

1

Preliminares

En este capítulo expondremos las herramientas matemáticas que utilizaremos a lo largo de este trabajo. En primer lugar desarrollaremos el análisis multirresolutivo *à la Harten* y en segundo lugar describiremos la teoría asociada a la transformada *wavelet*.

1.1

Análisis multirresolutivo *à la Harten*

1.1.1

Descomposiciones Multiescala mediante Decimación y Predicción

El concepto de análisis de multirresolución (MRA) fue desarrollado en los años 80 por Meyer [58] y Mallat [55], y como su nombre sugiere, permite estudiar una función complicada en diferentes resoluciones, dando lugar a funciones más simples. En este trabajo nos basaremos en la noción de multirresolución introducida por Ami Harten en [44] y posteriormente generalizada en [45] y [46].

A continuación describiremos los aspectos básicos de los esquemas de multirresolución à la Harten. El lector interesado encontrará mayor nivel de detalle y ejemplos de aplicación en los artículos citados, así como en [16], [15] y [1].

DEFINICIÓN 1.1. *Un conjunto de multirresolución es una secuencia de espacios lineales, $\{V^k\}$, con bases numerables, que denotamos $\{\eta_i^k\}$, junto a una secuencia de operadores lineales $\{D_k^{k-1}\}$ de V^k a V^{k-1} denominados operadores decimación, es decir,*

$$D_k^{k-1} : V^k \rightarrow V^{k-1}, \quad V^{k-1} = D_k^{k-1}(V^k).$$

Los espacios V^k representan los diferentes niveles de resolución que podemos estudiar de un conjunto de datos discretos. En este trabajo se utiliza que a mayor k mayor resolución, lo cual implica mayor detalle.

DEFINICIÓN 1.2. *Decimos que $\{P_{k-1}^k\}_k$ es una secuencia de operadores predicción para el conjunto de multirresolución $\{\{V^k\}, \{D_k^{k-1}\}\}$, si cada operador P_{k-1}^k es inverso por la derecha de D_k^{k-1} en V^{k-1} , es decir,*

$$P_{k-1}^k : V^{k-1} \rightarrow V^k, \quad D_k^{k-1} P_{k-1}^k = I_{V_{k-1}}.$$

NOTA 1.1. *La definición 1.2 es válida incluso para P_{k-1}^k no lineal.*

Según la definición 1.2 los operadores predicción deben satisfacer la siguiente relación de consistencia:

$$D_k^{k-1} P_{k-1}^k = I_{V_{k-1}}, \quad (1.1)$$

que implica que los valores obtenidos en la predicción en el nivel de resolución k contienen la misma información discreta que los valores originales restringidos al nivel $k - 1$.

Por otro lado el operador $P_{k-1}^k D_k^{k-1} : V^k \rightarrow V^k$ produce aproximaciones a cada vector v^k en V^k a partir de la información del nivel $k - 1$. Luego tiene sentido estudiar el error que se produce en dicha aproximación.

DEFINICIÓN 1.3. *Denominamos error de predicción, e^k , asociado al conjunto de multirresolución $\{\{V^k\}, \{D_k^{k-1}\}\}$ a la diferencia entre v^k y el valor que proporciona el esquema de predicción al tratar de reconstruir v^k a partir de la información contenida en el nivel de resolución inmediato inferior, es decir,*

$$e^k := (I_{V^k} - P_{k-1}^k D_k^{k-1}) v^k =: Q_k v^k. \quad (1.2)$$

PROPOSICIÓN 1.1. *El error de predicción e^k es un vector en V^k que pertenece al núcleo del operador decimación, $\mathcal{N}(D_k^{k-1})$.*

Demostración. Dado que

$$\begin{aligned} D_k^{k-1} Q_k &= D_k^{k-1} (I_{V^k} - P_{k-1}^k D_k^{k-1}) \\ &= D_k^{k-1} - (D_k^{k-1} P_{k-1}^k) D_k^{k-1} = D_k^{k-1} - D_k^{k-1} = 0, \end{aligned}$$

se sigue que $e^k \in \mathcal{N}(D_k^{k-1}) = \{v/v \in V^k, D_k^{k-1} v = 0\}$.

□

Si expresamos el error de predicción en una base de V^k , existe información redundante que podemos eliminar eligiendo una determinada base de funciones de $\mathcal{N}(D_k^{k-1})$, $\mathcal{N}(D_k^{k-1}) = \langle \mu_j^k \rangle$ y expresando e^k en dicha base.

Sea $G_k : \mathcal{N}(D_k^{k-1}) \rightarrow \mathcal{G}^k$ el operador que asigna a cada $e^k \in \mathcal{N}(D_k^{k-1})$ la secuencia d^k de sus coordenadas en la base $\{\mu_j^k\}$, y sea E_k la inyección canónica $\mathcal{N}(D_k^{k-1}) \hookrightarrow V^k$, si

$$e^k = \sum d_j^k \mu_j^k \Rightarrow d^k = G_k e^k \quad y \quad E_k d^k = \sum d_j^k \mu_j^k \in \mathcal{N}(D_k^{k-1}).$$

Obviamente $G_k E_k = I_{\mathcal{G}^k}$, $E_k G_k = I_{\mathcal{N}(D_k^{k-1})}$ y hay una correspondencia biunívoca entre v^k y $\{d^k, v^{k-1}\}$:

$$\text{Paso de } v^k \text{ a } \{d^k, v^{k-1}\} \rightarrow \begin{cases} v^{k-1} = D_k^{k-1} v^k, \\ d^k = G_k Q_k v^k. \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\text{Paso de } \{d^k, v^{k-1}\} \text{ a } v^k \rightarrow P_{k-1}^k v^{k-1} + E_k d^k = P_{k-1}^k D_k^{k-1} v^k + E_k G_k Q_k v^k = v^k. \quad (1.4)$$

NOTA 1.2. Se puede interpretar d^k como la información no redundante presente en v^k y no recuperable de v^{k-1} mediante el esquema de predicción definido por P_{k-1}^k . Por esto, las componentes de d^k suelen denominarse coeficientes de la escala k de la representación por multirresolución.

Si los espacios V^k son de dimensión finita, podemos decir que $\dim V^k = N_k$, con lo cual el vector v^k viene representado por sus N_k coordenadas en la base $\{\mu_i^k\}$ y se cumplen las siguientes relaciones:

$$\text{card}(v^{k-1}) + \text{card}(d^k) = \dim(v^k),$$

$$\dim V^k - \dim V^{k-1} = \dim(\mathcal{N}(D_k^{k-1})).$$

Repetiendo el proceso descrito en (1.3) y (1.4) para cada nivel de resolución, obtenemos un esquema de multirresolución formado por $\{\{V^k\}_{k=0}^L, \{D_k^{k-1}\}_{k=1}^L\}$ y una sucesión de operadores predicción, $\{P_{k-1}^k\}_{k=1}^L$, que pueden ser o no lineales.

La descripción algorítmica de esta transformación uno a uno y su inversa es como sigue:

Codificación: $v^L \longrightarrow Mv^L = (v^0, d^1, \dots, d^L)$

$$\begin{cases} \text{Para } k = L, \dots, 1 \\ v^{k-1} = D_k^{k-1} v^k, \\ d^k = G_k(v^k - P_{k-1}^k v^{k-1}). \end{cases} \quad (1.5)$$

Decodificación: $Mv^L \longrightarrow M^{-1}Mv^L$

$$\begin{cases} \text{Para } k = 1, \dots, L \\ v^k = P_{k-1}^k v^{k-1} + E_k d^k. \end{cases} \quad (1.6)$$

Nos referimos a Mv^L como la representación multirresolutiva de v^L , y a los algoritmos (1.5) y (1.6) como las transformaciones de multirresolución directa e inversa, respectivamente.

Los operadores D_k^{k-1} y P_{k-1}^k pueden ser expresados en una estructura piramidal, del modo utilizado en proceso de señales:

$$\begin{array}{ccccccc} v^k & \longrightarrow & v^{k-1} & \longrightarrow & v^{k-2} & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & e^k & & e^{k-1} & & \dots \end{array}$$

O bien, si expresamos los errores en una base de $\mathcal{N}(D_k^{k-1})$:

$$\begin{array}{ccccccc} v^k & \longrightarrow & v^{k-1} & \longrightarrow & v^{k-2} & \longrightarrow & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & d^k & & d^{k-1} & & \dots \end{array}$$

Con esto, podemos considerar que las descomposiciones se realizan aplicando dos filtros, el filtro de paso bajo, decimación, que es siempre lineal, y el filtro de paso alto, predicción, que no necesariamente debe ser lineal.

Hasta este momento hemos trabajado sobre aplicaciones definidas sobre espacios lineales que poseen bases numerables. Los datos discretos sobre los que necesitamos trabajar van a provenir de ciertas funciones. Para generar datos discretos a partir de éstas, aplicamos un determinado *proceso de discretización* que consiste en un operador que aplicado a cada función proporciona unos

datos discretos en V^k . Dicho proceso de discretización define de manera natural los espacios V^k y da significado al concepto de nivel de resolución asociado a dichos espacios. En lo que sigue definiremos estos conceptos y veremos cómo una sucesión de operadores decimación puede construirse a partir de una *sucesión anidada de operadores discretización*.

DEFINICIÓN 1.4. Sea $\mathcal{D}$ un operador lineal en un espacio lineal $\mathcal{F}$, con rango V . Si V posee una base numerable, $\{\mu_i\}$, decimos que $\mathcal{D}$ es un operador discretización de $\mathcal{F}$ y, para cada $f \in \mathcal{F}$, nos referimos a $v = \mathcal{D}f$ como la discretización de f al nivel de resolución especificado por V .

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \mathcal{F} &\longrightarrow V = \mathcal{D}(\mathcal{F}) = \langle \mu_i \rangle \\ f &\longrightarrow \mathcal{D}f = v \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 1.5. Sea $\{\mathcal{D}_k\}$ una sucesión de operadores discretización en $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{D}_k : \mathcal{F} \longrightarrow V^k = \mathcal{D}_k(\mathcal{F}) = \langle \mu_i^k \rangle.$$

Decimos que la sucesión $\{\mathcal{D}_k\}$ es anidada si para todo k y para toda $f \in \mathcal{F}$,

$$\mathcal{D}_k f = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_{k-1} f = 0. \quad (1.7)$$

La propiedad de sucesión anidada implica que la información discreta en un nivel de resolución está incluida en la información discreta de todos los niveles de resolución más finos, o dicho de otro modo, que cada nivel de resolución contiene no más información que los niveles de resolución mayores.

Una sucesión anidada de discretizaciones define una sucesión de operadores decimación, y así, un esquema de multirresolución. Este resultado se sigue del siguiente lema:

LEMA 1.1. Si $\mathcal{D}_k$ es una sucesión anidada de operadores discretización, entonces la aplicación de V^k a V^{k-1} definida como sigue:

Para cada $v \in V^k$ tomar una $f \in \mathcal{F}$ tal que $v = \mathcal{D}_k f$ y asignar

$$u := \mathcal{D}_{k-1} f,$$

está bien definida.

Demostración. Dado que $V^k = \mathcal{D}_k(\mathcal{F})$, para cualquier $v \in V^k$ existe al menos una $f \in \mathcal{F}$ tal que $v = \mathcal{D}_k f$. Queremos probar que la asignación $u = \mathcal{D}_{k-1} f$ es independiente de la elección de f . Para ello debemos ver que

$$\mathcal{D}_k f = \mathcal{D}_k g \Rightarrow \mathcal{D}_{k-1} f = \mathcal{D}_{k-1} g.$$

Esto es evidente debido a que los operadores discretización son anidados y lineales:

$$\mathcal{D}_k f = \mathcal{D}_k g \Rightarrow \mathcal{D}_k(f - g) = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_{k-1}(f - g) = 0 \Rightarrow \mathcal{D}_{k-1} f = \mathcal{D}_{k-1} g.$$

□

Cada operador decimación queda definido como sigue:

$$\begin{aligned} D_k^{k-1} : V^k &\longrightarrow V^{k-1} \\ v^k (:= \mathcal{D}_k f) &\longrightarrow D_k^{k-1} v^k (:= \mathcal{D}_{k-1} f) \end{aligned}$$

Gracias al lema 1.1, la definición es independiente de f , con lo cual:

$$D_k^{k-1} \mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{k-1}, \quad (1.8)$$

siendo entonces un operador lineal. Además $D_k^{k-1} V^k = V^{k-1}$, ya que dado $u \in V^{k-1}$, tomando $f \in \mathcal{F}$ tal que $u = \mathcal{D}_{k-1} f$, entonces si $v = \mathcal{D}_k f \in V^k$, por (1.8),

$$D_k^{k-1} v = D_k^{k-1} (\mathcal{D}_k f) = \mathcal{D}_{k-1} f = u.$$

DEFINICIÓN 1.6. Dado $v \in V^k$, decimos que $f \in \mathcal{F}$ es una reconstrucción de v en $\mathcal{F}$ si satisface que $v = \mathcal{D}_k f$.

Para concluir el diseño del esquema de multirresolución debemos definir adecuadamente los operadores predicción, P_{k-1}^k . Para ello necesitamos definir el operador reconstrucción.

DEFINICIÓN 1.7. Decimos que $\mathcal{R} : V \rightarrow \mathcal{F}$, con $V = \mathcal{D}(\mathcal{F})$, es un operador reconstrucción para $\mathcal{D}$ en V si es un operador inverso por la derecha de $\mathcal{D}$, es decir $\mathcal{D}\mathcal{R} = I_V$.

NOTA 1.3. En la definición de $\mathcal{R}$ no se exige linealidad.

Estamos ya en condiciones de definir un operador inverso por la derecha de D_k^{k-1} . Dada una sucesión de operadores de discretización $\mathcal{D}_k$ y una sucesión de sus correspondientes operadores de reconstrucción $\mathcal{R}_k$, se define el operador predicción:

$$P_{k-1}^k := \mathcal{D}_k \mathcal{R}_{k-1} : V^{k-1} \rightarrow V^k. \quad (1.9)$$

Claramente el operador definido es inverso por la derecha de D_k^{k-1} :

$$D_k^{k-1} P_{k-1}^k = D_k^{k-1} (\mathcal{D}_k \mathcal{R}_{k-1}) = (D_k^{k-1} \mathcal{D}_k) \mathcal{R}_{k-1} = \mathcal{D}_{k-1} \mathcal{R}_{k-1} = I_{V_{k-1}}.$$

Por tanto $\{P_{k-1}^k\}$ es una secuencia de operadores predicción para el conjunto de multirresolución $\{\{V^k\}, \{D_k^{k-1}\}\}$. La Figura 1.1 clarifica la definición de los operadores descritos en este apartado.

El encontrar un esquema de multirresolución adecuado para una función determinada puede ser formulado como un problema típico de teoría de aproximación:

Dado $\mathcal{D}_{k-1}f$, $f \in \mathcal{F}$, hallar una "buena aproximación" a $\mathcal{D}_k f$.

El proceso de reconstrucción juega un papel crucial en la multirresolución à la Harten. El elegir técnicas de reconstrucción adecuadas para las aplicaciones dadas, facilita el análisis e interpretación de las descomposiciones de multirresolución obtenidas mediante los correspondientes esquemas de predicción. Además

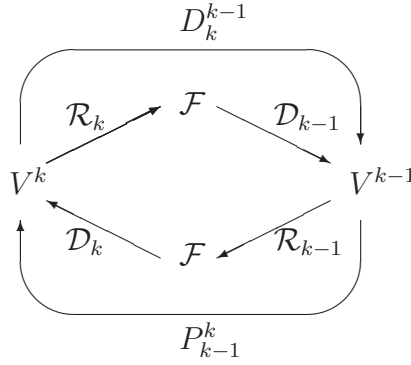


Figura 1.1: Definición de operadores en multirresolución à la Harten.

como hemos advertido, en las definiciones de operadores reconstrucción no se exige linealidad, con lo cual podemos utilizar reconstrucciones adaptativas no-lineales que mejorarán la calidad del esquema. Esto se desarrollará en apartados posteriores.

Como hemos visto, el proceso de discretización determina el esquema de multirresolución. En lo que sigue, veremos dos ejemplos de discretización que dan lugar a dos esquemas de multirresolución típicos¹: por *valores puntuales* y por *medias en celda*. Mediante estos esquemas aplicaremos la teoría vista a casos concretos y además serán de especial importancia en capítulos posteriores.

1.2

Esquemas de multirresolución para valores puntuales

Consideramos el espacio de funciones continuas² en el intervalo $[0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{C}[0, 1]$. Tomamos las secuencias:

$$X^L = \{x_i^k\}_{i=0}^{J_L}, \quad x_0^L = 0, \quad x_i^L = i \cdot h_L, \quad h_L = 1/J_L, \quad J_L = 2^L J_0. \quad (1.10)$$

¹Otra posible discretización son los *hat averages* [18, 19, 15], aunque en este trabajo no los utilizaremos.

²Podríamos partir simplemente de un espacio de funciones acotadas en un dominio acotado, ver [16].

14 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

donde J_0 es cualquier entero. Definimos el operador discretización, $f^k = \mathcal{D}_k f$, de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}_k : \mathcal{F} \rightarrow V^k, \quad f_i^k = (\mathcal{D}_k f)_i = f(x_i^k), \quad f^k = \{f_i^k\}_{i=0}^{J_k}, \quad (1.11)$$

donde $\mathcal{F} = \mathcal{C}[0, 1]$ y V^k es el espacio de sucesiones de dimensión $J_k + 1$. Nos referimos a (1.11) como la *discretización por valores puntuales*. Dado que los espacios V^k son de dimensión $J_k + 1$ finita, podemos tomar como base $\mu_i^k = \delta_i^k$, la base canónica de funciones en espacios de sucesiones.

Definimos las secuencias de menor resolución de la siguiente manera:

$$x_i^{k-1} = x_{2i}^k, \quad i = 0, \dots, J_{k-1} := J_k/2, \quad k = L-1, \dots, 0. \quad (1.12)$$

Con esto, se cumple que $X^{k-1} \subset X^k$ ya que en X^{k-1} hemos eliminado los puntos de X^k de índice impar. Así pues la secuencia de operadores discretización $\{\mathcal{D}_k\}$ es anidada y por tanto definirá un conjunto de multirresolución, según el Lema 1.1. La decimación vendrá dada por

$$f_i^{k-1} = (D_k^{k-1} f^k)_i = f_{2i}^k, \quad i = 0, \dots, J_{k-1}.$$

NOTA 1.4. El operador decimación se define directamente en términos de la sucesión $\{\mathcal{D}_k\}$ sin ninguna referencia explícita a un operador reconstrucción.

La reconstrucción $\mathcal{R}_k : V^k \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$, debe ser tal que $\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k f^k = f^k$. Por tanto $(\mathcal{R}_k f^k)(x)$ debe ser una función acotada que interpo- le al conjunto $\{f_i^k\}$ en los nodos $\{x_i^k\}$, es decir, podemos utilizar cualquier técnica de interpolación, que denotamos: $\overline{\mathcal{IP}}_k(x; f^k) := (\mathcal{R}_k f^k)(x)$. Con esto:

$$(P_{k-1}^k f^{k-1})_i = (\mathcal{D}_k \overline{\mathcal{IP}}_{k-1}(\cdot; f^{k-1}))_i = \overline{\mathcal{IP}}_{k-1}(x_i^k; f^{k-1}).$$

El error de predicción es $e_i^k = f_i^k - \overline{\mathcal{IP}}_{k-1}(x_i^k; f^{k-1})$, $i = 0, \dots, J_k$, y $e_i^k = 0$, $\forall i$ tal que $x_i^k \in X^{k-1}$. El núcleo, $\mathcal{N}\{D_k^{k-1}\}$, está compuesto por las sucesiones tales que $f_i^k = 0$ si $x_i^k \in X^{k-1}$. Los coeficientes $d^k = \{d_j^k\}$ se definen como $d_j^k = e_{2j-1}^k$ para $j = 1, \dots, J_{k-1}$.

