Citar: Jaime, A., Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez, L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: Universidad de Valencia.

6

La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas

Adela Jaime
y Ángel Gutiérrez[1]

Con este capítulo, hemos querido unirnos al homenaje póstumo a Fernando Cerdán, haciendo una incursión en la conexión entre la resolución de problemas de matemáticas y el mundo de los alumnos con altas capacidades matemáticas y superdotación.

Actualmente hay mucha información sobre los estudiantes de altas capacidades o superdotados, sus características particulares y la problemática que se origina en su educación como consecuencia de que a los profesores no se les ha proporcionado formación en este ámbito ni disponen de material específico para atender las necesidades de estos alumnos. En ocasiones, estudiantes

1. Este texto es parte de las actividades del proyecto de investigación *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259), subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España en el Subprograma de Investigación Fundamental No Orientada del Programa Nacional de I+D+i.

de altas capacidades, que podrían aportar soluciones geniales y ser grandes científicos, ingenieros, profesores, médicos, artistas, historiadores, etc., ven frustrados sus intentos de originalidad o su interés por aprender lo que todavía no saben a causa de un sistema educativo que, cuando implementa realmente los currículos oficiales, ignora el potencial de estos estudiantes y trata los grupos de clase como si fueran homogéneos, excepto para los estudiantes con dificultades de aprendizaje. No es infrecuente ver que, en clases estándar, se ignoran las necesidades específicas de formación de los alumnos de altas capacidades, que no reciben la enseñanza que necesitan, con lo que esos estudiantes acaban obteniendo calificaciones bajas, incluso llegando al fracaso escolar por haber perdido todo interés por aprender los contenidos escolares.

En este capítulo, nos situamos en el contexto de la enseñanza a los estudiantes de E. Primaria con altas capacidades matemáticas, planteamos algunas preguntas y ofrecemos algunas respuestas en relación con lo que consideramos debería ser una enseñanza de calidad que permita a estos estudiantes desarrollar su elevado potencial. Para ello empezamos haciendo una breve introducción a lo que se entiende por altas capacidades y superdotación, resumimos los modelos teóricos más utilizados para describir a este colectivo y especificamos las características que se consideran identificadoras del *talento matemático*. En la segunda sección analizamos el sistema educativo español actual y, más concretamente, los currículos oficiales de la Comunidad Valenciana, para identificar las directrices que plantean sobre el tratamiento diferenciado de los estudiantes de altas capacidades. En la tercera sección vemos cuáles son los tipos más comunes de intervenciones educativas que se están empleando, tanto en el ámbito escolar reglado como en el extraescolar, incluyendo algunos ejemplos relacionados con las matemáticas. Finalmente, en la cuarta sección presentamos algunos casos de niños de E. Primaria de altas capacidades matemáticas resolviendo problemas y mostrando cómo ponen en juego algunas habilidades características del talento matemático.

6.1 INTRODUCCIÓN A LAS ALTAS CAPACIDADES Y LA SUPERDOTACIÓN

Existen distintos términos para designar a los alumnos que destacan respecto a la media: de altas capacidades, talentosos, superdotados, e incluso se habla de excepcionales, genios, prodigios, ..., estableciéndose algunas diferencias entre estas acepciones. En esta sección recorremos los principales modelos vigentes en la actualidad propuestos para identificar a los individuos de altas capacidades y superdotados.

6.1.1 Identificación cuantitativa de la superdotación

En general tomaremos sólo la distinción más generalizada entre *talentoso* y *superdotado*: Estudiante talentoso es el que destaca en un área determinada; así se habla de talento en música, matemáticas, etc. Estudiante superdotado es el que destaca en todos los ámbitos.

Al margen de la controversia, que sigue abierta entre los especialistas, sobre la utilización de test de inteligencia para clasificar a los estudiantes, los sistemas educativos de numerosos países, entre ellos España, siguen usando tests estandarizados para determinar el cociente intelectual de los estudiantes. Tomando como media de la población un cociente intelectual (CI) de 100, se suele situar la superdotación a partir de un CI de 130. Diversos estudios afirman que entre el 2% y el 3% de la población estudiantil son superdotados[2].

6.1.2 Modelos teóricos explicativos de la superdotación

¿Qué se mira para decidir si se identifica o no a un estudiante como superdotado? Depende de la teoría que se utilice. Así, desde el empleo exclusivo de una medida cuantitativa del cociente intelectual, hasta la consideración incluso de factores sociales, encontramos diversas propuestas. Algunos autores agrupan los modelos de superdotación según los elementos que valoran. Así, se habla de modelos basados en capacidades, modelos cognitivos, modelos orientados al rendimiento y modelos socioculturales. Vamos a realizar una breve reseña de varios de los más significativos. Los interesados en el tema pueden leer un resumen bien organizado de diversas teorías en Arocas, Martínez y Martínez (2009).

2. Hay muy pocos estudios de poblaciones grandes, al margen de que los resultados pueden ser distintos debidos a entornos socioculturales diferentes.

6.1.2.1 *Modelos basados en capacidades*

En estos modelos, la idea de superdotación está ligada a un nivel alto de inteligencia. Según García y Abaurrea (1997), los modelos más primitivos consideraban la inteligencia como un todo indivisible. Se acuñó el concepto de "cociente intelectual" para referirse a una medida de ese todo, a partir de los trabajos de Stern y Terman en los años 1920.

Posteriormente aparecieron modelos en los que se concibe la inteligencia como formada por diversas capacidades, admitiendo que un individuo puede destacar sólo en algunas de ellas. Destaca el modelo de *inteligencias múltiples* elaborado por Gardner y presentado en diversas publicaciones, en particular en Gardner (1993)[3]. Gardner considera que hay nueve tipos de inteligencia: lingüística, lógico-matemática, espacial, corporal o cinética, musical, intrapersonal, interpersonal, naturalista y existencial-espiritual. Esta concepción promueve una educación más individualizada, en la que el objetivo principal sería desarrollar el conjunto de inteligencias de cada estudiante. También propugna la consideración del "talento" como la presencia de una capacidad superior en alguna de las inteligencias y de las "altas capacidades" cuando la existencia de capacidad superior está generalizada a las diversas inteligencias.

6.1.2.2 *Modelos cognitivos*

Consideran los procesos cognitivos que se utilizan cuando se realizan tareas bien definidas y más o menos complejas. En estos modelos se identifican procesos, estrategias y estructuras cognitivas que se emplean al realizar tareas de nivel superior.

El representante más destacado de esta línea es Sternberg, quien en 1986 marca cinco criterios que debe reunir una persona superdotada: de excelencia (superioridad respecto a sus compañeros en alguna dimensión), de rareza (realización con nivel muy elevado en algún atributo excepcional o nada usual entre los compañeros), de productividad (en las dimensiones en las que se haya considerado superior, ha de producirse una productividad real o potencial), de demostrabilidad (la superdotación se debe demostrar mediante pruebas fiables)

3. La concesión del premio Príncipe de Asturias de 2011 a Gardner es un reflejo del interés por este modelo en la actualidad.

y de valor (se debe mostrar un rendimiento superior en alguna capacidad reconocida por la sociedad). Además, Sternberg introduce el modelo WISC para identificar a los superdotados: W de sabiduría (wisdom), I de inteligencia, S de síntesis y C de creatividad (descrito en Torrego, 2011).

6.1.2.3 *Modelos orientados al rendimiento*

Según estos modelos, tener cierto nivel de capacidad o talento no es suficiente para que el rendimiento sea alto, por lo que incluyen otras dimensiones. El más utilizado es el "modelo de los tres anillos" que Renzulli viene reelaborando desde 1978 (Renzulli, 1998), que sitúa la superdotación en la intersección de tres variables (figura 6.1): La habilidad intelectual muy por encima de la media, el compromiso con la tarea y una creatividad elevada. Una de estas variables, por sí sola, no implica la superdotación, sino que es necesaria la presencia de las tres variables y su aplicación a cualquier área. Por otra parte, esta teoría considera que el estudiante con "talento" es el que muestra alto nivel en alguna de las variables, pero de forma independiente. Renzulli indica que la forma de enseñanza influye en el desarrollo y las capacidades que desarrollen los alumnos.

Fig. 6.1 Modelo de superdotación de los anillos de Renzulli.

Otro modelo basado en el rendimiento es el "modelo diferenciado de dotación y talento" propuesto en 1985 por F. Gagné, quien diferencia la superdotación del talento y distingue entre las destrezas que se poseen de manera natural, y son de naturaleza genética (“dones” o “aptitudes”), y las que se desarrollan (“talentos”). Las aptitudes se pueden transformar en talentos, pero hay ciertos factores (los “catalizadores”) que pueden favorecer o impedir esa transformación (Gagné, 2000). Este modelo incluye la casualidad y la suerte entre los factores que influyen sobre las capacidades naturales y sobre los catalizadores. Gagné distingue, además, cinco niveles para medir la superdotación y el talento: medio, moderado, alto, excepcional y extremo.

6.1.2.4 *Modelos socioculturales*

Conceden importancia al contexto social y cultural en el que se desenvuelve el alumno. Uno de estos modelos ha sido propuesto por Mönks en 1992, mediante la ampliación del modelo de Renzulli para incluir a la familia, los compañeros y la escuela (figura 6.2).

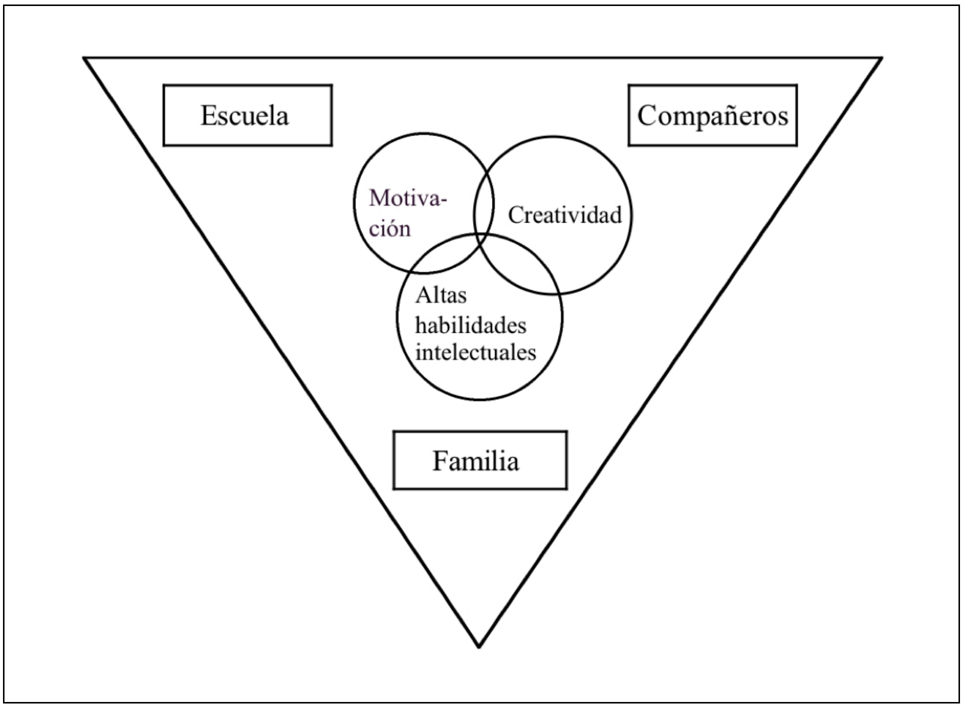


Fig. 6.2 Modelo de superdotación de Mönks.

Otro modelo sociocultural es el de Tannenbaum, formulado en 1986 y revisado en 1997. Contempla talentos anómalos, como los calculistas de calendarios. Considera que hay cinco factores que intervienen en la superdotación: Capacidad general, aptitudes específicas excepcionales, factores no intelectuales (como la motivación y el autoconcepto), contextos familiares y escolares estimulantes e influyentes y el factor suerte.

