Citar como: Jaime, A., Gutiérrez, A., Benedicto, C. (2018): Problemas con extensiones. Propuesta para estudiantes con alta capacidad matemática, *UNO, 79*, 7-14.

PROBLEMAS CON EXTENSIONES. PROPUESTA PARA ESTUDIANTES CON ALTA CAPACIDAD MATEMÁTICA

Adela Jaime, Ángel Gutiérrez, Clara Benedicto

Departamento de Didáctica de la Matemática. Universitat de València

Resumen: Los estudiantes con alta capacidad matemática deben recibir atención diferenciada en las clases de matemáticas. Presentamos una propuesta metodológica para primaria y secundaria basada en la resolución de problemas que son parte de la programación ordinaria, dirigidos a todo el alumnado y que incluyen extensiones para que los estudiantes con mayor capacidad matemática puedan completar su formación.

Palabras clave: alta capacidad matemática, geometría, inclusión, problemas con extensiones.

El sistema educativo español contempla la atención a la diversidad, siendo la alta capacidad o sobredotación una de sus variantes. Pero la alta capacidad matemática (en adelante acm) es objeto de poca atención, pues muchos profesores creen que los estudiantes con acm aprenden solos y no necesitan ayuda. Esta creencia es falsa: investigaciones realizadas en didáctica de las matemáticas concluyen que *el talento matemático está asociado a una habilidad específica que se desarrolla mediante experiencias, enseñanza, entrenamiento y retos continuos* (Dimitriadis, 2010). Es necesario implementar en las clases ordinarias metodologías de enseñanza adecuadas a los estudiantes con acm, para que desarrollen su potencial, mantengan el interés por las clases y no acaben en fracaso escolar. En este artículo presentamos una metodología basada en la resolución de problemas con extensiones, cuya finalidad es prestar atención diferenciada a los estudiantes con acm mientras resuelven los mismos problemas que sus compañeros de clase.

Los estudiantes con acm suelen resolver deprisa las actividades ordinarias planteadas a toda la clase. Con frecuencia, sus profesores les plantean más actividades similares, hasta que terminen sus compañeros. Esto es un grave error, pues los estudiantes con acm aprenden enseguida los contenidos ordinarios y tener que resolver más problemas, que para ellos ya son simples ejercicios[1], les resulta aburrido y desmotivador. Es necesario plantearles problemas más complejos, cuya resolución les suponga retos cognitivos apropiados y experiencias motivadoras. Una manera de lograrlo es mediante problemas abiertos (con múltiples soluciones, o ninguna), en los que necesiten usar razonamiento de mayor complejidad que el ordinario de la clase.

Una buena forma de mejorar el rendimiento de los estudiantes con acm, y de todos los de la clase, es potenciando el pensamiento matemático de alto nivel, pues favorece la profundidad del aprendizaje y el pensamiento crítico. El *modelo de demanda cognitiva* permite valorar el esfuerzo cognitivo que realizan los estudiantes al resolver problemas de matemáticas, diferenciando cuatro niveles que, de menor a mayor complejidad, se denominan *memorización*, *algoritmos sin conexiones*, *algoritmos con conexiones* y *hacer matemáticas* (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015). El pensamiento de alto nivel, es decir con alto nivel de demanda cognitiva, se puede lograr mediante problemas que utilicen ideas matemáticas complejas para los estudiantes.

En resumen, los estudiantes con acm sí necesitan el apoyo de sus profesores, que, además de tener una buena formación matemática, deben ser flexibles, imaginativos y capaces de improvisar tras las respuestas, a veces inesperadas, de sus alumnos con acm, para poder plantearles retos motivadores. Los problemas deben estar cuidadosamente graduados, atendiendo a la capacidad matemática de los estudiantes y a los conocimientos necesarios para

