CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS DE FRACCIONES PARTE-TODO QUE RELACIONAN UNIDAD, TAMAÑOS DE PARTES Y FRACCIONES

Adela Jaime Pastor
Universitat de València, adela.jaime@uv.es

Ángel Gutiérrez Rodríguez
Universitat de València, angel.gutierrez@uv.es

Resumen:
Las conocidas clasificaciones de los problemas aritméticos verbales aditivos y multiplicativos resultan útiles para hacer propuestas adecuadas a las características de los estudiantes y que incluyan todas las variantes de problemas. Sin embargo, no hay una clasificación análoga para los problemas verbales de fracciones. La interpretación de las fracciones como relación parte-todo supone la partición de un conjunto unidad en dos subconjuntos; en este contexto, los problemas se basan en cinco valores, los tamaños de la unidad y de sus partes y las fracciones de la unidad que representan las partes. En este texto proponemos una clasificación de los problemas verbales de fracciones en el contexto parte-todo y mostramos su aplicación mediante ejemplos de problemas en dos situaciones concretas, una de contexto continuo y otra de contexto discreto.
Palabras clave: Aprendizaje de fracciones, Relación parte-todo, Clasificación de problemas, Estudiantes con diversas capacidades, Futuros profesores.

1. Introducción

El inicio de la enseñanza y el aprendizaje de los números fraccionarios supone un importante reto para profesores y estudiantes de Educación Primaria o Secundaria, debido, en parte, a la diversidad de significados e interpretaciones de las fracciones: relación parte-todo (también llamada parte-parte-todo), medida, cociente, razón y operador (Llinares y Sánchez, 1988). Por ello, la complejidad conceptual y procedimental de las fracciones sea muy superior a la de los números naturales, enteros y decimales, pues un aprendizaje correcto de las fracciones solo es posible comprendiendo cada una de sus interpretaciones (Padilla-Escorcia y otros, 2022), siendo la relación parte-toda la primera que hay que estudiar (Behr y otros, 1983; Tunç-Pekkan, 2015). De acuerdo con Llinares y Sánchez (1988), los primeros pasos en la enseñanza de las fracciones son la toma de contacto con los elementos fundamentales de unidad y partes de la unidad, así como con las principales formas de representación de las fracciones (verbal, numérica y gráfica) y la depuración de dichas formas de representación, para llegar a pasar de representaciones mediante objetos (manipulados o dibujados) a diagramas.

Son conocidas la clasificación de los problemas escolares verbales aditivos (de sumas y restas) en varias categorías (cambio, combinación, comparación e igualación) y la de los problemas escolares verbales multiplicativos (de multiplicaciones y divisiones), también clasificados en varias categorías (producto cartesiano, razón y comparación). En ambas clasificaciones de problemas, se distinguen además diversas subcategorías, según cuál sea la incógnita a calcular (uno de los términos o el resultado) (Maza, 1991; Puig y Cerdán, 1988; Staulters, 2006). Por otra parte, los problemas aritméticos verbales se diferencian según la cantidad de etapas (operaciones) requeridas para su resolución (Puig y Cerdán, 1988). Esta organización permite a los profesores seleccionar problemas con diferentes dificultades, adecuados a las necesidades de los estudiantes con dificultades de aprendizaje, medios o con alta capacidad matemática. Asimismo, el conocimiento de estas clasificaciones le permite al profesorado identificar tipos de problemas que aparecen raramente en los libros de texto pero que son interesantes para plantear a sus alumnos.

En lo que respecta a los problemas de fracciones, en la literatura no hemos encontrado ninguna clasificación similar a las anteriores, si bien es fácil observar que hay tipos de problemas, en particular de los basados en la interpretación parte-todo, cuyas resoluciones tienen diferentes estructuras y dificultades. Ello nos ha llevado a plantear como objetivo de esta comunicación breve presentar una propuesta original de innovación educativa, que estamos desarrollando en la actualidad, consistente en definir una clasificación de los problemas escolares verbales de manipulación de fracciones interpretadas como relación parte-todo, es decir, los problemas que piden a los estudiantes relacionar un todo con sus partes y averiguar qué fracción corresponde a una parte o qué tamaño tiene la parte correspondiente a una fracción. Además, junto a la presentación teórica, incluimos algunos ejemplos de los diferentes tipos de problemas. Esta clasificación es útil en varias situaciones que se pueden dar en las aulas de Educación Primaria y Secundaria: seleccionar problemas adecuados al nivel de comprensión de los estudiantes; plantear problemas de tipos variados, evitando utilizar solo problemas de unos pocos tipos, que inducen la memorización de sus estrategias de resolución; plantear problemas más complejos para identificar a estudiantes con alta capacidad matemática y atender sus necesidades específicas de aprendizaje más profundo.

