

# INVESTIGACIÓN SOBRE ESTUDIANTES CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA<sup>1</sup>

## Research on mathematically gifted students

Jaime, A. y Gutiérrez, Á.

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València

### Resumen

*En la actualidad va creciendo el consenso sobre la necesidad de atender de forma especializada y diferenciada las necesidades educativas especiales de los estudiantes con alta capacidad matemática. Paralelamente, se percibe un incremento en la cantidad de investigaciones centradas en este colectivo. En este texto, presentamos una panorámica de los resultados de investigaciones recientes, españolas e internacionales, sobre estudiantes con alta capacidad matemática. Después ofrecemos una síntesis de las investigaciones que estamos desarrollando en la Universitat de València basadas en diversos contenidos matemáticos pero con los objetivos comunes de entender mejor los procesos cognitivos de los estudiantes con alta capacidad matemática de Primaria y ESO y de proporcionar a los profesores materiales que les ayuden a atender adecuadamente a estos estudiantes en sus clases ordinarias.*

**Palabras clave:** *alta capacidad matemática, educación primaria, educación secundaria obligatoria (ESO), procesos cognitivos, atención a la diversidad.*

### Abstract

*There is growing consensus on the need to consider in a specialized and differentiated way the special educational needs of mathematically gifted students. At the same time, there is an increase in the number of research focused on those students. In this text, we present an overview of the results of recent research, both Spanish and international, on mathematically gifted students. Next, we offer a synthesis of the research we are developing at the University of Valencia based on various mathematical contents but with the common objectives of better understanding the cognitive processes of students with high mathematical ability in Primary and Lower Secondary schools and to provide teachers with materials that may help them to adequately teach to these students in their regular classes.*

**Keywords:** *mathematical giftedness, primary school, lower secondary school, cognitive processes, attention to diversity.*

### INTRODUCCIÓN

Son numerosos los focos de interés de la investigación en didáctica de las matemáticas (o educación matemática) actual. En ocasiones, estos focos de interés se simplifican y esquematizan en un *triángulo educativo* en cuyos vértices están las matemáticas, los profesores y los estudiantes. Este triángulo tal vez fuera válido en la primera época, cuando se prestaba atención principalmente a las ideas matemáticas, a cómo llevarlas a los currículos escolares y a cómo enseñarlas para lograr que los estudiantes las aprendieran, pero dejó de ser representativo unas décadas después, cuando se produjo un movimiento de los focos de atención hacia la investigación de aspectos cognitivos de los estudiantes, que explicaran cómo se procesan, entienden y asimilan nuevas ideas matemáticas (Bass, 2008), y de aspectos profesionales de los profesores, que ayudaran a entender su problemática y mejorar su formación y su práctica. En la actualidad, sin olvidar el análisis de los contenidos matemáticos, los componentes cognitivos de los estudiantes ni los aspectos profesionales de los profesores, se ha ampliado enormemente el abanico de puntos de vista desde los que se analizan e investigan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 71-89). Zaragoza: SEIEM.

En este contexto, y desde cualquiera de los numerosos puntos de vista adoptables, lo más frecuente es que las investigaciones tengan como objetivo más o menos directo analizar las dificultades de aprendizaje. En unas ocasiones se investigan directamente algunas dificultades específicas, mientras que en otras se investigan factores que pueden condicionarlas o modificarlas, positiva o negativamente. Sin embargo, este interés por ayudar a comprender y minimizar las dificultades de aprendizaje de las matemáticas que sufre una mayoría de estudiantes hace que quede oculto e ignorado otro problema didáctico importante, como es el de comprender y abordar la problemática en torno a los estudiantes con alta capacidad matemática, es decir aquéllos con una capacidad matemática claramente superior a la media. Estos estudiantes no tienen las dificultades de aprendizaje que sufren sus compañeros de aula, al contrario, son capaces de comprender deprisa y con profundidad los nuevos contenidos matemáticos. Sin embargo, tienen otro tipo de necesidades especiales que también hay que investigar y tratar de solucionar desde la didáctica de las matemáticas.

Lamentablemente, no todos los profesionales de la enseñanza asumen que los estudiantes con alta capacidad y superdotados tienen necesidades educativas especiales que deben ser atendidas. La SEIEM ha demostrado que sí asume esta postura. En 2010 se organizó un seminario sobre educación matemática y diversidad en cuya presentación el coordinador identificó como necesidades educativas especiales “una gran diversidad de campos de investigación, pues a la Educación Matemática no solamente le interesan las situaciones que se pueden plantear con estudiantes con parálisis cerebral, autismo, sordera, ceguera, etc., sino también las que se dan cuando en el aula tenemos estudiantes con altas capacidades matemáticas.” (De la Torre, 2010). Este año, la SEIEM ha organizado un nuevo seminario sobre diversidad en el que se ha dedicado una de las intervenciones a los estudiantes con alta capacidad matemática.

En el ICME10, tuvo lugar un panel plenario titulado “Mathematics education for whom and why? The balance between mathematics education for all and for high level mathematics performance” (Niss, 2010). En España, como en muchos otros países avanzados, la formación matemática se concibe como una necesidad social y un derecho de todos los ciudadanos, al menos durante el periodo de enseñanza obligatoria. Pero, por otra parte, en aquellos países en los que las autoridades educativas son conscientes de la necesidad de disponer de profesionales con una formación matemática elevada, se toman medidas para identificar a los estudiantes que muestran una alta capacidad matemática y para proporcionarles una formación específica que les permita desarrollar su potencial matemático (Diezmann y Watters, 2002; NCTM, 2003). Nuestra postura personal al respecto, como didactas y como investigadores, es que ninguna de las dos opciones (matemáticas para todos y matemáticas para los de más capacidad) debe primar sobre la otra, sino que ambas son igualmente importantes y el sistema educativo tiene obligación de prestar la misma atención a ambas. En otras palabras, el sistema educativo debe ocuparse de que todos los estudiantes reciban una buena formación matemática, lo cual conlleva la necesidad de proporcionar formación diferenciada a los estudiantes con diferentes capacidades matemáticas, para que, en particular, los mejor dotados para las matemáticas puedan llegar tan lejos como su capacidad les permita.

Esta afirmación es una interesante declaración de principios. De hecho, es posible encontrar afirmaciones en esta dirección en las últimas leyes educativas españolas. En la LGE (aprobada en 1970) se dice que “se prestará una educación especial a los escolares superdotados para el debido desarrollo de sus aptitudes”. La LOGSE (aprobada en 1990) supuso un retroceso en este aspecto, pues sólo proponía atención diferenciada a los estudiantes con dificultades. La LOCE (aprobada en 2002) identifica diversos tipos de “alumnos con necesidades educativas especiales”, entre los que están los “alumnos superdotados intelectualmente”. Por último, la LOE (aprobada en 2006) y su modificación de 2013, la LOMCE, también diferencian varios tipos de “dificultades específicas de aprendizaje” entre los que se encuentran los estudiantes con “altas capacidades intelectuales”.

La implementación práctica por las autoridades educativas de estas directrices de las leyes de educación más recientes, es decir desde la LOCE, ha consistido en pedir a los centros de enseñanza que definan y desarrollen adaptaciones curriculares para los estudiantes superdotados. Estas adaptaciones curriculares suelen tener como punto crítico, debido a la dificultad y complejidad que conlleva, su implementación en la asignatura de matemáticas, ya que una mayoría de estudiantes identificados como superdotados tienen una alta capacidad matemática. En los últimos años está habiendo un incremento en el reconocimiento por autoridades y profesores de la inaplazable necesidad de poner en práctica estrategias de aula para ayudar a estos estudiantes.