6.1.2.5 *Modelos surgidos en España*

En Torrego (2011) se resumen diversos modelos recientes, entre los cuales hay algunos elaborados en España como resultado de investigaciones llevadas a cabo en las universidades Complutense de Madrid, de Murcia y de Santiago. Uno de ellos es el "modelo global de superdotación y talento" propuesto por L.F. Pérez. En su elaboración se utilizan ideas de algunos modelos de rendimiento, principalmente del de Renzulli.

Otro modelo explicativo de la superdotación ha sido elaborado por M.D. Prieto y L. Castejón. Estos autores identifican cuatro componentes que deben estar presentes en los estudiantes de altas capacidades: Habilidad intelectual, capacidad de manejo de conocimiento, personalidad y el ambiente. Son componentes independientes pero hay que tener un nivel mínimo en cada uno de ellos.

6.1.3 CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL TALENTO Y DE LA SUPERDOTACIÓN

Son muchas las características atribuidas al talento y la superdotación. Los interesados en disponer de una catalogación de tales características pueden consultar, por ejemplo, Albes y otros (2012). En este documento se reúne información de varias publicaciones y se confecciona una amplia relación de características de los estudiantes de altas capacidades, clasificadas en: características generales, por el estilo de aprendizaje, según sus motivaciones e intereses, a partir de las características cognitivas, relacionadas con la creatividad e imaginación, relativas a la disincronía o asincronía, y sociales y emocionales. También se muestran indicadores de las altas capacidades para cada una de las etapas educativas: E. Infantil, E. Primaria y E. Secundaria. Posteriormente se presentan perfiles de estudiantes con altas capacidades, los cuales ponen de manifiesto la existencia tanto de alumnos con éxito como de estudiantes con bajo rendimiento dentro de ese colectivo.

6.1.4 CARACTERÍSTICAS DEL TALENTO MATEMÁTICO

La identificación de la superdotación y el talento en matemáticas se basa en verificar si los sujetos poseen o no ciertas habilidades matemáticas. En la literatura hay pocas descripciones de estas habilidades. Díaz y otros (2008), Pasarín y otros (2004) y Ramírez (2012) ofrecen listados de descripciones del talento matemático realizadas por Freiman (2006), Greenes (1981), Krutetskii (1976), Miller (1990) y Tourón (1998). A partir de los enumeraciones anteriores, presentamos la siguiente relación de características identificadas como integrantes del talento matemático:

1. Formulación espontánea de preguntas que van más allá de la tarea matemática propuesta.
2. Flexibilidad: Cambian fácilmente de estructura y de estrategia, según convenga.
3. Producción de ideas originales, valiosas y extensas.
4. Localización de la clave de los problemas.
5. Identificación de patrones y relaciones.
6. Construcción de nexos y estructuras matemáticas.
7. Mantenimiento de los problemas y su resolución bajo control.
8. Atención a los detalles.
9. Desarrollo de estrategias eficientes.
10. Pensamiento crítico y persistente en la consecución de los objetivos que se propone.
11. Mostrar abreviación de los procesos al resolver problemas de tipo similar.
12. No estar sujetos a técnicas de resolución que han tenido éxito en el pasado y poder hacer reajustes cuando éstas fallan.
13. Tendencia a recordar las estructuras generales, abreviadas, de los problemas y sus soluciones.
14. Menores muestras de cansancio trabajando en matemáticas que en otras materias.
15. Rapidez de aprendizaje.
16. Capacidad de generalización y transferencia.
17. Capacidad de abstracción.
18. Reducción del proceso de razonamiento matemático. Lo simplifican para obtener soluciones racionales y económicas.

19. Gran capacidad de utilización de pensamiento lógico utilizando símbolos matemáticos.
20. Habilidad para la inversión de procesos mentales en el razonamiento matemático.
21. Memoria matemática. No se trata de una memorización de datos inconexos, sino de recuperación de ideas, principios u operaciones significativas.

Basándonos en nuestra experiencia personal de observación de niños de altas capacidades matemáticas resolviendo actividades y problemas, podemos completar el listado anterior con dos características típicas de la resolución de problemas, como son la rapidez en la resolución y la originalidad de los caminos empleados para la resolución (aunque esta última quizá va ligada a la tercera del listado, en la que se habla de "producción de ideas originales, valiosas y extensas).

A partir de lo expuesto, creemos que los estudiantes con talento matemático de cualquier nivel educativo poseen una mayor cantidad de elementos y relaciones matemáticas que sus compañeros, y los saben utilizar, junto a una alta capacidad para incorporar los resultados de su experiencia en la red de conocimientos y contenidos que ya poseen. Esto, entre otros efectos, conduce a una mayor capacidad y rapidez en la resolución de problemas. En una situación extrema, podríamos considerar que los estudiantes de altas capacidades se sitúan en un nivel más alto que sus pares, desde el cual "visualizan" el constructo matemático inferior y se mueven por él cómodamente.

6.2 EL CONTEXTO EDUCATIVO ACTUAL EN ESPAÑA

En esta sección hacemos una breve descripción de la situación actual en España, y en particular en la Comunidad Valenciana, en lo referente a la identificación de los estudiantes de altas capacidades y a la realización de actuaciones curriculares específicas para dar respuesta a las necesidades educativas que tienen estos estudiantes. Hay varios actores que influyen en la toma de decisiones respecto de los alumnos de altas capacidades (legislación, profesorado, equipo psico-pedagógico del centro, inspección educativa, padres, compañeros de clase y amigos, y los propios niños) y en la puesta en práctica de las decisiones adoptadas. Se sale de los objetivos de este texto analizar, aunque sea superficialmente, cada uno de ellos, por lo que nos hemos centrado en los dos actores que consideramos más relevantes, aparte del propio estudiante, que son la legislación educativa vigente y el profesorado.

6.2.1 El contexto legislativo

Una mirada retrospectiva a las leyes orgánicas reguladoras del sistema educativo no universitario español que han estado vigentes durante la democracia nos permite observar que la LGE (aprobada en 1970) incluye, en un capítulo dedicado a la educación especial, dos artículos en los que se dice que "se prestará una educación especial a los escolares superdotados para el debido desarrollo de sus aptitudes" y que "se procurará que su programa de trabajo, utilizando métodos de enseñanza individualizada les facilite, una vez alcanzados los niveles comunes, obtener el provecho que les permitan sus mayores posibilidades intelectuales". Implícitamente, la LGE propugna las actividades de profundización como metodología de enseñanza. La primera ley de educación redactada en la época democrática actual es la LOGSE (aprobada en 1990), que hace mención genérica a los alumnos con necesidades educativas especiales, sin definir explícitamente este concepto, aunque queda patente en el articulado que se refiere a los alumnos con deficiencias de aprendizaje. En este sentido, la LOGSE supone un retroceso legal respecto de la LGE, si bien parece que en el ámbito real de los centros de enseñanza nada cambió, ni para bien ni para mal. La LOCE (aprobada en 2002) sí diferencia entre los "alumnos con necesidades educativas especiales", que define como aquéllos que tienen deficiencias de aprendizaje, y los "alumnos superdotados intelectualmente", dedicando un único artículo a establecer los principios de actuación con éstos últimos, entre los que destacan reconocer la posibilidad de flexibilizar la duración de los estudios y promover la realización de cursos de formación específica para el profesorado. Por último, la LOE (aprobada en 2006 y en vigor actualmente) se refiere a los alumnos con necesidades educativas especiales y diferencia entre los alumnos que se han "incorporado tarde al sistema educativo", los que tienen "dificultades específicas de aprendizaje" y los que tienen "altas capacidades intelectuales". El articulado de la LOE plantea, en relación con todo el alumnado con necesidades especiales, el establecimiento de procedimientos de identificación temprana, la realización de adaptaciones curriculares y la necesidad de dedicar recursos a profesorado especializado, a formación del profesorado ordinario y a otras medidas de atención. Cuando se refiere de manera particular al alumnado con altas capacidades, la LOE plantea la necesidad de desarrollar métodos de identificación y planes de actuación específicos y de flexibilizar la duración de los estudios de estos alumnos.

En resumen, se aprecia que sólo en los últimos diez años se ha iniciado un tímido interés de las autoridades educativas nacionales por atender adecuadamente a los estudiantes con altas capacidades. Pero la transferencia de esta responsabilidad a los gobiernos autonómicos ha hecho que en diferentes partes de España se hayan adoptado posturas diversas, que en general están siendo muy poco activas y productivas.

En la Comunidad Valenciana, los currículos oficiales actuales adoptan la misma línea expresada en la LOE respecto de los estudiantes con altas capacidades. Así, en el currículo oficial de E. Primaria, se indica que los centros "desarrollarán y completarán el currículo establecido en este decreto, así como las medidas de atención a la diversidad establecidas ..., adaptándolos a las características del alumnado, con el fin de atender tanto al que tiene dificultades de aprendizaje como al de mayor capacidad o motivación para aprender" y remite al desarrollo posterior de la legislación para los aspectos concretos. En cuanto al currículo de ESO, se limita a repetir el texto de la LOE que mencionábamos mas arriba. El currículo de Bachillerato tan solo manifiesta la posibilidad de flexibilizar la permanencia de los alumnos de altas capacidades en este periodo educativo conforme a la normativa que se desarrolle.

El desarrollo del currículo de E. Primaria en la Comunidad Valenciana en lo referente a la atención a los alumnos con altas capacidades se centra, en la práctica, en fijar los requisitos y el procedimiento para autorizar a un niño a acceder a la aceleración mediante el salto de un curso. Un requisito necesario es obtener al menos 130 puntos en un test estandarizado de cociente intelectual, que valora las capacidades verbales, numéricas, lógicas y memorísticas. No entramos aquí en más detalles, ya que no es el objetivo de este texto.

6.2.2 EL CONTEXTO DOCENTE.

La realidad de los centros de enseñanza valencianos en relación con los estudiantes de altas capacidades matemáticas es bastante diferente en E. Primaria y E. Secundaria. La administración educativa ha empezado a adoptar durante la última década medidas conjuntas para ambos niveles educativos, que son insuficientes y poco eficaces. Por ejemplo, la Generalitat Valenciana ha implementado en los cursos 2008-2012 un programa experimental de innovación educativa y enriquecimiento curricular en el que centros de E. Primaria y E. Secundaria seleccionados diseñaban e implementaban actuaciones dirigidas al conjunto del alumnado de la clase pero con atención específica a los estudiantes de altas capacidades que hubiera en ella. Todavía es pronto para ver si la inversión hecha durante estos cuatro años, económica y de esfuerzo del profesorado participante, da los frutos deseables. Por otra parte, desde la perspectiva de los docentes, el profesorado de E. Primaria con algún alumno de altas capacidades matemáticas en su aula se reparte entre los que no reconocen la necesidad de llevar a cabo una actuación diferenciadora y los que deciden intentar atender las necesidades de su alumno. Estos últimos se ven enfrentados a un problema que no pueden resolver por falta de formación especializada, tanto matemática como didáctica, y de recursos externos que pudieran servirles de apoyo. La queja generalizada de los maestros es que no saben cómo tratar a los niños de altas capacidades matemáticas porque no han recibido formación especializada suficiente y porque tampoco tienen acceso a materiales diseñados, listos para ser utilizados en clase, con los que poder preparar una programación de su asignatura de matemáticas adaptada a estos alumnos. En todo caso, es justo reconocer que siempre ha habido algunos centros educativos o maestros a título individual, que se han preocupado por buscar información y materiales de enseñanza, o diseñarlos ellos mismos, y experimentar actuaciones específicas con sus alumnos.