En definitiva, los esquemas (1.5) y (1.6) para este caso son:

Codificación, $f^L \rightarrow M f^L$:

$$\begin{cases} \text{Para } k = L, \dots, 1 \\ f_i^{k-1} = f_{2i}^k & i = 0, \dots, J_{k-1}, \\ d_i^k = f_{2i-1}^k - \overline{\mathcal{IP}}_{k-1}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}) & i = 1, \dots, J_{k-1}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Decodificación, $M^{-1} M f^L \rightarrow f^L$:

$$\begin{cases} \text{Para } k = 1, \dots, L \\ f_{2i}^k = f_i^{k-1} & i = 0, \dots, J_{k-1}, \\ f_{2i-1}^k = \overline{\mathcal{IP}}_{k-1}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}) + d_i^k & i = 1, \dots, J_{k-1}. \end{cases} \quad (1.14)$$

1.2.1

Técnicas de interpolación lineales y no lineales

En la sección anterior hemos expuesto la teoría relativa a la multirresolución *à la Harten*, particularizándola para la discretización por valores puntuales. En los esquemas (1.13) y (1.14) aparecen los operadores de interpolación que aún no han sido desarrollados. Iniciaremos esta sección describiendo de forma breve el tipo de interpolación utilizada. Posteriormente expondremos las técnicas de interpolación *ENO* y *SR*, y las aplicaremos a los esquemas multirresolutivos a fin de calcular sus filtros.

Como es bien conocido, mediante la interpolación hallamos, a partir de los datos discretos de una función, un polinomio de un cierto grado que coincide con la función en los puntos de la discretización.

Dada $f(x)$ y un conjunto de $r + 1$ puntos, $\{x_0, x_1, \dots, x_r\}$, con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, existe un único polinomio $q(x)$ de grado r tal que $q(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \dots, r$. Según la forma de Newton, este polinomio viene dado por la fórmula [5], [29]:

$$q(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^r \left(f[x_0, \dots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \right). \quad (1.15)$$

16 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

El conjunto de puntos utilizado para definir $q(x)$ lo denominamos *stencil* de $q(x)$ y lo denotamos por $\mathcal{S}$. En cuanto al error que se comete al interpolar sabemos que:

$$f(x) = q(x) + f[x_0, \dots, x_r, x] \prod_{i=0}^r (x - x_i) = q(x) + f[\mathcal{S}, x] \prod_{x_i \in \mathcal{S}} (x - x_i), \quad (1.16)$$

donde $\mathcal{S} = \{x_0, \dots, x_r\}$ y $f[\mathcal{S}, x]$ es la $(r + 1)$ diferencia dividida de $f(x)$ en los puntos del *stencil* añadiendo x . Si $f(x)$ es diferenciable al menos $r + 1$ veces, entonces:

$$f[x_0, \dots, x_r, x] = \frac{f^{(r+1)}(\xi_x)}{(r + 1)!}, \quad (1.17)$$

donde ξ_x es un punto interior al conjunto convexo $\{x_0, \dots, x_r, x\}$.

Una buena estrategia para minimizar el error de interpolación, $|f(x) - q(x)|$, en todo el dominio de la función es utilizar interpolación segmentaria [5]. Para simplificar la exposición, tomamos el intervalo $[0, 1]$ y una malla de puntos equiespaciados $X = \{x_i\}_{i=0}^J$, $x_i = ih$, $Jh = 1$. Consideremos un conjunto discreto de datos $\{f_i\}_{i=1}^J$, con $f_i = f(x_i)$. La interpolación polinómica a trozos consiste en construir para cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ un polinomio $q_i(x)$, para $i = 1, \dots, J$. El interpolante global viene definido de la siguiente manera:

$$\overline{\mathcal{IP}}(x) = q_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, J,$$

donde $q_i(x_{i-1}) = f_{i-1}$ y $q_i(x_i) = f_i$.

Si tomamos *stencils* compuestos por $r + 1$ puntos consecutivos (polinomios de grado r) y $f(x)$ es suficientemente suave, la fórmula del error (1.16), junto a (1.17) nos proporciona

$$\overline{\mathcal{IP}}(x) = f(x) + O(h^{r+1}), \quad \forall x \in [0, 1],$$

es decir, de orden $r + 1$. Además tomando derivadas en (1.16) y suponiendo que f es suficientemente suave es fácil ver que si $\overline{\mathcal{IP}}(x)$ es una técnica de interpolación polinómica a trozos de orden $r + 1$:

$$\frac{d^m}{dx^m} \overline{\mathcal{IP}}(x \pm 0; Df) = \frac{d^m}{dx^m} f(x) + O(h^{r+1-m}), \quad 0 \leq m \leq r.$$

El problema fundamental de esta técnica proviene de la falta de suavidad de la función inicial. Si $f(x)$ presenta un salto en I_i ,

$$f[x_{j-1}, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = \frac{O([f])}{h},$$

donde $[f]$ representa el salto de $f(x)$ en I_j . Esto provoca que todas las diferencias divididas basadas en *stencils* de $s + 1$ puntos ($s > 0$) que contengan x_{i-1} y x_i satisfagan $f[x_l, \dots, x_{l+s}] = O([f])/h^s$. Por tanto, para cualquier polinomio interpolante $q_l(x)$ que utilice un *stencil* que crucen la discontinuidad: $f(x) = q_l(x) + O([f])$, con x perteneciente a dicho *stencil*.

Para singularidades débiles, es decir, si $f(x)$ posee una discontinuidad en $f^{(p)}(x_d)$ para $p \geq 1$ y $x_d \in I_i$ se cumple que cualquier diferencia dividida basada en $s + 1$ puntos que contengan x_{i-1} y x_i :

$$f[x_l, \dots, x_{l+s}] = \begin{cases} O([f^{(p)}])/h^{(s-p)} & \text{si } s > p, \\ O(\|f^{(s)}\|) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\|f^{(s)}\|$ es la norma supremo de $f^{(s)}$ en el conjunto convexo del *stencil* usado para calcular la diferencia dividida y $[f^{(p)}] = f^{(p)}(x_d^+) - f^{(p)}(x_d^-)$.

Por tanto, si $\overline{\mathcal{IP}}(x)$ es un interpolante formado por trozos polinómicos de grado r , cualquier trozo $q_l(x)$ formado a partir de un *stencil* que cruce una singularidad cumplirá:

$$f(x) = q_l(x) + O([f^{(p)}])h^p, \quad \text{si } p \leq r.$$

Si utilizamos una técnica de interpolación centrada, con *stencils* de $2s$ puntos ($r = 2s - 1$), cada singularidad en el intervalo I_i afectará a un intervalo de $2s$ puntos, $[x_{i-s-1}, \dots, x_{i+s}]$ donde la aproximación empeorará. Para evitarlo se introduce la técnica *ENO*, que veremos en el siguiente apartado.

1.2.2

Técnica *ENO*

Harten et al. en [47] introducen la técnica de interpolación *ENO* (*Essentially Non-Oscillatory*) para evitar la pérdida de aproximación alrededor de los saltos (*fenómeno de Gibbs*) al utilizar técnicas de interpolación centradas. La idea se basa en elegir *stencils*

18 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

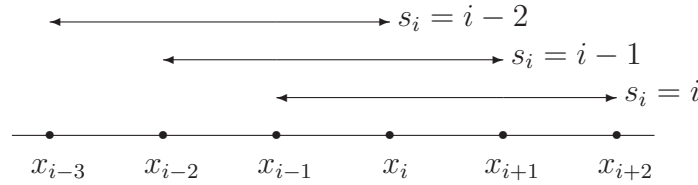


Figura 1.2: Posibles elecciones de stencils de 4 nodos para el intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

que no crucen discontinuidades, construyendo los trozos polinomiales a partir de regiones suaves. Esto es posible hacerlo siempre que las discontinuidades estén lo suficientemente separadas, tanto entre ellas como de las fronteras (si los datos no son periódicos) y siempre que no trabajemos con el propio intervalo que contiene la discontinuidad. Por ejemplo, para el intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ y stencils de 4 nodos, podemos elegir entre $\mathcal{S}_i = \{x_{s_i-1}, x_{s_i}, x_{s_i+1}, x_{s_i+2}\}$ para s_i que puede tomar los valores $i-2, i-1, i$ como vemos en la Figura 1.2.

Para decidir si un stencil es o no suave nos basamos en la magnitud de las diferencias divididas. El stencil ENO de $r+1$ puntos elegido para el intervalo I_i lo denotamos $\mathcal{S}_i^{ENO} = \{x_{s_i-1}, \dots, x_{s_i+r-1}\}$.

Los algoritmos más utilizados para evitar discontinuidades, [16, 4, 3, 28, 47], son el jerárquico, ENO-VP-I (Algoritmo 1.1) y el no jerárquico, ENO-VP-II (Algoritmo 1.2).

NOTA 1.5. Para $r = 1$, $\mathcal{S}_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ y no hay ninguna elección a realizar. Para $r = 2$, ambos algoritmos producen el mismo resultado. Si $r > 2$ los stencils elegidos mediante cada algoritmo sí pueden cambiar. El algoritmo ENO-VP-I proporciona en regiones suaves stencils más centrados respecto al intervalo de trabajo, dando mejores aproximaciones que el algoritmo ENO-VP-II, pero puede fallar para discontinuidades de $f^{(p)}$ con $p > 1$, [16]. ENO-VP-II siempre produce stencils que evitan las discontinuidades. Por tanto, para singularidades débiles debemos utilizar el algoritmo ENO-VP-II, mientras que para saltos y esquinas podemos emplear cualquiera de los dos.

Algoritmo 1.1 *ENO-VP-I. Elección jerárquica del stencil.***Entrada:** $\{f_i\}_{i=1}^J$, los datos iniciales; $r + 1$, tamaño del *stencil***Salida:** $\{s_i\}_{i=1}^{J-r+1}$

```

1: para  $i = 1, \dots, J - r + 1$  hacer
2:    $s_0 = i$ 
3:   para  $l = 0, \dots, r - 2$  hacer
4:     si  $|f[x_{s_l-2}, \dots, x_{s_l+l}]| < |f[x_{s_l-1}, \dots, x_{s_l+l+1}]|$  entonces
5:        $s_{l+1} = s_l - 1$ 
6:     si no
7:        $s_{l+1} = s_l$ 
8:     fin si
9:   fin para
10:   $s_i = s_{r-1}$ 
11: fin para

```

Algoritmo 1.2 *ENO-VP-II. Elección no jerárquica del stencil.***Entrada:** $\{f_i\}_{i=1}^J$, los datos iniciales; $r + 1$, tamaño del *stencil***Salida:** $\{s_i\}_{i=1}^{J-r+1}$

```

para  $i = 1, \dots, J - r + 1$  hacer
   $|f[x_{s_{i-1}}, \dots, x_{s_i+r-1}]| = \min \{|f[x_{l-1}, \dots, x_{l+r-1}]|, i - r + 1 \leq l \leq i\}$ 
fin para

```

Si las discontinuidades están suficientemente separadas, el algoritmo *ENO-VP-II* (y el algoritmo *ENO-VP-I* para saltos y esquinas) proporciona un interpolante polinomial a trozos que satisface:

$$\frac{d^m}{dx^m} \overline{\mathcal{IP}}(x \pm 0; \mathcal{D}f) = \frac{d^m}{dx^m} f(x) + O(h^{r+1-m}), \quad 0 \leq m \leq r,$$

excepto cuando x pertenece al intervalo que contiene la discontinuidad.

Tratemos la cuestión de la separación de discontinuidades. Para cada intervalo que no posea discontinuidad deben existir tantos intervalos libres de discontinuidades como para que pueda tomarse al menos un *stencil* en una región suave. Esto significa que si estamos utilizando *stencils* de longitud $r + 1$ debe haber al menos r intervalos no discontinuos. Ver la Figura 1.3.

20 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

Stencil ENO asignado a I_j , para $j = i - 1, \dots, i + 2$

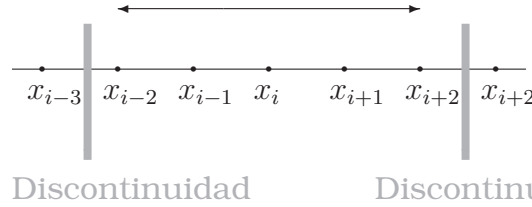


Figura 1.3: Separación mínima entre dos discontinuidades para que la elección ENO proporcione stencils que no crucen saltos para intervalos no discontinuos. En este caso utilizamos stencils de 5 $(r + 1)$ puntos, debiendo existir al menos 4 (r) intervalos entre discontinuidades.

NOTA 1.6. Existe un caso especial en el que a pesar de haber discontinuidad no se produce pérdida de aproximación en ningún intervalo. Esto ocurre cuando la discontinuidad es una esquina que cae justo en un punto del grid, x_d , ya que en este caso, los algoritmos ENO-VP-I y ENO-VP-II evitan cruzar dicha discontinuidad, tanto para el intervalo $[x_{d-1}, x_d]$ como para $[x_d, x_{d+1}]$.

1.2.3

Filtros para esquemas en valores puntuales

En este apartado expondremos los filtros para los grados más usuales.

Caso lineal

Como veremos más adelante, al sustituir $\overline{\mathcal{IP}}_{k-1}(x_i^k; f^{k-1})$ por los polinomios interpoladores centrados de grado $r = 2s - 1$, los esquemas (1.13) y (1.14) quedan:

Codificación:

$$\begin{cases} \text{Para } k = L, \dots, 1 \\ f_i^{k-1} = f_{2i}^k, & i = 0, \dots, J_{k-1}, \\ d_i^k = f_{2i-1}^k - \sum_{l=1}^s (\beta_{s,s}^{2s-1})_l (f_{i+l-1}^{k-1} + f_{i-l}^{k-1}), & i = 1, \dots, J_{k-1}. \end{cases}$$

Decodificación:

$$\begin{cases} \text{Para } k = 1, \dots, L \\ f_{2i-1}^k = d_i^k + \sum_{l=1}^s (\beta_{s,s}^{2s-1})_l (f_{i+l-1}^{k-1} + f_{i-l}^{k-1}), & i = 1, \dots, J_{k-1}, \\ f_{2i}^k = f_i^{k-1}, & i = 0, \dots, J_{k-1}. \end{cases}$$

donde:

$$\begin{cases} r = 1 \ (s = 1) \implies (\beta_{1,1}^1)_1 = \frac{1}{2}. \\ r = 3 \ (s = 2) \implies (\beta_{2,2}^3)_1 = \frac{9}{16}, \ (\beta_{2,2}^3)_2 = -\frac{1}{16}. \\ r = 5 \ (s = 3) \implies (\beta_{3,3}^5)_1 = \frac{150}{256}, \ (\beta_{3,3}^5)_2 = -\frac{25}{256}, \ (\beta_{3,3}^5)_3 = \frac{3}{256}. \end{cases}$$

Observar que si $f(x) = P(x)$, siendo $P(x)$ un polinomio de grado menor o igual a r , entonces $q_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; f^{k-1}, r) = f(x)$ para $x \in [x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$, es decir $\overline{\mathcal{IP}}_{k-1}(x, f^{k-1}) = f(x)$. Con esto podemos enunciar:

PROPOSICIÓN 1.2. Si $q_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; f^{k-1}, r)$ es el polinomio $\overline{\mathcal{IP}}$ de grado r , la reconstrucción $\overline{\mathcal{IP}}$ recupera de forma exacta polinomios de grado menor o igual a r .

COROLARIO 1.1. El orden de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IP}}$ es $r + 1$.

Caso ENO

El calcular los filtros para el caso *ENO*, es equivalente a calcular los filtros para hallar los valores de interpolación en las fronteras en funciones no periódicas. En ambos casos se trata de realizar una interpolación no centrada.

Veamos como calcular los filtros³. Fijado un k , buscamos un polinomio de grado r , $q(x) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1}$, que interpole a $\{f_i^{k-1}\}$ en $r + 1$ nodos.

³En la literatura sobre el tema, es usual calcular los filtros desarrollando las formas de Newton de los polinomios interpoladores. Sin embargo, en este trabajo los calcularemos mediante sistemas, para dar otra visión y por consonancia con el cálculo de filtros de capítulos posteriores.

22 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

NOTA 1.7. Con el fin de simplificar la exposición y sin pérdida de generalidad, calcularemos $q(x)$ sobre los nodos $0, 1, 2, \dots$ y no sobre $\{x_i^k\}_i$, ya que éstos los suponemos equiespaciados.

Tomamos nl nodos a la izquierda de x_{2i-1}^k y nr a la derecha ($r = nl + nr - 1$). Queremos que el polinomio satisfaga:

$$q(j) = f_{i+j-1}^{k-1}, \quad j = -nl + 1, -nl + 2, \dots, nr. \quad (1.18)$$

En forma matricial, tenemos la matriz $(r+1) \times (r+1)$

$$A_{nl,nr}^{\overline{IP}} = \begin{bmatrix} 1 & (-nl+1) & \cdots & (-nl+1)^{nr+nr} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & (-1)^{nl+nr} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1^{nl+nr} \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{nl+nr} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (nr) & \cdots & (nr)^{nl+nr} \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

y los vectores $\hat{a} = [a_1, \dots, a_{r+1}]^T$ y $\hat{f} = [f_{i-nl}^{k-1}, \dots, f_{i+nr-1}^{k-1}]^T$.

Para obtener los coeficientes $\{a_1, \dots, a_{nl+nr}\}$ del polinomio $q(x)$ debemos calcular la solución de $A_{nl,nr}^{\overline{IP}} \hat{a} = \hat{f}$. Dado que $A_{nl,nr}^{\overline{IP}}$ es una matriz de *Vandermonde*, $\det(A_{nl,nr}^{\overline{IP}}) \neq 0$, y la solución del sistema es:

$$\hat{a} = \left(A_{nl,nr}^{\overline{IP}} \right)^{-1} \hat{f}. \quad (1.20)$$

Al polinomio que hemos calculado lo denotaremos $p_{s_i}^{\overline{IP}}(x; f^{k-1}, r)$.

NOTA 1.8. La notación $p_{s_i}^{\overline{IP}}(x; f^{k-1}, r)$ se empleará al utilizar los nodos como enteros. Cuando trabajemos sobre los nodos $\{x_i^{k-1}\}_i$ se expresará $q_{s_i}^{\overline{IP}}(x; f^{k-1}, r)$.

NOTA 1.9. Utilizamos el subíndice s_i para indicar que el stencil es no centrado según la elección ENO. En este caso el stencil utilizado es $\{x_{i-nl}^{k-1}, \dots, x_{i+nr-1}^{k-1}\} \equiv \{x_{s_i-1}^{k-1}, \dots, x_{s_i+r-1}^{k-1}\}$, es decir, $s_i = i - nl + 1$. Dicha notación se utilizará a lo largo del presente trabajo.

El valor que aproxima a f_{2i-1}^k será $p_{s_i}^{\overline{\mathcal{IP}}}(\frac{1}{2}; f^{k-1}, r)$. Así:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2i-1}^k &= \sum_{l=1}^{nr+nl} a_l \frac{1}{2^{l-1}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^r}\right) \left(A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IP}}}\right)^{-1} \hat{f} \\ &= \sum_{l=-nl}^{nr-1} (\beta_{nl,nr}^r)_l f_{i+l} \equiv \overline{\mathcal{IP}}_{nl,nr}^r(x_{2i-1}^k, f^{k-1}), \end{aligned}$$

siendo⁴:

$$(\beta_{nl,nr}^r)_l = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^r}\right) \left(A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IP}}}\right)^{-1} e_l, \quad (1.21)$$

con $l = -nl, -nl + 1, \dots, nr - 1$ y $e_j = (\delta_{j,k})_{k=-nl}^{nr-1}$.