Lo indicado en los párrafos anteriores es el contexto que explica y justifica la conveniencia de que la didáctica de las matemáticas se plantee y aborde un importante problema de investigación, consistente en describir y analizar diferentes factores que influyen de manera significativa en la problemática de la formación de los estudiantes con alta capacidad matemática, así como en proponer soluciones prácticas y realistas. La investigación centrada en los estudiantes con alta capacidad matemática no es nueva en España, si bien, hasta hace pocos años, estaba casi toda en el terreno de la psicología educativa, formando parte de un contexto más amplio centrado en la superdotación. Sin embargo, en los últimos años están surgiendo en diversas universidades españolas grupos de didactas de las matemáticas interesados en investigar este tema desde diferentes aproximaciones, si bien la producción de estos grupos es todavía escasa, como lo muestra que sólo 11 artículos de las actas de los Simposios de la SEIEM versan sobre la alta capacidad matemática, siendo el más antiguo de 2008, con 4 de ellos publicados en 2016 y 7 presentados en los años 2013-2016 por miembros del mismo equipo de investigación. Esta situación no es exclusiva de España; por ejemplo, el primer congreso CERME en el que hubo un grupo de trabajo dedicado a la alta capacidad matemática fue el de 2011 y Diezmann y Watters (2002) afirman, respecto de Australia, que es bastante limitada la cantidad de publicaciones de investigación sobre este tipo de estudiantes.

Hay diversos términos que se utilizan habitualmente en el contexto que nos ocupa en este documento. Los más habituales son superdotación, alta(s) capacidad(es) y talento. Existen diversas definiciones de estos términos en la literatura que pueden indicar diferencias entre ellos. En este texto, asumimos el significado que se da a superdotación en el sistema educativo español, que incluye como requisito más característico, la obtención de al menos 130 puntos de cociente intelectual. Usaremos de manera habitual el término *alta capacidad matemática* (o, simplemente, alta capacidad), para referirnos a los estudiantes que muestran una calidad matemática claramente superior a los estudiantes medios de su misma edad o curso, aunque no lleguen a ser considerados como superdotados. En cuanto al término talento matemático, hemos optado por no utilizarlo para evitar confusión en los lectores.

En este texto hacemos, primero, un repaso de la investigación reciente, tanto española como internacional, relativa a los estudiantes con alta capacidad matemática. En particular, mencionamos las publicaciones en las actas de simposios de la SEIEM, aunque algunas de ellas formen parte de otras publicaciones más extensas, como tesis de máster o doctorales. Después, describimos la línea de investigación sobre alta capacidad que estamos desarrollando en la Universitat de València desde hace aproximadamente una década<sup>2</sup>, cuyo objetivo central último es elaborar materiales de enseñanza que puedan ser llevados a las aulas de Primaria y ESO, pero que tiene otros objetivos de investigación más específicos que nos ayudan a entender las características cognitivas de estos estudiantes, sus estrategias de resolución de problemas y sus procesos de aprendizaje. Por último, presentamos algunas conclusiones y propuestas de acción.

## REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Dedicamos esta sección a presentar investigaciones españolas e internacionales relevantes sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En lo referente a las publicaciones internacionales, el objetivo no es hacer una revisión extensa, pues ésta superaría el espacio disponible y tampoco se ajustaría a

los objetivos del Seminario, sino mostrar ejemplos de publicaciones pertinentes. Hemos dividido la revisión en varios apartados centrados en diferentes aspectos destacados de la investigación didáctica sobre la alta capacidad matemática. Son diversas las opciones de temáticas para organizar esta revisión bibliográfica, pero hemos escogido aquéllas en las que se están realizando investigaciones en España: Resolución de problemas, caracterización de la alta capacidad matemática e identificación de estudiantes y análisis de los procesos de razonamiento y aprendizaje de estudiantes con alta capacidad.

### **Investigación sobre resolución de problemas**

Empezamos la revisión bibliográfica por este tema porque, dentro de la escasez de investigación didáctica, la mayoría de publicaciones, nacionales e internacionales, están relacionadas con la resolución de problemas (Castro, 2008). Un repaso de las presentaciones realizadas en los grupos de trabajo dedicados a la alta capacidad en los congresos ICME, CERME y MCG muestra claramente este hecho.

Esta tendencia a basar las investigaciones en la resolución de problemas se da también en las españolas, basadas en resolución de problemas de diferentes áreas de las matemáticas escolares. Así Ramírez, Flores y Castro (2010), Ramírez (2012), Gutiérrez, Jaime y Alba (2014), Benedicto, Acosta, Gutiérrez, Hoyos y Jaime (2015), Escrivà (2016), Escrivà, Beltrán-Meneu, Gutiérrez y Jaime (2016) y Ramírez, Beltrán-Meneu, Jaime y Gutiérrez (2016) plantean problemas en los que el uso de la visualización es un elemento fundamental de la resolución. Varios de esos estudios están orientados hacia la geometría espacial, incluyendo en algunos casos el uso de software de geometría 3d, mientras que los otros se basan en contextos planos. Los resultados de dichos estudios son coherentes con resultados anteriores, en particular con los tipos de razonamiento matemático propuestos por Krutetskii (1976), es decir el analítico, el geométrico y el armónico, cuya diferencia se basa en los estilos de trabajo empleados al abordar la resolución de los problemas.

La posible relación entre alta capacidad matemática y estilo de razonamiento es una cuestión que todavía no ha recibido una respuesta concluyente. Presmeg (1986) señala que la mayoría de los estudiantes con alta capacidad de sus investigaciones no eran visualizadores y que ello es debido a una diversidad de factores que ayudan a que estos estudiantes prefieran no usar la visualización, entre los que destacan el estilo de enseñanza formal habitual en las aulas (al menos en la época de este estudio) y la propia naturaleza de las matemáticas superiores. Sin embargo, Van Garderen (2006) obtiene resultados aparentemente contradictorios con los anteriores, ya que observa que los estudiantes con alta capacidad usan más imágenes mentales que sus compañeros con capacidad matemática media.

Benavides (2008) y Castro, Benavides y Segovia (2006, 2008) presentan resultado de la administración de un conjunto de problemas de estructura multiplicativa y nos ofrecen una clasificación de los errores cometidos por los estudiantes con alta capacidad de su muestra. Estos resultados demuestran que, en contra de lo que opinan muchos profesores, estos estudiantes no aprenden solos, sino que, igual que sus compañeros, necesitan que sus profesores les ayuden a entender y aprender los nuevos contenidos y a corregir los errores que cometen.

Por otra parte, Arbona (2016), Arbona, Jaime, Gutiérrez y Beltrán-Meneu (2016), Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015), Benedicto, Arbona, Jaime y Gutiérrez (2016) y Benedicto, Hoyos, Aristizábal, Gutiérrez y Jaime (2016) se centran en el contexto de la pre-álgebra para analizar los procesos de resolución de problemas de generalización de sucesiones numéricas, en contextos de patrones geométricos o similares, por estudiantes con alta capacidad de los últimos cursos de Primaria. Los resultados de estos experimentos muestran que los estudiantes con alta capacidad de dichos cursos están en condiciones de empezar a aprender los significados de los conceptos básicos de álgebra, empezar a usar el sistema de símbolos algebraico, expresar en términos algebraicos relaciones funcionales generalizadas y plantear y resolver ecuaciones lineales.

Otros investigadores que han analizado el aprendizaje de pre-álgebra por estudiantes con alta capacidad son Amit y Neria (2008), quienes informan de que, para resolver problemas de patrones geométricos, los estudiantes con alta capacidad realizan análisis pictórico, numérico y verbal de los enunciados y utilizan principalmente las estrategias recursiva y funcional para resolverlos, mostrando una flexibilidad mental que les ayuda a cambiar con facilidad de una forma de análisis o estrategia a otra según les interesara. Este resultado concuerda con los obtenidos en las publicaciones mencionadas en el párrafo anterior.

Una tipología especial de resolución de problemas es la que tiene que ver con las competencias matemáticas. En las competencias matemáticas normalmente se valora cómo de completo, correcto, original, etc. es el proceso de resolución de los problemas. Sin embargo, las Pruebas Cangur presentan unas características específicas debido a que plantean problemas de elección múltiple en tiempo limitado y a que no se valora el proceso de resolución, sino sólo si el resultado es o no correcto. Esto ha dado pie al interés de Guinjoan, Gutiérrez y Fortuny (2015) por analizar los procesos de razonamiento, la toma de decisiones y el grado de certeza y confianza en sus respuestas de los estudiantes que obtienen mejores resultados en estas Pruebas. En este estudio se observa que disponer de las opciones de respuesta influye poco en las estrategias de resolución seguidas, ya que los estudiantes no utilizan con más frecuencia la comprobación de casos, que hay una relación positiva entre la certeza de los estudiantes en que sus respuestas son correctas y la corrección real de éstas y que los estudiantes utilizan con frecuencia la intuición ya que no tienen tiempo para resolver completamente los problemas.