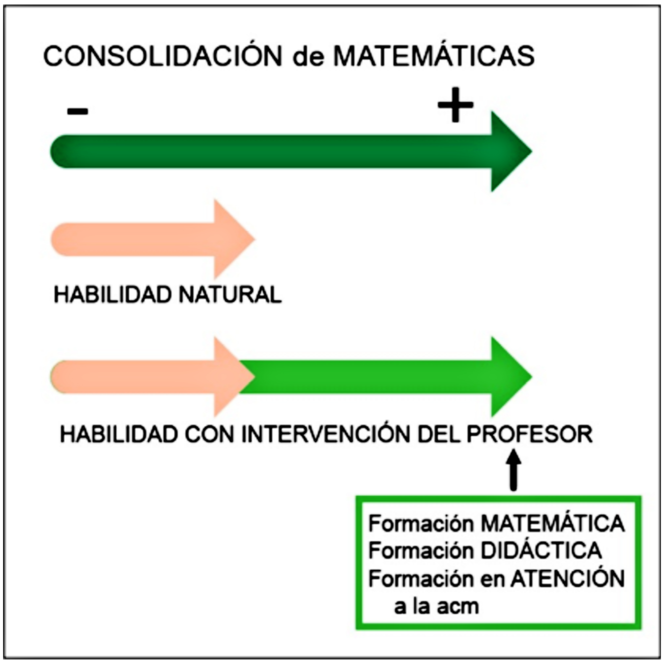
---

[1] Es necesario distinguir entre *ejercicio* (actividad para cuya resolución el estudiante sólo necesita datos memorizados y/o un procedimiento rutinario previamente aprendido) y *problema* (actividad para la que el estudiante debe crear un procedimiento de resolución o bien ya conoce un procedimiento de resolución pero debe justificar que el procedimiento o sus pasos son adecuados) (Puig, 1996).

resolverlos, pues el planteamiento sistemático de problemas demasiado difíciles puede producir una reacción tan negativa como los demasiado fáciles.

El colectivo de estudiantes con acm no es homogéneo: en un grupo del mismo curso o edad hay una diversidad de capacidades e intereses. Por ello, un problema puede ser adecuado para un estudiante pero no serlo para otro de su misma edad o curso. Por ello, las referencias que haremos a niveles educativos de los problemas indican que, para resolverlos, se necesitan los conocimientos típicos de esos cursos.

El papel de los profesores de matemáticas, tanto en Primaria como en Secundaria, es fundamental en el desarrollo matemático de los estudiantes con acm. Para ello, es necesaria una buena formación inicial y permanente de los profesores en conocimientos matemáticos, en estrategias de identificación de la acm y en metodologías de enseñanza a estos estudiantes (Cuadro 1).



Cuadro 1. Influencia de los profesores en el desarrollo de los estudiantes con acm.