Esta escasez de formación, recursos y motivación en E. Primaria hace que, cuando se detecta un estudiante que supera las pruebas y observaciones correspondientes y es clasificado como estudiante superdotado, la solución más generalizada que se le ofrece es la de aplicarle una aceleración, con la esperanza de que el salto de curso lo sitúe en el curso correspondiente a su nivel intelectual. Pero hay una cantidad significativa de estudiantes de E. Primaria que, teniendo una capacidad matemática claramente superior a la media, no alcanzan los requisitos necesarios para poder acceder a la aceleración. Estos estudiantes, en muchos casos no reciben ninguna atención especial y, cuando la reciben, suele ser inadecuada o insuficiente.

La situación en E. Secundaria es bastante diferente de la descrita respecto de E. Primaria. Por una parte, la cantidad de materiales para los primeros cursos de E. Secundaria es escasa, aunque algo mayor que la de E. Primaria, y sí existe bastante diversidad de materiales docentes para los cursos superiores de E. Secundaria, si bien en general no están organizados para atender al colectivo que nos ocupa. Por otra parte, el profesorado de matemáticas de este nivel educativo, por su formación más especializada, está en condiciones de encontrar materiales curriculares, de adaptarlos a las particularidades de sus alumnos, o de diseñar ellos mismos sus propios materiales curriculares adaptados. En bastantes centros de E. Secundaria, el profesorado de matemáticas está desarrollando desde hace varios años acciones efectivas de atención y apoyo a sus alumnos de altas capacidades matemáticas. Y es frecuente una forma particular de trabajo en estos niveles mediante la preparación para olimpíadas matemáticas o pruebas parecidas.

La cantidad de literatura sobre los estudiantes de altas capacidades está creciendo rápidamente, pero la inmensa mayoría de estas publicaciones están dedicadas a aspectos psicológicos y pedagógicos generales, tales como la detección, la evaluación o actuaciones sociales en estudiantes y padres. Son escasas las fuentes de información (publicaciones, páginas web, etc.) que se centran en la atención escolar al talento matemático y en hacer propuestas específicas detalladas de actuaciones en las clases de matemáticas. Tan sólo unas pocas publicaciones incluyen propuestas curriculares de temas de matemáticas suficientemente detalladas como para poder ser usadas por un profesor en sus clases. Y de estas pocas publicaciones, las que se centran en la E. Primaria son la excepción.

6.3 RESPUESTAS DE FORMACIÓN PARA LOS ALUMNOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA DE ALTAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS

En la sección anterior veíamos que, aunque existe un marco legal adecuado, en la práctica es difícil lograr que en los centros de enseñanza se atiendan las necesidades de los niños de altas capacidades, en especial en matemáticas. No obstante, sí existen algunas maneras de ayudar a los niños de E. Primaria de altas capacidades matemáticas a poner en práctica y desarrollar sus habilidades. Hay varios de tipos de actividades que se realizan con niños interesados por las matemáticas o de altas capacidades. En esta sección hacemos un recorrido por los tipos de actividades más frecuentes. Hemos diferenciado entre actividades extraescolares, muchas veces iniciadas como reacción ante las carencias de la enseñanza reglada, y actividades escolares, fijadas y reguladas por el marco legal vigente.

6.3.1 FORMAS DE APOYO EXTRAESCOLAR

Existe una variedad de organizaciones (asociaciones de padres, sociedades de profesores, centros de enseñanza primaria o secundaria, universidades, empresas) dedicadas a apoyar a los alumnos de altas capacidades matemáticas, con actuaciones consistentes en preparar y desarrollar actividades de diverso tipo, fuera del contexto escolar de las clases regladas. La mayoría de estas actuaciones se dirigen a estudiantes de los últimos cursos de E. Primaria y de E. Secundaria, aunque son fácilmente trasladables a cursos inferiores de E. Primaria con las adaptaciones necesarias. Sin ánimo de ser exhaustivos, los principales tipos de acciones que se desarrollan actualmente son:

- De tipo curricular: Están centradas en mejorar la formación matemática de los niños, intentando cubrir diversos contenidos, procesos y habilidades matemáticos. Es el caso de algunos *talleres de matemáticas* organizados en ciertos centros de E. Primaria para sus alumnos, en los que se propone a los estudiantes realizar actividades de diverso tipo que, por algún motivo, no tienen cabida en las clases ordinarias, pero que están centradas en los mismos contenidos matemáticos. En la mayoría de los casos, estas actividades están organizadas por profesores de matemáticas de los centros.
- De resolución de problemas: Tienen como objetivo desarrollar algunas destrezas matemáticas de los estudiantes mediante un entrenamiento específico en resolución de problemas, pero que no están planificadas teniendo en cuenta la formación matemática escolar. Una de estas actuaciones son las *olimpíadas matemáticas* o competiciones similares, basadas en la resolución correcta de la mayor cantidad posible de problemas. El entrenamiento de los estudiantes para participar en las competiciones se suele hacer a lo largo del curso, en sesiones periódicas después de las clases. En España destacan las olimpíadas de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y las pruebas Cangur, pero también hay numerosas competiciones de ámbito regional o local que completan la oferta de este tipo de actividades.

  Las colecciones de problemas olímpicos publicadas por los organizadores de algunas olimpiadas (por ejemplo la publicada por la Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana Al-Khwarizmi) pueden servir como fuente de material complementario para los maestros, pues les permiten seleccionar problemas adecuados a sus alumnos de altas capacidades matemáticas y a los contenidos de sus clases.

Otro estilo de actuaciones de este tipo, que están desarrollándose con el auge de internet, es el diseño de páginas web en las que periódicamente se plantean a los estudiantes nuevos problemas para que los resuelvan. Algunas de estas páginas están creadas con el objetivo de que los profesores las utilicen en sus clases como estímulo para sus alumnos o como complemento para los más aventajados; otras se dirigen a los padres y los propios estudiantes para que, a su conveniencia, entren en la web y resuelvan los problemas o actividades planteados. Un ejemplo de estas actuaciones es la página web de Nrich, que describimos con detalle más adelante. Con el paso del tiempo, estas páginas web llegan a acumular una gran cantidad de problemas y actividades, lo que las convierte en una completa base de datos de mucha utilidad para los profesores si las webs disponen de un sistema eficaz de búsqueda y de una organización de los problemas basada en contenidos, procesos o destrezas matemáticos, niveles educativos, dificultades, etc.

- De tipo lúdico: Se trata de actividades en las que se proponen a los estudiantes actividades, participación en juegos, resolución de problemas, etc. en contextos informales no específicamente matemáticos. Estas actividades generalmente sólo necesitan conocimientos matemáticos elementales, pues su objetivo es que los estudiantes pongan en juego una combinación de habilidades de razonamiento lógico, observación, visualización, comparación, clasificación, razonamiento inductivo, destreza manual, etc. Se trata de habilidades no específicamente matemáticas, pero que sí son importantes y necesarias para progresar en el dominio de las matemáticas, a las que no se les suele prestar la debida atención en los currículos oficiales ni en los centros de enseñanza. Un ejemplo de este tipo de actividades es el taller de Altas Capacidades Intelectuales (Alcain) que se realiza en Valencia con niños de E. Primaria.
- Actividades mixtas: Combinan varios de los tipos anteriores. El principal ejemplo de este tipo en España son las organizadas por Estalmat[4] (Estímulo del Talento Matemático) en las diferentes comunidades autonómica

4. El proyecto Estalmat fue ideado e impulsado por Miguel de Guzmán en 1998, con el apoyo de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Véase De Guzmán (s.f.).

españolas. Estalmat organiza unas sesiones de trabajo a lo largo del curso académico en las que participan grupos de estudiantes que se dedican a resolver problemas y realizar actividades de investigación relacionadas con una amplia variedad de temas matemáticos no abordados en la enseñanza oficial no universitaria.

Existen en España varias asociaciones de padres de niños de altas capacidades, como la Asociación Valenciana de Ayuda al Superdotado y el Talentoso (AVAST) en la Comunidad Valenciana. El rango de actividades de estas asociaciones es amplio: desde ofrecer apoyo psico-pedagógico a padres y niños hasta organizar conferencias y talleres de diversos temas, entre los que con frecuencia hay un taller de matemáticas.

Una actividad poco desarrollada en España, pero con larga tradición en otros países es los *campamentos de matemáticas* (generalmente de verano), en los que los participantes dedican el tiempo a una combinación de actividades matemáticas, lúdicas y culturales.

Un excelente ejemplo de página web dedicada a los estudiantes de altas capacidades matemáticas, mencionada antes, es la que mantiene el grupo Nrich, de la Universidad de Cambridge (G.B.), formado por profesores de matemáticas y de educación matemática con larga experiencia en la enseñanza de las matemáticas en diferentes niveles educativos. En su web, el grupo Nrich publica cada mes una lista de problemas dirigidos a estudiantes no universitarios. Los estudiantes pueden enviar sus soluciones y Nrich publica en la web, para cada problema, una o varias de esas soluciones, especialmente originales o interesantes. Además, Nrich realiza actividades de formación del profesorado de matemáticas de los centros de enseñanza no universitaria en la gestión de las clases de matemáticas con alumnos de altas capacidades.

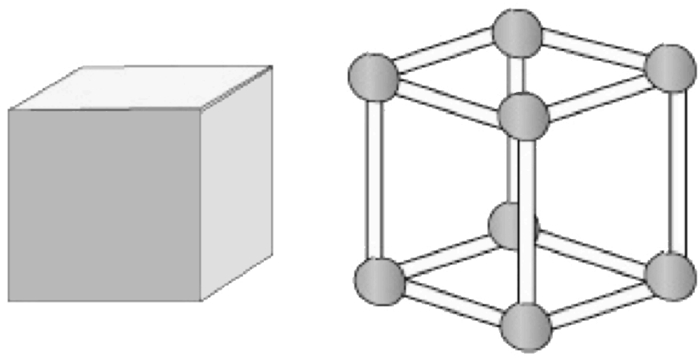
Cada problema de la web de Nrich está clasificado según su contenido matemático, la *etapa*[5] a la que va dirigido y su grado de dificultad dentro de la etapa. En ocasiones, los problemas incorporan applets que permiten a los

5 El currículo oficial británico está organizado en cinco *stages*, etapas, de progreso que trascienden a los cursos, ya que abarcan los 12 años de las enseñanzas primaria y secundaria (edades de 5 a 17 años). Cada asignatura tiene definidos unos objetivos de aprendizaje para cada etapa y los estudiantes avanzan de una etapa a la siguiente a su ritmo, pudiendo convivir en la misma aula estudiantes de varias etapas y pudiendo un estudiante estar en distintas etapas en diferentes asignaturas.

estudiantes realizar fácilmente ejemplos o comprobaciones. Además de la página para los estudiantes, cada problema tiene dos páginas más: una página con sugerencias didácticas, dirigida a los profesores, sobre la utilización del problema en clase y otra con una o más soluciones aportadas por los estudiantes. Pero lo que hace que muchos de estos problemas sean particularmente útiles para los profesores de E. Primaria y E. Secundaria es la riqueza matemática de su contenido, formado por varios subproblemas encadenados, de complejidad variada, que hace a los problemas adecuados para ser planteados a todos los estudiantes, de diferentes capacidades matemáticas, que conviven en un grupo de clase. Todos los estudiantes podrán abordar el problema y resolver al menos una de sus partes, avanzando cada alumno más o menos, dependiendo de sus conocimientos del tema y de su capacidad matemática. En la figura 6.3 vemos un ejemplo de la etapa 1 (“stage 1”, que equivale aproximadamente a los cursos 1º y 2º de E. Primaria en España) y nivel de dificultad 2 (el máximo es 3).