Algunas investigaciones se han orientado a analizar, desde varios puntos de vista, los problemas de matemáticas para determinar su adecuación a los estudiantes con alta capacidad. Benedicto (2013) y Karp (2013) analizan problemas propuestos en libros de texto. Pitta-Pantazi, Christou, Kattou, Sophocleous y Pittalis (2015) proponen diseñar y plantear problemas que incluyan diversas destrezas matemáticas, como el uso de tecnología, la expresión verbal, iniciativa, entre otras. Ivanov, Ivanova y Stolbov (2013) proponen un modelo que tiene en cuenta la actividad realizada por los estudiantes al resolver un problema y los esquemas de razonamiento aplicados.

Los análisis de problemas anteriores son análisis teóricos de enunciados, que sirven como una primera aproximación a identificar su adecuación a los estudiantes, pero, dada la diversidad de estilos y capacidades que hay entre los estudiantes con alta capacidad, se hace necesario experimentar con estudiantes. Así, Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015) comparan el análisis teórico de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos con el análisis de la demanda cognitiva mostrada por estudiantes con alta capacidad. Sus resultados muestran una sorprendente diversidad de comportamiento de los estudiantes.

Es frecuente que los investigadores propongan a los estudiantes con alta capacidad, junto a la resolución de problemas, el planteamiento de problemas (problem posing). Este tipo de actividad conjuga la capacidad matemática superior con la creatividad, pues permite a los estudiantes mostrar su habilidad para plantear problemas originales, variados y con diversos grados de dificultad (Silver, 1997). Voica y Singer (2012) analizan las respuestas de un grupo de estudiantes con alta capacidad de 4º a 6º de Primaria a los que se pidió que modificaran el enunciado de un problema. Los estudiantes que identificaron y entendieron los contenidos matemáticos puestos en juego en el problema fueron capaces de producir variantes y generalizaciones del problema, mientras que los otros estudiantes se limitaron a plantear variaciones superficiales. Espinoza, Lupiañez y Segovia (2016) presentan a un grupo de estudiantes con alta capacidad matemática dos situaciones realistas y les piden plantear un enunciado de un problema aritmético “que te parezca difícil de resolver”. Los estudiantes produjeron enunciados complejos, con diversos tipos de números y que requieren varias operaciones. Por lo tanto, ambas investigaciones apoyan la idea de que la habilidad para plantear enunciados de problemas variados y complejos es una característica de los estudiantes con alta capacidad matemática.

Un estudio precursor sobre planteamiento de problemas es el de Ellerton (1986), que muestra que los estudiantes de mayor capacidad plantean problemas más complejos, es decir con más operaciones, utilizando datos más complejos y necesitando operaciones más difíciles, que sus compañeros con capacidad media. Además, los estudiantes de capacidad media tenían menos éxito resolviendo los problemas que ellos mismo han planteado que sus compañeros con alta capacidad. Otros estudios más recientes (Sophocleous y Pitta-Pantazi, 2017) confirman este tipo de resultados y, además, relacionan la alta capacidad matemática con la habilidad en el planteamiento de problemas y con la capacidad de realizar pensamiento crítico y razonamiento de alto nivel (higher order thinking).

### **Investigación sobre identificación y caracterización de estudiantes con alta capacidad matemática**

En esta sección nos centraremos en los esfuerzos hechos desde la didáctica de las matemáticas para caracterizar la alta capacidad matemática y para identificar a los estudiantes con esta característica intelectual. No vamos a entrar en otros procedimientos de detección, comunes en el ámbito escolar y basados generalmente en tests psicológicos, algunos de los cuales han sido descritos en Ramírez (2012), Pitta-Pantazi (2017) y en literatura psicológica especializada, ya que diversos estudios (por ejemplo, Niederer y Irwin, 2001 y Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández, 2008) muestran que estos tests son menos fiables que una batería de problemas de matemáticas elegidos cuidadosamente.

En lo referente a la caracterización de la alta capacidad, hay diversos estudios realizados a lo largo de los años que ofrecen información empírica avalando determinados rasgos de comportamiento. Un elemento común a estos estudios es que se basan en observar a muestras de estudiantes previamente identificados por otros procedimientos como con alta capacidad resolviendo problemas. La primera lista de rasgos con alta capacidad que se menciona habitualmente en la literatura es del conocido estudio de Krutetskii (1976), que incluye rapidez y flexibilidad de razonamiento, memoria matemática, y habilidades de generalización, de manejo de conceptos abstractos, de identificación y uso de estructuras matemáticas. Otros estudios en esta línea, recogidos en Jaime y Gutiérrez (2014) y Pitta-Pantazi (2017), apuntan a características más específicas y relacionadas con áreas matemáticas, como las capacidades de visualización y de realización de razonamientos cualitativo, cuantitativo y causal. Por otra parte, algunos estudios coinciden en señalar que es necesario tener en cuenta el razonamiento visual para realizar una identificación de los estudiantes con alta capacidad (Webb, Lubinski y Benbow, 2007). Rojas, Jiménez y Mora (2009) presentan un estudio en el que, basándose en la resolución de problemas que requieren usar visualización espacial, identifican diversas características en los estudiantes con alta capacidad observados.

Una metodología de investigación frecuente en estudios de nuestra área que tratan de identificar características de estudiantes con alta capacidad matemática es la de comparar formas de actuación de éstos con las de estudiantes medios, en particular en resolución de problemas. Por ejemplo, Heinze (2005) observa que los estudiantes con alta capacidad superan a sus compañeros en rapidez de resolución, sistematización del trabajo y calidad de sus explicaciones verbales. En el contexto de las investigaciones realizadas en España, Benavides (2008) compara la resolución de problemas multiplicativos y Ramírez (2012) y Escrivà (2016) la de tareas de visualización. Reyes-Santander y Karg (2009) plantean dos problemas a estudiantes con alta capacidad de Primaria para ver qué características diferenciadoras permiten identificar, con el objetivo de que profesores y futuros profesores aprendan a identificar a estudiantes con alta capacidad en sus clases. Díaz y otros (2008) comparan las respuestas de un grupo de estudiantes, seleccionados para participar en Estalmat-Galicia, a los problemas de selección de Estalmat y a un test psicológico estandarizado. Sus resultados indican que, aunque hay una correlación bastante buena entre las respuestas a los problemas y al test, son más fiables los problemas para identificar a estudiantes con alta capacidad, pues el test puede pasar por alto a algunos estudiantes. Otro estudio con cuestiones de investigación relacionadas es el de Nolte (2012).

El estudio presentado en Benavides (2008) y Castro, Benavides y Segovia (2006, 2008) tiene como objetivo central elaborar y administrar un conjunto de problemas de estructura multiplicativa con el objetivo de ver si permiten identificar a estudiantes de Primaria con alta capacidad. Este estudio concluye que los problemas elegidos permiten diferenciar estudiantes con alta capacidad de estudiantes de capacidad media.

En Gutiérrez y Jaime (2013) ofrecemos ejemplos de dos estilos de resolución de problemas en los que los estudiantes ponen en juego algunas formas de trabajo características, como identificar un elemento clave del problema, flexibilidad para modificar el problema planteado o para cambiar de estrategia de resolución y capacidad para identificar un proceso inductivo y generalizarlo.

Una característica típica de la resolución de problemas por estudiantes con alta capacidad es la originalidad de sus procedimientos, pues con frecuencia siguen formas de resolución atípicas, en las que combinan los conocimientos matemáticos de manera sorprendente. Estos estudiantes suelen mostrar mucha intuición al resolver problemas, pues son capaces de llegar a la solución de un problema incluso aunque no dispongan de los conocimientos matemáticos necesarios para escribir una justificación detallada de la misma. También es reconocida como una característica típica de los estudiantes con alta capacidad matemática la rapidez para comprender nuevos conceptos, propiedades o procedimientos.