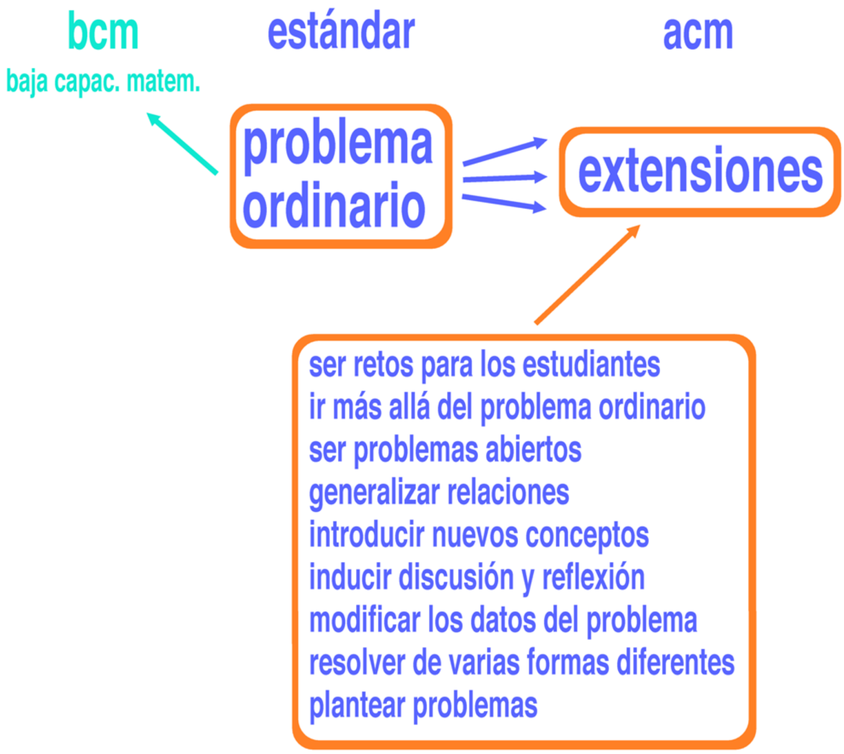
Los problemas matemáticos ricos

Nuestra propuesta metodológica es plantear *problemas matemáticos ricos*, que son problemas ordinarios, que se plantean a toda la clase, completados con *extensiones* graduadas en complejidad, para que cada estudiante realice un esfuerzo cognitivo del nivel adecuado a su capacidad matemática, en especial los estudiantes con acm[2]. El principal objetivo de esta metodología de enseñanza es que los estudiantes con acm tengan incentivos para seguir interesados por las clases de matemáticas a la vez que trabajan en los mismos problemas que sus compañeros. También pueden prepararse extensiones para estudiantes con dificultades en matemáticas (Cuadro 2), pero no es el objetivo de este artículo.

La mayoría de los problemas que se plantean habitualmente en las clases de matemáticas de Primaria o Secundaria se pueden convertir en problemas ricos, añadiéndoles extensiones, mediante diversas estrategias que presentamos a continuación, creadas por el profesor o inspiradas en recursos externos. El Proyecto Gauss ofrece numerosos contenidos que pueden convertirse en extensiones interactivas (basadas en Geogebra). Otra interesante fuente de problemas ricos es NRICH (University of Cambridge, 2017).

Diezmann y Watters (2002) establecen algunos criterios para plantear problemas ricos (Cuadro 2):

[2] En nuestro grupo de investigación de la Universitat de València estamos desarrollando una línea de investigación centrada en la problemática de evaluar el nivel de demanda cognitiva que supone para los estudiantes con acm resolver problemas ricos.



Cuadro 2. Estrategias para diseñar extensiones de problemas ricos.

1. Que supongan un reto: se puede lograr mediante problemas que requieran niveles altos de demanda cognitiva, en especial el de *hacer matemáticas* (Benedicto, Jaime y Gutiérrez, 2015).
2. Que vayan más allá de los planteados al grupo ordinario, proponiendo generalizaciones, uso de definiciones equivalentes, ampliaciones o modificaciones de la definición de un concepto, demostraciones a nivel superior, consideración de casos atípicos, ...
3. Que sean problemas abiertos, sin un camino de resolución previsible, como investigaciones sobre temas específicos.

A estos criterios podemos añadir otras estrategias para crear extensiones de problemas ordinarios y convertirlos en problemas matemáticos ricos:

4. Pedir la generalización de una relación implícita en un conjunto de resultados concretos, formular hipótesis, extender una propiedad matemática, etc.
5. Introducir un nuevo concepto relacionado no incluido en el currículo, por ejemplo modificando una definición, y explorar sus propiedades.

6. Inducir discusiones o reflexiones, pidiendo justificar un resultado obtenido, analizar otra solución diferente, etc., planteando preguntas como qué, cuándo, dónde, por qué, cómo, etc. (Sheffield, 2006).
7. Modificar los datos del problema cambiando los números por otros mayores o de conjuntos numéricos diferentes, estableciendo relaciones más complejas (p. ej., cuadráticas, exponenciales, ...), etc.
8. Pedir resolver el mismo problema de otra forma diferente, es decir utilizando conocimientos matemáticos diferentes o relacionando los mismos contenidos de otra forma, lo cual incrementa la demanda cognitiva y fomenta la creatividad.
9. Pedir plantear problemas relacionados con el que acaban de resolver. El planteamiento de problemas (problem posing) ha mostrado ser muy atractivo para los estudiantes con acm, pues les obliga a mirar los problemas resueltos con una perspectiva diferente y a buscar ideas matemáticas con las que trabajar.

Ejemplos de problemas ricos con extensiones

Mostramos a continuación ejemplos de problemas ricos con extensiones que se pueden llevar a las aulas de Primaria y Secundaria. No presentamos con detalle los problemas ordinarios, que suponemos conocidos, sino sólo sus extensiones. En los problemas de geometría, el software de geometría dinámica (por ejemplo, Geogebra) permite a los estudiantes explorar, conjeturar y verificar propiedades de manera empírica en una gran variedad de casos.

