla 4. Resultados en las tres fases.

Grupo de edad	Núm.	Fase 1	Fase 2	Fase 3
12-13 años	18	0	0	3
15-16 años	23	0	1	7

Como se ve, del primer grupo de edad sólo la sexta parte cambió su respuesta y lo hizo sólo hasta la tercera fase. Del segundo grupo sólo uno de 23 estudiantes cambió en la segunda fase y en la tercera alrededor de 30%. La creencia errónea de que el volumen y el área tienen una relación de proporcionalidad directa con sus dimensiones lineales (largo, ancho, alto) se presenta incluso en adultos. Por lo tanto, debe trabajarse a todos niveles de la educación básica y de preferencia con apoyo de material concreto para que los estudiantes perciban y tengan una representación realista de las relaciones involucradas.

El problema que se ha mostrado como ejemplo puede ser utilizado por los maestros tal y como se presenta aquí. El problema también puede modificarse usando otra figura, como una pintura o una imagen trazada en papel.

Para el volumen se pueden realizar paralelepípedos con cartulina y después duplicar todas sus dimensiones lineales. Construir el nuevo paralelepípedo es una tarea que muestra de manera tangible que el volumen aumenta ocho veces, y no dos o cuatro como muchos alumnos piensan inicialmente.