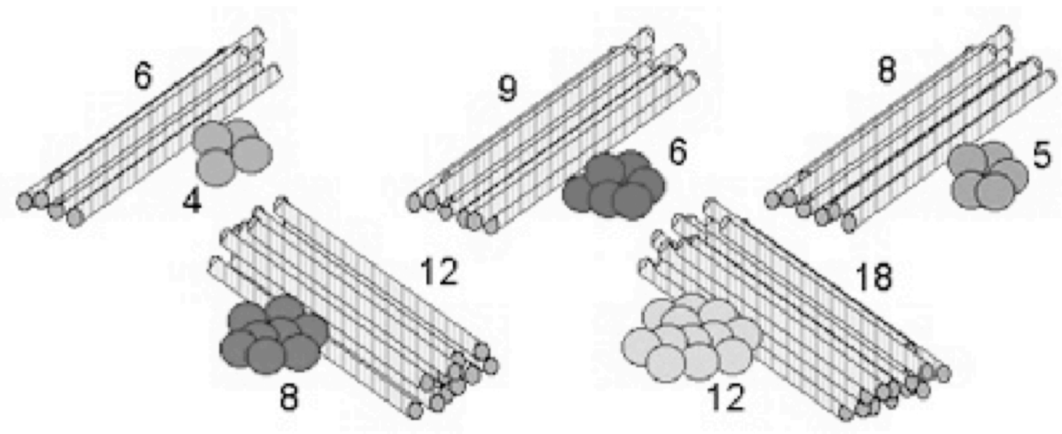
ESQUELETOS DE FIGURAS

Los esqueletos de figuras espaciales se hacen con bolas de plastilina y pajitas de refresco. En la figura se ve un cubo y su esqueleto.



ESQUELETOS DE FIGURAS (*cont.*)

Aquí tienes varios montones de bolas y pajitas.



Debajo ves dibujos de varios poliedros. Mira cada poliedro y elige el montón de bolas y pajitas adecuado para construirlo.

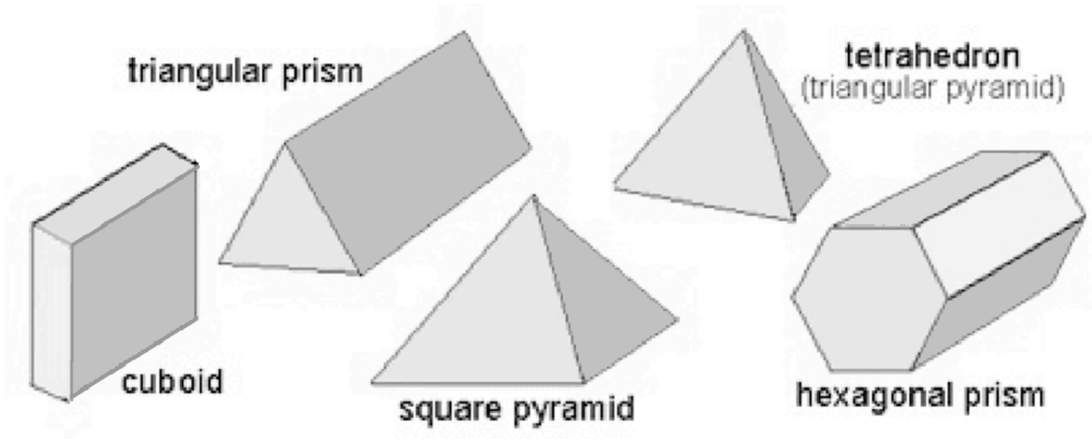


Fig. 6.3 Una actividad de Nrich para 1º y 2º de E. Primaria.

El objetivo de esta actividad es que los niños observen algunos elementos geométricos de los poliedros (aristas, vértices y caras) para inducir su progreso hacia las formas de razonamiento matemático del nivel 2 de van Hiele. En la práctica, es conveniente empezar dejando un tiempo para que los niños jueguen libremente con las pajitas y las bolas y se familiaricen con el material. Aunque los niños usan hojas de papel con los dibujos de los poliedros, es muy conveniente tener también modelos físicos en el aula para poder verificar las respuestas contando los vértices, las aristas y las caras.

Todos los niños podrán hacer construcciones con las pajitas y las bolas, por lo que la actividad es adecuada para toda la clase. Sin embargo, al realizar esta actividad, las diferentes capacidades matemáticas de los alumnos se pueden observar en varios detalles: Puede haber niños que construyan los esqueletos de los modelos con los que están más familiarizados, pero no los otros. También es posible encontrar niños que son capaces de construir el esqueleto de un poliedro, pero no saben deducir previamente qué montón de pajitas y bolas deben coger porque no saben contar las aristas y los vértices. Algunos niños tendrán dificultades para visualizar los poliedros a partir de los dibujos en la hoja si no los ven físicamente, pues no saben representar mentalmente los ángulos entre las caras ni las partes ocultas del sólido. Estos detalles, que diferencian las formas de resolver la actividad de unos niños y otros, nos pueden dar información sobre la capacidad matemática de los alumnos.

Enla figura 6.4 vemos otro ejemplo, éste aritmético, de la etapa 2 (“stage 2”, que equivale aproximadamente a los cursos 3º a 6º de E. Primaria en España) y nivel de dificultad 2:

EL FLAUTISTA DE HAMELIN

El Flautista de Hamelin es una historia que tal vez has oído o leído. Este hombre, al que se suele representar vestido con vivos colores, conduce a las ratas fuera de la ciudad tocando su flauta - y también los niños siguieron su música.

Supón que había 100 niños y 100 ratas. Suponiendo que todos ellos tenían la cantidad normal de pies o patas, en la ciudad había en total 600 extremidades de niños y ratas.

Pero imagina que sólo sabes la cantidad de extremidades de niños y ratas pero no sabes cuántos niños o ratas había.

El reto es *investigar cuántos niños y ratas puede haber si el número de extremidades es 600*. Para empezar, sabes que puede haber 100 niños y 100 ratas. *Pero* también puede haber 250 niños y 25 ratas. Investiga qué otras cantidades de niños y ratas puedes encontrar.

Recuerda que debe haber 600 extremidades en total, que las ratas tienen 4 patas y los niños tienen 2 piernas.

Cuando sea momento de juntar los resultados que hayas obtenido, puedes organizarlos escribiendo algo como esto:

a) 100 niños y 100 ratas - El mismo número de ambos.
b) 150 niños y 75 ratas - El doble de niños que de ratas.
c) 250 niños y 25 ratas - Diez veces más niños que ratas.

Merece la pena explorar con más detalle. Probablemente surgirán otras cosas cuando explores.

Además, se puede plantear también la pregunta habitual: *¿Qué pasaría si ...?*

Fig. 6.4 Una actividad de Nrich para 3º a 6º de E. Primaria.

Este problema recuerda al problema de las gallinas y los conejos, tan utilizado en las clases de resolución de problemas con futuros profesores, pero hay dos diferencias entre ambos: En el problema de las gallinas y los conejos se suele usar números pequeños. En el problema del flautista sólo hay una variable (extremidades), mientras que en el de las gallinas y los conejos hay dos variables (cabezas y patas). El uso de números grandes en un problema planteado a niños de los primeros cursos de E. Primaria presenta un elemento de dificultad que puede resultar atractivo para los niños de mayor capacidad matemática de cálculo. La existencia de varias soluciones puede ser una novedad para estos niños. Por otra parte, el contexto del cuento es un elemento que da significado a las preguntas matemáticas. Este problema permite a profesor y estudiantes explorar diferentes formas de representar la información. El profesor puede plantear una extensión del problema a los niños de más capacidad cambiando el número de extremidades, con el fin de que los niños encuentren diversas relaciones entre los números de piernas y de patas e intenten generalizar una relación. Otras extensiones posibles propuestas para esta actividad desde Nrich consisten en usar un animal que tenga más de cuatro patas y en usar niños y dos animales con cantidades diferentes de patas.

Como se ve, este problema es accesible a todos los niños de los cursos 3º a 6º si se utilizan números suficientemente bajos pero, al mismo tiempo, ofrece al profesor la posibilidad de plantear nuevas preguntas, que pueden ser adecuadas para iniciar a los niños más adelantados en el uso de la notación simbólica y en preálgebra.

6.3.2 FORMAS DE APOYO ESCOLAR

Todas las actividades descritas en la subsección anterior son interesantes y ayudan a los estudiantes de altas capacidades a desarrollar su potencial matemático, pero no son útiles para resolver el principal problema con el que se encuentran estos estudiantes, que es su participación en las clases de matemáticas en su centro de enseñanza. Es suficientemente conocido que la mayoría de alumnos de altas capacidades de E. Primaria que se ven obligados a asistir a las clases de matemáticas del curso que les corresponde por su edad no reciben una ayuda adecuada y las clases les resultan demasiado fáciles y aburridas.

El sistema educativo puede ofrecer tres tipos de actuaciones para dar una respuesta educativa a estos alumnos:

- *Aceleración*: Consiste en adelantar al estudiante de altas capacidades para que vaya a clase de un curso superior. En España se aplican mayoritariamente dos variantes. Por una parte, cuando un estudiante sólo destaca en una o dos asignaturas, la aceleración consiste en que asista en esas asignaturas a las clases del curso siguiente. Esta solución dista de ser perfecta, pues obliga al estudiante a pasar de una clase a la otra cada día y al centro escolar a coordinar los horarios de los dos grupos en los que participa el estudiante, pues en caso contrario éste perderá algunas clases de otras asignaturas cada semana.

  Por otra parte, cuando un estudiante destaca en todas o la mayoría de las asignaturas, se procede a integrarle plenamente en un grupo del curso superior al que le corresponde por su edad. Esta solución es más cómoda y sencilla que la anterior, especialmente para los profesores, aunque tiene dos puntos débiles; uno se presenta cuando el desarrollo emocional y de habilidades sociales del niño es inferior al de sus nuevos compañeros, lo cual puede dificultar su integración en el nuevo grupo. El otro punto débil es que, frecuentemente, el progreso en el aprendizaje de los niños acelerados es más rápido que el de sus nuevos compañeros de curso, por lo que en dos o tres años vuelven a encontrarse en la situación de dominar por completo los contenidos propios del curso en el que se encuentran (ya acelerados) y requerirían otro avance de curso, al menos en matemáticas.

  Existen numerosos maestros, psicólogos educativos y padres que rechazan la aceleración en E. Primaria por los problemas de integración que se pueden producir y abogan por soluciones que permitan a los niños de altas capacidades seguir en el curso que les corresponde. Las principales de estas soluciones son:

- *Agrupamiento*: Consiste, cuando hay varios niños de altas capacidades matemáticas en el mismo curso, en reunirlos en la misma clase para formar un grupo de trabajo con ellos y realizar una adaptación curricular común.
- *Enriquecimiento curricular*: Consiste en proporcionar a los alumnos de altas capacidades un complemento que haga su formación matemática más rica y variada, que estimule sus deseos de aprender, etc. mediante contenidos de temas que no se estudian normalmente en los currículos ordinarios.
- *Profundización*: Consiste en proporcionar a los alumnos de altas capacidades actividades complementarias integradas en los temas del curso, de forma que les ayuden a tener un mayor dominio de esos contenidos y a aprender partes de los temas que no se estudiarán porque no están incluidos en el currículo ordinario, todo ello teniendo cuidado de no entrar en los contenidos propios de cursos posteriores.

El enriquecimiento y la profundización tienen la ventaja de mantener a los niños en su curso natural, pero suponen para los maestros un reto muy difícil, al tener que desarrollar bloques de actividades complementarias especiales para estos alumnos en todos los temas del curso y en todos los cursos de E. Primaria. Como comentábamos más arriba, la mayoría de maestros desisten de intentar estas soluciones porque no saben cómo hacerlo y no disponen de materiales preparados para usar en sus clases, en especial en las de matemáticas. No obstante, actualmente es cada vez más fácil encontrar en internet y en algunos libros especializados materiales de matemáticas, resultados por lo general de proyectos de investigación, consistentes en colecciones de ejercicios, problemas o actividades creativas para algunos temas de ciertos cursos (sin que esto quiera decir que son abundantes tales webs).