2. Elementos teóricos

Vamos a caracterizar los diferentes elementos conceptuales necesarios para analizar los problemas que se pueden plantear cuando se interpretan las fracciones como *relaciones parte-todo,* interpretación basada en considerar una *unidad* descompuesta mediante una partición en varias *partes iguales*. La unidad puede ser un conjunto *discreto* o un conjunto *continuo*; como estamos centrados en el contexto de la enseñanza inicial de las fracciones, vamos a asumir que los conjuntos discretos son también finitos.

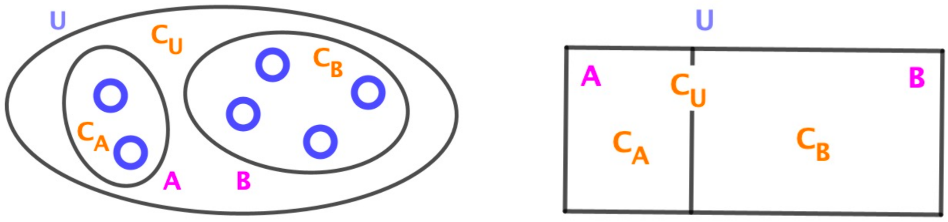
Cuando la unidad es un conjunto continuo, las fracciones se refieren una magnitud relevante de ese conjunto. Las unidades continuas usadas en los libros de texto tienen como magnitud relevante, en la mayoría de los casos, el área (superficies), pero también se suele usar la longitud (segmentos). En estos casos, la partición consiste en formar varias partes que tengan igual medida de la magnitud considerada (misma longitud o área). La Figura 1 muestra ejemplos de representaciones discreta y continua de conjuntos unidad en libros de texto.

Figura 1: Representaciones discreta y continua de unidades en libros de texto de Educación Primaria.

Para organizar la clasificación de los problemas, vamos a considerar un conjunto unidad U partido en dos subconjuntos A y B, es decir, que $\{A, B\}$ es una partición de U. Las cantidades que intervienen en estos problemas son (Figura 2):

C_U	Cantidad de elementos (discreta) o medida (continua) de la unidad U
C_A y C_B	Cantidades de elementos (discreta) o medidas (continua) de las partes A y B ($C_A + C_B = C_U$)
f_A y f_B	Fracciones de la unidad U correspondientes a las cantidades C_A y C_B ($f_A = C_A/C_U$; $f_B = C_B/C_U$; $f_A + f_B = 1$)

Figura 2: Representaciones discreta y continua de la unidad U y sus partes A y B.



3. Clasificación de los problemas de relaciones entre la unidad y sus partes

La estructura general de los problemas verbales usados para iniciar al estudio de las fracciones como relación parte-todo consiste en presentar una partición de la unidad U (discreta o continua) en dos partes, aportar dos datos de entre los cinco valores numéricos representados en la Figura 2 y pedir que se calculen los otros tres valores. Al tomar dos de los cinco datos posibles, obtenemos los tipos de enunciados mostrados en la Tabla 1.

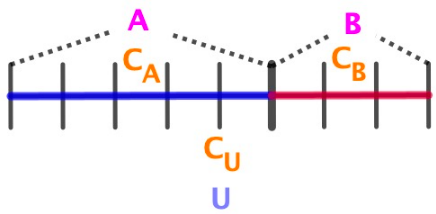
La dificultad de los diversos tipos de problemas no es la misma. Nuestros análisis teóricos y experimentos previos dan a entender que los problemas más fáciles son aquellos en los que los datos son dos cantidades y los más difíciles los que tienen al menos un dato que es una fracción. Cuando intervienen fracciones, un diagrama en el que se representan las particiones de la unidad (Figura 3) puede servir de ayuda para resolver el problema.

Tabla 1: Tipos de problemas según los datos que presentan.