Debido a la simetría de la interpolación tenemos

$$(\beta_{nl,nr}^r)_l = (\beta_{nr,nl}^r)_{-l-1}, \quad l = -nl, \dots, nr - 1.$$

En la Tabla 1.1 vemos⁵ los resultados obtenidos para diferentes r , nl y nr con $r = nl + nr - 1$.

1.2.4

Técnica WENO

Mediante la interpolación ENO se consigue una aproximación con un buen orden de exactitud en todos los intervalos excepto en

⁴Dado que el nivel k , en la notación $\overline{\mathcal{IP}}_k(x; f^k, r)$ está presente en f^k , utilizaremos también la notación $\overline{\mathcal{IP}}_{nl,nr}^r(x; f^k, r)$ cuando necesitemos indicar el grado y el stencil del polinomio de reconstrucción

⁵En <http://www.uv.es/anims/noguera/> podemos descargar una GUI y programas en MATLAB® que calculan dichos filtros para cualquier combinación introducida.

24 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

l	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(\beta_{2,1}^2)_l$				$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$			
$(\beta_{1,2}^2)_l$					$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$		
$(\beta_{3,1}^3)_l$			$\frac{1}{16}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{5}{16}$			
$(\beta_{2,2}^3)_l$				$-\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{1}{16}$		
$(\beta_{1,3}^3)_l$					$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{16}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	
$(\beta_{5,1}^5)_l$	$\frac{7}{256}$	$-\frac{45}{256}$	$\frac{63}{128}$	$-\frac{105}{128}$	$\frac{315}{256}$	$\frac{63}{256}$			
$(\beta_{4,2}^5)_l$		$-\frac{3}{256}$	$\frac{21}{256}$	$-\frac{35}{128}$	$\frac{105}{128}$	$\frac{105}{256}$	$-\frac{7}{256}$		
$(\beta_{3,3}^5)_l$			$\frac{3}{256}$	$-\frac{25}{256}$	$\frac{75}{128}$	$\frac{75}{256}$	$-\frac{25}{256}$	$\frac{3}{256}$	
$(\beta_{2,4}^5)_l$				$-\frac{7}{256}$	$\frac{105}{256}$	$\frac{105}{128}$	$-\frac{35}{128}$	$\frac{21}{256}$	$-\frac{3}{256}$
f_{i+l}^{k-1}	f_{i-5}^{k-1}	f_{i-4}^{k-1}	f_{i-3}^{k-1}	f_{i-2}^{k-1}	f_{i-1}^{k-1}	f_i^{k-1}	f_{i+1}^{k-1}	f_{i+2}^{k-1}	f_{i+3}^{k-1}

Tabla 1.1: Aproximaciones a f_{2i-1}^{k-1} , de orden $r + 1 = nl + nr$, $\overline{\mathcal{IP}}_{nl,nr}^r(x_{2i-1}^k, f^{k-1}) = \sum_{l=-nl}^{nr-1} (\beta_{nl,nr}^r)_l f_{i+l}^{k-1}$, utilizando interpolación con nl puntos a la izquierda y nr puntos a la derecha de x_{2i-1}^k .

aquellos que contienen singularidades. Pero existen aspectos de esta técnica de interpolación que se podrían mejorar.

En primer lugar, el proceso de selección del *stencil* es muy sensible a las perturbaciones: si los valores de las diferencias divididas que se comparan en el criterio de selección son muy similares, una pequeña perturbación, como un error de redondeo, por ejemplo, podría hacer que el *stencil* seleccionado cambiase, porque podría cambiar la dirección de la desigualdad.

Por otra parte, en las regiones suaves de la función no es necesario realizar esta selección, ya que el *stencil* centrado conseguirá una buena aproximación.

Por último, se podría aumentar el orden de exactitud de la aproximación. El método *ENO* consiste en seleccionar uno de entre todos los *stencils* posibles, para hacer la interpolación en cada celda. Si tomamos *stencils* formados por r celdas, la interpolación *ENO* se hará seleccionando un *stencil* entre r posibles, dando una aproximación con un orden de exactitud igual a r . Hay $2r - 1$ celdas contenidas en los r *stencils*, por lo que se pierde la información

proporcionada por $r - 1$ de estas celdas. Si la función es suave en estas regiones, se podría alcanzar una mejor aproximación gracias a la información dada por las $2r - 1$ celdas contenidas en los distintos *stencils*, pudiendo obtener un orden de exactitud máximo igual a $2r - 1$.

Para solucionar los dos primeros problemas, se presentó en [50] una estrategia de sesgo, que consiste en tomar como base un *stencil* “preferido”, que será el *stencil* centrado en la celda donde se realiza la interpolación, y se utilizará para modificar el criterio de selección de *stencil* con un parámetro de sesgo. La idea es no alejarse de este *stencil*, excepto en el caso de que en el *stencil* alternativo la función sea “mucho” más suave, y este “mucho” viene dado por el sesgo.

Posteriormente, Liu et al. [52] introdujeron, en el contexto de las leyes de conservación, la técnica *WENO*, como mejora de la interpolación *ENO* en todos los puntos enumerados al principio de esta sección. Una versión más eficiente de esta técnica fue propuesta por Jiang y Shu en [50].

La técnica desarrollada por Liu et al. se basa en la versión para medias en celda de la interpolación *ENO*, y consiste en reconstruir un polinomio que interpola los valores puntuales de la solución de una ley de conservación hiperbólica a partir de las medias en celda de la solución débil. En el contexto de interpolación para la compresión y reconstrucción de imágenes, donde una imagen se interpreta como la discretización por medias en celda de una función, la técnica *WENO* consistirá en utilizar medias en celda para reconstruir un polinomio que interpole el conjunto de medias en celda de origen.

La diferencia entre *ENO* y *WENO* radica en la forma en que se construye el interpolante. El interpolante *ENO* se construye seleccionando un *stencil* para cada celda, mientras que en el método *WENO*, a cada celda se le asignan todos los *stencils* posibles, y el polinomio interpolador se calcula como una combinación lineal convexa de los polinomios correspondientes a dichos *stencils*. En esta combinación lineal, se da más importancia a los polinomios contruidos a partir de *stencils* en los que la función es suave, de forma que los polinomios que cruzan alguna singularidad tienen un efecto prácticamente nulo. De este modo, se conserva el efecto

26 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

ENO, es decir, la interpolación en celdas próximas a singularidades se hace tomando información sólo de regiones donde la función es suave, y además, como se utiliza una combinación convexa de polinomios interpoladores, los errores cometidos por unos se pueden cancelar con los de otros, resultando en un orden de aproximación mayor.

Considerando $\mathcal{S}_{i+k} = \{x_{i+k-r}, \dots, x_{i+k}\}$, $k = 0, \dots, r-1$, los r *stencils* que contienen al intervalo I_i , y denotando $\overline{\mathcal{IP}}_{i-s+1+k}^r(x)$ el polinomio de grado $r = 2s-1$ construido a partir del *stencil* $\mathcal{S}_{i+k}$, definimos el polinomio interpolador *WENO* en el intervalo I_i como

$$p_i^{WENO-\overline{\mathcal{IP}}}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k^i \overline{\mathcal{IP}}_{i-s+1+k}^r(x), \quad (1.22)$$

donde

$$\omega_k^i \geq 0, \quad k = 0, \dots, r-1, \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k^i = 1. \quad (1.23)$$

NOTA 1.10. En este trabajo asumiremos que en (1.22) los pesos deben cumplir $\omega_k^i \geq 0$, aunque existen artículos, [66], donde se estudia el tratamiento de pesos negativos.

Notar que para cada intervalo, el interpolante *WENO* toma información de $2r$ nodos. De este modo se pretende alcanzar una aproximación de orden $2r$ en aquellos intervalos donde la función sea suave. Veamos como podemos conseguir dicho orden de aproximación. Sea $\overline{\mathcal{IP}}_{i-s+1+k}^{2r-1}$ la aproximación obtenida empleando el *stencil* formado por $2r$ nodos $\{x_{i-r}, \dots, x_{i+r-1}\}$, y sean $\overline{\mathcal{IP}}_{i-s+1+k}^r$ las aproximaciones obtenidas con los *stencils* $\mathcal{S}_{i+k}$. Podemos expresar la aproximación de orden $2r$ como una combinación lineal de las r aproximaciones de orden $r+1$ (Figura 1.4), i.e.:

$$\overline{\mathcal{IP}}_{i-s+1+k}^{2r-1}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} C_k^r \overline{\mathcal{IP}}_{i-s+1+k}^r(x), \quad (1.24)$$

con $C_k^r \geq 0$, $\forall k$ y $\sum_{k=0}^{r-1} C_k^r = 1$. Las constantes C_k^r se denominan *pesos óptimos*. La Tabla 1.2 nos muestra los pesos óptimos para

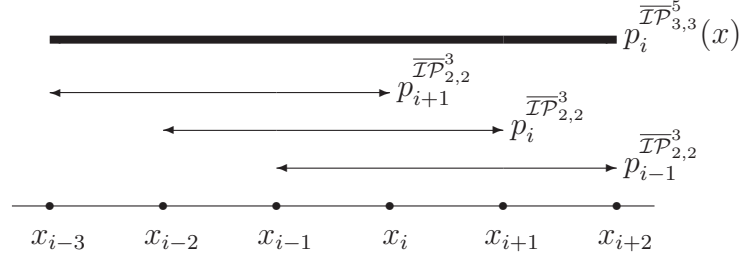


Figura 1.4: Esquema de la aproximación de orden $2r$ como C.L. de las r aproximaciones de orden $r+1$ ($r = 2s-1$): $p_i^{\overline{\mathcal{IP}}_{r,r}^{2r-1}}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} C_k^r p_{i-s+1+k}^{\overline{\mathcal{IP}}_{s,s}^r}(x)$, para $r = 3$.

$r = 2, 3$. En [14, 21] podemos encontrar los detalles sobre cómo obtener dichos pesos.

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$r = 2$	$1/2$	$1/2$	-
$r = 3$	$3/16$	$10/16$	$3/16$

Tabla 1.2: Pesos óptimos para $r = 2, 3$.

Si definimos los pesos ω_k^i de modo que verifiquen la siguiente relación:

$$\omega_k^i = C_k^r + O(h^{r-1}), \quad k = 0, \dots, r-1, \quad (1.25)$$

se puede demostrar, ver [50, 21], que la aproximación obtenida es de orden $2r$. Además, se desea que la contribución de los polinomios cuyo *stencil* cruce alguna singularidad sea lo menor posible, y por tanto sus pesos en (1.22) deben ser muy próximos a 0.

Con el objetivo de satisfacer las condiciones anteriores, se definen los pesos como sigue:

$$\omega_k^i = \frac{\alpha_k^i}{\sum_{s=0}^{r-1} \alpha_s^i}, \quad k = 0, \dots, r-1, \quad \text{con } \alpha_k^i = \frac{C_k^r}{(\epsilon + \mathcal{IS}_{i+k})^2}. \quad (1.26)$$

Notar que el valor ϵ introducido en (1.26) es una constante positiva para evitar que el denominador se anule, y $\mathcal{IS}_{i+k}$ es un indicador de suavidad de $f(x)$ en el *stencil* $\mathcal{S}_{i+k}$.

28 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

Resulta evidente que así definidos, los pesos verifican (1.23) independientemente del indicador de suavidad utilizado. Para que la contribución de los polinomios que cruzan una singularidad sea prácticamente nula, es suficiente con que $\mathcal{IS}_{i+k} = O(h^2)$ para aquellos *stencils* en los que $f(x)$ sea suave, y $\mathcal{IS}_{i+k} = O(1)$ en aquellos *stencils* que la función presente alguna singularidad. Se puede demostrar que si el indicador de suavidad verifica

$$\mathcal{IS}_{i+k} = D(1 + O(h^{r-1})), \quad k = 0, \dots, r-1, \quad (1.27)$$

se satisface la relación (1.25), ver [14, 21], donde D es una constante no nula que puede depender de h pero no de k . En particular se tiene el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 1.3. *Si tenemos*

$$\mathcal{IS}_{j+l} = D(1 + O(h^m)), \quad l = 0, \dots, r-1,$$

con D una constante distinta de cero e independiente de l , aunque puede depender de h , entonces, si $r = 2s - 1$:

$$\omega_l^j = C_l^j + O(h^m) \quad \text{y} \quad \sum_{l=0}^{r-1} \omega_l^j \bar{\mathcal{P}}_{j-s+1+l}^r = f_{2j-1} + O(h^{\min(r+m+1, 2r)}).$$

Liu et al.([52]) proponen el siguiente indicador de suavidad basado en las diferencias no divididas de $f(x)$ en los nodos de interpolación,

$$\mathcal{IS}_{i+k} = \sum_{l=1}^r \left(\sum_{m=1}^l (\Delta^{r-l+1}[f_{i+k+m-r-1}])^2 \right) / l, \quad (1.28)$$

donde $\Delta^s[f_l]$ no es más que la diferencia dividida de f en los nodos $\{x_l, \dots, x_{l+s}\}$. Se puede ver que con este indicador de suavidad se alcanza el orden óptimo 4, si $r = 2$, pero sin embargo cuando $r = 3$ se obtiene orden 5, siendo 6 el orden óptimo en este caso.

Jiang y Shu, definen en [52] un nuevo indicador de suavidad,

$$\mathcal{IS}_{i+k} = \sum_{l=1}^r \int_{x_{i-1}}^{x_i} h^{2l-1} (p_{i+k}^{(l)}(x))^2 dx, \quad (1.29)$$

donde $p_{i+k}^{(l)}(x)$ representa la l -ésima derivada del polinomio interpolador basado en el *stencil* S_{i+k} . Este nuevo indicador hace posible alcanzar órdenes óptimos tanto para el caso $r = 2$ como $r = 3$. Las demostraciones de los órdenes de exactitud alcanzados con ambos métodos, para $r = 2, 3$, se pueden consultar en [14, 21].

1.2.5

Técnica PPH

En el contexto de compresión de imágenes, se ha presentado en [6, 30] un nuevo método basado en una multirresolución unidimensional no lineal, denominada *PPH* (*Piecewise Polynomial Harmonic*). En [7] se describe *PPH* como una modificación de la multirresolución lineal, lo cual permite demostrar la convergencia y estabilidad del método. En [2] se aplica al procesamiento de señales digitales tales como compresión y eliminación de ruido de imágenes, obteniendo resultados satisfactorios.

Pasemos a describir este método de cuarto orden. Como:

$$\overline{\mathcal{IP}}_{2,2}^3(x_{2i-1}^k, f^{k-1}) = -\frac{1}{16}f_{i-2}^{k-1} + \frac{9}{16}f_{i-1}^{k-1} + \frac{9}{16}f_i^{k-1} - \frac{1}{16}f_{i+1}^{k-1},$$

tras una simple reordenación:

$$\overline{\mathcal{IP}}_{2,2}^3(x_{2i-1}^k, f^{k-1}) = \frac{1}{2}(f_{i-1}^{k-1} + f_i^{k-1}) - \frac{1}{8} \left(\frac{d^2 f_{i-1}^{k-1} + d^2 f_i^{k-1}}{2} \right),$$

con $d^2 f_n = f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1}$. La multirresolución *PPH* se basa en sustituir la media aritmética del segundo sumando por la media armónica, obteniendo:

$$\left(\overline{\mathcal{IP}}_{2,2}^3 \right)^{PPH} (x_{2i-1}^k, f^{k-1}) = \frac{1}{2}(f_{i-1}^{k-1} + f_i^{k-1}) - \frac{1}{8} H(d^2 f_{i-1}^{k-1}, d^2 f_i^{k-1}),$$

siendo $H(x, y)$ la media armónica, es decir:

$$H(x, y) := \frac{(\text{sign}(x) + \text{sign}(y))}{2} \frac{2|xy|}{|x| + |y|}, \quad (1.30)$$

con $\text{sign}(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $\text{sign}(x) = -1$ si $x < 0$.

1.2.6

Técnica de resolución subcelda (SR)

Con el fin de mejorar la aproximación en el intervalo donde se halla la discontinuidad, surge la técnica SR. Fue desarrollada por Harten, [43], en el contexto de esquemas ENO para *Leyes de Conservación Hiperbólicas*. Básicamente se trata de extender de manera adecuada los interpolantes adyacentes a un intervalo hasta el punto de discontinuidad. Esta técnica desarrolla su máxima potencialidad para discretizaciones por medias en celda, aunque la describiremos para valores puntuales. En [11] podemos ver unos resultados teóricos, en [13] unas aplicaciones 2D para valores puntuales y en [12] una generalización para medias en celda en 2D.

Denotamos⁶ $q_{s_i}(x)$ al polinomio interpolador de $f(x)$ formado a partir del *stencil* ENO, $\mathcal{S}_i^{ENO}$. Supongamos que $f(x)$ es una función continua con una esquina en $x_d \in (x_{i-1}, x_i)$ y que los polinomios $q_{s_{i\pm 1}}(x)$ satisfacen:

$$q_{s_{i-1}}(x) = f(x) + O(h^{r+1}) \quad x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \quad (1.31)$$

$$q_{s_{i+1}}(x) = f(x) + O(h^{r+1}) \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (1.32)$$

La localización del salto puede hallarse (con orden de aproximación $O(h^{r+1})$) definiendo la siguiente función:

$$G_i(x) := q_{s_{i+1}}(x) - q_{s_{i-1}}(x). \quad (1.33)$$

Desarrollando por Taylor, en las regiones suaves obtenemos:

$$G_i(x) = (x - x_d) [f'] + O(x - x_d)^2.$$

Luego para h suficientemente pequeño, debe existir una y sólo una raíz de G_i en (x_{i-1}, x_i) . Llamemos a dicha raíz $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$, es decir $G_i(\xi) = 0$.

⁶Este polinomio ya lo denotamos como $\overline{q}_{s_i}^{TP}(x; f^{k-1}, r)$, pero en este apartado utilizaremos esta notación menos engorrosa.

En lo que sigue veremos qué error cometemos al aproximar x_d por ξ . Supongamos que $f(x)$ es una función que cumple:

$$f(x) = \begin{cases} P_L(x), & x \leq x_d, \\ P_R(x), & x \geq x_d, \end{cases}$$

siendo $P_L(x)$ y $P_R(x)$ dos funciones suficientemente suaves tales que $P_L(x_d) = P_R(x_d)$ y $P'_L(x_d) \neq P'_R(x_d)$. Notar que en el caso particular en el que P_L y P_R sean polinomios de grado menor o igual a r , las piezas polinómicas son de aproximación exacta:

$$q_{s_{i-1}}(x) = P_L(x), \quad q_{s_{i+1}}(x) = P_R(x), \quad (1.34)$$

con lo cual $\xi = x_d$.