Problema rico 1: Modificación de la definición de polígono

En Primaria y ESO se estudian propiedades de los polígonos, como la cantidad de diagonales y la suma de sus ángulos interiores. Es posible hacer una pequeña modificación en la definición de polígono que tiene consecuencias interesantes en dichas propiedades. Arranz (2007a) plantea como definición de polígono: *Polígono es la superficie plana encerrada dentro de un contorno formado por segmentos rectos unidos en sus extremos*. Esta definición permite ampliar el concepto escolar de polígono (*simple*) para incluir los polígonos *cruzados* (Imagen 1) y los polígonos *estrellados* (Imagen 2). Esto permite plantear diversas extensiones de problemas ordinarios, como:

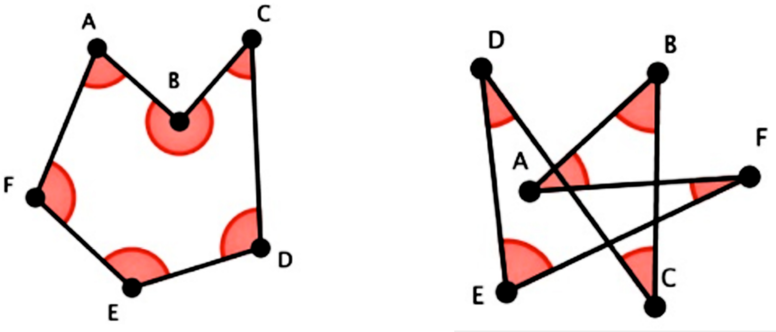


Imagen 1. Polígonos simple y cruzado.

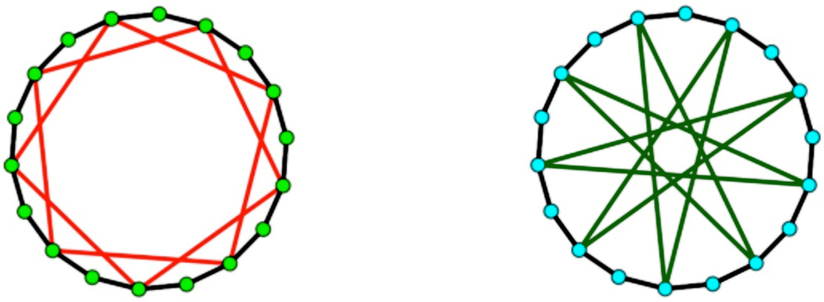


Imagen 2. Eneágonos estrellados creados uniendo puntos de 4 en 4 y de 8 en 8.

- *Dibuja ejemplos de polígonos según la nueva definición*. Seguramente el profesor deberá guiar a los estudiantes para que se den cuenta de que pueden dibujar polígonos cruzados y discutir con ellos que estas figuras son polígonos según la nueva definición.
- *Identifica los lados, vértices y ángulos de polígonos cruzados*. La complejidad de esta extensión se debe a que la nueva definición no coincide con la imagen conceptual visual formada por los estudiantes en Primaria.
- *Verifica si se conserva o no la suma de los ángulos interiores* (no se mantiene).
- *Verifica si se conserva o no la cantidad de diagonales del polígono* (sí se mantiene).

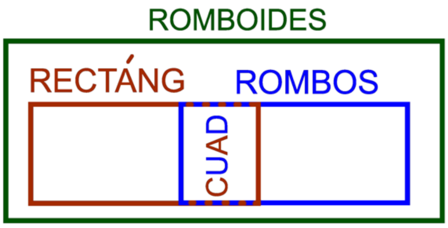
- *Dados varios puntos de una circunferencia que la dividen en arcos iguales, dibuja los polígonos estrellados regulares que se pueden construir con esos puntos como vértices* (Imagen 2).
- *En la respuesta anterior, calcula la cantidad de vértices de cada polígono estrellado. Deduce la cantidad de vértices de cualquier polígono estrellado regular para cualquier cantidad de puntos en la circunferencia*. La complejidad de esta extensión se basa en que los estudiantes deben identificar las variables de las que depende la cantidad de vértices (número de puntos en la circunferencia y salto de puntos al dibujar).
- *Calcula el valor de los ángulos de un polígono estrellado regular*. Esta extensión se puede resolver con varios niveles de demanda cognitiva, desde la medición directa (ver Álvarez y Losada, 2011) en Primaria (nivel de *algoritmos sin conexiones*) hasta la demostración deductiva de la formula obtenida (Arranz, 2007b) en Secundaria (nivel de *hacer matemáticas*).
- Esta definición de polígono admite también que en un vértice se conecten más de dos segmentos. Esta extensión es adecuada para estudiantes de ESO con capacidad matemática muy superior a la ordinaria.