El enriquecimiento y la profundización tienen el inconveniente de que, con frecuencia, las tareas que preparan los maestros para sus alumnos de altas capacidades son totalmente diferentes de las que preparan para el resto del grupo, lo cual puede inducir a un aislamiento del niño de altas capacidades y a un rechazo por parte de sus compañeros. Muchos niños de altas capacidades no quieren verse diferentes de sus compañeros, por lo que no aceptan fácilmente tener que realizar tareas distintas de las planteadas a sus compañeros.

Por lo tanto, en resumen, lo dicho antes parece indicar que la solución ideal para dar un apoyo a los niños de altas capacidades matemáticas es que los maestros preparen los temas del curso basándose en conjuntos de actividades y problemas ricos, que no sean lineales, sino que presenten diferentes facetas de distintos grados de complejidad y profundidad, de manera que toda la clase trabaje en los mismos problemas (evitando así el aislamiento y el rechazo de sus alumnos), pero que permitan un avance mayor o menor en la resolución, dependiendo de las capacidades matemáticas de los estudiantes. Nuestras actividades de investigación en didáctica de las matemáticas de los últimos años se orientan en esta dirección, con el objetivo de diseñar y experimentar bloques de actividades matemáticas ricas que cumplan los requisitos enunciados antes.

Existen en otros países algunos ejemplos de currículos completos diseñados de acuerdo con estos parámetros. Uno de ellos es el *Mathematics Enhancement Programme* (MEP) presentado por el Centre for Innovation in Mathematics Teaching (CIMT) de la Universidad de Plymouth (G.B.). El MEP incluye planteamientos explícitos del estilo de enseñanza propugnado así como un conjunto completo de recursos curriculares para los cursos de E. Primaria y E. Secundaria. Puesto que el foco de este capítulo son los estudiantes de E. Primaria, nos referiremos sólo a la propuesta curricular de los cursos 1 a 6 (etapas 1 y 2 del sistema escolar británico).

El origen de esta propuesta curricular son los resultados de un proyecto de investigación internacional en el que participó el CIMT y una serie de libros de texto húngara, de los cuales el MEP tomó buena parte de los contenidos de sus cursos. La metodología de enseñanza se basa en una combinación de trabajo individual o por parejas de estudiantes y de actividad interactiva de toda la clase, incluyendo el uso de materiales manipulativos y elementos visuales, especialmente con los estudiantes menos dotados para las matemáticas, y el planteamiento de actividades de extensión o desafío para los estudiantes más avanzados. Los materiales se utilizan también para facilitar a los estudiantes que expliquen y justifiquen sus respuestas a los problemas. Otros componentes de la metodología de enseñanza son la colaboración de los estudiantes más capaces para ayudar a sus compañeros menos hábiles y la resolución de los ejercicios y problemas planteados mediante puestas en común en la clase.

En este contexto de resolución de problemas, el trabajo del profesor es observar a los estudiantes cuando están resolviendo los problemas solos o en parejas, para apoyar a los que estén teniendo dificultades o proporcionar materiales complementarios a los más adelantados.

Una característica interesante del currículo propuesto en el MEP es que está basado en una combinación de ejercicios de práctica de algoritmos aritméticos o de fórmulas, procedimientos de cálculo de magnitudes o conversión de unidades y resolución de problemas. El siguiente es un ejemplo de problema planteado en 4º de E. Primaria:

He dividido el número 10 en dos partes. Después he dividido una parte entre la otra y he obtenido de cociente 4. ¿Cuáles son los dos números?

En las indicaciones sobre la actuación del profesor, se sugiere que éste pida a varios alumnos que expliquen sus soluciones ante la clase, para mostrar diferentes formas de resolver el problema:

1. Tanteo y error básico (verificaciones al azar):

   $10 = 7 + 3$ no sirve porque $7 \div 3 \neq 4$.

   $10 = 8 + 2$ es una solución porque $8 \div 2 = 4$.

2. Tanteo y error organizado:

   Buscando los números *a* y *b*. La regla es: $b = 4 \text{ x } a$

   Haciendo una tabla de valores, se ve que la solución es $a = 2$ y $b = 8$.

a	1	2	3
b	4	8	12

3. Usando ecuaciones:

   $a + b = 10$ y $b = 4x$ a

   $a + (4 \text{ x } a) = 10$

   $5 \text{ x } a = 10$

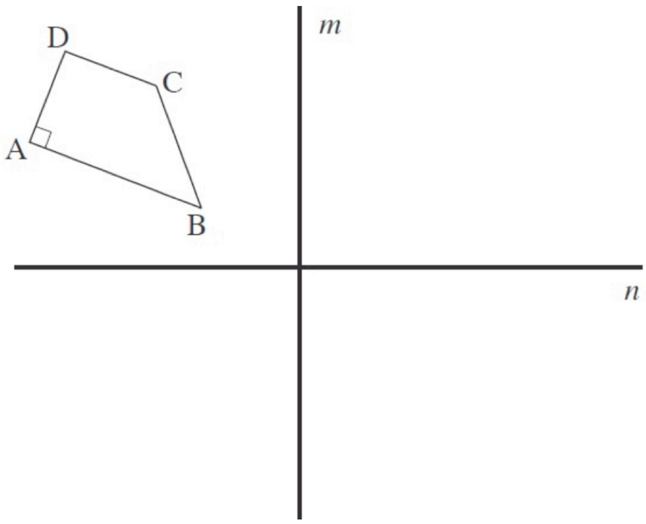
   $a = 2$ y $b = 10 - 2 = 8$.

Observamos que, aunque el problema no es difícil para los alumnos de 4º, que ya han estudiado la división, permite una variedad de formas de resolución de diferentes grados de sofisticación, desde un tanteo elemental hasta el uso de literales y planteamiento de una ecuación simple que puede resolverse sin necesidad de despejar.

También resulta interesante constatar que los contenidos propuestos en los diversos cursos son, por lo general, más elevados que los habituales en otros currículos de E. Primaria. Por ejemplo, en 6º se introducen las ecuaciones y las inecuaciones; también hay un estudio detallado de las isometrías a lo largo de toda la E. Primaria que llega en 6º a plantear problemas de productos de isometrías. En la mayoría de estos problemas, se sugiere al profesor abordar la resolución de los problemas por procedimientos manipulativos y empíricos, si bien en algunos de ellos te ofrece también la posibilidad de resolverlos por métodos abstractos. El siguiente par de problemas (figuras 6.5 y 6.6) pertenece al programa de 6º grado:

A5. *Refleja el cuadrilátero ABCD en el eje m. Después, refleja el cuadrilátero A'B'C'D' en el eje n.*

Marca adecuadamente los vértices de la segunda imagen (los dos ejes son perpendiculares).

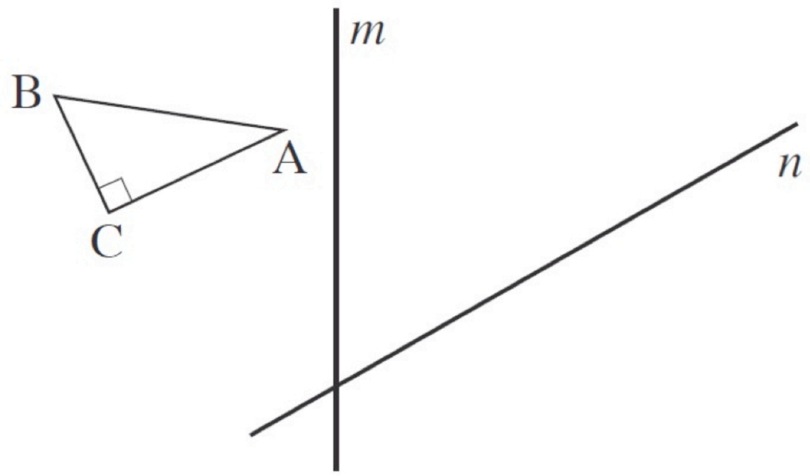


Extensiones: *¿Cómo podemos pasar de ABCD a A"B"C"D" mediante sólo una transformación?*

(Después de haber contestado la pregunta anterior) *¿Cómo podemos demostrar que esta transformación es un giro de 180º?*

Fig. 6.5 Una actividad del CIMT para 6º de E. Primaria.

A6. *Refleja el triángulo ABC en el eje m. Después, refleja el triángulo A'B'C' en el eje n.*
Marca adecuadamente los vértices de la segunda imagen.



Extensiones: *¿Cómo podemos pasar del triángulo ABC al A"B"C" mediante sólo una transformación?*
(Después de haber contestado la pregunta anterior) *¿Qué podemos decir acerca del ángulo de giro?*

Fig. 6.6 Otra actividad del CIMT para 6º de E. Primaria.

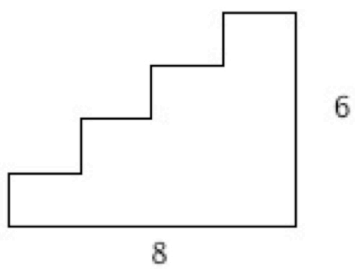
En estos problemas se aconseja al profesor que proponga resolverlos con regla, compás y transportador, lo cual permite avanzar a la mayoría de los estudiantes, pero las extensiones permiten a los estudiantes de altas capacidades avanzar más, ya que estas preguntas sugieren el empleo de razonamiento abstracto, que puede empezar a ser deductivo.

Otro interesante diseño curricular planteado con el objetivo de integrar a los estudiantes de altas capacidades matemáticas en su grupo de clase y de permitir a cada estudiante progresar a su ritmo es el presentado en Gardiner (2007a, 2007b, 2007c). Estas tres publicaciones son el resultado de varios años de experimentaciones de su autor y constituyen una propuesta curricular dirigida a estudiantes de altas capacidades matemáticas y superdotados de la etapa 3 británica (típicamente en los grados 7 a 10, equivalentes a los cursos 6º de E. Primaria a 3º de la ESO; en Gran Bretaña, la E. Primaria comienza a los 5 años), que el autor estima como el 25% de los estudiantes de esos cursos. El contenido de estos libros son problemas y actividades de matemáticas organizados según los diferentes contenidos curriculares de la etapa 3 y de los sucesivos grados (el libro *alfa* basado en el grado 7, el libro *beta* en el grado 8 y el libro *gamma* en el grado 9).

Un aspecto importante al organizar un currículo escolar que tenga en cuenta a los alumnos de altas capacidades matemáticas es la diversidad que podemos encontrar entre éstos. En términos coloquiales, podríamos hablar de los alumnos de notable, los de sobresaliente y los de "siempre 10" como tres niveles de capacidades superiores a la media. Los profesores y diseñadores de contenidos curriculares deben ser conscientes de que estos grupos de alumnos necesitan adaptaciones diferentes, de manera que no podemos esperar que cada actividad o problema que planteemos vaya a ser útil o interesante para todos los alumnos de la clase. Las actividades matemáticamente ricas se caracterizan por incluir subproblemas o variantes que permitan su adaptación a los diferentes grupos de alumnos de la clase. Esto ha sido tenido en cuenta por Gardiner pues, según explica en la introducción, ha dividido los problemas de cada libro en tres partes, de forma que los problemas de la primera parte (*tasters*) se pueden plantear a toda la clase, si bien las partes más difíciles sólo son accesibles para el 25% superior de la población de la etapa 3, los problemas de la segunda parte (*core*) son accesible al 15-20% superior y los problemas de la tercera parte (*extension*) son accesible al 5-10% superior. Veamos algunos problemas propuestos por Gardiner (2007a), para 6º de E. Primaria, que nos permiten apreciar las diferencias entre los sucesivos niveles de dificultad (figuras 6.7 a 6.9):

Alfa, Taster

a La figura con forma de escalera de cuatro peldaños que se ve a la derecha tiene una base de 8 cm. de largo y 6 cm de alto. Encontrar el perímetro de la figura.



b Se han unido dos copias de la figura con forma de escalera de la parte ***a***. Encontrar el perímetro de la figura resultante.