En el caso general, podemos reescribir (1.31) y (1.32) como:

$$q_{s_{i-1}}(x) = P_L(x) + O(h^{r+1}), \quad q_{s_{i+1}}(x) = P_R(x) + O(h^{r+1}).$$

Dado que $G_i(x) = P_R(x) - P_L(x) + O(h^{r+1})$ si definimos $\hat{G} := P_R(x) - P_L(x)$, entonces

$$G_i(x) = \hat{G}(x) + O(h^{r+1}) \Rightarrow G_i(\xi) = \hat{G}(\xi) + O(h^{r+1}).$$

Desarrollando por Taylor $\hat{G}(x)$ alrededor de x_d , obtenemos:

$$0 = G_i(\xi) = \hat{G}(x_d) + (x_d - \xi)\hat{G}'(x_d) + \cdots + O(h^{r+1}).$$

Dado que $\hat{G}(x_d) = 0$, $\hat{G}'(x_d) \neq 0$ y $|\xi - x_d| \leq h$:

$$|\xi - x_d| = O(h^{r+1}).$$

Una vez localizada la discontinuidad para realizar la *técnica de resolución subcelda*, SR (*Subcelde Resolution*), se extienden los interpolantes adyacentes hasta ξ de la siguiente manera (ver las Figuras 1.5 y 1.6):

$$\overline{\mathcal{IP}}^{SR}(x) = \begin{cases} q_{s_l}(x), & x \in [x_{l-1}, x_l], \quad l \neq i, \\ q_{s_{i-1}}(x), & x \in [x_{i-1}, \xi], \\ q_{s_{i+1}}(x), & x \in [\xi, x_i]. \end{cases}$$

Es claro que $\overline{\mathcal{IP}}^{SR}(x_l) = f(x_l)$, $\forall x_l \in X$ y

$$\frac{d^m}{dx^m} \overline{\mathcal{IP}}(x \pm 0; \mathcal{D}f) = \frac{d^m}{dx^m} f(x) + O(h^{r+1-m}), \quad 0 \leq m \leq r,$$

para todos los puntos excepto para un entorno de orden $O(h^{r+1})$ alrededor de x_d .

32 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

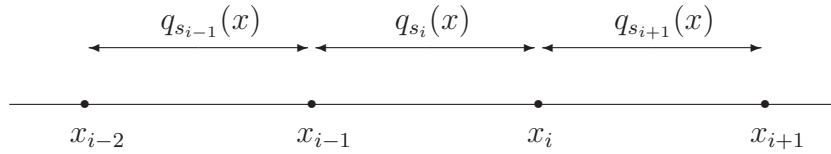


Figura 1.5: Alcance de las piezas polinómicas en la técnica ENO.

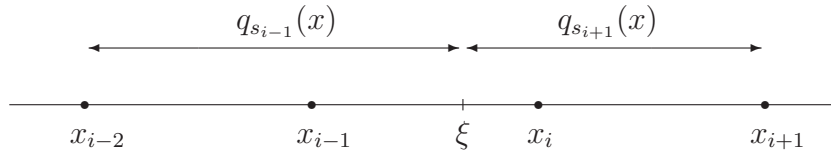


Figura 1.6: Alcance de las piezas polinómicas en la técnica SR.

NOTA 1.11. Al aplicar la técnica SR para singularidades en las cuales $[f^{(p)}] = O(1)$ con $p > 1$ hay que tener en cuenta:

- Se deben elegir los stencils ENO de forma no-jerárquica, es decir mediante ENO-VP-II, Algoritmo 1.2.
- Un salto en $f^{(p)}(x)$ es una esquina en $f^{(p-1)}(x)$. Por tanto la función $G(x)$ debe ser sustituida por $G^{(p-1)}(x)$ en (1.33).

Filtros SR para valores puntuales

Apliquemos las técnicas ENO-SR para discretizaciones por valores puntuales. Las funciones interpolatorias que utilizamos vienen dadas por:

$$\overline{\mathcal{IP}}_{k-1}(x, f^{k-1}) = \overline{q}_{s_i}^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; f^{k-1}, r), \quad x \in [x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}] \quad , 1 \leq i \leq J_k, \quad (1.35)$$

donde $\overline{q}_{s_i}^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; f^{k-1}, r)$ representa el único polinomio de grado r que interpola a $f(x)$ en el stencil S_i^{ENO} .

Como vimos, si $f(x) = P(x)$, siendo $P(x)$ un polinomio de grado menor o igual a r ,

$$\overline{\mathcal{IP}}_{k-1}(x, f^{k-1}) = q_{s_i}^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; f^{k-1}, r) = f(x), \quad x \in [x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}].$$

Entonces, el espacio de polinomios de grado menor o igual a $r = 2s - 1$, satisface que $\overline{\mathcal{IP}}_{k-1} \mathcal{D}_{k-1} f = f$. Además para funciones suaves,

$$\overline{\mathcal{IP}}_{k-1}(x, f^{k-1}) = f(x) + O(h_{k-1})^{2s}.$$

Por tanto, el orden del esquema de reconstrucción es $p = r + 1 = 2s$.

Al utilizar interpolación polinómica a trozos de orden $r + 1$ se obtiene que los coeficientes d_i^k son los errores de interpolación en los puntos impares de la escala k . Según los resultados de la sección 1.2.1 si las piezas polinómicas son de grado r , en las regiones de suavidad se obtiene:

$$d_l^k = O(h_{k-1}^{r+1}). \quad (1.36)$$

Sin embargo si hay una única discontinuidad, $x_d \in (x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1})$, tal que $[f^{(p)}]_{x_d} = O(1)$ con $p \leq r$, $d_i^k = O(h_{k-1}^p)$. En las cercanías de la discontinuidad, se crearán una serie de *coeficientes de escala* de magnitud elevada. En concreto, si utilizamos una técnica de interpolación centrada con $r = 2s - 1$, se verán afectados los siguientes coeficientes:

$$d_l^k = O([f^{(p)}]) h_{k-1}^p, \quad l = i - s + 1, \dots, i + s - 1. \quad (1.37)$$

NOTA 1.12. *Es deseable evitar estos intervalos de poca aproximación ya que, por ejemplo, en el contexto de compresión, al eliminar los coeficientes de escala dicha información no podrá ser recuperada por el esquema de predicción. Otra opción es almacenarlos a costa de perder capacidad de compresión.*

Al aplicar la técnica ENO, si las discontinuidades están lo suficientemente separadas, sólo se producirá un coeficiente de magnitud elevada por cada discontinuidad.

La región de buena aproximación puede maximizarse aplicando la técnica SR, en cuyo caso se obtiene (1.36) para todo $l =$

34 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

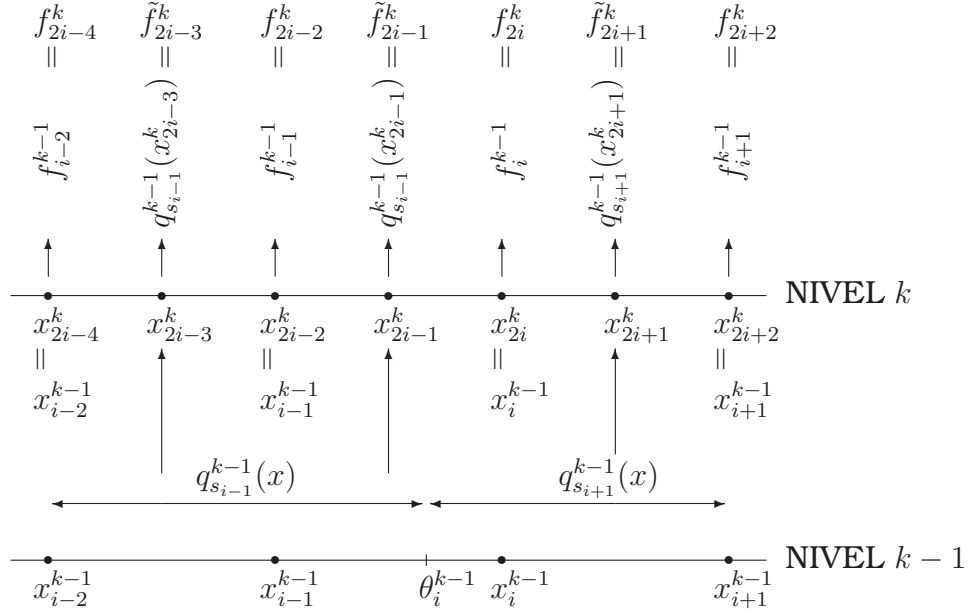


Figura 1.7: Paso del nivel $k-1$ al k mediante multirresolución a partir de discretización por valores puntuales aplicando la técnica ENO-SR al suponer que en el intervalo $(x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1})$ se encuentra la discontinuidad θ_i^{k-1} . En la Figura $q_{s_i}^k(x) := q_{s_i}^{\overline{IP}}(x; f^k, r)$, es decir, el polinomio construido a partir del stencil S_i^{ENO} que interpola a los valores $\{f^k\}$.

$1, \dots, J_{k-1}$ excepto si el punto x_{2l-1}^k se halla en un entorno de $O(h^{r+1})$ de una singularidad.

A continuación describiremos los pasos necesarios para aplicar ENO-SR en los algoritmos (1.13) y (1.14):

1.- En el nivel $k-1$ calcular los *stencils* ENO utilizando ENO-VP-I (Algoritmo 1.1) o ENO-VP-II (Algoritmo 1.2).

2.- Detectar las posibles *celdas singulares*: si I_i^{k-1} es singular, el *stencil* ENO de la celda I_{i+1}^{k-1} no contendrá el punto x_{i-1}^{k-1} , mientras que el de la celda I_{i-1}^{k-1} no contendrá el punto x_i^{k-1} . Por tanto, si

$$\mathcal{S}_{i-1}^{k-1} \cap \mathcal{S}_{i+1}^{k-1} = \emptyset, \quad (1.38)$$

etiquetamos la celda como *sospechosa* de contener una singularidad.

3.- Para cada celda sospechosa definir la función

$$G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x) := q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x; f^{k-1}, r) - q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x; f^{k-1}, r), \quad (1.39)$$

donde $q_{s_i}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x; h, r)$ representa el polinomio de grado r construido a partir del *stencil* $\mathcal{S}_i^{ENO}$ que interpola a los valores de h . A continuación estudiamos el signo de $G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_i^{k-1})$ para decidir si hay una esquina en la celda sospechosa:

Si $G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_i^{k-1}) < 0 \Rightarrow$ existe una raíz θ_i^{k-1} de $G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x)$, y etiquetamos la celda como *singular*.

4.- Dada una celda singular $(x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1})$, para decidir si el punto x_{2i-1}^k está a la derecha o a la izquierda de la singularidad procedemos como sigue:

- Si $G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i-1}^k) \cdot G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_i^{k-1}) < 0$ tenemos $\theta_i^{k-1} > x_{2i-1}^k$ y

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2i-1}^k &= q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}, r) = p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(1/2; f^{k-1}, r) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{1}_{2s}^T \left(A_{2s,0}^{\overline{\mathcal{TP}}} \right)^{-1} [f_{i-2s}^{k-1}, \dots, f_{i-1}^{k-1}]^T \\ &= \sum_{l=-2s}^{-1} (\beta_{2s,0}^{2s-1})_l f_{i+l}^{k-1}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

donde $(\beta_{2s,0}^{2s-1})_l = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{2s}^T \left(A_{2s,0}^{\overline{\mathcal{TP}}} \right)^{-1} e_l$, $l = -2s, \dots, -1$, siendo $A_{2s,0}^{\overline{\mathcal{TP}}}$ la definida en (1.19), $(\delta_{j,k})_{k=-2s}^{-1}$ y $\mathbf{1}_n = \underbrace{(1, \dots, 1)}_n^T$.

NOTA 1.13. La notación $\mathbf{1}_n = \underbrace{(1, \dots, 1)}_n^T$ se utilizará a lo largo del presente trabajo.

- En otro caso, $\theta_i^{k-1} < x_{2i-1}^k \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2i-1}^k &= q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}, r) = p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(1/2; f^{k-1}, r) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{1}_{2s} \left(A_{0,2s}^{\overline{\mathcal{TP}}} \right)^{-1} [f_i^{k-1}, \dots, f_{i+2s-1}^{k-1}]^T \end{aligned}$$

36 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

$$= \sum_{l=0}^{2s-1} (\beta_{0,2s}^{2s-1})_l f_{i+l}^{k-1}. \quad (1.41)$$

donde $(\beta_{0,2s}^{2s-1})_l = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{2s}^T \left(A_{0,2s}^{\overline{\mathcal{TP}}} \right)^{-1} e_l$, $l = 0, \dots, 2s-1$, siendo $e_j = (\delta_{j,k})_{k=0}^{2s-1}$.

En la Tabla 1.3 podemos ver los filtros $\beta_{2s,0}^{2s-1}$ para $s = 2, 3$. Simétricamente obtenemos $\beta_{0,2s}^{2s-1}$ ya que

$$(\beta_{2s,0}^{2s-1})_l = (\beta_{0,2s}^{2s-1})_{-1-l}, \quad l = -2s, \dots, -1.$$

l	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$(\beta_{4,0}^3)_l$			$-\frac{5}{16}$	$\frac{21}{16}$	$-\frac{35}{16}$	$\frac{35}{16}$
$(\beta_{6,0}^5)_l$	$-\frac{63}{256}$	$\frac{385}{256}$	$-\frac{495}{128}$	$\frac{693}{128}$	$-\frac{1155}{256}$	$\frac{693}{256}$
f_{i-l-1}^{k-1}	f_{i-6}^{k-1}	f_{i-5}^{k-1}	f_{i-4}^{k-1}	f_{i-3}^{k-1}	f_{i-2}^{k-1}	f_{i-1}^{k-1}

Tabla 1.3: Aproximaciones a f_{2i-1}^{k-1} , $\overline{\mathcal{TP}}_{2s,0}^r = \sum_{l=-2s}^{-1} (\beta_{2s,0}^r)_l f_{i+l}^{k-1}$, de orden $r+1 = 2s$, utilizando extrapolación con $2s$ puntos a la izquierda de x_{2i-1}^k .

Los valores que necesitamos para decidir si una celda es singular y para conocer la localización de x_{2i-1}^k respecto a la discontinuidad son $G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{i-1}^{k-1})$, $G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i-1}^k)$ y $G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_i^{k-1})$:

$$\begin{aligned} G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_i^{k-1}) &= q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_i^{k-1}; f^{k-1}, r) - q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_i^{k-1}; f^{k-1}, r) \\ &= p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(1; f^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(1; f^{k-1}, r) \\ &= f_i^{k-1} - \mathbf{1}_{2s}^T \left(A_{2s,0}^{\overline{\mathcal{TP}}} \right)^{-1} [f_{i-2s}^{k-1}, \dots, f_{i-1}^{k-1}]^T = \sum_{l=-2s}^{-1} (\sigma_{2s,0}^{2s-1})_l f_{i+l}^{k-1}. \end{aligned}$$

donde $(\sigma_{2s,0}^{2s-1})_1 = 1$ y $(\sigma_{2s,0}^{2s-1})_l = -\mathbf{1}_{2s}^T \left(A_{2s,0}^{\overline{\mathcal{TP}}} \right)^{-1} e_l$, $l = -2s, \dots, 0$, siendo $e_j = (\delta_{j,k})_{k=-2s}^{-1}$.

$$G_i^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i-1}^k) = q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}, r) - q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}, r)$$

$$= \sum_{l=-0}^{2s-1} (\beta_{2s,0}^{2s-1})_l f_{i+l} - \sum_{l=0}^{2s-1} (\beta_{0,2s}^{2s-1})_l f_{i+l}, \quad (1.42)$$

con $(\beta_{nl,nr}^r)_l$ los definidos en (1.40) y (1.41). La Tabla 1.3 muestra $\beta_{2s,0}$ para $s = 2, 3$.

$$\begin{aligned} G_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_{i-1}^{k-1}) &= q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_{i-1}^{k-1}, f^{k-1}, r) - q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_{i-1}^{k-1}, f^{k-1}, r) \\ &= p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IP}}}(0; f^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IP}}}(0; f^{k-1}, r) \\ &= (1, 0, \dots, 0) \left(A_{0,2s}^{\overline{\mathcal{IP}}} \right)^{-1} [f_i^{k-1}, \dots, f_{i+2s-1}^{k-1}]^T - f_{i-1}^{k-1} \\ &= \sum_{l=-1}^{2s-1} (\sigma_{0,2s}^{2s-1})_l f_{i+l}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

donde $(\sigma_{0,2s}^{2s-1})_{-1} = -1$, $(\sigma_{0,2s}^{2s-1})_l = (1, 0, \dots, 0) \left(A_{0,2s}^{\overline{\mathcal{IP}}} \right)^{-1} e_l$, $l = 0, \dots, 2s - 1$, siendo $e_j = (\delta_{j,k})_{k=0}^{2s-1}$.

En términos de filtros obtenemos:

■ $r = 3$

$$\begin{cases} G_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_{i-1}^{k-1}) &= f_{i-1}^{k-1} + 4f_i^{k-1} - 6f_{i+1}^{k-1} + 4f_{i+2}^{k-1} - f_{i+3}^{k-1}, \\ G_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_{2i-1}^k) &= \frac{5}{16}f_{i-4}^{k-1} - \frac{21}{16}f_{i-3}^{k-1} + \frac{35}{16}f_{i-2}^{k-1} - \frac{35}{16}f_{i-1}^{k-1} \\ &\quad + \frac{35}{16}f_i^{k-1} - \frac{35}{16}f_{i+1}^{k-1} + \frac{21}{16}f_{i+2}^{k-1} - \frac{5}{16}f_{i+3}^{k-1}, \\ G_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_i^{k-1}) &= f_{i-4}^{k-1} - 4f_{i-3}^{k-1} + 6f_{i-2}^{k-1} - 4f_{i-1}^{k-1} + f_i^{k-1}. \end{cases}$$

■ $r = 5$

$$\begin{cases} G_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_{i-1}^{k-1}) &= +f_{i-1}^{k-1} + 6f_i^{k-1} - 15f_{i+1}^{k-1} + 20f_{i+2}^{k-1} \\ &\quad - 15f_{i+3}^{k-1} + 6f_{i+4}^{k-1} - f_{i+5}^{k-1}, \\ G_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_{2i-1}^k) &= -\frac{63}{256}f_{i-6}^{k-1} + \frac{385}{256}f_{i-5}^{k-1} - \frac{495}{128}f_{i-4}^{k-1} + \frac{693}{128}f_{i-3}^{k-1} \\ &\quad - \frac{1155}{256}f_{i-2}^{k-1} + \frac{693}{256}f_{i-1}^{k-1} + \frac{693}{256}f_i^{k-1} - \frac{1155}{256}f_{i+1}^{k-1} \\ &\quad + \frac{495}{128}f_{i+2}^{k-1} - \frac{495}{128}f_{i+3}^{k-1} + \frac{385}{256}f_{i+4}^{k-1} - \frac{63}{256}f_{i+5}^{k-1}, \\ G_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_i^{k-1}) &= -f_{i-6}^{k-1} + 6f_{i-5}^{k-1} - 15f_{i-4}^{k-1} + 20f_{i-3}^{k-1} \\ &\quad - 15f_{i-2}^{k-1} + 6f_{i-1}^{k-1} + f_i^{k-1}. \end{cases}$$

38 1.2. Esquemas de multirresolución para valores puntuales

NOTA 1.14. *El anterior algoritmo únicamente se aplica para discontinuidades esquina, pero no en saltos, ya que en ese caso en el paso 3 nunca se etiqueta la celda como singular. Por tanto, en valores puntuales la técnica SR no mejora la aproximación para saltos.*

1.2.7

Ejemplos

Veamos sobre una función concreta los diversos métodos. La función utilizada presenta dos discontinuidades. La primera es un salto y la segunda una esquina. Su definición analítica es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4x-3}{5} \sin\left(\frac{3}{2}\pi\left(\frac{4x-3}{5}\right)^2\right) + \frac{1}{10} & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{10}, \\ \left| \sin 2\pi\left(\frac{4x-3}{5}\right) + \frac{\pi}{100} \right| & \text{si } \frac{\pi}{10} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (1.44)$$

Utilizamos los algoritmos (1.13) y (1.14). Partiendo de una discretización de 257 nodos, bajamos tres niveles aplicando el operador decimación por valores puntuales. Posteriormente subimos tres niveles aplicando operadores predicción $\overline{\mathcal{TP}}$ de grado 3 por valores puntuales, eliminando los coeficientes de escala. Obtenemos la Figura 1.8, donde representamos la función original, la aproximación, la diferencia entre ambas y los valores que obtenemos en el nivel más grosero. En (a) empleamos interpolación centrada excepto en las fronteras donde sí se han adaptado los *stencils* a fin de centrar la atención en las discontinuidades interiores.