Con frecuencia, estas características aparecen combinadas (Jaime y Gutiérrez, 2014), como en el caso de un estudiante con alta capacidad (11 años, cursando 6° de Primaria) al que planteamos el problema de dibujar en una hoja de papel un polígono regular de 20 lados. Nada más terminar de oír el enunciado, el estudiante respondió:

Estudiante: Hacemos  $360 \div 20$ , que son  $18^\circ$ , y con ese ángulo unimos muchos triángulos juntos, 20.

El estudiante se refería a los triángulos formados al unir el centro del polígono con los vértices, y la investigadora suponía que el ángulo de  $18^\circ$  que había calculado era el ángulo central. La resolución típica que cabe esperar es dibujar los 20 triángulos consecutivos midiendo ángulos de  $18^\circ$  con vértice en el centro del polígono. La investigadora quiso confirmarlo:

Investigadora: ¿Y qué hacemos con el ángulo de  $18^\circ$ ?

Estudiante: [dibuja dos triángulos consecutivos desde el centro y marca el ángulo exterior, Figura 1a] Éste mide  $18^\circ$ .

Investigadora: ¿Por qué?

Estudiante: Intuición. Yo lo veo, pero no sé por qué es así.

Investigadora: ¿Y cómo harías entonces el polígono?

Estudiante: [marca el ángulo formado por los lados del polígono que salen de un vértice, Figura 1b] Esto mide 162 porque es  $180 - 18$ .

Investigadora: ¿Y qué haces con ese ángulo?

Estudiante: Dibujar los triángulos.  $162 \div 2$  es el ángulo [de un triángulo]. Lo dibujamos, y al lado otro, y al lado otro, ... Así hasta 20.

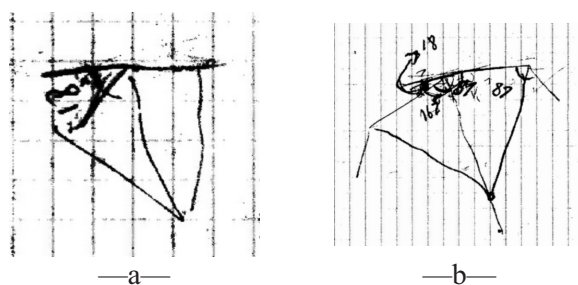


Figura 1. Respuesta del estudiante

Después de resolver el problema, la investigadora le sugirió al estudiante el procedimiento típico, basado en utilizar el ángulo central de  $18^\circ$ . Al momento de empezar la explicación, el estudiante no necesitó que la investigadora le explicara más, diciéndole que ya sabía qué le iba a explicar y que no hacía falta que siguiera.

Al analizar este diálogo, se perciben diversos rasgos con alta capacidad matemática: la originalidad de la solución, evidente al utilizar el ángulo exterior de  $18^\circ$  en vez del ángulo central. La intuición del estudiante, que fue capaz de visualizar la solución y dibujarla de manera rigurosa aunque no había estudiado algunos de los conceptos involucrados, como el ángulo central o el ángulo exterior. La rapidez de comprensión, al adelantarse a las explicaciones de la profesora y no necesitar que terminara de explicarle el otro método de resolución.

La diversidad de baterías de problemas producidos y administrados a estudiantes con alta capacidad da pie a plantearse la pregunta de si todas ellas dan resultados similares. La respuesta está lejos de ser unánime. Por una parte, hay estudiantes con alta capacidad matemática que no se muestran igualmente diestros en diferentes áreas de las matemáticas escolares. Escrivà (2016) planteó a una clase ordinaria de 6º de Primaria una serie de problemas de geometría espacial y también parte de los problemas de Benavides (2008), observando que ambos conjuntos de problemas producían resultados discrepantes, ya que los estudiantes que mostraron mejor capacidad de visualización y rasgos con alta capacidad matemática relativos a la visualización no fueron los que mejor resolvieron los problemas multiplicativos. Trabajos anteriores han presentado resultados coherentes con este, como Ryu, Chong y Song (2007), quienes informan de que estudiantes con alta capacidad con gran destreza en álgebra y determinadas áreas de geometría mostraron dificultades en el uso de la visualización para resolver problemas de geometría espacial. Por otra parte, Applebaum (2017) da cuenta de diversas investigaciones en las que los estudiantes que muestran mejor capacidad espacial también tienen mejor capacidad matemática.

Padres y profesores suelen relacionar la alta capacidad con el éxito escolar, es decir con las buenas notas. Sin embargo, esta relación es ficticia. Aparte del hecho, suficientemente conocido y documentado, de que los estudiantes superdotados tienen un alto riesgo de fracaso escolar, por haber perdido el interés por los estudios, y de que numerosos estudiantes superdotados desarrollan estrategias para pasar desapercibidos en sus clases, entre las cuales destaca la de obtener notas mediocres, hay diversas investigaciones que muestran que no siempre hay relación entre alta capacidad matemática y buenas notas en matemáticas. En una investigación realizada en Valencia, trabajamos con un grupo ordinario de clase y obtuvimos que todos los estudiantes que mostraron un uso destacado de las habilidades de visualización espacial obtenían también buenas notas en las asignaturas de matemáticas, pero había también estudiantes con buenas notas que no destacaron en el uso de la visualización (Escrivà, 2016; Escrivà, Beltrán-Meneu, Gutiérrez y Jaime, 2016). Brandl (2011) encuentra en sus experimentos estudiantes con alta capacidad que no obtienen buenas notas y estudiantes con buenas notas que no tienen alta capacidad. Evidentemente, las notas obtenidas en los cursos de matemáticas de Primaria y Secundaria están condicionadas por una diversidad de factores, no todos de rendimiento matemático, lo cual hace que estas notas no puedan tomarse como un indicador principal con alta capacidad matemática, sino como un indicador secundario que debe servir para activar otros procedimientos de identificación más fiables.

No podemos cerrar esta sección sin mencionar la relación entre creatividad y alta capacidad matemática, aunque no es nuestro objetivo entrar a describirla. Dicha relación es un caso particular de una relación más amplia entre sobredotación y creatividad. Limitándonos al ámbito de las matemáticas, para una mayoría de autores, alta capacidad y creatividad son dos conjuntos con intersección no vacía pero ninguno incluido en el otro, si bien no hay acuerdo sobre la posible relación de dependencia lógica de una respecto de la otra (Pitta-Pantazi, 2017 y diversos textos en los congresos CERME, ICME y MCG). En otros párrafos de este texto mostramos que la creatividad se considera como una característica de la alta capacidad y es, por tanto, uno de los rasgos que se buscan al tratar de identificar a estudiantes con alta capacidad.



## Investigación sobre procesos de razonamiento y de aprendizaje

Dado el relevante papel que tiene la aritmética en Primaria y Secundaria, no es de extrañar que haya diversos trabajos centrados en el aprendizaje de la aritmética y el pensamiento numérico, así como de pre-álgebra. En este contexto, Freiman (2004) y Vale y Pimentel (2011) informan de los resultados de sendos experimentos con estudiantes con alta capacidad de Primaria en los que plantean diversos problemas de aritmética y álgebra seleccionados para que supongan desafíos para los estudiantes. Lee (2004) diseña unos problemas que se resuelven mediante ecuaciones lineales. Fritzlar y Karpinski-Siebold (2012) exploran la utilización de problemas pre-algebraicos con estudiantes de 4º curso de Primaria, observando las diferencias entre formas de resolución de estudiantes con alta capacidad y ordinarios. Phillipson y Callingham (2009) ofrecen una revisión de la literatura relativa a la alta capacidad matemática y la habilidad de cálculo.

Por otra parte, los problemas de geometría siguen siendo un contexto muy utilizado para evaluar las habilidades de razonamiento deductivo de los estudiantes. Por ejemplo, Cho, Han, Jim, Kim y Song (2004) presentan un micromundo geométrico basado en Logo y software de geometría dinámica para estudiantes de Primaria y Secundaria. De Villiers (2016) presenta una unidad de enseñanza sobre generalización basada en un problema geométrico que es modificado para que los estudiantes obtengan y demuestren una versión generalizada.