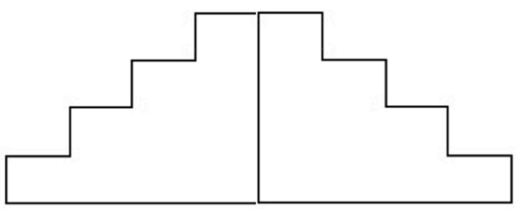


Fig. 6.7 Un problema de Gardiner de dificultad baja para 6º de E. Primaria.

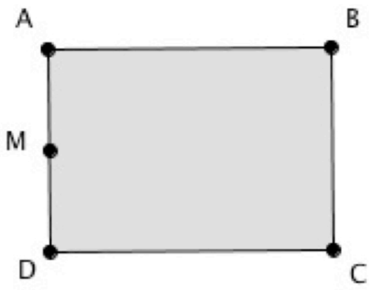
Alfa, Core

En el rectángulo ABCD, el punto M es el punto medio del lado AD. ¿Cómo puedes

a dibujar una línea recta que pase por M y divida el rectángulo en dos partes de igual área?

b dibujar una línea recta que pase por M y corte un cuarto del área total?

*c** dibujar una línea recta que pase por M y corte un tercio del área total?



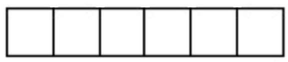
* Esta pregunta está marcada como difícil.

Fig. 6.8 Un problema de Gardiner de dificultad media para 6º de E. Primaria.

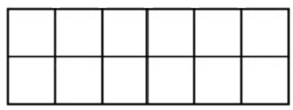
Alfa, Extension

Vamos a ver de cuántas maneras se puede cubrir un rectángulo con baldosas rectangulares de dimensiones 2x1. Los rectángulos que pueden cubrirse deben tener un área de 2*n* unidades.

Los rectángulos más simples con esta propiedad miden 1 de alto y 2*n* de largo. Cada rectángulo 1x2*n* se puede cubrir sólo de una manera.



La siguiente familia más simple de rectángulos con área par son los rectángulos 2x*n*. ¿Cuántas formas hay de cubrir un rectángulo 2x*n* con baldosas 2x1?



1 Supongamos $n = 1$. El rectángulo 2x1 se puede cubrir de . . . formas.

2 Supongamos $n = 2$. El rectángulo 2x2 se puede cubrir de . . . formas.

3 Supongamos $n = 3$. El rectángulo 2x3 se puede cubrir de . . . formas.

4 Supongamos $n = 4$. El rectángulo 2x4 se puede cubrir de . . . formas.

5 Si R_n es la cantidad de formas que hay de cubrir el rectángulo 2x*n* con baldosas 2x1, completa la tabla para resumir los resultados anteriores.

n = longitud del rectángulo 2x*n*	0	1	2	3	4	5	...
R_n = cantidad de formas de cubrir el rectángulo							

6 *a)* Vuelve a contar las R_4 formas de cubrir el rectángulo 2x4. Piensa en cómo cubres la última columna de la derecha del rectángulo. Hay dos formas de colocar la última baldosa:

i) La última baldosa se puede poner vertical.

ii) La última baldosa se puede poner horizontal.

En el caso i), la última baldosa cubre la última columna del rectángulo 2x4, así que antes debes haber cubierto las tres columna anteriores, que se puede hacer de R_3 formas diferentes.

En el caso ii), las dos últimas baldosas se ponen horizontales y cubren las dos columnas de la derecha del rectángulo 2x4, así que antes debes haber cubierto las dos columnas anteriores, que se puede hacer de R_2 formas diferentes.

$\therefore\ R_4 = R_3 + R_2$

El mismo razonamiento muestra que $R_5 = R_4 + R_3$, $R_6 = R_5 + R_4$, y así sucesivamente.

b) Usa la regla descubierta en el apartado **a** y el dato de que $R_1 = 1$ y $R_2 = 2$ para calcular cuántas formas diferentes hay de cubrir un rectángulo 2x20 con baldosas 2x1.

Fig. 6.9 Un problema de Gardiner de dificultad alta para 6º de E. Primaria.

Al comparar los problemas anteriores, se aprecia claramente la diferencia de dificultades. El primer problema se podría plantear a todos los estudiantes de un grupo ordinario de 6º de E. Primaria y probablemente lo resolverían correctamente más del 25% superior del grupo. El segundo problema también se puede plantear a toda la clase, y la mayoría de estudiantes resolverán la parte *a*. La parte *b* ya sólo está al alcance de una parte de los estudiantes y cabe esperar que sólo los alumnos de capacidad matemática realmente alta para este curso podrán resolver la parte *c*. En cuanto al tercer problema, los apartados 1 a 5 están planteados dirigiendo a los estudiantes hacia una recogida sistemática de datos empíricos para producir un proceso de inducción que los mejores estudiantes serán capaces de generalizar a partir de la tabla del apartado 5. El apartado 6 introduce a los estudiantes a los que va dirigido en los procesos de razonamiento deductivo y amplía sus conocimientos matemáticos poniéndoles en contacto con la sucesión de Fibonacci.

6.4 ALGUNOS CASOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS POR ALUMNOS DE E. PRIMARIA DE ALTAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS

En la sección 1.4 hemos presentado una lista de características de la forma de actuar de estudiantes cuando realizan actividades matemáticas que permiten a profesores y padres detectar a niños con una capacidad matemática más alta de lo normal. Ahora vamos a presentar algunos casos de niños de altas capacidades matemáticas resolviendo problemas en cuyas actuaciones se puede identificar alguna de esas características.

Desde hace varios años estamos trabajando con niños de altas capacidades o superdotados, siempre en un ámbito extraescolar, en talleres de resolución de problemas de matemáticas. Apoyándonos en las propuestas de desarrollo curricular que hemos descrito en la sección 3, es especial en la de Nrich, estamos diseñando e implementando de manera experimental bloques de *actividades matemáticas ricas* para diferentes temas y cursos de E. Primaria. Las características principales de las actividades matemáticas ricas son:

- Estar ligadas a los contenidos ordinarios del currículo oficial de Matemáticas de E. Primaria.
- Basarse en la metodología de enseñanza mediante resolución de problemas.
- Permitir a los profesores la posibilidad de graduar su dificultad o complejidad para adaptarlas a las diferentes capacidades o conocimientos matemáticos de los estudiantes presentes en el aula, de manera que todos los estudiantes trabajen sobre los mismos temas, resolviendo actividades relacionadas pero adaptadas a su habilidad matemática.

Las formas de razonar al resolver problemas de matemáticas de los estudiantes de E. Primaria con altas capacidades matemáticas pueden ser variadas si los problemas propuestos permiten una diversidad de aproximaciones. En nuestras experimentaciones hemos observado los siguientes tipos de comportamientos, que están relacionados con algunas de las características del talento matemático enunciadas en las sección 1.4:

a) Formas de razonamiento análogas a las de otros estudiantes de capacidad media de su misma edad. En este caso, lo habitual es que los estudiantes de altas capacidades se distingan por la gran rapidez con que aprenden y resuelven los problemas.

b) Formas de razonamiento análogas a las de estudiantes de capacidad media pero de más edad. Es decir, precocidad en el nivel de razonamiento matemático.

c) Formas de razonamiento distintas a las usuales. En ocasiones, los estudiantes de altas capacidades matemáticas dan la respuesta exacta a los problemas gracias a intuiciones fuera de lo común, que les permiten llegar a alguna conclusión que les ayuda a dar la respuesta exacta aunque, en muchos casos, no sean capaces de explicar cómo han encontrado la solución ni de justificar que realmente es la respuesta correcta.

Otras veces los estudiantes sí siguen un proceso de resolución completo, detallado y consciente, pero utilizan estrategias de trabajo atípicas o manejan la información de manera inusual.

6.4.1 El papel de la intuición en la búsqueda de la solución de un problema

Veamos el caso de un niño de 11 años que, por edad, es de 6º de E. Primaria pero que ha sido acelerado un curso y estudia 1° de ESO. La documentación recogida es la hoja en la que dibuja el polígono y las notas de campo de la investigadora. Le planteamos verbalmente la siguiente actividad:

Dibuja en la hoja de papel un polígono regular de 20 lados.

El siguiente diálogo tiene lugar después de que la investigadora plantee la actividad:

Alumno [nada más terminar de oír el enunciado del problema]: Hacemos $360 \div 20 = 18°$ y con ese ángulo unimos muchos triángulos juntos, 20 [se refiere a los triángulos formados al unir el centro del polígono con sus vértices].

Investigadora: ¿Y qué hacemos con el ángulo de 18°?

A [dibuja dos lados consecutivos con sus triángulos desde el centro y marca el ángulo exterior (figura 6.10)]: Éste mide 18°.

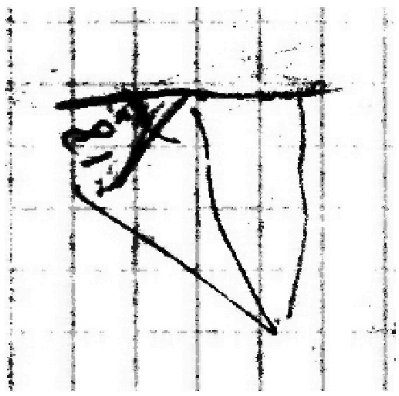


Fig. 6.10.

I: ¿Por qué?

A: Intuición. Yo lo veo, pero no sé por qué es así.

I: ¿Y cómo harías entonces el polígono?

A [señala el ángulo que se forma en un vértice al juntar dos de los triángulos que emplea para dibujar el polígono, que es el ángulo del polígono (figura 6.11)]: Esto mide 162 porque es 180 - 18.

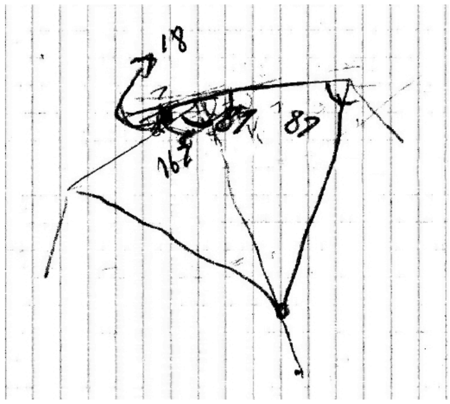


Fig. 6.11.

I: ¿Y qué haces con ese ángulo?

A: Dibujar los triángulos. 162 ÷ 2 es el ángulo [de un triángulo]. Lo dibujamos, y al lado otro, y al lado otro, ... Así hasta 20.

Después de esto la investigadora le sugiere otro procedimiento, más simple, basado en utilizar los 18° como ángulo central (aunque sin llamarlo de esta manera). Al momento de empezar la explicación, el niño ha entendido el procedimiento y no deja que la investigadora le explique más, porque dice que ya sabe qué le va a explicar y considera que el resto de la explicación es innecesario.

Este caso nos parece característico de los estudiantes que, ante el planteamiento de una tarea en la que no se da ninguna indicación sobre cómo resolverla, son capaces de producir un procedimiento de resolución válido, para lo cual han utilizado alguna relación matemática pertinente pero que no es obvia, relación obtenida de manera intuitiva (en este caso la división inicial 360 ÷ 20). Dista de ser evidente que usar el ángulo exterior del polígono regular proporcione un método eficaz para dibujarlo; tampoco es evidente que el valor del ángulo exterior sea igual al del ángulo central (este niño no ha usado nunca Logo). Finalmente, tampoco se puede pensar que el niño haya aprendido esta forma de construcción en el colegio, pues los ángulos exteriores no se usan para operar con los polígonos regulares.

6.4.2. Diferentes resoluciones del mismo problema

Veamos ahora el caso de un grupo de cuatro estudiantes de altas capacidades matemáticas, de edades entre 7 y 9 años que están en los cursos 2º a 4º de E. Primaria, que participaban en un taller extraescolar de matemáticas. La niña B tiene 8-9 años y cursa 3º. El niño C tiene 7-8 años y cursa 2º. El niño D tiene 8 años y cursa 3º excepto en matemáticas, donde ha sido acelerado a 4º. El niño E tiene 8-9 años y ha sido acelerado a 4º en todas las asignaturas. Todos están resolviendo la misma actividad de forma individual, aunque en alguna ocasión hablan entre ellos y hacen juntos algunos pasos de la resolución.