En (b) mostramos la localización de los coeficientes de escala mayores que 10^{-4} . El eje de ordenadas representa el nivel k . Para la discontinuidad de salto, según (1.37), dado que $r = 3$ y $s = 2$ se verán afectados los coeficientes $d_l^1 = O([f])$, para $l = i - 1, i, i + 1$, donde suponemos que la discontinuidad se localiza en $[x_{i-1}^0, x_i^0]$. De ahí los tres coeficientes de escala mayores que 10^{-4} que aparecen en (b). Al igual ocurre en la discontinuidad esquina, aunque en este caso la magnitud de la diferencia es menor debido al producto por h_0 : $d_l^1 = O([f'])h_0$, para $l = i - 1, i, i + 1$.

Al introducir la técnica *ENO*, Figura 1.8 (c), desaparece el *fenómeno de Gibbs* y los intervalos de escasa aproximación se reducen a uno, el que contiene la discontinuidad. Lo mismo ocurre con *WENO* y *PPH*, Figuras (e) y (f) respectivamente .

Con la técnica *SR*, Figura 1.8 (d), se mejora la aproximación en la esquina, aunque no en el salto, ya que al trabajar con valores puntuales la celda que contiene el salto, aunque sea sospechosa, no se ha etiquetado como singular ($G_i^{\overline{TP}}(x)$ no cambia de signo en los extremos del intervalo).

1.3

Esquemas de multirresolución para medias en celda

Consideramos⁷ $\mathcal{F} = L^1([0, 1])$ y una sucesión de intervalos anidados en $[0, 1]$ dados por (1.10), $c_i^k = (x_{i-1}^k, x_i^k)$, para $i = 1, 2, \dots, J_k$. La discretización por medias en celda se define como

$$\mathcal{D}_k : L^1[0, 1] \rightarrow V^k, \quad \bar{f}_i^k = (\mathcal{D}_k f)_i = \frac{1}{h_k} \int_{x_{i-1}^k}^{x_i^k} f(x) dx, \quad 1 \leq i \leq J_k,$$

donde $L^1[0, 1]$ es el espacio de funciones absolutamente integrables en $[0, 1]$ y V^k es el espacio de sucesiones con J_k componentes. Dado que:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{k-1} f)_i = \bar{f}_i^{k-1} &= \frac{1}{h_{k-1}} \int_{x_{i-1}^{k-1}}^{x_i^{k-1}} f(x) dx = \frac{1}{2h_k} \int_{x_{2i-2}^k}^{x_{2i}^k} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_k} \int_{x_{2i-2}^k}^{x_{2i-1}^k} f(x) dx + \frac{1}{h_k} \int_{x_{2i-1}^k}^{x_{2i}^k} f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{f}_{2i-1}^k + \bar{f}_{2i}^k) = \frac{1}{2} ((\mathcal{D}_k f)_{2i-1} + (\mathcal{D}_k f)_{2i}), \end{aligned}$$

⁷Se puede definir de manera similar para $\mathcal{F} = L^1(\Omega)$, tomando un cubrimiento finito de Ω por celdas disjuntas, ver [16, 9].

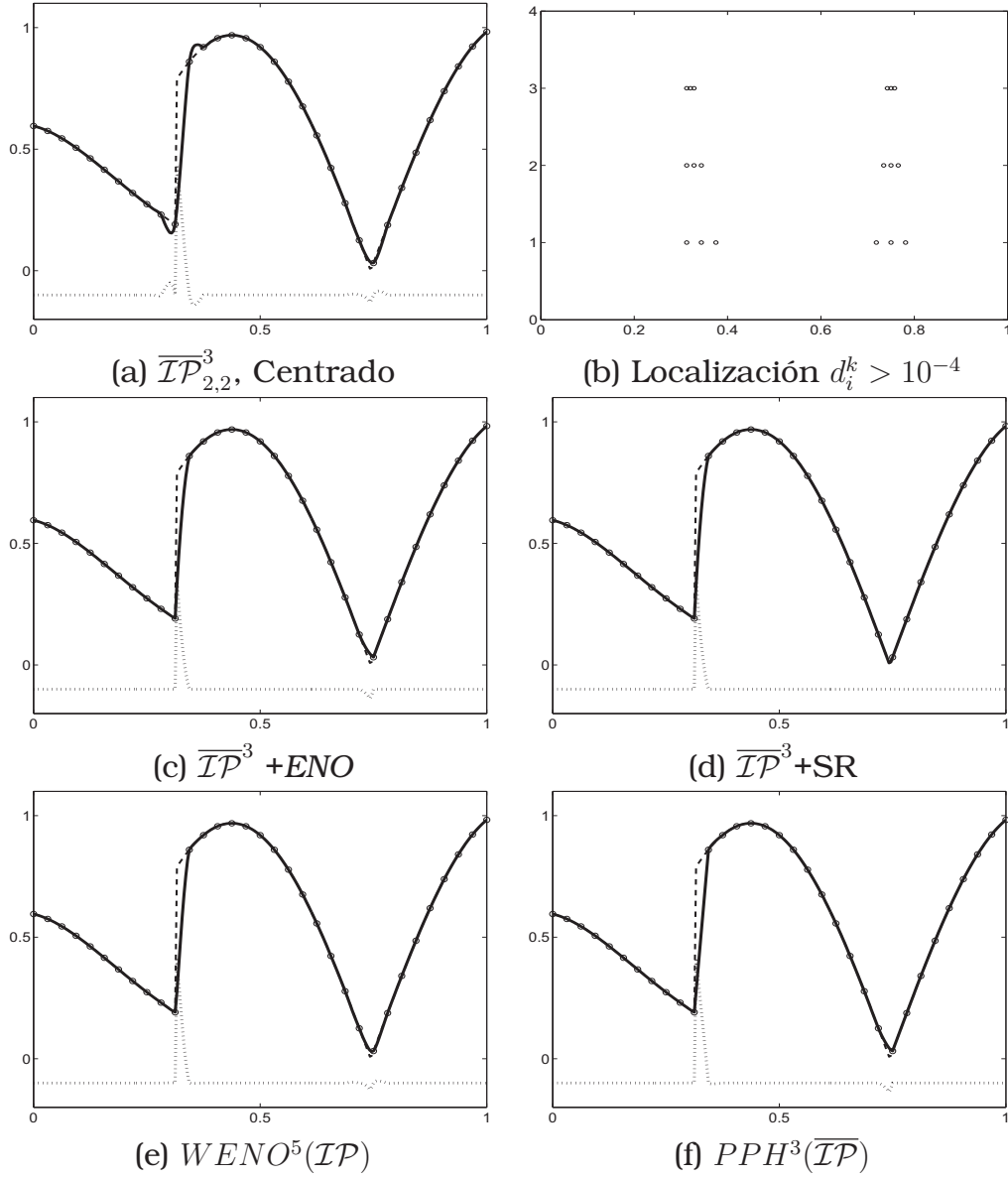


Figura 1.8: Aplicamos 3 niveles de decimación por valores puntuales y 3 niveles de predicción a la función (1.44) discretizada con 257 nodos. En (b) 'o' representa, para cada nivel, la localización de los coeficientes $d_i^k > 10^{-4}$. En el resto, '-' representa la función de partida, '-.' la reconstrucción, 'o' la función en el nivel más grosero y '..' la diferencia entre la discretización inicial y la reconstrucción (desplazada $-0,1$ en el eje OY).

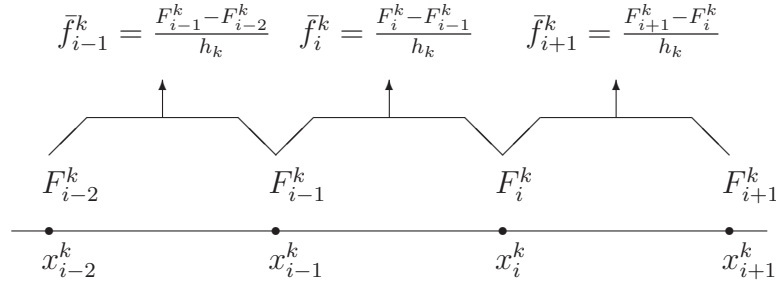


Figura 1.9: Correspondencia $\{\bar{f}_i^k\} \leftrightarrow \{F_i^k\}$

la discretización es anidada (Definición 1.7) y además el operador decimación toma la forma:

$$(D_k^{k-1} \bar{f}^k)_i = \frac{1}{2} (\bar{f}_{2i-1}^k + \bar{f}_{2i}^k) \Rightarrow (D_k^{k-1})_{i,j} = \frac{1}{2} (\delta_{2i-1,j} + \delta_{2i,j}).$$

El error de predicción e^k satisface $0 = (D_k^{k-1} e^k)_i = (e_{2i-1}^k + e_{2i}^k)/2$. Entonces tenemos

$$d_j^k = e_{2j-1}^k, \quad \begin{cases} e_{2j-1}^k = d_j^k, \\ e_{2j}^k = -d_j^k, \end{cases} \quad 1 \leq j \leq \frac{J_k}{2} = J_{k-1},$$

proporcionando los operadores: $(G_k)_{i,j} = \delta_{2i-1,j}$, $(E_k)_{i,j} = \delta_{i,2j-1} - \delta_{i,2j}$.

A continuación describimos cómo construir la reconstrucción mediante la función primitiva, [16]. Definimos la secuencia $F_i^k = h_k \sum_{j=1}^i \bar{f}_j^k = \int_0^{x_i^k} f(y) dy$, con $F_i^k = F(x_i^k)$ y $F(x) = \int_0^x f(y) dy \in \mathcal{C}[0, 1]$ la primitiva de $f(x)$. $\{F_i^k\}_{i=0}^{J_k}$ corresponde a la discretización por valores puntuales de $F(x)$. Por tanto $\bar{f}_i^k = \frac{F_i^k - F_{i-1}^k}{h_k}$, estableciendo así una relación biunívoca entre los valores puntuales de $F(x)$ y las medias en celda $\bar{f}(x)$ (notar que $F_0^k = 0 \ \forall k$). Dicha relación puede apreciarse en la Figura 1.9.

Sea $\overline{\mathcal{IP}}_k(x, F^k)$ una reconstrucción interpolatoria de $F(x)$ (en [16] se justifica dicha elección). Se define el operador reconstrucción de la siguiente manera: $(\mathcal{R}_k \bar{f}^k)(x) := \frac{d}{dx} \overline{\mathcal{IP}}_k(x; F^k)$. Es fácil probar que $(\mathcal{R}_k \bar{f}^k)(x) \in L^1[0, 1]$ y que además es un operador reconstrucción (Definición 1.7) ya que:

$$((\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k \bar{f}^k)(x))_i = \frac{1}{h_k} \int_{x_{i-1}^k}^{x_i^k} \frac{d}{dx} \overline{\mathcal{IP}}_k(x; F^k) dx$$

42 1.3. Esquemas de multirresolución para medias en celda

$$= \frac{1}{h_k} (\overline{\mathcal{I}\mathcal{P}}_k(x_i^k; F^k) - \overline{\mathcal{I}\mathcal{P}}_k(x_{i-1}^k; F^k)) = \frac{F_i^k - F_{i-1}^k}{h_k} = \bar{f}_i^k.$$

El operador predicción se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} (P_{k-1}^k f^{k-1})_{2i-1} &= (\mathcal{D}_k \mathcal{R}_{k-1} f^{k-1})_{2i-1} = \frac{1}{h_k} \int_{x_{2i-2}^k}^{x_{2i-1}^k} \frac{d}{dx} \overline{\mathcal{I}\mathcal{P}}_{k-1}(x; F^{k-1}) dx \\ &= \frac{1}{h_k} (\overline{\mathcal{I}\mathcal{P}}_{k-1}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}) - \overline{\mathcal{I}\mathcal{P}}_{k-1}(x_{2i-2}^k; F^{k-1})) \\ &= \frac{1}{h_k} (\overline{\mathcal{I}\mathcal{P}}_{k-1}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}) - F_{i-1}^{k-1}) \\ &\equiv \overline{\mathcal{I}\mathcal{C}}_{k-1}(x_{2i-1}^k; \bar{f}^{k-1}). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Los esquemas (1.5) y (1.6) en este caso son:

Codificación:

$$\begin{cases} \text{Para } k = L, \dots, 1 \\ \bar{f}_i^{k-1} = \frac{1}{2}(\bar{f}_{2i-1}^k + \bar{f}_{2i}^k), & i = 1, \dots, J_{k-1}, \\ d_i^k = \bar{f}_{2i-1}^k - (P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1}, & i = 1, \dots, J_{k-1}. \end{cases} \quad (1.46)$$

Decodificación:

$$\begin{cases} \text{Para } k = 1, \dots, L \\ \bar{f}_{2i-1}^k = (P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1} + d_i^k, & i = 1, \dots, J_{k-1}, \\ \bar{f}_{2i}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i-1}^k, & i = 1, \dots, J_{k-1}. \end{cases} \quad (1.47)$$

Se puede demostrar, [16], que hay una relación directa entre los coeficientes de escala $d^k(f)$ y los coeficientes de escala de la función primitiva $d^k(F)$:

$$d_i^k(f) = d_i^k(F)/h_k. \quad (1.48)$$

1.3.1

Técnicas de interpolación lineales y no lineales para medias en celda

Trabajaremos con la función F como describimos en la sección 1.3, aunque en la práctica sólo se emplea la función $\bar{f}$.

La función interpolatoria que utilizamos es la siguiente:

$$\overline{\mathcal{IP}}_{k-1}^r(x, F^{k-1}) = q_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; F^{k-1}, r), \quad x \in [x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}], \quad 1 \leq i \leq J_{k-1}, \quad (1.49)$$

donde $q_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; F^{k-1}, r)$ representa el único polinomio de grado r que interpola a $F(x)$ en los puntos $\{x_i^{k-1}\}_i$. Alternativamente podemos expresar la función interpolatoria en función de las medias en celda:

$$\overline{\mathcal{IC}}_{k-1}^{r-1}(x, \bar{f}^{k-1}) = q_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1) \equiv q_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; F^{k-1}, r) \equiv \overline{\mathcal{IP}}_{k-1}^r(x, F^{k-1}).$$

Gracias a (1.45), por la Definición (1.49):

$$(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1} = \frac{1}{h_k} \left[q_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}, r) - q_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x_{2i-2}^k; F^{k-1}, r) \right].$$

NOTA 1.15. *Por inducción es fácil probar que [15]:*

$$\bar{f}[x_i^k, \dots, x_{i+n}^k] = (n+1)F[x_{i-1}^k, \dots, x_{i+n}^k]. \quad (1.50)$$

Utilizando la forma de Newton de cada pieza polinómica y la Nota 1.15 se puede escribir $(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1}$ en términos de $\{\bar{f}_i^{k-1}\}$ y sus diferencias divididas por lo que F es únicamente una herramienta de diseño y en la práctica se trabaja con los valores de $\bar{f}$.

En el caso en que $\bar{f}(x) = P(x)$ donde $P(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que $r-1 = 2s-2$, $F(x)$ es de grado menor o igual que $r = 2s-1$ y

$$\overline{\mathcal{IP}}_{k-1}^r(x, F^{k-1}) = q_i^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; F^{k-1}, 2s-1) = F(x), \quad x \in [x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}].$$

Luego el espacio de polinomios de grado menor o igual a $2s-2$ satisface que $\mathcal{R}_{k-1}\mathcal{D}_{k-1}\bar{f} = \bar{f}$. Además para funciones suaves

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{IP}}_{k-1}^r(x, F^{k-1}) &= F(x) + O(h_{k-1})^{2s}, \\ (\mathcal{R}_{k-1}\bar{f}^{k-1})(x) &= \frac{d}{dx} \overline{\mathcal{IP}}_{k-1}^r(x, F^{k-1}) = \bar{f}(x) + O(h_{k-1})^{2s-1}. \end{aligned}$$

Por tanto, el orden de la reconstrucción es $2s-1 = r$ y podemos enunciar los siguientes resultados:

44 1.3. Esquemas de multirresolución para medias en celda

PROPOSICIÓN 1.4. Si $q_i^{\overline{IC}}(x; \bar{f}^k, r-1)$ es el polinomio $\overline{IC}$ de grado $r-1$ (de grado r para $q_i^{\overline{IP}}(x; F^k, r)$), la reconstrucción $\overline{IC}$ recupera de forma exacta polinomios de grado menor o igual a $r-1$.

COROLARIO 1.2. El orden de la reconstrucción $\overline{IC}$ es r .

En regiones suaves, si las piezas polinómicas de $\overline{IP}_{k-1}(x, F^{k-1})$ son de grado r (grado de las piezas polinómicas de $\mathcal{R}_{k-1}(x, \bar{f}^{k-1})$ son de grado $r-1$) se cumplirá, en virtud de la propiedad (1.48):

$$d^k(\bar{f}) = \frac{d^k(F)}{h_k} = \frac{O(h_{k-1}^{r+1})}{h_k} = \frac{O(h_{k-1}^{r+1})}{2h_{k-1}} = O(h_{k-1}^r).$$

Si el *stencil* a partir del cual se construye la pieza polinómica cruza una discontinuidad de $\bar{f}^{(p)}$ ($p \leq r-1$): $d^k(\bar{f}) = O([\bar{f}^{(p)}]) h_{k-1}^p$.

En las proximidades de cada discontinuidad se producen una serie de intervalos de mala aproximación. Si para $\overline{IP}_{k-1}^r(x, F^{k-1})$ utilizamos interpolación centrada de grado r , con $r = 2s-1$, los coeficientes de escala afectados por una discontinuidad localizada en (x_{2i-1}^k, x_{2i}^k) serán

$$d_l^k(\bar{f}) = O([\bar{f}^{(p)}]) h_{k-1}^p, \quad l = i-s+1, \dots, i+s-1, \quad (1.51)$$

mientras que si la discontinuidad se halla entre (x_{2i-2}^k, x_{2i-1}^k) :

$$d_l^k(\bar{f}) = O([\bar{f}^{(p)}]) h_{k-1}^p, \quad l = i-s+1, \dots, i+s-2. \quad (1.52)$$

El uso de las técnicas ENO-SR maximiza el intervalo de buena aproximación. Para valores puntuales, vimos que SR mejoraba la aproximación para discontinuidades esquina pero no para saltos. Harten en [43] expone la siguiente observación:

**Una discontinuidad de salto en $\bar{f}(x)$
se convierte en una esquina en $F(x)$.**

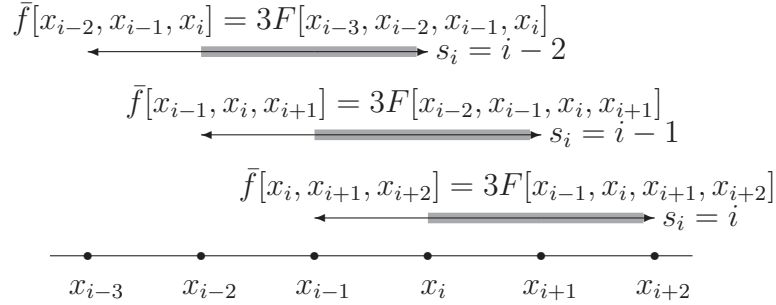


Figura 1.10: Se representa en línea fina las posibles elecciones de stencils de 4 nodos ($r = 3$) para la función $F(x)$ el intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ y en línea gris y más gruesa los nodos sobre los que la notación indica que se calculan las diferencias divididas para $\bar{f}(x)$ según (1.50).

Gracias a lo cual, si trabajamos con medias en celda de $\bar{f}(x)$ la técnica SR sí mejorará el caso ENO en los saltos, ya que visto desde la función $F(x)$, donde se trabaja con valores puntuales, cada salto será una esquina que sí será localizada por SR y por tanto también lo será para el salto de $\bar{f}(x)$.