Problema rico 2: Caracterizaciones de familias de cuadriláteros

En Primaria y ESO se estudian las diagonales y los ejes de simetría de los cuadriláteros. Es posible descubrir experimentalmente (dibujando en papel o en un ordenador) y enunciar caracterizaciones de los paralelogramos y sus familias basadas en propiedades de las diagonales. Esto permite plantear las siguientes extensiones, apoyadas en una tabla de doble entrada (polígonos y propiedades) para que los estudiantes organicen la información:

- *Dibuja varios ejemplos de cada familia de paralelogramos (cuadrados, rectángulos, rombos y romboides). Dibuja las diagonales de cada polígono.*
  a) Di si las diagonales son o no perpendiculares.
  b) Di si las diagonales tienen o no la misma longitud.
  c) Di si las diagonales se cortan o no en sus puntos medios.
  d) Escribe las propiedades de las diagonales de cada familia de polígonos. ¿Hay dos familias que tengan exactamente las mismas propiedades?

- *Mirando los resultados de la extensión anterior, establece relaciones conjuntistas entre las familias de paralelogramos* (Imagen 3).



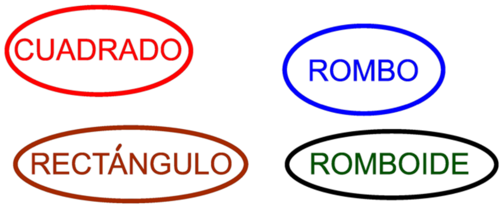


Imagen 3. Clasificaciones inclusiva y exclusiva de los paralelogramos.

- Una variante más compleja de las extensiones anteriores consiste en analizar, además de las cuatro familias de paralelogramos, las familias de las cometas y las flechas (cuadriláteros convexos y cóncavos, respectivamente, formados por dos pares de lados consecutivos iguales).

Se puede plantear otro conjunto parecido de extensiones basadas en la caracterización de las familias de paralelogramos (y de cometas y flechas) mediante propiedades de sus ejes de simetría (cantidad y posición en el polígono).

Problema rico 3: De la aritmética al álgebra

En Primaria se practican las operaciones aritméticas y se estudian diversas propiedades, como la conmutatividad y las relaciones de paridad (impar+impar = par, etc.). El siguiente problema rico se puede plantear en Primaria para profundizar en el conocimiento del sistema posicional y de las propiedades de la suma, mediante extensiones sobre paridad y acarreo en sumas.

El planteamiento central del problema es sumar un número de varias cifras (p. ej., 1234) y su número *reverso*, que tiene las mismas cifras en orden inverso (es decir, 4321)[3]. En Primaria, empezamos sumando números de dos cifras, problema adecuado para todos los estudiantes de la clase, y después se pueden plantear varias extensiones:

---

[3] Problema adaptado de http://nrich.maths.org/11111/index?nomenu=1.

- *El número 66 se puede formar sumando un número de dos cifras y su reverso: 66 = 15 + 51 (Imagen 4). Busca otros números que, al sumarlos con su reverso, den 66.*

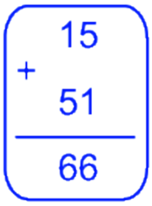


Imagen 4. Suma de un número de dos cifras y su reverso.

- *¿Has encontrado todas las soluciones para el 66?* Este tipo de pregunta presenta la complejidad de que el estudiante entienda la diferencia entre justificar que ha encontrado todas las soluciones y decir que no hay más soluciones porque no es capaz de encontrar otras.

- *Encuentra todos los números entre el 10 y el 99 que se pueden obtener sumando un número de dos cifras y su reverso.*

- *¿Crees que hay alguna regla para saber qué números de dos cifras se pueden obtener sumando un número y su reverso y cuáles no?*

- *¿Puedes obtener el número 121 sumando un número y su reverso?* La complejidad de esta extensión está en que, por primera vez, aparece un número de tres cifras como suma de dos números de dos cifras (74 + 47).

La siguiente secuencia de extensiones se basa en sumandos de tres cifras. Si planteamos este problema en ESO, conviene empezar con números de tres cifras, pues la dificultad de las primeras preguntas es adecuada para toda la clase. Después, se pueden crear diversas extensiones:

- Usando números de dos, tres o cuatro cifras.