	Datos		Calcular	
1	C_U y C_A	(o C_U y C_B)	C_B, f_A y f_B	(o C_A, f_A y f_B)
2	C_U y f_A	(o C_U y f_B)	C_A, C_B y f_B	(o C_A, C_B y f_A)
3	C_A y C_B		C_U, f_A y f_B	
4	C_A y f_A	(o C_B y f_B)	C_U, C_B y f_B	(o C_U, C_A y f_A)
5	C_A y f_B	(o C_B y f_A)	C_U, C_B y f_A	(o C_U, C_A y f_B)
6	f_A y f_B		C_U, C_A y C_B	

Nota: El caso 6 tiene infinitas soluciones, pues los datos no permiten hallar una cantidad concreta de elementos de *U* ni de sus partes *A* y *B*.

Figura 3: Un tipo de diagrama para representar los datos y las cantidades desconocidas.



3.1. Ejemplos de los tipos de problemas

Presentamos ejemplos de los tipos de problemas definidos en la Tabla 1. Usamos solo dos contextos, discreto y continuo, para resaltar mejor las diferencias entre los distintos tipos de problemas. El diagrama que acompaña a cada enunciado es una representación de los datos y los valores pedidos; este tipo de representaciones, lineales o rectangulares, son una valiosa ayuda para entender las relaciones entre los elementos del contexto.

Contexto 1. *En un restaurante tienen, para el postre de hoy, 72 piezas de fruta (C_U), de las que 48 son peras (C_p) y 24 son manzanas (C_m).*

Los valores numéricos presentes en este contexto son los indicados en la Tabla 2.

Tabla 2: Valores numéricos del contexto discreto (restaurante).

C_U	C_p	C_m	f_p	f_m
72	48	24	2/3	1/3

Contexto 2. *Un sendero del parque mide 81 metros de largo (C_U) y está formado por dos tramos. Uno es de césped y mide 27 metros (C_c). El otro es de tierra y mide 54 metros (C_t).*

Los valores numéricos presentes en este contexto son los indicados en la Tabla 3.

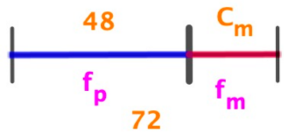
Tabla 3: Valores numéricos del contexto continuo (sendero).

C_U	C_c	C_t	f_t	f_t
81	27	54	1/3	2/3

Cuando profesores y libros de texto plantean problemas de fracciones de relación parte-todo, es frecuente que los enunciados solo incluyan una pregunta o, en algunas ocasiones, dos. Sin embargo, es posible proponer tres preguntas en cada tipo de problemas. Dependiendo de qué preguntas se hagan y en qué orden, varía la dificultad del problema.

Tipo 1. *En un restaurante tienen, para el postre de hoy, 72 piezas de fruta, de las que 48 son peras y el resto son manzanas.*

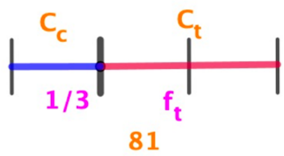
a) ¿Cuántas manzanas hay en el restaurante?
b) ¿Qué fracción del total de piezas de fruta son las peras?
c) ¿Qué fracción del total de piezas de fruta son las manzanas?



En este problema, la pregunta c) solo se puede responder después de haber calculado la b). Por lo tanto, plantear la pregunta c) antes que la b) o plantear la c) pero no la b) hacen que aumente la dificultad del problema.

Tipo 2. *Un sendero del parque mide 81 metros de largo y está formado por dos tramos. Uno es de césped y mide 1/3 del total del sendero. El otro es de tierra.*

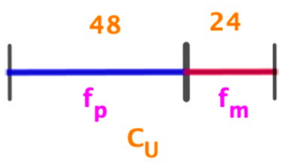
a) ¿Cuántos metros mide el tramo de césped?
b) ¿Cuántos metros mide el tramo de tierra?
c) ¿Qué fracción del total del sendero es de tierra?



En este problema, la pregunta b) solo se puede responder después de haber calculado la a) o la c). Por lo tanto, plantear la pregunta b) antes que las otras hace que aumente la dificultad del problema.

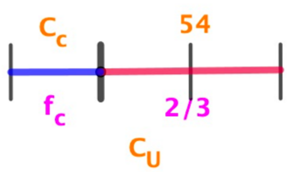
Tipo 3. *En un restaurante tienen fruta para el postre de hoy. Hay 48 peras y 24 manzanas.*

a) ¿Cuántas piezas de fruta hay en total en el restaurante?
b) ¿Qué fracción del total de piezas de fruta son las peras?
c) ¿Qué fracción del total de piezas de fruta son las manzanas?