Siendo la demostración una característica central del trabajo matemático, sorprende la poca atención prestada al aprendizaje de la demostración por estudiantes con alta capacidad. En la búsqueda para preparar este texto, sólo hemos encontrado el trabajo de Lee (2005), que analiza un experimento de enseñanza orientado a mejorar la habilidad de demostración en contextos geométricos de estudiantes de 12 años. Sus resultados muestran que estos estudiantes siguen los procesos habituales de aprendizaje de la demostración, desde métodos empíricos a deductivos.

Otros investigadores se han centrado en el aprendizaje de contenidos extraescolares, típicos de actividades de extensión. Schindler y Joklitschke (2015) crearon un contexto de matematización de situaciones reales mediante teoría de grafos, a fin de observar si estudiantes con alta capacidad de secundaria (12-13 años) eran capaces de resolver este tipo de problemas y de generalizar estrategias de matematización. Sus resultados indican que la habilidad de los estudiantes para resolver los problemas depende en gran medida del contexto de cada problema y de la facilidad con la que identificaron un contexto geométrico o visual para representar los datos del problema. Con unos objetivos parcialmente coincidentes, Aizikovitsh-Udi y Amit (2011) diseñan una unidad de enseñanza basada en el uso de estadística en situaciones de la vida ordinaria para promover en estudiantes de secundaria con alta capacidad (15-16 años) pensamiento crítico y razonamiento de alto nivel. Entre sus resultados, destaca que el razonamiento de alto nivel no surge de forma espontánea, ni siquiera en los estudiantes con alta capacidad, sino que es necesario inducirlo mediante la enseñanza y que esto depende, en gran medida, del contexto y del tipo de actividades.

Los dos estudios anteriores, al igual que otros, muestran que es necesario prestar atención al papel de los profesores y sus formas de organizar las clases, pues sólo profesores creativos y bien formados pueden abordar adecuadamente la formación de sus alumnos con alta capacidad (Karp y Leikin, 2009). Así, Zaslavsky y Linchevski (2007) y Gal, Levenson, Shayshon, Tesler, Eyal, Prusak y Berger (2008) presentan resultados de sendos programas de formación de profesores enfocados a hacerles conscientes de las necesidades de los estudiantes con alta capacidad que tienen en sus clases, a modificar la práctica de los profesores y a establecer conexiones entre la teoría y la práctica. Por su parte, Karsenty y Friedlander (2008) informan de un curso de desarrollo profesional de profesores Secundaria en el que se enfatiza la importancia de promover la alta capacidad matemática en sus clases y se da a los profesores pautas para lograrlo.

## LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN PROPIAS

La revisión de la literatura española en educación matemática sobre estudiantes con altas capacidades de las páginas anteriores muestra que, durante los últimos años las investigaciones se han desarrollado principalmente en las universidades de Granada (llevadas a cabo por Enrique Castro, Isidoro Segovia, Pablo Flores, Rafael Ramírez, José Luis Lupiáñez y estudiantes de postgrado) y de Valencia. En esta sección presentamos brevemente las principales investigaciones que llevamos a cabo en la Universitat de València. En las páginas anteriores hemos mencionado algunos aspectos de nuestro trabajo, pero ahora vamos a presentarlo de forma más organizada.

Un objetivo último de investigación común a todos los estudios que estamos realizando es producir información que resulte útil a los profesores de Primaria y ESO poder para atender adecuadamente a sus alumnos con alta capacidad. Dicha información consiste, por una parte, en identificar rasgos característicos de la actividad matemática de estos estudiantes y, por otra, en producir conjuntos de *actividades matemáticas ricas* (Hewson, 2011) que los profesores puedan usar en sus clases con todos los estudiantes del grupo de manera que los estudiantes de distintas capacidades matemáticas puedan alcanzar objetivos de aprendizaje o de resolución de problemas diferentes. También estamos empezando a investigar la resolución de problemas en entornos de comunicación virtual, lo cual facilita la comunicación entre estudiantes de alta capacidad, analizando el comportamiento de los estudiantes y la eficacia de dicho entorno de trabajo.

### **Análisis de la complejidad del razonamiento matemático**

Una característica que distingue a los estudiantes con alta capacidad de sus compañeros es la complejidad de los procesos de razonamiento que pueden desarrollar. Existe un consenso cada vez mayor entre los grupos internacionales de profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática en que, para mejorar la calidad del aprendizaje de las matemáticas, es necesario que los profesores planteen en sus clases actividades y problemas que sean cognitivamente exigentes para sus alumnos, es decir que les induzcan a utilizar razonamiento de alto nivel (Bishop, 2008; Boston y Smith, 2009; Cai y Howson, 2013). Esto es válido para todos los estudiantes, pero es más necesario para los estudiantes con alta capacidad. Este planteamiento pone de relieve la cuestión de cómo saber si un problema de matemáticas servirá para promover el razonamiento de alto nivel, la cual ha sido investigada desde hace bastantes años (Benedicto, 2013; Pitta-Pantazi y Sophocleous, 2017). Una de las propuestas realizadas para responderla es el modelo teórico de los *niveles de demanda cognitiva* (Smith y Stein, 1998).

La demanda cognitiva de una tarea matemática se define como “el tipo y nivel de pensamiento requerido de los estudiantes para poder abordar la tarea y resolverla con éxito” (Stein, Smith, Henningsen y Silver, 2009, p. 1). Smith y Stein (1998) definieron un conjunto de características de cada nivel de demanda cognitiva que permiten identificar la complejidad de razonamiento necesaria para la resolución de actividades o problemas planteados en los libros de texto o por los profesores en clase. Estos autores utilizan los niveles de demanda cognitiva en el contexto de la formación de profesores y futuros profesores, para enseñarles a evaluar las actividades que plantean y a mantener su nivel de demanda cognitiva en clase. Esta forma de utilización del modelo tiene, para nosotros, el inconveniente de que es teórica, pues sólo analiza los enunciados de los problemas y las formas correctas de resolverlos típicas de los estudiantes medios.

En nuestras investigaciones hemos aplicado el modelo de demanda cognitiva para analizar la complejidad del razonamiento de estudiantes reales resolviendo problemas. Esto nos ha obligado a reconceptualizar los niveles de demanda cognitiva y a modificar, completar y mejorar las características definidas en Smith y Stein (1998). Esta actividad de investigación teórica (Benedicto, Gutiérrez y Jaime, 2017) está dando lugar a un fructífero conjunto de resultados empíricos basados en experimentos con estudiantes con alta capacidad de diversas edades resolviendo problemas de varias áreas de las matemáticas como geometría plana (Benedicto, 2013), pre-álgebra (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015; Benedicto, Arbona, Jaime y Gutiérrez, 2016) y visualización (Benedicto, Acosta, Gutiérrez, Hoyos y Jaime, 2015).

Un resultado importante de esta línea de investigación en relación con los estudiantes con alta capacidad es que estamos encontrando una amplia diversidad de resoluciones de un mismo problema, incluso entre estudiantes con la misma edad o del mismo curso. Además, parte de esas resoluciones se alejan bastante de la evaluación del nivel de demanda cognitiva de los problemas hecha teóricamente, basada sólo en el enunciado (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015).

### **Estilos de razonamiento en contextos de geometría espacial**

Consideramos la visualización en matemáticas como “el tipo de actividades de razonamiento basadas en el uso de elementos visuales o espaciales, mentales o físicos, puestos en juego para resolver problemas o demostrar propiedades” (Gutiérrez, 1996, p. 9). Las capacidades de imaginación y visualización espaciales son dos herramientas muy importantes, no sólo en las matemáticas sino también en muchas otras áreas científicas, sociales y humanísticas, así como en numerosos ámbitos profesionales. Estas habilidades son necesarias en el ámbito escolar para facilitar el aprendizaje de las matemáticas desde la educación infantil, a pesar de lo cual no se dedica tiempo a fomentar su desarrollo y perfeccionamiento.

Desde hace bastantes años, hemos desarrollado una línea de investigación que se centra en analizar los procesos de razonamiento visual y en crear entornos en los que los estudiantes de Primaria y Secundaria puedan desarrollar sus capacidades de imaginación y visualización espacial. En los últimos años hemos redefinido esta línea de trabajo centrándola en analizar las habilidades de visualización (Del Grande, 1990) puestas en juego por los estudiantes con alta capacidad de Primaria (Escrivà, 2016) y ESO (Gómez, 2013).