Les planteamos la siguiente actividad verbalmente y por escrito, en una hoja en la que deben dibujar o escribir lo que necesiten para resolverla. Además, disponen de cubos Multilink para representar, si quieren, la actividad. La documentación recogida es la grabación en vídeo de las conversaciones entre los niños y la investigadora y, en algún caso, la hoja de actividades con los dibujos y operaciones realizados.

Un semáforo cambia de color de esta manera: Verde, amarillo, rojo, verde, amarillo, rojo, etc.

¿Qué color tendrá la 26ª luz?

Si tienes clara la respuesta anterior, dime de qué color es la luz 330ª.

A continuación ofrecemos las soluciones dadas por estos cuatro niños a la actividad. El siguiente diálogo tiene lugar entre la investigadora (I) y la niña B:

B [ha construido una fila muy larga con los cubitos, siguiendo la secuencia de colores del semáforo]: Coges ... [coge la fila de cubitos] y después vas contando hasta que te toca el número 26 y el número 26 sería el amarillo [los ha contado siguiendo la secuencia].

I: Muy bien. El 26 sale amarillo. ¿Y el otro? ¿el de 330, lo habéis resuelto vosotros? [I dirige la pregunta también a C, que está sentado junto a B y comparten la fila de cubitos]

B: No.

No sabemos si B habría sabido resolver el problema sin la ayuda de los cubitos o usando sólo tres cubitos, pues tal vez ha construido la fila porque le sirve de juego. La solución de la primera parte de la actividad es muy sencilla, por lo que realmente no permite poner de manifiesto ninguna diferencia respecto a cualquier estudiante de capacidad matemática media de su misma edad, o incluso de menos edad. La segunda parte de la actividad (calcular la posición 330ª) es la que requiere usar estrategias de cálculo más sofisticadas que el recuento. La incapacidad de B para encontrar la solución al caso más complejo, junto con lo anterior, no haría pensar en que tenga una capacidad matemática alta. Sin embargo, sus intervenciones a lo largo de los meses en que se desarrolló este taller muestran que se trata de una estudiante que va afianzando estructuras y conceptos con rapidez, de tal manera que cada curso va *incrementando sus capacidades matemáticas más deprisa* que sus compañeros del colegio, estableciendo diferencias cada vez mayores con ellos.

El niño C ha construido una fila de tres cubitos siguiendo el patrón V-A-R que se da en el enunciado. Comienza leyendo la primera parte del enunciado en voz alta.

C: Empezamos. Contando desde el verde [coge la fila de tres cubitos, señala con la punta del lápiz el cubito verde y sigue señalando cubitos a medida que cuenta] 1, 2, 3, 1 ... [se para señalando el cubito verde y reflexiona durante 2 segundos; a continuación reanuda el recuento a una velocidad significativamente mayor que los primeros números, sin más pausas] 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25 y 26 [señala el amarillo mirando a I].

I: Amarillo.

C: Cae en amarillo.

I: Entonces, para 26, tú has ido haciéndolo y te ha salido amarillo. Pues ése lo tenemos ya.

C: Es amarillo.

I: Vale. Muy bien. ¿Y el 330?

C: Ahora, de mi manera hay que contar hasta 330.

I: ¿Cómo cuentas de tu manera?

C: Uff. Tardaría muchísimo.

I: ¿Tardarías muchísimo? ¿Se te ocurre alguna forma de resolverlo?

C: Umm ... [reflexiona durante 3 segundos] Podríamos contar de tres en tres.

I: Vale. Muy bien.

C: Hasta llegar a 330.

I: Vale, por ejemplo ...

C: Y si nos faltan ...

I: Bueno. ¿Entonces tú qué crees que te saldrá?

C: [piensa]

I: A ver, si cuentas hasta el 330, ...

C: Cuento hasta el 100. Le añado 200.

I: Bueno. A ver.

C: A lo mejor sale.

I: Entonces, el 330, ¿tú tienes idea de qué color será?

C: No.

El comienzo de este diálogo tiene un momento interesante cuando C comienza a contar. Ya había decidido que la estrategia de recuento le llevaría a la solución y sabía que tenía que contar y marcar reiteradamente la secuencia de cubitos V-A-R, pero todavía no había pensado en cómo llevarla a la práctica. Tras contar hasta el 3 y marcar por primera vez la secuencia de cubitos verde, amarillo y rojo, después de señalar el rojo volvió a señalar el verde. Su primer impulso fue volver a recitar el 1, ya que volvía a marcar el cubito verde, pero se dio cuenta de que así no avanzaba. Tras un instante de reflexión, se dio cuenta de cómo debía seguir. El cambio de ritmo del conteo desde que pronuncia el número 4 es evidente en el video y muestra que, en ese momento, ya no tiene dudas.

En el resto del diálogo, C es rápido y se muestra seguro de sus respuestas, incluso cuando, al final, al ver que contar hasta el 330 es muy largo, busca otra estrategia más eficiente; finalmente, reconoce que no sabe cómo encontrar el color de la posición 330ª.

En el momento de resolver la actividad, este niño todavía no había empezado a estudiar la división. La estrategia que propuso para determinar el color de la posición 330 es razonable, pero no supo refinarla para hacerla operativa encontrando una partición cómoda de 330. El niño es consciente de que, si descompone 330 en números menores y cuenta de tres en tres, debería tener en cuenta los restos de cada parte (cuando dice "Y si nos faltan ..."). Nos queda la duda de si, con algo más de tiempo, lo habría logrado.

En relación con las características del talento matemático enunciadas en las sección 1.4, este niño ha mostrado capacidad para *identificar el patrón* presente en la secuencia de colores más allá de la secuencia básica V-A-R (comparando con la niña B, ella no es capaz de usar el patrón mentalmente). También ha mostrado tener *flexibilidad* y capacidad para *controlar la resolución* de la actividad, al darse cuenta de que la estrategia de resolución que había previsto no funcionaba y modificarla rápidamente sobre la marcha. Análogamente, muestra su capacidad para *desprenderse de una estrategia de resolución que ha sido válida en el pasado* (primera parte de la actividad), y que sabe que puede llevarle a la solución en la segunda parte de la actividad, pero que considera que ya no es interesante.

El niño D se ofrece a explicar cómo ha resuelto la segunda parte de la actividad cuando oye que sus compañeros de cursos inferiores (B y C) no saben:

D: Yo lo he hecho con operaciones.

I: A ver, ¿cómo lo has resuelto tú?

D [mira su hoja de actividad, en la que ha escrito las divisiones que ha hecho, y explica]: Yo simplemente he dividido entre 3, [el cociente] da 110, he visto que es divisible. Pues el último, el rojo.

I: ¿Por qué has dividido entre 3?

D: Pues porque es el número de semáforos, la variedad de colores que tiene.

I [se dirige al grupo de niños]: Vemos cuántos grupitos de 3 hay. Y, como le han salido 110 grupos exactos, pues acabará en el último de los tres [colores].

D: Y en este de 26, que también lo he hecho con operaciones, he dividido [26] entre 3, me ha dado 8. He visto que era divisible pero me sobraban dos. Le he sumado 2 al rojo, que sería hasta el amarillo, y es el amarillo.

I: Era rojo, luego verde y amarillo. Muy bien.

Este niño, que sí sabe dividir, aplica la estrategia directa de forma correcta. Tiene claro el objetivo del problema y utiliza correctamente, de manera rápida, la relación matemática que da la solución. Su seguridad y rapidez nos hacen pensar que puede resolver esta familia de problemas independientemente del enunciado particular. Como los niños participantes en el taller eran de 2º a 4º de E. Primaria, no les planteamos la generalización consistente en averiguar el color de la posición n-ésima. Este niño también pone en juego algunas destrezas características de las altas capacidades matemáticas, como la *identificación del patrón y de la relación* que liga la secuencia de tres colores del semáforo con cualquier posición en la lista de cambios de color, y también el *desarrollo de una estrategia eficiente* de resolución.

El niño E estaba sentado en otra mesa del aula, por lo que no formaba parte del grupo de B, C y D, que estaban sentados juntos. Después de haber resuelto las dos partes del problema, le preguntamos cómo ha hecho la segunda parte (color de la posición 330ª):

E: Si el de 26 era amarillo [señalando en su hoja la división 330 ÷ 26 que ha hecho (figura 6.12)], si las luces que queremos saber lo multipli... lo dividimos entre 26, ... hay tre... a la t... ¡Ayyy! a la terc... a la trece sigue siendo 26. Pero, como quedan dos luces fuera, amarillo [la que acaba un grupo completo], rojo, verde [véase la esquina superior izquierda de la figura], es verde.

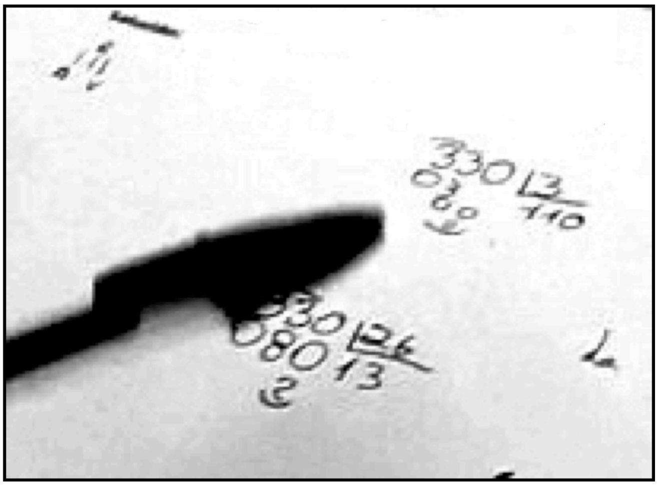


Fig. 6.12.

En su hoja, E no ha escrito nada relacionado con la primera parte de la actividad, por lo que no sabemos si la resolvió aritméticamente o por recuento. En cuanto a la segunda parte, vemos que primero ha dividido, correctamente, 330 entre 3 pero, por algún motivo que no nos explicó, abandonó esa división. En sus explicaciones se refiere a la división 330 ÷ 26. Ha empleado una estrategia inusual, al relacionar 330 con el dato (26) y el resultado (amarillo) de la primera parte de la actividad, poniendo de relieve su capacidad de utilización de la información obtenida previamente y de establecer su relación con el problema actual. También podemos destacar la seguridad con que E explica su estrategia, aunque en un momento dado tenga algunas dificultades verbales para encontrar la palabra correcta ("trece").

En la figura se ve que la división está mal hecha, porque el resto del primer paso no es 8 sino 7. No obstante, este error resulta irrelevante para nuestro análisis pues nos interesa ver cómo utiliza *sus* datos (el cociente 13 y el resto 2) para llegar a la solución. En la parte final de su descripción, vemos que ha tenido cuidado de empezar a contar los colores desde el amarillo, no desde el verde, con lo que muestra su capacidad para construir relaciones matemáticas o adaptar las ya existentes.

Este problema que hemos presentado es otro ejemplo de "actividad matemática rica", pues su enunciado es simple y la primera parte está al alcance de cualquier estudiante de 3º ó 4° de E. Primaria y, además, admite ampliaciones del enunciado (no utilizadas en las transcripciones anteriores), como comenzar a contar cuando el semáforo tiene un color diferente al que se enuncia en primer lugar en la serie, por ejemplo amarillo, y también la utilización de cantidades mayores (segunda parte del problema), que permiten desarrollar una variedad de estrategias de resolución con grados de complejidad o sofisticación bastante diferentes, dependiendo de los conocimientos y las capacidades de los estudiantes. Eso permite al profesorado hacer tratamientos diversificados a sus alumnos de diferentes capacidades matemáticas.