Para hallar los stencils ENO de los polinomios $q_{s_i}^{\overline{TP}}(x; F^k, r)$ no es necesario calcular explícitamente $\{F^k\}$ ni sus diferencias divididas, sino que la elección del stencil se puede llevar a cabo directamente en términos de $\bar{f}^k$ (ver Nota 1.15).

Los algoritmos ENO para el caso de medias en celda se deducen directamente a partir de los de valores puntuales para $F(x)$. Aunque la notación⁸ parezca indicar que $\bar{f}[x_i^k, \dots, x_{i+n}^k]$ se calcule sobre el stencil $\{x_i^k, \dots, x_{i+n}^k\}$ realmente se calcula sobre el stencil $\{x_{i-1}^k, \dots, x_{i+n}^k\}$. En dichos algoritmos el valor $(n + 1)$ de la relación (1.50) puede eliminarse, ya que en cada comparación la longitud de los stencils es la misma. Ver la Figura 1.10.

Los algoritmos ENO para el caso de medias en celda son el Algoritmo 1.3 y el Algoritmo 1.4.

⁸En la literatura sobre el tema suelen utilizarse conjuntos de nodos distintos para F y $\bar{f}$, como $\bar{x}_i = (1/2)(x_{i-1} + x_i)$. Dado que adoptar una u otra notación no afecta al diseño del método hemos optado por mantener el mismo conjunto de nodos.

46 1.3. Esquemas de multirresolución para medias en celda

Algoritmo 1.3 *ENO-MC-I*. Elección jerárquica del *stencil* para medias en celda

Entrada: $\{\bar{f}_i\}_{i=1}^J$, los datos iniciales; $r + 1$, tamaño del *stencil*

Salida: $\{s_i\}_{i=1}^{J-r+1}$

```
1: para  $i = 1, \dots, J - r + 1$  hacer
2:    $s_0 = i$ 
3:   para  $l = 0, \dots, r - 2$  hacer
4:     si  $|\bar{f}[x_{s_l-1}, \dots, x_{s_l+l}]| < |\bar{f}[x_{s_l}, \dots, x_{s_l+l+1}]|$  entonces
5:        $s_{l+1} = s_l - 1$ 
6:     si no
7:        $s_{l+1} = s_l$ 
8:     fin si
9:   fin para
10:   $s_i = s_{r-1}$ 
11: fin para
```

Algoritmo 1.4 *ENO-MC-II*. Elección no jerárquica del *stencil* para medias en celda

Entrada: $\{\bar{f}_i\}_{i=1}^J$, los datos iniciales; $r + 1$, tamaño del *stencil*

Salida: $\{s_i\}_{i=1}^{J-r+1}$

```
para  $i = 1, \dots, J - r + 1$  hacer
   $|\bar{f}[x_{s_i}, \dots, x_{s_i+r-1}]| = \min \{|\bar{f}[x_l, \dots, x_{l+r-1}]|, i - r + 1 \leq l \leq i\}$ 
fin para
```

1.3.2

Filtros para esquemas en medias en celda

Al indicar orden r nos referimos a que utilizamos $r + 1$ puntos para los *stencils* de F (polinomios de grado r) y por tanto r puntos para los *stencils* de $\bar{f}$ (grado $r - 1$).

Caso lineal

Los esquemas (1.46) y (1.47) al sustituir la interpolación son (posteriormente lo comprobaremos):

Codificación:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Para } k = L, \dots, 1 \\ \bar{f}_i^{k-1} = \frac{1}{2}(\bar{f}_{2i-1}^k + \bar{f}_{2i}^k), & i = 1, \dots, J_{k-1}, \\ d_i^k = \bar{f}_{2i-1}^k - (\bar{f}_i^{k-1} + \sum_{l=1}^{s-1} (\gamma_{s-1, s-1}^r)_l (\bar{f}_{i+l}^{k-1} - \bar{f}_{i-l}^{k-1})), & i = 1, \dots, J_{k-1}. \end{array} \right.$$

Decodificación:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Para } k = 1, \dots, L \\ \bar{f}_{2i-1}^k = d_i^k + (\bar{f}_i^{k-1} + \sum_{l=1}^{s-1} (\gamma_{s-1, s-1}^r)_l (\bar{f}_{i+l}^{k-1} - \bar{f}_{i-l}^{k-1})), & i = 1, \dots, J_{k-1}, \\ \bar{f}_{2i}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i-1}^k, & i = 1, \dots, J_{k-1}. \end{array} \right.$$

donde $r = 2s - 1$, y

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 3 \implies (\gamma_{1,1}^3)_1 = -\frac{1}{8}. \\ r = 5 \implies (\gamma_{2,2}^5)_1 = -\frac{22}{128}, (\beta_{2,2}^5)_2 = \frac{3}{128}. \end{array} \right.$$

Caso ENO

Fijado k , buscamos un polinomio de grado r , $q(x) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1}$, cuyas medias aproximen a las medias en celda $\{\bar{f}_i^{k-1}\}_i$. O dicho de otro modo, $q(x)$ debe interpolar a la función $F^{k-1}(x)$.

Al considerar las medias, a_1 será indeterminado y quedarán por calcular r coeficientes. Sin pérdida de generalidad y para facilitar la exposición, trabajaremos sobre nodos enteros:

$$\frac{q(x_{i+j}^{k-1}) - q(x_{i+j-1}^{k-1})}{h_{k-1}} = \frac{p(j+1) - p(j)}{1}, \text{ para } j = -nl, -nl+1, \dots, nr.$$

Imponiendo nl condiciones a la izquierda de $\bar{f}_i^{k-1}$ y nr a la derecha ($r = nl + nr + 1$), las ecuaciones serán:

$$p(j+1) - p(j) = \sum_{l=2}^{r+1} a_l ((j+1)^{l-1} - j^{l-1}) = \bar{f}_{i+j}^{k-1}, \quad (1.53)$$

para $j = -nl, -nl+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, nr$.

48 1.3. Esquemas de multirresolución para medias en celda

En forma matricial el sistema será $A_{nl,nr}^{\overline{IC}} \hat{a} = \hat{f}$, donde:

$$A_{nl,nr}^{\overline{IC}} = \begin{bmatrix} (-nl+1)^1 - (-nl)^1 & \cdots & (-nl+1)^r - (-nl)^r \\ (-nl+2)^1 - (nl+1)^1 & \cdots & (-nl+2)^r - (-nl+1)^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & -(-1)^r \\ 1 & \cdots & 1^r \\ 1 & \cdots & 2^r - 1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (nr+1)^1 - (nr)^1 & \cdots & (nr+1)^r - (nr)^r \end{bmatrix}, \quad (1.54)$$

$$\hat{a} = [a_2, \dots, a_{r+2}]^T \text{ y } \hat{f} = [\bar{f}_{i-nl}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i+nr}^{k-1}]^T.$$

Para obtener los coeficientes $\{a_2, \dots, a_{r+2}\}$ del polinomio $p(x)$ resolvemos el sistema:

$$A_{nl,nr}^{\overline{IC}} \hat{a} = \hat{f} \Rightarrow \hat{a} = \left(A_{nl,nr}^{\overline{IC}} \right)^{-1} \hat{f}. \quad (1.55)$$

NOTA 1.16. El coeficiente a_1 queda sin ser calculado, aunque esto no supone ningún problema, ya que como finalmente buscamos las medias del polinomio $q(x)$ el coeficiente a_1 se elimina.

Al polinomio $p(x)$ que hemos calculado lo denotamos por

$$p_{s_i}^{\overline{IP}}(x; F^{k-1}, r) \equiv p_{s_i}^{\overline{IC}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1).$$

Si los nodos no son sobre enteros sino sobre $\{x_i^k\}$ lo indicaremos con la notación: $q_{s_i}^{\overline{IP}}(x; F^{k-1}, r)$

Una vez hallados $\{a_l\}_{l=2}^{r+1}$ el valor que aproxima a $\bar{f}_{2i-1}^k$ será:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{2i-1}^k &= \frac{p_{s_i}^{\overline{IP}}(\frac{1}{2}; F^{k-1}, r) - p_{s_i}^{\overline{IP}}(0; F^{k-1}, r)}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left(\sum_{l=1}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} - a_1 \right) = \sum_{l=2}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-2} \\ &= \left(1, \frac{1}{2^1}, \dots, \frac{1}{2^{r-1}} \right)^T \hat{a} = \left(1, \frac{1}{2^1}, \dots, \frac{1}{2^{r-1}} \right)^T \left(A_{nl,nr}^{\overline{IC}} \right)^{-1} \hat{f} \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=-nl}^{nr} (\gamma_{nl,nr}^r)_l \bar{f}_{i+l} \equiv \overline{\mathcal{IC}}_{nl,nr}^{r-1}(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}). \quad (1.56)$$

siendo⁹ (ver Tabla 1.4):

$$(\gamma_{nl,nr}^r)_l = \left(1, \frac{1}{2^1}, \dots, \frac{1}{2^{r-1}}\right)^T \left(A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IC}}}\right)^{-1} e_l, \quad l = -nl, \dots, nr,$$

con $e_j = (\delta_{j,k})_{k=-nl}^{nr}$ y $A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IC}}}$ la definida en (1.54).

l	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$(\gamma_{2,0}^3)_l$			$-\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$				
$(\gamma_{1,1}^3)_l$				$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{8}$	$-\frac{1}{8}$			
$(\gamma_{0,2}^3)_l$					$\frac{11}{8}$	$-\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$		
$(\gamma_{4,0}^5)_l$	$-\frac{7}{128}$	$\frac{38}{128}$	$-\frac{88}{128}$	$\frac{122}{128}$	$\frac{63}{128}$				
$(\gamma_{3,1}^5)_l$		$\frac{3}{128}$	$-\frac{18}{128}$	$\frac{52}{128}$	$\frac{98}{128}$	$-\frac{7}{128}$			
$(\gamma_{2,2}^5)_l$			$-\frac{3}{128}$	$\frac{22}{128}$	$\frac{128}{128}$	$-\frac{22}{128}$	$\frac{3}{128}$		
$(\gamma_{1,3}^5)_l$				$\frac{7}{128}$	$\frac{158}{128}$	$-\frac{52}{128}$	$\frac{18}{128}$	$-\frac{3}{128}$	
$(\gamma_{0,4}^5)_l$					$\frac{193}{128}$	$-\frac{122}{128}$	$\frac{88}{128}$	$-\frac{38}{128}$	$\frac{7}{128}$
$\bar{f}_{i+l}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-4}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-3}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-2}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-1}^{k-1}$	$\bar{f}_i^{k-1}$	$\bar{f}_{i+1}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+2}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+3}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+4}^{k-1}$

Tabla 1.4: Aproximaciones a $\bar{f}_{2i-1}^k$, de orden r , $\overline{\mathcal{IC}}_{nl,nr}^{r-1}(x, \bar{f}^{k-1}) = \sum_{l=-nl}^{nr-1} (\gamma_{nl,nr}^r)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1}$, utilizando interpolación por medias en celda con $nl + nr + 1 = r$ celdas, nl a la izquierda y nr a la derecha de $\bar{f}_i^{k-1}$.

1.3.3

WENO para medias en celda

El esquema WENO para medias en celda es similar al que expusimos para valores puntuales en la sección 1.2.4. En esencia, se basa en la utilización de una combinación convexa de todos los

⁹En <http://www.uv.es/anims/noguera/> se pueden descargar una GUI y programas que calculan dichos filtros según los datos introducidos por el usuario.

50 1.3. Esquemas de multirresolución para medias en celda

posibles *stencils* que contienen cada intervalo, asignándoles a cada uno de ellos un peso no lineal dependiente de la suavidad de la función. Con esto se consigue aumentar el orden de aproximación debido a la utilización de la información disponible en todos los *stencils* que contienen cada intervalo.

Veamos cómo se materializan estas ideas. Denotemos por $\bar{\mathcal{S}}_{i+k}$, $k = 0, \dots, r-1$, los r *stencils* conteniendo al intervalo $I_i = [x_{j-1}, x_j]$,

$$\bar{\mathcal{S}}_{i+k} = \{I_{i+k-r+1}, \dots, I_{i+k}\}, \quad k = 0, \dots, r-1, \quad (1.57)$$

y sea $\bar{\mathcal{I}}_{i+k-s+1}^{r-1}(x)$ el polinomio interpolador por medias en celda de orden $r = 2s - 1$ construido a partir del *stencil* $\bar{\mathcal{S}}_{i+k}$. Definimos el polinomio interpolador *WENO* en el intervalo I_i como

$$\bar{p}_i^{WENO-\bar{\mathcal{I}}}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \omega_k^i \bar{\mathcal{I}}_{i+k-s+1}^{r-1}(x), \quad (1.58)$$

donde $\omega_k^i \geq 0$, $k = 0, \dots, r-1$, y $\sum_{k=0}^{r-1} \omega_k^i = 1$.

Para cada intervalo, el interpolante *WENO* toma información de $2r - 1$ celdas, pudiéndose alcanzar un orden de exactitud de hasta $2r - 1$. Si denotamos por $\bar{\mathcal{I}}_{i+k-s+1}^{r-1}$ las aproximaciones obtenidas por interpolación para medias en celda con los *stencils* $\bar{\mathcal{S}}_{i+k}$ y denotamos por $\bar{\mathcal{I}}_{i-r+1, r-1}^{2r-2}$ la aproximación obtenida empleando el *stencil* $\mathcal{T} = \cup_{r-1}^{k=0} \bar{\mathcal{S}}_{i+k-r+1}$, es fácil demostrar que podemos expresar la aproximación de orden $2r - 1$ como una combinación lineal de las r aproximaciones de orden r :

$$\bar{\mathcal{I}}_{i-r+1, r-1}^{2r-2}(x) = \sum_{k=0}^{r-1} C_k^r \bar{\mathcal{I}}_{i+k-s+1}^{r-1}(x), \quad (1.59)$$

con $C_k^r \geq 0$, $\forall k$ y $\sum_{k=0}^{r-1} C_k^r = 1$. Las constantes C_k^r se denominan *pesos óptimos*. La Tabla 1.5 nos muestra los pesos óptimos para $r = 2, 3$. En [8, 14, 21] podemos encontrar los detalles sobre cómo obtener dichos pesos.

Las siguientes proposiciones, cuyas demostraciones podemos encontrar en [14, 21], nos ayudan a definir los pesos de la reconstrucción *WENO*:

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$r = 2$	$1/2$	$1/2$	-
$r = 3$	$3/16$	$10/16$	$3/16$

Tabla 1.5: Pesos óptimos para $r = 2, 3$ en WENO para medias en celda.

PROPOSICIÓN 1.5. Si los pesos ω_k^i cumplen la relación:

$$\omega_k^i = C_k^i + O(h^m), \quad k = 0, \dots, r-1, \quad (1.60)$$

con $1 \leq m \leq r-1$, entonces

$$\sum_{l=0}^{r-1} \omega_l^i \overline{\mathcal{IC}}_{i+l-s+1}^{r-1} = \bar{f}_{2i-1} + O(h^{\min(r+m, 2r-1)}).$$

PROPOSICIÓN 1.6. Si el indicador de suavidad satisface la relación

$$\overline{\mathcal{IS}}_{i+l} = D(1 + O(h^m)), \quad l = 0, \dots, r-1, \quad (1.61)$$

con D una constante distinta de cero e independiente de l , aunque puede depender de h , entonces los pesos ω_j^i satisfacen la relación (1.60).

Con el objetivo de satisfacer las condiciones anteriores, se definen los pesos como sigue:

$$\omega_k^i = \frac{\alpha_k^i}{\sum_{s=0}^{r-1} \alpha_s^i}, \quad k = 0, \dots, r-1, \quad \text{con } \alpha_k^i = \frac{C_k^r}{(\epsilon + \overline{\mathcal{IS}}_{i+k})^2}. \quad (1.62)$$

Al igual que en valores puntuales, el valor ϵ introducido en (1.62) es una constante positiva para evitar que el denominador se anule, y $\overline{\mathcal{IS}}_{i+k}$ es un indicador de suavidad de $\bar{f}(x)$ en el stencil $\bar{\mathcal{S}}_{i+k}$.

En [14, 21] se demuestra que los pesos así definidos verifican la relación (1.60). Para que se cumpla la condición ENO, es suficiente que los indicadores de suavidad verifiquen que $\overline{\mathcal{IS}}_{i+k} = O(h^2)$ en los

52 1.3. Esquemas de multirresolución para medias en celda

stencils en los que la función es suave y $\overline{\mathcal{IS}}_{i+k} = O(1)$ en los *stencils* en los que la función presenta discontinuidades.

Liu et al. ([52]) proponen el siguiente *indicador de suavidad* basado en las diferencias no divididas de $f(x)$ en los nodos de interpolación,

$$\overline{\mathcal{IS}}_{i+k} = \sum_{l=1}^{r-1} \left(\sum_{m=1}^l (\Delta^{r-l} [\bar{f}_{i+k+m-r}])^2 \right) / l, \quad (1.63)$$

donde $\Delta^s[f_l]$ no es más que la diferencia dividida de $\bar{f}$ en los intervalos $\{I_l, \dots, I_{l+s}\}$. Se puede demostrar que este indicador de suavidad no siempre es óptimo, pudiéndose asegurar únicamente un orden de exactitud $r + 1$.

Jiang y Shu, definen en [52] un nuevo indicador de suavidad,

$$\overline{\mathcal{IS}}_{i+k} = \sum_{l=1}^{r-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} h^{2l+1} (\bar{p}_{i+k}^{(l)}(x))^2 dx, \quad (1.64)$$

donde $\bar{p}_{i+k}^{(l)}$ es la derivada l -ésima del polinomio interpolador para medias en celda $\bar{p}_{j+k}(x)$ construido a partir del *stencil* $\bar{S}_{i+k}$.

En [14, 21] se demuestra que el indicador de Jiang y Shu cumplen la propiedad *ENO* y hace posible alcanzar órdenes óptimos tanto para el caso $r = 2$ como $r = 3$.

1.3.4

PPH para medias en celda

En este apartado adaptaremos la técnica *PPH* vista para valores puntuales al caso de medias en celda. Tenemos que

$$\overline{\mathcal{IC}}_{1,1}^2(x_{2i-1}^k, f^{k-1}) = \bar{f}_i^{k-1} - \frac{1}{8}(\bar{f}_{i+1}^{k-1} - \bar{f}_{i-1}^{k-1}) = \bar{f}_i^{k-1} - \frac{1}{4} \frac{d^1 \bar{f}_{i-1}^{k-1} + d^1 \bar{f}_i^{k-1}}{2},$$

con $d^1 \bar{f}_i^{k-1} = \bar{f}_{i+1}^{k-1} - \bar{f}_i^{k-1}$. Sólo resta sustituir la media aritmética:

$$\left(\overline{\mathcal{IC}}_{1,1}^2 \right)^{PPH} (x_{2i-1}^k, f^{k-1}) = \bar{f}_i^{k-1} - \frac{1}{4} H(d^1 \bar{f}_i^{k-1}, d^1 \bar{f}_{i-1}^{k-1}), \quad (1.65)$$

donde $H(x, y)$ es la media armónica definida en (1.30).

1.3.5

ENO-SR para medias en celda

Los pasos para aplicar *ENO-SR* para medias en celda son (ver Figura 1.11):

1.- En el nivel $k - 1$ calcular los *stencils ENO* mediante el Algoritmo 1.3 o 1.4, (*ENO-MC-I* o *ENO-MC-II*).

2.- Detectar las posibles *celdas singulares*: si $\bar{S}_{i-1}^{k-1} \cap \bar{S}_{i+1}^{k-1} = \emptyset$, etiquetar la celda como *sospechosa*.

3.- Para cada celda no-singular calculamos $(P_{k-1}^k f^{k-1})_{2i-1}$ mediante la relación (1.45).