En Primaria, Escrivà (2016) realiza un experimento de enseñanza en el contexto de una clase ordinaria de 6º de Primaria basado en un entorno de cubos con las caras decoradas, en el que plantea problemas sobre relación entre cubos y desarrollos, rotaciones de cubos y secciones de cubos. Como parte de la metodología de investigación, es necesario seleccionar características de la alta capacidad matemática relacionadas con la visualización, cosa que hemos hecho a partir de los trabajos de Krutetskii (1976), Ramírez (2012) y Van Garderen (2006). En concreto, en este estudio hemos analizado la presencia en las respuestas de los estudiantes de las habilidades de visualización descritas por Del Grande (1990).

Krutetskii (1976) observó en sus experimentos que la mayoría de los sujetos con alta capacidad no eran visualizadores, por lo que planteó la conclusión de que la visualización no es un rasgo de alta capacidad. No obstante, estudios más recientes como el de Van Garderen (2006) y otros mencionados antes en este texto, coinciden con el nuestro en mostrar que los estudiantes de alta capacidad suelen ser buenos visualizadores, por lo que la visualización sí se debe considerar un rasgo de alta capacidad.

El análisis de las clases muestra algunas consecuencias significativas de la orientación predominantemente aritmética de las clases de matemáticas, pues algunos estudiantes que en la asignatura de matemáticas obtenían notas mediocres, destacaron claramente por su destreza en la resolución de los problemas, mientras que otros estudiantes que sacaban buenas notas tuvieron dificultades importantes para resolverlos. También se observó que los estudiantes de nuestra muestra que manifestaron de forma consistente rasgos de alta capacidad son los que resolvieron mejor los problemas planteados y están entre los que obtenían mejores notas en matemáticas y, al mismo tiempo, los otros estudiantes que obtenían buenas notas, no mostraron rasgos de alta capacidad ni resolvieron bien los problemas. (Escrivà, Beltrán, Gutiérrez y Jaime, 2016).

En ESO, Gómez (2013) administra un conjunto de cuatro problemas de geometría espacial y uno de geometría plana, que admiten varias formas de resolución, con los objetivos de identificar las formas que tienen los estudiantes de organizar la información geométrica, identificar los tipos de imágenes mentales empleadas e identificar diferencias en las formas de razonamiento y los errores cometidos por estudiantes ordinarios y con alta capacidad. Una de las conclusiones de este estudio es que todos los estudiantes con alta capacidad han utilizado habilidades de visualización para resolver al menos cuatro de los cinco problemas.

Los resultados descritos en los párrafos anteriores debemos considerarlos acotados a los cursos de 6º de Primaria y 3º y 4º de ESO. Un resultado de estos experimentos, cuya confirmación y desarrollo en otros cursos está entre los objetivos actuales de esta línea de investigación, es que todos los estudiantes pueden mejorar sus habilidades de visualización si se les plantean actividades adecuadas y que los estudiantes con alta capacidad tienen entre sus características diferenciadoras un mejor dominio del uso de dichas habilidades y más éxito en la resolución de problemas en los que la visualización puede jugar un papel importante.

### **Aprendizaje de conceptos algebraicos**

Diversos estudios españoles (García-Reche, Callejo y Fernández, 2015; Merino, Cañadas y Molina, 2013) y extranjeros (Radford, 2000; Rivera, 2013) avalan la conveniencia de que los estudiantes de Primaria tomen contacto con el pensamiento algebraico mediante el aprendizaje de conceptos pre-algebraicos y muestran que los problemas de patrones geométricos son un excelente contexto para ello, ya que ayuda a desarrollar la capacidad de generalización y requiere de los estudiantes razonamiento de alto nivel (Amit y Neria, 2008).

En esta línea de investigación, estamos observando las formas de resolver problemas de patrones geométricos por estudiantes de Primaria, tanto con alta capacidad como ordinarios con el fin de identificar y describir sus diversas estrategias y las diferencias características entre unos y otros estudiantes. Estamos trabajando con un marco teórico integrado por varios componentes, que nos permite analizar todo el proceso de resolución de los problemas de patrones geométricos: Los procedimientos (visual y numérico; García-Cruz y Martínón, 1997) de uso de la información gráfica proporcionada por los enunciados, las estrategias de resolución de las preguntas directas (García-Reche, Callejo y Fernández, 2015) y los niveles de generalización (Radford, 2006).

Arbona (2016) y Benedicto, Arbona, Jaime y Gutiérrez (2016) presentan y analizan un experimento de enseñanza en el que un niño con alta capacidad, de 9 años y que está empezando 5º de Primaria, progresa a medida que va resolviendo una secuencia de problemas de patrones geométricos, aprendiendo a generalizar relaciones funcionales de sucesiones lineales, afines y cuadráticas y aprendiendo a representar verbal y simbólicamente las generalizaciones lineales. Al mismo tiempo, aprende el significado de elementos algebraicos como el signo igual, las letras (a las que da los significados de número generalizado y de objeto) y las ecuaciones, contextualizadas en las preguntas de inversión de los problemas de patrones geométricos. A continuación, apoyándose en un applet de una balanza, le dio significado a las ecuaciones como estado de equilibrio y a las simplificaciones como operaciones de mantenimiento del equilibrio. Esto ayudó al estudiante a interiorizar el modelo de la balanza y a progresar rápidamente en la resolución de ecuaciones lineales. El estudiante fue capaz de resolver diversos problemas verbales de ecuaciones lineales de contextos diferentes del de los patrones geométricos.

Esta experimentación permite conjeturar que los estudiantes con alta capacidad de los últimos cursos de Primaria están en condiciones de manejar el lenguaje algebraico. Este aprendizaje es muy importante porque les permite acceder a nuevas herramientas matemáticas que les permitirán resolver nuevos tipos de problemas, aumentando así su interés por las matemáticas.

Hemos observado que los estudiantes con alta capacidad suelen utilizar procedimientos recursivos de cálculo para los términos inmediatos y próximos de la sucesión y pasar a procedimientos funcionales para calcular términos lejanos y para verbalizar generalizaciones. Por su parte, los estudiantes ordinarios de los mismos cursos, también suelen utilizar procedimientos recursivos para calcular los términos inmediatos y próximos, pero muchos de ellos se bloquean al no ser capaces de transformar este procedimiento en uno funcional, lo cual les impide calcular los términos lejanos, generalizar y resolver las cuestiones de inversión.

En la actualidad, estamos progresando en esta línea de investigación para diseñar secuencias de enseñanza de pre-álgebra que se puedan implementar en clases ordinarias de Primaria, de manera que todos los estudiantes puedan avanzar, más o menos dependiendo de su capacidad y motivación, y los estudiantes con alta capacidad puedan desarrollar todo su potencial en el contexto de las clases ordinarias de su curso.

### **Resolución colaborativa de problemas en entornos virtuales**

Los estudiantes con alta capacidad matemática se sienten con frecuencia solos en el contexto de sus clases ordinarias, porque ninguno de sus compañeros tiene su capacidad matemática ni su interés por resolver problemas difíciles. Las actividades extraescolares como olimpiadas y talleres cumplen un papel importante desde este punto de vista social, pues ayudan a que estudiantes con capacidades matemáticas, intereses y gustos similares se conozcan y se reúnan en un ambiente de iguales. Las nuevas tecnologías de comunicación abren posibilidades de interacción cuando la reunión física no es posible y, al mismo tiempo, plantean cuestiones sobre la viabilidad y utilidad de diferentes formas posibles de interacción virtual.

Hay investigaciones que muestran que el trabajo cooperativo entre estudiantes superdotados es una estrategia educativa beneficiosa (Davis, Rimm y Siegel, 2014), si bien se necesitan investigaciones específicas que analicen las particularidades de esta metodología cuando se implementa en un entorno virtual para la resolución cooperativa de problemas de matemáticas.