- Haciendo sumas sin o con acarreo.

- Que el resultado de la suma tenga la misma cantidad de cifras que los sumandos o una más.

Las primeras extensiones para tres cifras pueden ser similares a las de dos cifras, pero se pueden plantear también otras más complejas:

- El número 868 se puede formar sumando a un número de tres cifras su reverso (Imagen 5). Busca otros números que, al sumarlos con su reverso, den 868.

$$\begin{array}{r} 731 \\ +\ 137 \\ \hline 868 \end{array}$$

Imagen 5. Suma de un número de tres cifras y su reverso.

- Encuentra todos los números entre el 100 y el 199 que se pueden obtener sumando un número de tres cifras y su reverso.

- ¿Puedes obtener el número 626 sumando un número y su reverso? ¿Cuántas soluciones hay?

- ¿Puedes obtener el número 625 sumando un número y su reverso? ¿Cuántas soluciones hay?

- ¿Puedes obtener el número 327 sumando un número y su reverso? ¿Cuántas soluciones hay? ¿Y el número 515?

- Elige un número de tres cifras y busca todas sus descomposiciones en suma de un número y su reverso.

Por último, se puede plantear otra secuencia de extensiones, para estudiantes de ESO, basadas en sumandos de cuatro cifras, con enunciados similares a los anteriores. También se puede proponer formular generalizaciones, para lo cual será necesario usar representaciones algebraicas de los números (Imagen 6).

$$\begin{array}{r} abcd \\ +\ dbca \\ \hline \end{array}$$

Imagen 6. Suma de un número de cuatro cifras y su reverso.

La cantidad de soluciones encontradas y la forma de resolución admiten también diversos niveles de complejidad, desde encontrar sólo una solución a encontrar varias o encontrar todas y razonar que no hay más soluciones. La búsqueda de soluciones puede ser por tanteo, mediante búsqueda sistemática o usando álgebra.

Conclusiones

Los problemas matemáticos ricos, formados por un problema estándar y extensiones de complejidad creciente, son una herramienta útil para atender de manera diferenciada a los estudiantes con acm de Primaria y Secundaria. Respetan el principio de inclusividad, pues ayudan a atender de forma diferenciada a estos estudiantes con necesidades especiales. También ayudan a mantener la homogeneidad del trabajo en clase de todos los estudiantes, pues todos trabajan en los mismos problemas, aunque unos llegarán más lejos que otros.

Los resultados presentados son parte de las actividades de los proyectos de investigación EDU2015-69731-R (Mineco/Feder) y GVPROMETEO2016-143 (Generalitat Valenciana).

Referencias

ÁLVAREZ, J.L. y LOSADA, R. (2011). *Polígono estrellado*. Página web: http://agrega.educacion.es/repositorio/17042011/06/es_2011041712_9143202/primaria_estrella/estrella/actividad.html

ARRANZ, J.M. (2007a). *Polígonos: polígonos regulares y polígonos estrellados*. Página web: http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/Poligonos.htm

ARRANZ, J.M. (2007b). *Polígonos regulares estrellados*. Página web accesible en http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/polirestrellado.htm

BENEDICTO, C., JAIME, A. y GUTIÉRREZ, Á. (2015): «Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos». En C. Fernández et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

DIEZMANN, C.M. y WATTERS, J.J. (2002). «Summing up the education of mathematically gifted students». En B. Barton et al. (Eds.), *Proceedings of the 25th MERGA Conference* (pp. 219-226). Sidney: MERGA.

DIMITRIADIS, C. (2010). *Developing mathematical giftedness within primary schools* (tesis doctoral), Brunel, G.B.: Brunel University.

PUIG, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

SHEFFIELD, L.J. (2006). «Developing mathematical promise and creativity». *Journal of the Korea Society of Mathematical Education, Series D: Research in Mathematical Education, 10*(1), 1-11.

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE (2017). *NRICH*. Página web: http://nrich.maths.org

Adela Jaime Pastor
Ángel Gutiérrez Rodríguez
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia
adela.jaime@uv.es
angel.gutierez@uv.es

Clara Benedicto Baldonado
IES Playa Flamenca. Alicante
clabebal@gmail.com