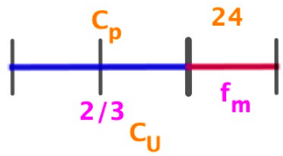
Tipo 4. *Un sendero del parque está formado por dos tramos. Uno es de césped. El otro es de tierra y mide 54 metros, que son 2/3 del total del sendero.*

a) ¿Qué fracción del total del camino es de césped?
b) ¿Cuántos metros mide el tramo de césped?
c) ¿Qué longitud tiene el camino?



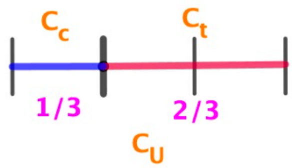
En este problema, la pregunta b) solo se puede responder después de haber calculado la a) o la c). Por lo tanto, plantear la pregunta b) en tercer lugar hace que disminuya la dificultad del problema.

<u>Tipo 5</u>. *En un restaurante tienen fruta para el postre de hoy. Hay peras, que son 2/3 del total de piezas de fruta, y 24 manzanas.*



a) ¿Qué fracción del total de piezas de fruta son las manzanas?
b) ¿Cuántas peras hay en el restaurante?
c) ¿Cuántas piezas de fruta hay en total en el restaurante?

<u>Tipo 6</u>. *Un sendero del parque está formado por dos tramos. Uno es de césped y mide 1/3 del total del sendero. El otro es de tierra y mide 2/3 del total del sendero.*



a) ¿Cuántos metros mide el tramo de césped?
b) ¿Cuántos metros mide el tramo de tierra?
c) ¿Qué longitud tiene el camino?

En este problema no hay ningún valor numérico de las longitudes, por loque no es posible responder ninguna pregunta. Solo se podría responder si se añade un dato, un valor numérico de uno de los tramos o del sendero total.

4. Reflexiones finales

Hemos presentado un estudio de innovación en desarrollo para construir una clasificación de los diversos tipos de problemas verbales de manejo de fracciones en un contexto parte-todo, que puede resultar de ayuda para los profesores que tienen alumnos con distintas habilidades matemáticas, que requieren el planteamiento de problemas de dificultad adecuada a sus niveles. Los tipos de problemas descritos tienen un amplio rango de dificultad, por lo que resultan adecuados para estudiantes con dificultades de aprendizaje, medios y con alta capacidad matemática.

Otro motivo de interés de esta clasificación es que ayuda a mejorar el conocimiento didáctico de las fracciones (PCK; Escudero y Carrillo, 2020) de los profesores y futuros profesores de matemáticas. Dado que las fracciones son un contenido complejo para los estudiantes, creemos que la clasificación que presentamos resultará útil para ayudar a mejorar el aprendizaje de las fracciones.

Este estudio de innovación educativa avanzará en dos direcciones: comprobar experimentalmente la utilidad de la clasificación de problemas para identificar a estudiantes con alta capacidad matemática y usarla para mejorar la formación inicial de los profesores de matemáticas de Educación Primaria.

Los resultados presentados son parte del proyecto I+D+i PID2020-117395RB-I00, financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

5. Referencias

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational-number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). Academic Press.

Escudero, D., y Carrillo, J. (2020). El conocimiento didáctico del contenido: bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática, 32*(2), 1-38. https://doi.org/10.24844/EM3202.01

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo*. Síntesis.

Maza, C. (1991). Problemas multiplicativos de conversión. *Suma, 8*, 5-10.

Padilla-Escorcia, I. A., Rojas-Sandoval, Y. P. y Palencia-Quiroz, S. (2022). Errores de estudiantes de primaria en la resolución de problemas con fracciones. *Eco Matemático, 13*(1), 63-80. https://doi.org/10.15665/encuen.v22i01-Enero-Junio-.3097

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis.

Staulters, M. L. (2006). *A universal design for learning mathematics: reducing barriers to solving word problems* [Tesis doctoral, State University of New York]. Accesible en https://www.proquest.com/docview/304946961/fulltextPDF/2300478674744AA5PQ/1?accountid=14777

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children’s fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics, 89*(3), 419-441. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9606-2