4.- Para cada celda sospechosa definir la función

$$G_i^{\overline{IC}}(x) := q_{s_{i+1}}^{\overline{IP}}(x; F^{k-1}, r) - q_{s_{i-1}}^{\overline{IP}}(x; F^{k-1}, r), \quad (1.66)$$

donde $q_{s_{i+1}}^{\overline{IP}}(x; F^{k-1}, r)$ es el polinomio de grado r formado a partir del *stencil* $\bar{S}_{i+1}^{ENO}$ (en este caso $\{x_i^{k-1}, \dots, x_{i+r}^{k-1}\}$) que interpola a F^{k-1} y $q_{s_{i-1}}^{\overline{IP}}(x; F^{k-1}, r)$ es el construido a partir del *stencil* $\bar{S}_{i-1}^{ENO}$ (en este caso $\{x_{i-r-1}^{k-1}, \dots, x_{i-1}^{k-1}\}$) que interpola a F^{k-1} .

Si $G_i^{\overline{IC}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{IC}}(x_i^{k-1}) < 0 \Rightarrow$ existe una raíz θ_i^{k-1} de $G_i^{\overline{IC}}(x)$, y etiquetamos la celda como *singular*.

5.- Dada una celda singular $[x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$,

■ Si $G_i^{\overline{IC}}(x_{2i-1}^k) \cdot G_i^{\overline{IC}}(x_i^{k-1}) < 0 \rightarrow \theta_i^{k-1} > x_{2i-1}^k$ y calculamos

$$\bar{f}_{2i-1}^k = \frac{1}{h_k} (q_{s_{i-1}}^{\overline{IP}}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}, r) - \overbrace{q_{s_{i-1}}^{\overline{IP}}(x_{2i-2}^k; F^{k-1}, r)}^{F_{i-1}^{k-1}}). \quad (1.67)$$

■ En otro caso, $\theta_i^{k-1} < x_{2i-1}^k$ y por tanto:

$$\bar{f}_{2i-1}^k = \frac{1}{h_k} (q_{s_{i+1}}^{\overline{IP}}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}, r) - \overbrace{q_{s_{i+1}}^{\overline{IP}}(x_{2i-2}^k; F^{k-1}, r)}^{F_{i-1}^{k-1}}).$$

54 1.3. Esquemas de multirresolución para medias en celda

Para hallar los valores que faltan tenemos dos opciones: o bien extendemos adecuadamente tomando datos de la izquierda (o derecha) de la discontinuidad, o bien hacemos uso de la relación $\bar{f}_{2i}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i-1}^k$. Esta última opción es válida incluso para los datos obtenidos mediante SR. Por ejemplo, si x_{2i-1}^k se halla a la izquierda del salto, obtenemos:

$$(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1} = \frac{1}{h_k} (q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}, r) - \overbrace{q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i-2}^k; F^{k-1}, r)}^{F_{i-1}^{k-1}}),$$

$$(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i} = \frac{1}{h_k} (\overbrace{q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i}^k; F^{k-1}, r)}^{F_i^{k-1}} - q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{TP}}}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}, r)).$$

Se cumple que

$$\frac{\bar{f}_{2i-1}^k + \bar{f}_{2i}^k}{2} = \frac{(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1} + (P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i}}{2h_k} = \frac{F_i^{k-1} - F_{i-1}^{k-1}}{h_{k-1}} = \bar{f}_i^{k-1}.$$

Este razonamiento puede aplicarse de manera análoga si x_{2i-1}^k se halla a la derecha de la discontinuidad, con lo cual en las todas las medias, obtenidas incluso por SR, se cumple la relación $\bar{f}_{2i}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i-1}^k$.

En ambos casos $(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1}$ se calcula utilizando información que no cruza la discontinuidad.

Filtros SR para medias en celda

Para calcular los filtros desarrollaremos en primer lugar las expresiones que se han expuesto al describir los pasos de ENO-SR. Para $G_i^{\overline{\mathcal{TC}}}(x)$ utilizaremos el siguiente resultado:

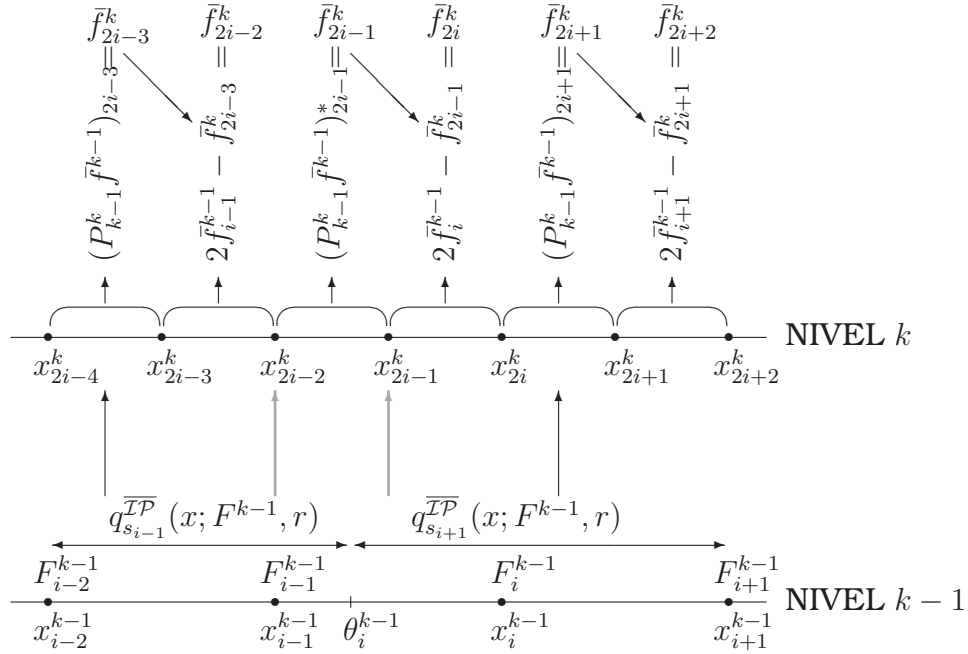


Figura 1.11: Paso del nivel $k-1$ al k mediante multirresolución a partir de discretización por medias en celda utilizando ENO-SR. $(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2j-1} = \frac{1}{h_k} \left(q_{s_j}^{\overline{IP}}(x_{2j-1}^k; F^{k-1}, r) - F_{j-1}^{k-1} \right)$ según (1.45), excepto $(P_{k-1}^k f^{k-1})_{2i-1}^*$ que en este caso es $\frac{1}{h_k} \left(q_{s_{i+1}}^{\overline{IP}}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}, r) - F_{i-1}^{k-1} \right)$ según (1.67).

PROPOSICIÓN 1.7. Sea $\bar{A}_{nl,nr}^{\overline{IC}}$ la matriz asociada al sistema que resuelve el polinomio interpolador para medias en celda, con los nodos expresados sobre enteros (definida en 1.54) y sea $(F_{i-1}^{k-1}, F_i^{k-1})$ la localización de la discontinuidad. La función $G_i^{\overline{IC}}$, para grado r , puede expresarse como:

$$G_i^{\overline{IC}}(x) = \bar{f}_i^{k-1} + [x-1, \dots, x^r-1] \left(\bar{A}_{-1,r}^{\overline{IC}} \right)^{-1} [\bar{f}_{i+1}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i+r}^{k-1}]^T \\ - [x, \dots, x^r] \left(\bar{A}_{r,-1}^{\overline{IC}} \right)^{-1} [\bar{f}_{i-r}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i-1}^{k-1}]^T.$$

56 1.3. Esquemas de multirresolución para medias en celda

Demostración: Trabajamos con las notaciones expuestas en 1.3.2 para el caso *ENO*. Sean

$$p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; F^{k-1}, r) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1} \quad \text{y} \quad p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; F^{k-1}, r) = \sum_{l=1}^{r+1} b_l x^{l-1}.$$

Por definición del polinomio interpolador para medias en celda se cumple que $p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IC}}}(1; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IC}}}(0; F^{k-1}, r) = \bar{f}_i^{k-1}$. Por tanto:

$$\sum_{l=1}^{r+1} a_l - b_1 = \bar{f}_i^{k-1} \implies a_1 - b_1 = \bar{f}_i^{k-1} - \sum_{l=2}^{r+1} a_l. \quad (1.68)$$

Con esto:

$$\begin{aligned} G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(x) &= q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IP}}}(x; F^{k-1}, r) - q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IC}}}(x; F^{k-1}, r) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1} - \sum_{l=1}^{r+1} b_l x^{l-1} \\ &= a_1 - b_1 + \sum_{l=2}^{r+2} a_l x^{l-1} - \sum_{l=2}^{r+2} b_l x^{l-1} \\ &= \bar{f}_i^{k-1} - \sum_{l=2}^{r+1} a_l + \sum_{l=2}^{r+1} a_l x^{l-1} - \sum_{l=2}^{r+1} b_l x^{l-1} \\ &= \bar{f}_i^{k-1} + \sum_{l=2}^{r+1} a_l (x^{l-1} - 1) - \sum_{l=2}^{r+1} b_l x^{l-1} \\ &= \bar{f}_i^{k-1} + [x - 1, x^2 - 1, \dots, x^r - 1] \left(A_{-1, r}^{\overline{\mathcal{IC}}} \right)^{-1} [\bar{f}_{i+1}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i+r}^{k-1}]^T \\ &\quad - [x, x^2, \dots, x^r] \left(A_{r, -1}^{\overline{\mathcal{IC}}} \right)^{-1} [\bar{f}_{i-r}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i-1}^{k-1}]^T. \end{aligned}$$

□

Los valores que necesitamos para decidir si la celda es singular y para conocer la localización de x_{2i-1}^k respecto a la discontinuidad son $G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(x_{i-1}^{k-1})$, $G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(x_{2i-1}^k)$, $G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(x_i^{k-1})$. Como trabajamos sobre nodos enteros debemos calcular:

$$\begin{aligned} G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(x_{i-1}^{k-1}) &\rightarrow h_{k-1} G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(0), \\ G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(x_{2i-1}^k) &\rightarrow h_{k-1} G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(1/2), \end{aligned}$$

$$G_i^{\overline{IC}}(x_i^{k-1}) \rightarrow h_{k-1} G_i^{\overline{IC}}(1).$$

Utilizando la Proposición 1.7:

■ $r = 3$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} G_i^{\overline{IC}}(x_{i-1}^k) & = & h_{k-1} (\bar{f}_i^{k-1} - 3\bar{f}_{i+1}^{k-1} + 3\bar{f}_{i+2}^{k-1} - \bar{f}_{i+3}^{k-1}), \\ G_i^{\overline{IC}}(x_{2i-1}^k) & = & h_{k-1} \left(-\frac{5}{16}\bar{f}_{i-3}^{k-1} + \bar{f}_{i-2}^{k-1} - \frac{19}{16}\bar{f}_{i-1}^{k-1} \right. \\ & & \left. + \bar{f}_i^{k-1} - \frac{19}{16}\bar{f}_{i+1}^{k-1} + \bar{f}_{i+2}^{k-1} - \frac{5}{16}\bar{f}_{i+3}^{k-1} \right), \\ G_i^{\overline{IC}}(x_i^k) & = & h_{k-1} (-\bar{f}_{i-3}^{k-1} + 3\bar{f}_{i-2}^{k-1} - 3\bar{f}_{i-1}^{k-1} + \bar{f}_i^{k-1}). \end{array} \right.$$

■ $r = 5$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} G_i^{\overline{IC}}(x_{i-1}^k) & = & h_{k-1} (\bar{f}_i^{k-1} - 5\bar{f}_{i+1}^{k-1} + 10\bar{f}_{i+2}^{k-1} - 10\bar{f}_{i+3}^{k-1} \\ & & + 5\bar{f}_{i+4}^{k-1} - \bar{f}_{i+5}^{k-1}), \\ G_i^{\overline{IC}}(x_{2i-1}^k) & = & h_{k-1} \left(-\frac{63}{256}\bar{f}_{i-5}^{k-1} + \frac{161}{128}\bar{f}_{i-4}^{k-1} - \frac{167}{64}\bar{f}_{i-3}^{k-1} \right. \\ & & + \frac{359}{128}\bar{f}_{i-2}^{k-1} - \frac{437}{256}\bar{f}_{i-1}^{k-1} + \bar{f}_i^{k-1} - \frac{437}{256}\bar{f}_{i+1}^{k-1} \\ & & + \frac{359}{128}\bar{f}_{i+2}^{k-1} - \frac{167}{64}\bar{f}_{i+3}^{k-1} + \frac{161}{128}\bar{f}_{i+4}^{k-1} - \frac{63}{256}\bar{f}_{i+5}^{k-1} \Big), \\ G_i^{\overline{IC}}(x_i^k) & = & h_{k-1} (-\bar{f}_{i-5}^{k-1} + 5\bar{f}_{i-4}^{k-1} - 10\bar{f}_{i-3}^{k-1} \\ & & + 10\bar{f}_{i-2}^{k-1} - 5\bar{f}_{i-1}^{k-1} + \bar{f}_i^{k-1}). \end{array} \right.$$

NOTA 1.17. En las expresiones sobre la función G para medias en celda, el término h_k puede ser eliminado en la práctica, ya que de éstas sólo nos interesa su signo. Evitamos así trabajar con los nodos iniciales.

Dada una celda singular $[x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$, si $G_i^{\overline{IC}}(x_{2i-1}^k) \cdot G_i^{\overline{IC}}(x_i^{k-1}) < 0 \rightarrow \theta_i^{k-1} > x_{2i-1}^k$

$$(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1} = \frac{p_{s_{i-1}}^{\overline{IP}}(\frac{1}{2}; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{IP}}(0; F^{k-1}, r)}{1/2} = 2 \sum_{l=2}^{r+1} b_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}$$

58 1.3. Esquemas de multirresolución para medias en celda

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^r} \right) \left(A_{r,-1}^{\overline{\mathcal{IC}}} \right)^{-1} [\bar{f}_{i-r}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i-1}^{k-1}]^T \\
&= \sum_{l=-r}^{-1} (\gamma_{r,-1}^r)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1}.
\end{aligned} \tag{1.69}$$

donde $\gamma_{r,-1}^r$ pueden verse en la Tabla 1.6 para $r = 3, 5$.

l	-5	-4	-3	-2	-1
$(\gamma_{3,-1}^3)$			$\frac{5}{8}$	-2	$\frac{19}{8}$
$(\gamma_{5,-1}^5)$	$\frac{63}{128}$	$-\frac{322}{128}$	$\frac{668}{128}$	$-\frac{718}{128}$	$\frac{437}{128}$
$\bar{f}_{i+l}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-5}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-4}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-3}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-2}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-1}^{k-1}$

Tabla 1.6: Aproximaciones a $\bar{f}_{2i-1}^{k-1}$ de orden $r = nr + nl + 1$, $\overline{\mathcal{IC}}_{r,-1}^{r-1}(x, \bar{f}^{k-1}) = \sum_{l=-r}^{-1} (\gamma_{r,-1}^r)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1}$, utilizando extrapolación con r puntos a la izquierda de $\bar{f}_i^{k-1}$.

En otro caso, $\theta_i^{k-1} < x_{2i-1}^k$, y de manera análoga a la demostración de la Proposición 1.7:

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{2i-1}^k &= \frac{p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IP}}}(1/2; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IP}}}(0; F^{k-1}, r)}{1/2} \\
&= \frac{\sum_{l=1}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} - b_1}{1/2} = 2(a_1 - b_1 + \sum_{l=2}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}) \\
&= 2(\bar{f}_i^{k-1} + \sum_{l=2}^{r+1} a_l \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} - 1\right)) \\
&= 2\bar{f}_i^{k-1} + 2 \left[\frac{1}{2} - 1, \dots, \frac{1}{2^r} - 1 \right] (A_{-1,r}^{\overline{\mathcal{IC}}})^{-1} [\bar{f}_{i+1}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i+r}^{k-1}]^T.
\end{aligned}$$

Dado que sabemos que se cumple la relación $\bar{f}_{2i-1}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i}^k$, también podemos calcular primero $\bar{f}_{2i}^k$ y posteriormente despejar. De este modo podemos aprovechar el cálculo de filtros de la Tabla 1.6 :

$$(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1} = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \sum_{l=1}^r (\gamma_{-1,r}^r)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1},$$

donde $\gamma_{-1,r}$ son los simétricos de $\gamma_{r,-1}$:

$$(\gamma_{-1,r})_{-l} = (\gamma_{r,-1})_l, \quad l = -r, \dots, -1.$$

Para $r = 3, 5$, los filtros resultantes son:

■ $r = 3$

$$(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1} = 2\bar{f}_i^{k-1} - \frac{19}{8}\bar{f}_{i+1}^{k-1} + 2\bar{f}_{i+2}^{k-1} - \frac{5}{8}\bar{f}_{i+3}^{k-1}.$$

■ $r = 5$

$$\begin{aligned} (P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1} = & 2\bar{f}_i^{k-1} - \frac{437}{128}\bar{f}_{i+1}^{k-1} + \frac{359}{64}\bar{f}_{i+2}^{k-1} \\ & - \frac{167}{32}\bar{f}_{i+3}^{k-1} + \frac{161}{64}\bar{f}_{i+4}^{k-1} - \frac{63}{128}\bar{f}_{i+5}^{k-1}. \end{aligned}$$

1.3.6

Ejemplos

Realizamos el mismo experimento que en el apartado 1.2.7 pero en este caso los datos iniciales corresponden a medias en celda. En concreto, discretizamos la siguiente función en los nodos centrales de n celdas equiespaciadas :

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -\frac{4x-3}{5} \sin(\frac{3}{2}\pi(\frac{4x-3}{5})^2) & \text{si } 0 \leq x < \frac{3\pi}{29}, \\ |\sin 2\pi(\frac{4x-3}{5}) + \frac{\pi}{1000}| & \text{si } \frac{3\pi}{29} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (1.70)$$

Utilizamos los algoritmos (1.46) y (1.47) con los coeficientes de escala anulados. Bajamos tres niveles por medias en celda ($\bar{f}_i^{k-1} = (\bar{f}_{2i}^k + \bar{f}_{2i-1}^k)/2$) y posteriormente intentamos recuperar los datos del nivel de partida mediante distintas reconstrucciones. En la Figura 1.12 (a) empleamos interpolación centrada con polinomios de grado 3 en $F(x)$ (grado 2 para $\bar{f}(x)$) excepto en las fronteras donde sí adaptamos los *stencils*. Representamos la función original, la aproximación, la diferencia entre ambas y los puntos del nivel grosero. En la Figura (c) representamos los coeficientes de escala mayores que 10^{-3} para cada nivel. Observamos que hay tres intervalos afectados para la discontinuidad de salto. Por intervalos afectados entendemos tres d_i^k afectados. Así cada d_i^k de magnitud

elevada, se traduce en 2 puntos, $\bar{f}_{2i-1}^k$ y $\bar{f}_{2i}^k$ donde la aproximación empeora. Esto concuerda con (1.51), ya que en este caso la interpolación para F es de grado $r = 3$ con lo que $s = 2$ y por tanto si la discontinuidad se halla en (x_{2i-1}^k, x_{2i}^k) obtenemos tres coeficientes de escala afectados: $d_l^1(\bar{f}) = O([\bar{f}^{(p)}])h_0^p$, para $i - 1 \leq l \leq i + 1$. La magnitud de los coeficientes afectados para el salto es mayor que para la esquina, ya que en este caso $p = 0$, mientras que para la esquina $p = 1$. De hecho en la Figura 1.12 (b) sólo aparecen dos coeficientes de escala afectados en la discontinuidad de salto del primer nivel, ya que el tercero no es mayor que 10^{-3} .