6.5 CONCLUSIONES

En este capítulo hemos abordado la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con estudiantes de E. Primaria de altas capacidades matemáticas y superdotados. En la primera hemos adoptado un punto de vista no específico de las matemáticas. Hemos repasado los principales modelos teóricos sobre superdotación actuales, que ayudan a identificar y entender a los estudiantes superdotados. Hemos resumido la legislación actual (nacional y de la Comunidad Valenciana) viendo que, en la actualidad, en España disponemos de un marco legal que reconoce la necesidad de dar una respuesta diferenciada a los estudiantes de altas capacidades y superdotados y define normas para llevar a cabo esa respuesta. También hemos reflexionado sobre la deficiente situación real en cuanto a la aplicación de dicho marco legal en los centros de E. Primaria y hemos mencionado los que creemos que son los principales motivos para que no se esté ayudando a los niños de altas capacidades como necesitan.

En la segunda parte del capítulo nos hemos centrado en los estudiantes de E. Primaria de altas capacidades matemáticas, repasando las diferentes maneras que podemos encontrar actualmente de ayudarles a desarrollar su gusto por las matemáticas y a aumentar su formación matemática más allá del aprendizaje escolar ordinario. En particular, hemos planteado la necesidad de poner a disposición de los maestros medios para que, cuando tienen alumnos de altas capacidades matemáticas, dispongan de materiales curriculares y de apoyo útiles en sus clases. Hemos descrito algunos productos de este tipo disponibles y hemos presentado nuestra propia propuesta, consistente en organizar las clases de matemáticas de manera que permitan, al mismo tiempo, integrar a los niños de altas capacidades matemáticas en su grupo de clase (planteando la realización de las mismas actividades a toda la clase) y ofrecerles una adaptación curricular personalizada que les permita avanzar a su ritmo (mediante el planteamiento de actividades matemáticas ricas formadas por varios problemas relacionados de complejidades o dificultades variadas).

Finalmente, hemos presentado y analizado varios casos de niños de altas capacidades matemáticas de E. Primaria resolviendo problemas y mostrando cómo ponen en práctica algunas de las características diferenciadoras de los estudiantes de altas capacidades matemáticas.

Las experimentaciones que hemos presentado son el comienzo de una línea de investigación e innovación educativa dirigida a entender mejor, desde la didáctica de las matemáticas, las características cognitivas de los niños de altas capacidades matemáticas en lo referente a la comprensión y aprendizaje de las matemáticas y también a diseñar y experimentar materiales docentes que podamos poner a disposición de los profesores de E. Primaria y E. Secundaria para facilitarles la tarea de formar adecuadamente a sus alumnos de altas capacidades matemáticas.

Agradecimiento: Agradecemos a la Asociación Valenciana de Apoyo al Superdotado y Talentoso (AVAST) la oportunidad que nos han dado para realizar talleres con sus hijos, de los que hemos aprendido tantas cosas.

6.6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referencias

Albes, C. y otros (2012). *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales*. Vitoria: Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco. Disponible en <http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dig_publicaciones_innovacion/es_escu_inc/adjuntos/16_inklusibitatea_100/100012c_Pub_EJ_altas_capacidades_c.pdf>.

Arocas, E., Martínez, P., Martínez, M. D. (2009). *Intervenció amb l'alumnat d'altes capacitats en Educació Secundària Obligatòria.* Valencia: Generalitat Valenciana. Disponible en <http://www.cefe.gva.es/ocd/areacd/docs/esp/interv_altascap.pdf>.

De Guzmán, M. (s.f.) El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas. Disponible en <http://elclubdelamatematica.blogspot.com.es/2010/06/talento-matematico.html>

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C., y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: Análisis de una muestra, *Faisca, 13* (15), 30-39.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3* (1), 51-75.

Gagné, F. (2000). *A differentiated model of giftedness and talent (DMGT)* (manuscrito no publicado). Montreal, Canadá. Disponible en <http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/policies/gats/assets/pdf/poldmgt2000rtcl.pdf>.

García, J. M., Abaurrea, V. (1997). *Alumnado con sobredotación intelectual-altas capacidades. Orientaciones para la respuesta educativa.* Pamplona: Gobierno de Navarra. Disponible en <http://centros.educacion.navarra.es/creena/006menu izquierda/PDFs/SUPERCAS.pdf>.

Gardiner, T. (2007 a). *Extension mathematics. Alpha*. Oxford, G.B.: Oxford U.P.

Gardiner, T. (2007 b). *Extension mathematics. Beta*. Oxford, G.B.: Oxford U.P.

Gardiner, T. (2007 c). *Extension mathematics. Gamma*. Oxford, G.B.: Oxford U.P.

Gardner, H. (1993). *Multiple intelligences: The theory into practice*. N. York, E.UU.: Basic Books.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*, 14-18.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.

Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. Washington, DC: ERIC. Disponible en <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED321487>.

Mönks, F. J. (1992). Development of gifted children: The issue of identification and programming. En F. J. Mönks & W. A. M. Peters (Eds.), *Talent for the future. Proceedings of the 9th World Conference on Gifted and Talented Children* (pp. 191-202). Assen, Holanda: Van Gorcum.

Pasarín. M. J., Feijoo, M., Díaz, O., Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en Educación Secundaria, *Faisca, 11*, 83-102.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral no publicada). Granada: Universidad de Granada. Disponible en <http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7461/descargar>.

Renzulli, J. S. (1998). Three-ring conception of giftedness. En S. M. Baum, S. M. Reis & L. R. Maxfield (Eds.), *Nurturing the gifts and talents of primary grade students*. Mansfield Center, CT, EE.UU.: Creative Learning Press. Disponible en <http://www.gifted.uconn.edu/sem/semart13.html>.

Torrego, J. C. (Coord.) (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa.* Madrid: Fundación SM. Disponble en <http://www.fundacionpryconsa.es/pdf/Altas_capacidades_y_aprendizaje_cooperativo.pdf>.

Tourón, J., Repáraz, C., Peralta, F., Gaviria, J. L., Fernández, R., Ramos, J. M., Eyero, M. (1998). Identificación del talento verbal y matemático: descripción de un proyecto de validación. *Congreso Internacional: Respuestas educativas para alumnos superdotados y talentosos.* Zaragoza, julio.

Otras publicaciones

Páginas web

No pretendemos hacer una relación minuciosa de las numerosas páginas web que pueden ser interesantes, por ejemplo las webs de las asociaciones españolas de atención a los estudiantes de altas capacidades y superdotados, pues éste no es el objetivo del capítulo. Sólo hemos incluido aquí las webs que hemos utilizado para preparar este documento.

Asociación Valenciana de Apoyo al Superdotado y Talentoso (AVAST). Valencia. <http://www.asociacion-avast.org>.

Centre for Innovation in Mathematics Teaching (CIMT). Universidad de Plymouth. G.B.: Plymouth. <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/projects/mep/default.htm>.

Estalmat (Estímulo del Talento Matemático). <http://www.estalmat.org>.

Nrich (Enriching Mathematics). G.B: Universidad de Cambridge. <http://nrich.maths.org/frontpage>.

Revista Problemes Olímpics. Publicación de la Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana. Disponible en <http://www.semcv.org>.

Legislación estatal y autonómica comentada

Comes, G., Díaz, E.M., Luque, A., Ortega, J. (2009). Análisis de la legislación española sobre la educación del alumno con altas capacidades. *Escuela Abierta, 12*, 9-31.

Referencias sobre los objetos de estudio de la superdotación (modelos explicativos, identificación e intervención educativa)

Albes, C. y otros (2012). *Orientaciones educativas. Alumnado con altas capacidades intelectuales*. Vitoria: Departamento de Educación, Universidades e Investigación del Gobierno Vasco. Disponible en <hhp://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dig_publicaciones_innovacion/es_escu_inc/adjuntos/16_inklusibitatea_100/100012c_Pub_EJ_altas_capacidades_c.pdf>.

Arocas, E., Martínez, P., Martínez, M. D. (s.f.). *Experiencias de atención educativa con el alumnado de altas capacidades.* Valencia: Generalitat Valenciana. Disponible en <http://www.cefe.gva.es/ocd/areaord/docs/altascap_cas.pdf>.

Arocas, E., Martínez, P., Martínez, M. D. (2009). *Intervenció amb l'alumnat d'altes capacitats en Educació Secundària Obligatòria.* Valencia: Generalitat Valenciana. Disponible en <http://www.cefe.gva.es/ocd/areacd/docs/esp/interv_altascap.pdf>.

Arocas, E., Martínez, P., Martínez, M. D., Regadera, A. (2002). *Orientaciones para la evaluación psicopedagógica del alumnado con altas capacidades.* Valencia: Generalitat Valenciana. Disponible en <http://www.cefe.gva.es/ocd/areacd/docs/esp/eva_altascap_cas.pdf>.

Benavides, M., Maz, A. Castro, E., Blanco, R. (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica.* Santiago de Chile: Trineo S.A. Disponibe en <unesdoc.unesco.org/images/0013/001391/139179s.pdf>.

Feenstra, C. (2004). *El niño superdotado. Cómo reconocer y educar al niño con altas capacidades.* Valencia: Médici.

Torrego, J. C. (coord.) (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa.* Madrid: Fundación SM. Disponible en <http://www.fundacionpryconsa.es/pdf/Altas_capacidades_y_aprendizaje_cooperativo.pdf>.

Actividades específicas de matemáticas, incluyendo creatividad matemática

Artiles, C., Jiménez, J. E. (2007). *Programa de enriquecimiento extracurricular: 96 actividades para estimular el pensamiento divergente en el alumnado de Educación Primaria.* Sta. Cruz de Tenerife: Consejería de Educación, Universidades, Cultura y Deportes, Gobierno de Canarias. Disponible en <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/dgoie/publicace/docsup/Libro_PREPEDI_II.pdf>.

Fernández, E., Pérez, R., Fernández, M., Blanco, Y., Álvarez, C. (s.f.). *Adaptaciones curriculares en el área de matemáticas para alumnos de altas capacidades.* Disponible en <http://www.cpraviles.com/materiales/altcap/index.htm>.

Pérez, A., Sánchez, M. (coords.) (2009). *Matemáticas para estimular el talento I. Actividades del Proyecto Estalmat.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Pérez, A., Sánchez, M. (2011). *Matemáticas para estimular el talento II. Actividades del Proyecto Estalmat*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Listados de juegos, materiales didácticos, bibliografía y webs

Gallego, C., Ventura, M. P. (2007). *Actividades de ampliación para el alumnado de altas capacidades. Orientaciones para el profesorado (etapa primaria).* Pamplona: Centro de Recursos de Educación Especial de Navarra, Gobierno de Navarra. Disponible en <http://centros.educacion.navarra.es/creena/009Superdotados/PDFs/Orientaciones%20actividades%20ampliacion.pdf>.

Listados de referencias ordenadas por tipo de recurso, destinatario, edad y materia

Consejería de Educación y Ciencia (s.f.). *Materiales y recursos. Alumnado con altas capacidades intelectuales. Educación Infantil y Primaria.* Albacete: Centro Territorial de Recursos para la Orientación, la Atención a la Diversidad y la Interculturalidad. Disponible en <http://orientacionandujar.files.wordpress.com/2010/11/recursos-para-altas-capacidades-junta-castlla-la-mancha.pdf>.

López, B., Betrán, M. T., López, B., Chicharro, D. (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades.* Madrid: CIDE, Ministerio de Educación y Cultura. Disponible en <http://www.doredin.mec.es/documentos/00820092000279.pdf>.

Informes relacionados con las matemáticas

Mínguez, N. (2009). *Alumnos y alumnas con altas capacidades intelectuales. Tratamiento desde el taller de matemáticas.* Granada: La autora.

Reyes, P., Karg, A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En González, M. J., González, M. T., Murillo, J. (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403-414). Santander. SEIEM. Disponible en <http://www.seiem.es>.