En los últimos años estamos realizando experimentos de diversos tipos, todos los cuales tienen como elemento común que, basándonos en plataformas de video-conferencia, como Skype o Hangout, conectamos de manera síncrona (en tiempo real) a varios estudiantes de alta capacidad y un profesor para resolver problemas. Habitualmente, cada estudiante y el profesor están físicamente en lugares diferentes, por lo que la reunión real no es posible. En este momento, podemos considerar estas investigaciones como estudios exploratorios de recopilación de información (Gutiérrez, 1991), ya que estamos empezando a analizar las condiciones operativas que imponen estos entornos y su influencia en el desarrollo de la actividad, así como las características de las interacciones que se producen en el grupo durante las sesiones. En Ramírez, Beltrán-Meneu, Jaime y Gutiérrez (2016) presentamos un ejemplo de interacción entre dos estudiantes que tienen que resolver un problema del cuál cada estudiante tiene parte de los datos, de forma que ninguno de ellos puede resolver solo el problema.

Desde un punto de vista metodológico, las conexiones virtuales plantean algunos obstáculos, el principal de los cuales es la dificultad para compartir información a través de las pantallas. En ocasiones, la información que interesa compartir es gráfica (esquemas, figuras geométricas, etc.). En otras ocasiones, la información es verbal-simbólica (una expresión algebraica, los vértices de un polígono, etc.). La comunicación de expresiones algebraicas presenta un reto interesante para los participantes en la actividad, pues deben aprender a manejar verbalmente elementos simbólicos, en especial los paréntesis, cuya omisión produce cambios matemáticamente importantes en las expresiones algebraicas comunicadas. Esto abre una interesante serie de cuestiones de investigación en las que estamos empezando a trabajar.

### **CONCLUSIONES**

En este texto hemos hecho un recorrido por la investigación realizada desde la didáctica de las matemáticas sobre los estudiantes con alta capacidad matemática. Hemos seleccionado las áreas de investigación en las que se ha avanzado más, concretamente las de resolución de problemas, identificación, caracterización y análisis de los procesos de aprendizaje y aprendizaje de estos estudiantes. Hemos presentado algunas publicaciones internacionales relevantes y hemos hecho un recorrido exhaustivo por las investigaciones realizadas en España que conocemos. En la segunda parte del texto, hemos hecho una descripción organizada de las líneas de investigación en las que estamos actualmente involucrados, relativas al análisis de la complejidad del razonamiento de los estudiantes al resolver problemas, al uso de la visualización, al aprendizaje de conceptos y procedimientos pre-algebraicos y la resolución colaborativa de problemas.

La identificación de estudiantes con alta capacidad matemática está en sus comienzos. Dejando aparte el estudio de Krutetskii (1976), que en la actualidad sería muy difícil de llevar a cabo debido a su complejidad y larga duración, los estudios sobre identificación se han centrado en contenidos matemáticos específicos (por ejemplo pensamiento multiplicativo, geometría, visualización o pre-álgebra) y se han basado en unos conjuntos de problemas que son adecuados para unos cursos concretos de Primaria o Secundaria. Estos instrumentos producen resultados parciales, a veces discrepantes, que sólo muestran la capacidad de estudiantes en un área matemática limitada. Es necesario organizar un proyecto de investigación más amplio y ambicioso que dé lugar a herramientas válidas y fiables, que cubran todo el espectro de las matemáticas escolares y, en lo posible, una mayor amplitud de cursos.

Los profesores son un elemento clave en la identificación de los estudiantes con alta capacidad matemática. Sin embargo, se observa una falta de estudios enfocados a los profesores y futuros profesores, en lo referente a sus creencias sobre la alta capacidad y sus formas de identificación de alumnos, a su formación en destrezas de detección y en metodologías de enseñanza adecuadas para organizar sus clases de manera adecuada a las necesidades de estos alumnos.

Asimismo, las nuevas tecnologías proporcionan a los profesores herramientas eficaces para plantear intervenciones educativas y programas complementarios de atención a estudiantes de alta capacidad matemática, porque son una enorme fuente de información y porque pueden resolver la limitación que supone la necesidad de reunirse físicamente, permitiendo a estos estudiantes avanzar más rápido e investigar a su propio ritmo.

## Referencias

- Aizikovitsh-Udi, E. y Amit, M. (2011). Integrating theories in the promotion of critical thinking in mathematics classrooms. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME7)* (pp. 1034–1043). Rzeszów, Polonia: ERME.
- Amit, M. y Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM*, 40, 111-129.
- Applebaum, M. (2017). Spatial abilities as predictor to mathematics performance of mathematics motivated students. En D. Pitta-Pantazi (Ed.), *Proceedings of the 10th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference* (pp. 142-150). Nicosia, Chipre: los autores.
- Arbona, E. (2016). *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas*. Trabajo de Máster. Universitat de València. Disponible en <http://roderic.uv.es/handle/10550/56731>.
- Arbona, E., Jaime, A., Gutiérrez, A. y Beltrán-Meneu, M. J. (2016). Patrones geométricos para iniciar en el álgebra a estudiantes de primaria con talento matemático. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 557). Málaga: SEIEM.
- Bass, H. (2008). Discurso en la sesión de apertura del ICME 10. En M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME10)* (pp. 28-31). Roskilde, Dinamarca: IMFUFA, Roskilde Universitet.
- Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Disponible en <http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/1827/1/17349515.pdf>.
- Benedicto, C. (2013). *Investigación sobre variables en el diseño de actividades escolares para alumnos con altas capacidades matemáticas*. Trabajo de Máster. Universitat de València. Disponible en <http://roderic.uv.es/handle/10550/32580>.

- Benedicto, C., Acosta, C., Gutiérrez, A., Hoyos, E. A. y Jaime, A. (2015). Improvement of gifted students' visualization abilities in a 3d computer environment. En N. Amado y S. Carreira (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 363-370). Faro, Portugal: Universidad del Algarve.
- Benedicto, C., Arbona, E., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). Analysis of the cognitive demand of a gifted student's strategies to solve geometric patterns problems. Comunicación en el TSG04 (activities for, and research on, mathematically gifted students) *13th International Congress on Mathematical Education (ICME13)*. Hamburgo. Disponible en <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/BenyOtros16.pdf>.
- Benedicto, C., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2017). When the theoretical model does not fit our data: a process of adaptation of the cognitive demand model. Pendiente de publicación en *Proceedings of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME10)*, Dublín. Disponible en <http://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/BenyOtros17.pdf>.
- Benedicto, C., Hoyos, E. A., Aristizábal, J. H., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). Análisis de la demanda cognitiva de resoluciones de problemas. Un ejemplo: Cortando polígonos. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 567). Málaga: SEIEM.
- Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.
- Bishop, A. J. (2008). Research, effectiveness, and the practitioners' world. En P. Clarkson y N. Presmeg (Eds.). *Critical issues in mathematics education. Major contributions of Alan J. Bishop* (pp. 191-203). Nueva York: Springer.
- Boston, M. D. y Smith, M. S. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 119-156.
- Brandl, M. (2011). High attaining versus (highly) gifted pupils in mathematics: A theoretical concept and an empirical survey. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME7)* (pp. 1044-1055). Rzeszów, Polonia: ERME.
- Cai, J. y Howson, G. (2013). Toward an international mathematics curriculum. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 949-974). Nueva York: Springer.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 1-34). Badajoz: SEIEM.
- Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faisca*, 11, 4-22.
- Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2008). Diagnóstico de errores en niños con talento. *Unión*, 16, 123-140.
- Cho, H., Han, H., Jim, M., Kim, H. y Song, M. (2004). Designing a microworld for mathematical creative and gifted students. Comunicación en el TSG04 del *10th International Congress on Mathematical Education (ICME10)*. Copenhague.
- Davis, G. A., Rimm, S. B. y Siegle, D. (2014). *Education of the gifted and talented*. Boston: Pearson.
- De la Torre, E. (2010). Introducción al Seminario II sobre educación matemática y diversidad. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 117-119). Lleida: SEIEM.
- De Villiers, M. (2016). Enrichment for the gifted: generalizing some geometrical theorems y objects. Texto de la comunicación en el TSG04 del *13th International Congress on Mathematical Education (ICME13)*, Hamburgo.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.

- Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: Análisis de una muestra. *Faisca*, 13(15), 30-39.
- Diezmann, C. M. y Watters, J. J. (2002). Summing up the education of mathematically gifted students. En B. Barton, K. C. Irwin, M. Pfannkuch y M. O. J. Thomas (Eds.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the MERGA* (pp. 219-226). Auckland: MERGA.
- Ellerton, N. (1986). Children's made-up mathematics problems. A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261-271.
- Escrivà, M. T. (2016). *Habilitats de visualització manifestades per alumnes de primària quan resolen activitats de geometria 3D i la seua relació amb el talent matemàtic*. Trabajo de Máster. Universitat de València. Disponible en <http://roderic.uv.es/handle/10550/56732>.
- Escrivà, M. T., Beltrán-Meneu, M. J., Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2016). Habilidades de visualización de estudiantes de primaria en actividades de geometría espacial. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 595). Málaga: SEIEM.
- Espinoza, J., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2016). The posing of arithmetic problems by mathematically talented students. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 14(2), 368-392.
- Freiman, V. (2004). Mathematical giftedness in early grades: challenging situation approach. Comunicación en el TSG04 del *10th International Congress on Mathematical Education (ICME10)*. Copenhague.
- Fritzlar, T., y Karpinski-Siebold, N. (2012). Continuing patterns as a component of algebraic thinking - An interview study with primary school students. Comunicación en el TSG09 del *12th International Congress on Mathematical Education (ICME 12)*. Seúl, Corea del Sur.
- Gal, H., Levenson, E., Shayshon, B., Tesler, B., Eyal, T., Prusak, N. y Berger, S. (2008). From one end to the other: raising teachers' awareness of mathematically-talented students in mixed-ability classes. Comunicación en el DG09 del *11th International Congress on Mathematical Education (ICME11)*. Monterrey, México.
- García-Cruz, J. A. y Martínón, A. (1997). Actions and invariant schemata in linear generalising problems. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME21)* (vol. 2, pp. 289-296). Helsinki: PME.
- García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.
- Gómez, R. (2013). *Exploración de las características del razonamiento visual en alumnos con talento matemático*. Trabajo de Máster. Universitat de València. Disponible en <http://roderic.uv.es/handle/10550/52715>.
- Guinjoan, M., Gutiérrez, A. y Fortuny, J. M. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 29-46.
- Gutiérrez, A. (1991). La investigación en didáctica de las matemáticas. En A. Gutiérrez (Ed.), *Área de conocimiento: didáctica de las matemáticas* (pp. 149-194). Madrid: Síntesis.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME20)* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia: PME.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.
- Gutiérrez, A., Jaime, A. y Alba, F. J. (2014). Génesis instrumental en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. El caso de un estudiante de alta capacidad matemática. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 405-414). Salamanca: SEIEM.



- Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal*, 6(2), 175-183.
- Hewson, S. (2011). *What is a mathematically rich task?* Texto accesible en <http://nrich.maths.org/6299>.
- Ivanov, O., Ivanova, T. y Stolbov, K. (2013). Typologies of mathematical problems: from classroom experience to pedagogical conceptions. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8)* (pp. 1175-1184). Ankara, Turquía: ERME.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.
- Karp, A. (2013). Mathematical problems for the gifted: the structure of problem sets. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8)* (pp. 1175-1184). Ankara, Turquía: ERME.
- Karp, A. y Leikin, R. (2009). Mathematical gift and promise: exploring and developing. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME33)* (vol. 1, pp. 185-186). Tesalónica, Grecia: PME.
- Karsenty, R. y Friedlander, A. (2008). Teaching the mathematically gifted: a professional development course. Comunicación en el DG09 del *11th International Congress on Mathematical Education (ICME11)*. Monterrey, México.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Lee, K. H. (2005). Mathematically gifted students' geometrical reasoning and informal proof. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME29)* (vol. 3, pp. 241-248). Melbourne: PME.
- Lee, S.-G. (2004). Activity of a gifted student who saw linear algebraic solution of blackout puzzle. Comunicación en el TSG04 del *10th International Congress on Mathematical Education (ICME10)*, Copenhague.
- Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Reston, VA: NCTM.
- Niederer, K. y Irwin, K. C. (2001). Using problem solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME25)* (vol. 3, pp. 431-438). Utrecht, Holanda: PME.
- Niss, M. (Ed.) (2010). *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*. Roskilde, Dinamarca: IMFUFA, Roskilde Universitet.
- Nolte, M. (2012). "High IQ and high mathematical talent!" Results from nine years talent search in the Prima-Project Hamburg. Comunicación en el TSG03 del *12th International Congress on Mathematical Education (ICME12)*, Seúl.
- Phillipson, S. N. y Callingham, R. (2009). Understanding mathematical giftedness: integrating self, action repertoires and the environment. En L. V. Shavinina (Ed.), *International handbook on giftedness* (pp. 671-698). Dordrecht, Holanda: Springer.
- Pitta-Pantazi, D. (2017). What have we learned about giftedness and creativity? An overview of a five years journey. En R. Leikin y B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness. Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond* (pp. 201-223). Berna: Springer.
- Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Kattou, M., Sophocleous, P. y Pittalis, M. (2015). Assessing mathematically challenging problems. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME9)* (pp. 1052-1058). Praga: ERME.

- Pitta-Pantazi, D. y Sophocleous, P. (2017). Higher order thinking in mathematics: a complex construct En D. Pitta-Pantazi (Ed.), *Proceedings of the 10th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference* (pp. 72-78). Nicosia, Chipre: los autores.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 297-311.
- Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking. A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 2-21). Mérida, México: PME-NA.
- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Trabajo de Tesis. Universidad de Granada. Disponible en <http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/verdetalles/7461/descargar>.
- Ramírez, R., Beltrán-Meneu, M. J., Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2016). Resolución por Skype de una tarea de visualización cooperativa por una pareja de estudiantes de talento. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 447-457). Málaga: SEIEM.
- Ramírez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lleida: SEIEM.
- Reyes-Santander, P. y Karg A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403-414). Santander: SEIEM.
- Rivera, F. D. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Nueva York: Springer.
- Rojas, S., Jiménez, W. y Mora, L. C. (2009). El uso de la resolución de problemas como instrumento para la caracterización de talento en matemáticas. Comunicación en el *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Pasto, Colombia. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/709/1/eluso.pdf>.
- Ryu, H. A., Chong, Y. O. y Song, S. H. (2007). Mathematically gifted students' spatial visualization ability of solid figures. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME31)* (vol. 4, pp. 137-144). Seúl: PME.
- Schindler, M. y Joklitschke, J. (2015). Designing tasks for mathematically talented students. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME9)* (pp. 1066-1072). Praga: ERME.
- Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 29(3), 75-80.
- Smith, M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350.
- Sophocleous, P. y Pitta-Pantazi, D. (2017). What is the relationship between critical thinking and problem posing ability? En D. Pitta-Pantazi (Ed.), *Proceedings of the 10th Mathematical Creativity and Giftedness International Conference* (pp. 79-85). Nicosia, Chipre: los autores.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A. y Silver, E. A. (2009). *Implementing Standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Nueva York: Teachers College Press.
- Vale, I. y Pimentel, T. (2011). Mathematical challenging tasks in elementary grades, En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of European Research in Mathematics Education (CEME7)* (pp. 1154-1164). Rzeszów, Polonia: CERME.

- Van Garderen, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39(6), 496-506.
- Voica, C. y Singer, F. M. (2012). Problem modification as an indicator of deep understanding. Comunicación en el TSG03 del *12th International Congress on Mathematical Education (ICME12)*, Seúl.
- Webb, R. M., Lubinski, D. y Benbow, C. P. (2007). Spatial ability: a neglected dimension in talent searches for intellectually precocious youth. *Journal of Educational Psychology*, 99(2), 397-420.
- Zaslavsky, O. y Linchevski, L. (2007). Teacher change in the context of addressing students' special needs in mathematics. En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME31)* (vol. 1, pp. 166-169). Seúl: PME.

---

<sup>1</sup> Los resultados presentados en este texto son parte de las actividades de los proyectos de investigación I+D+i EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER) y GVPROMETEO2016-143 (Generalitat Valenciana).

<sup>2</sup> El equipo está formado por Eva Arbona, María José Beltrán, Clara Benedicto, María Teresa Escrivá, Ángel Gutiérrez, Adela Jaime (U. de València), Rafael Ramírez (U. de Granada) y Juan Miguel Ribera (U. de la Rioja).