Al introducir las técnicas *ENO* y *WENO*, Figura 1.12 (c) y (e) respectivamente, los intervalos de escasa aproximación se reducen a uno, el que contiene la discontinuidad. Finalmente con la técnica *SR*, Figura 1.12 (d), se mejora la aproximación tanto en la esquina como en el salto.

1.4

Transformada *wavelet*

En los últimos años, la transformada *wavelet* ha sido estudiada ampliamente como una herramienta para la compresión¹⁰ y eliminación de ruido en imágenes digitales. La primera mención de lo que hoy conocemos como *wavelet*¹¹ fue en 1909 en la tesis de Alfred Haar [42] en la que propuso que cualquier función continua podía ser aproximada por un desarrollo de funciones ortonormales. En los ochenta se retomaron estas ideas por un equipo dirigido por A. Grossman que contaba con la colaboración de los investigadores J. Morlet, Y. Meyer, S. Mallat, G. Battle y P. Lemaire entre otros. Ellos establecieron el concepto de *wavelet* en su forma teórica actual, siendo Y. Meyer [59, 58] y S. Mallat [54, 55] los principales desarrolladores de los métodos de análisis basados en *wavelets*. En 1988 los trabajos realizados por I. Daubechies [31, 32] popularizaron estas ideas como herramientas para

¹⁰Por ejemplo *JPEG-2000* se basa en *wavelets*.

¹¹En algunos textos en español se utiliza el término *ondícula* como traducción de *wavelet*.

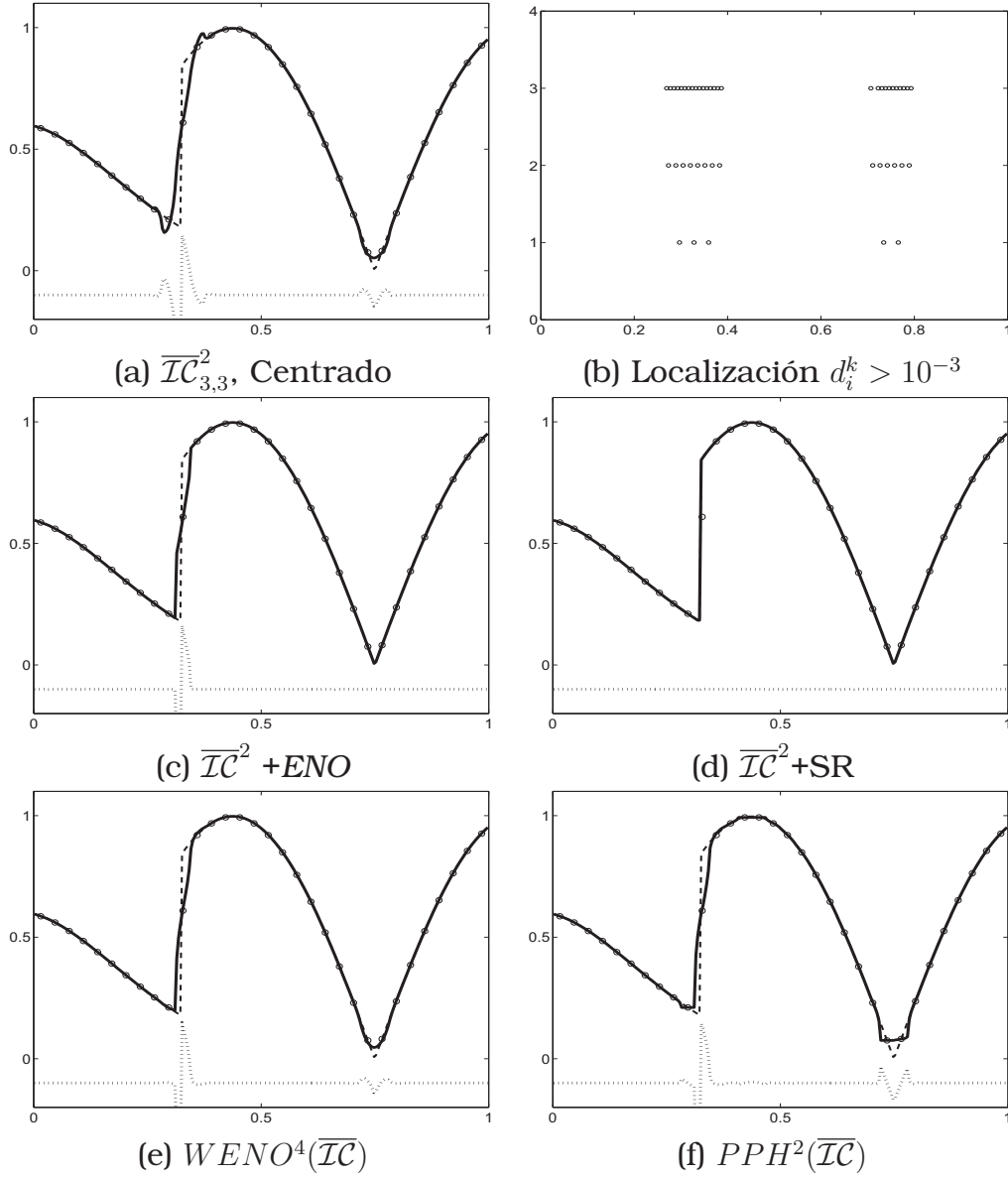


Figura 1.12: Aplicamos 3 niveles de decimación por medias en celda y 3 niveles de predicción a la función (1.70) discretizada con 256 nodos. En (b) 'o' representa, para cada nivel, la localización de los coeficientes $d_i^k > 10^{-3}$. En el resto, '- -' representa la función de partida, '-.' la reconstrucción, 'o' la función en el nivel más grosero y '..' la diferencia entre la discretización inicial y la reconstrucción (desplazada $-0,1$ en el eje OY).

el procesamiento de señales, compresión de datos y el análisis numérico. En [49] también podemos encontrar una buena introducción a dicho concepto.

En esta sección veremos un breve resumen de la transformada *wavelet*, con el objetivo principal de fijar la notación. Introduciremos la transformada tanto en forma continua como en forma discreta, ya que, aunque trabajaremos en forma discreta, la forma continua es preferible para demostraciones teóricas.

Aunque aquí no lo trataremos, se puede demostrar la conexión existente entre cierto tipo de reconstrucciones multiescala y la transformada *wavelet*. En concreto, las descomposiciones multiescala dadas por valores puntuales y por medias en celda pueden considerarse un caso particular de transformadas *wavelet*, [16, 44, 22, 48, 10, 17].

1.4.1

Transformada *wavelet* continua

La transformada *wavelet* equivale a una descomposición en subespacios del espacio funcional donde nos encontremos. Una función cualquiera se descompondrá de forma única como suma de funciones que serán la proyección de la función inicial en dichos subespacios. La idea es descomponer la función original en una señal sin atributos, quedándonos sólo con lo esencial, y otras que corresponderán a los detalles.

Para realizar esta descomposición se utilizan las funciones *wavelet*, que llevan aparejadas otras funciones llamadas *scaling*. Estos pares *wavelet-scaling* se pueden interpretar como una pareja de filtros, uno de paso alto (altas frecuencias) y el otro de paso bajo (bajas frecuencias). Mientras que los *wavelets* proporcionan los detalles de una señal en una determinada escala, el *scaling* muestra versiones suavizadas de la señal en la misma escala.

Llamamos $\phi(x)$ a la función *scaling* y $\psi(x)$ al correspondiente *wavelet*, con soporte finito $[0, l]$ y l un entero positivo.

La función $\phi(x)$ cumple la llamada ecuación de dilatación:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_0^l c_s \phi(2x - s), \quad (1.71)$$

y $\psi(x)$ satisface la ecuación *wavelet*:

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_0^l h_s \phi(2x - s), \quad (1.72)$$

donde c_s y h_s son constantes llamadas coeficientes del filtro de paso bajo y paso alto respectivamente.

Supondremos que $\psi(x)$ tiene p momentos nulos, es decir:

$$\int \psi(x) x^j dx = 0, \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, p-1. \quad (1.73)$$

Consideramos las siguientes notaciones:

$$\phi_{j,i} = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - i) \quad \text{y} \quad \psi_{j,i} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - i). \quad (1.74)$$

Tomamos $V_j, W_j \in L^2$ definidos como:

$$V_j = \langle \phi_{j,i}(x), i \in \mathbb{Z} \rangle \quad \text{y} \quad W_j = \langle \psi_{j,i}(x), i \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Se cumple que $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$, es decir, W_{j+1} es el complemento de V_{j+1} en V_j . Los subespacios $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ forman una multirresolución de L^2 , que permite realizar una descomposición ortonormal como sigue:

$$L^2 = V_J \oplus \sum_{j=J}^{\infty} W_j, \quad (1.75)$$

pudiéndose entonces descomponer una función proyectándola en cada subespacio V_j :

$$f_j(x) = \sum_i \alpha_{j,i} \phi_{j,i}(x), \quad \text{donde } \alpha_{j,i} = \int f(x) \phi_{j,i}(x) dx, \quad i \in \mathbb{Z},$$

que corresponden a los coeficientes *wavelet* de bajas frecuencias (también llamados coeficientes *scaling* o *tendencias*). Análogamente, proyectando $f(x)$ en W_j obtenemos:

$$w_j(x) = \sum_i \beta_{j,i} \psi_{j,i}(x), \quad \text{donde } \beta_{j,i} = \int f(x) \psi_{j,i}(x) dx, \quad i \in \mathbb{Z},$$

que son los coeficientes *wavelet* de altas frecuencias (llamados coeficientes *wavelet* o *fluctuaciones*). Así, podemos descomponer la función $f(x)$ de manera única como:

$$f(x) = f_j(x) + \sum_{k=j}^{\infty} w_k(x). \quad (1.76)$$

La proyección $f_j(x)$ es la aproximación lineal de la función $f(x)$ en el subespacio V_j y se puede interpretar como la señal original sin detalles. Las funciones w_k contendrán los detalles de la función original.

NOTA 1.18. En la práctica se trabaja con unos límites en las escalas: una más grosera, donde 2^{-j} coincide o es mayor que la longitud del intervalo donde estamos analizando la función y una más fina, a partir de la cual sobrepasamos la precisión de los datos analizados. Así:

$$V_j = W_{j+1} \oplus W_{j+2} \oplus \cdots \oplus W_{j+l} \oplus V_{j+l},$$

$$f(t) = w_{j+1}(t) \oplus w_{j+2}(t) \oplus \cdots \oplus w_{j+l}(t) \oplus f_{j+l}(t),$$

donde $w_i(t) \in W_i$, $f_i \in V_i$, j es la escala más fina y $j + l$ la más grosera.

Para el cálculo de los coeficientes de altas y bajas frecuencias en la transformada directa, se utilizan las siguientes fórmulas, que pueden ser deducidas de (1.74), conocidas como la transformada *wavelet* rápida:

$$\alpha_{j,i} = \sum_{s=0}^l c_s \alpha_{j+1,2i+s} \quad \text{y} \quad \beta_{j,i} = \sum_{s=0}^l h_s \alpha_{j+1,2i+s}. \quad (1.77)$$

Error de aproximación

Enunciamos un resultado, cuya demostración puede consultarse en [68], acerca del error cometido cuando realizamos una aproximación lineal, es decir, cuando eliminamos los coeficientes de altas frecuencias.

TEOREMA 1.1. *Sea el wavelet $\psi(x)$ generado por la función de escala $\phi(x)$, con p momentos nulos. Sea $f_j(x)$ la aproximación lineal de $f(x)$ proyectada en V_j , con base $\phi_{j,k}(x)$, la cual posee derivadas de orden p acotadas, entonces:*

$$\|f(x) - f_j(x)\| \leq C(\Delta x)^p \|f^{(p)}(x)\|$$

donde $\Delta x = 2^{-j}$ y C es una constante independiente de j .

Además, si la función de escala y su derivada tienen soporte finito, el teorema es válido para la norma de L^∞ . El teorema nos dice que el error de aproximación depende de dos factores, por una parte del paso espacial y por otra de la norma de la derivada p de la función. Por tanto al realizar una aproximación lineal en funciones con saltos, $\|f^{(p)}(x)\|$ será grande y la aproximación pobre, por mucho que Δx sea pequeño.

1.4.2

Transformada *wavelet* discreta

Cuando trabajamos con datos discretos utilizamos la versión discreta de la transformada *wavelet*. En este caso, la transformada es un operador lineal que actúa sobre un vector (de longitud potencia entera de 2), transformándolo en otro vector de la misma longitud. Dicha transformación es invertible y ortogonal. Partiremos de un conjunto discreto de números que son los coeficientes de las bajas frecuencias de la función $f(x)$ en el subespacio V_{j+1} . En muchas aplicaciones este conjunto de números es simplemente una discretización de la función.

En este contexto discreto, definimos los coeficientes de los filtros *wavelet* mediante matrices:

$$L = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_l & & & \\ & & c_0 & c_1 & \cdots & c_l & \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & c_0 & c_1 & \cdots & c_l \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_l & & & \\ & h_0 & h_1 & \cdots & h_l & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & h_0 & h_1 & \cdots & h_l \end{pmatrix}.$$

Dichas matrices deben cumplir la condición de ortogonalidad, es decir:

$$L^T L + H^T H = I, \quad (1.78)$$

aunque cada matriz por separado no sea ortogonal.

Llamando:

$$\vec{\alpha}_j = (\cdots, \alpha_{j,i}, \alpha_{j,i+1}, \cdots)^T \text{ y } \vec{\beta}_j = (\cdots, \beta_{j,i}, \beta_{j,i+1}, \cdots)^T,$$

las ecuaciones (1.77) pueden ser escritas en forma matricial:

$$\vec{\alpha}_j = L \vec{\alpha}_{j+1}, \quad \vec{\beta}_j = H \vec{\alpha}_{j+1}.$$

Estas ecuaciones resumen la transformada *wavelet* directa.

Gracias a la ortogonalidad, (1.78), la transformada *wavelet* inversa es:

$$\vec{\alpha}_{j+i} = L^T \vec{\alpha}_j + H^T \vec{\beta}_j, \quad (1.79)$$

es decir:

$$\alpha_{j+1,2i-1} = \sum_{k=0}^{l-1} (r_{2k} \alpha_{j,i-k} + d_{2k} \beta_{j,i-k}), \quad (1.80)$$

$$\alpha_{j+1,2i} = \sum_{k=0}^{l-1} (r_{2k+1} \alpha_{j,i-k} + d_{2k+1} \beta_{j,i-k}), \quad (1.81)$$

donde $r_{2k} = c_{2k+1}$, $d_{2k} = h_{2k+1}$, $r_{2k+1} = c_{2k}$, $d_{2k+1} = h_{2k}$, con $k = 0, 1, 2, \dots$

La aproximación lineal de la función consiste en reconstruir $\vec{\alpha}_{j+1}$ eliminando el término $\vec{\beta}_j$, es decir: $\vec{\alpha}_{j+i} = L^T \vec{\alpha}_j$.

Si la función es suave la eliminación de los términos $\vec{\beta}_j$ no entraña graves consecuencias y es ahí donde reside la capacidad de compresión de los métodos *wavelet*. Sin embargo, en las discontinuidades se generan valores de $\beta_{j,i}$ de mayor magnitud, que si se eliminan sí provocan pérdidas de información sustanciales y por tanto malas aproximaciones cerca de los saltos (*fenómeno de Gibbs*).

En lo que sigue se describirá la transformada *wavelet DB4*, presentada por Daubechies, ya que es la que utilizaremos en nuestros experimentos.

Daubechies 4

En la transformada *DB4*, se utilizan 4 coeficientes:

$$c_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, c_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, c_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, c_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

$$h_0 = c_3, h_1 = -c_2, h_2 = c_1, h_3 = -c_0.$$

Dichos coeficientes se hallan imponiendo la condición de ortogonalidad y resolviendo las ecuaciones que obtenemos, [56]. Las matrices de la transformada tienen la forma:

$$L = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & & & & \\ & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & & \\ & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \end{pmatrix}.$$

Si realizamos la operación $L^T L + H^T H$ con matrices 3×8 , obtenemos:

$$H = \begin{pmatrix} 0,250 & -0,433 & & & & & & \\ -0,433 & 0,750 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0,750 & 0,433 \\ & & & & & & 0,433 & 0,250 \end{pmatrix}.$$

El resultado no es exactamente la identidad debido a las condiciones frontera. Si deseamos obtener la identidad, debemos imponer

condiciones frontera periódicas, con lo cual las matrices serían de la forma:

$$L = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & & & & & c_0 & c_1 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & & & & \\ & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & & \\ & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & & & & & h_0 & h_1 \end{pmatrix}.$$

Con esto sí se obtiene $L^T L + H^T H = I$.

La transformada directa será $\vec{\alpha}_j = L\vec{\alpha}_{j+1}$, $\vec{\beta}_j = H\vec{\alpha}_{j+1}$.

Para ver qué forma tiene esta transformación, la desarrollaremos suponiendo que tenemos 8 datos iniciales.

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ & & & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{j+1,0} \\ \alpha_{j+1,1} \\ \alpha_{j+1,2} \\ \alpha_{j+1,3} \\ \alpha_{j+1,4} \\ \alpha_{j+1,5} \\ \alpha_{j+1,6} \\ \alpha_{j+1,7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{j,0} \\ \alpha_{j,1} \\ \alpha_{j,2} \end{pmatrix}.$$

Haciendo el producto obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_{j,0} &= c_0\alpha_{j+1,0} + c_1\alpha_{j+1,1} + c_2\alpha_{j+1,2} + c_3\alpha_{j+1,3}, \\ \alpha_{j,1} &= c_0\alpha_{j+1,2} + c_1\alpha_{j+1,3} + c_2\alpha_{j+1,4} + c_3\alpha_{j+1,5}, \\ \alpha_{j,2} &= c_0\alpha_{j+1,4} + c_1\alpha_{j+1,5} + c_2\alpha_{j+1,6} + c_3\alpha_{j+1,7}. \end{aligned}$$

Para la transformada inversa utilizamos las traspuestas,

$$\vec{\alpha}_{j+1} = L^T \vec{\alpha}_j + H^T \vec{\beta}_j,$$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \\ & c_2 & c_0 \\ & c_3 & c_1 \\ & & c_2 \\ & & & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{j,0} \\ \alpha_{j,1} \\ \alpha_{j,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 & h_0 \\ h_3 & h_1 \\ & h_2 & h_0 \\ & h_3 & h_1 \\ & & h_2 \\ & & & h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{j,0} \\ \beta_{j,1} \\ \beta_{j,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{j+1,0} \\ \alpha_{j+1,1} \\ \alpha_{j+1,2} \\ \alpha_{j+1,3} \\ \alpha_{j+1,4} \\ \alpha_{j+1,5} \\ \alpha_{j+1,6} \\ \alpha_{j+1,7} \end{pmatrix}.$$

Desarrollando obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1,2} &= c_2\alpha_{j,0} + c_0\alpha_{j,1} + h_2\beta_{j,0} + h_0\beta_{j,1}, \\ \alpha_{j+1,3} &= c_3\alpha_{j,0} + c_1\alpha_{j,1} + h_3\beta_{j,0} + h_1\beta_{j,1}, \\ \alpha_{j+1,4} &= c_2\alpha_{j,1} + c_0\alpha_{j,2} + h_2\beta_{j,1} + h_0\beta_{j,2}, \\ \alpha_{j+1,5} &= c_3\alpha_{j,1} + c_1\alpha_{j,2} + h_3\beta_{j,1} + h_1\beta_{j,2}. \end{aligned}$$

Resumiendo lo visto, en general, la transformación directa será (ver la Figura 1.13):

$$\alpha_{j,i} = c_0\alpha_{j+1,2i} + c_1\alpha_{j+1,2i+1} + c_2\alpha_{j+1,2i+2} + c_3\alpha_{j+1,2i+3}, \quad (1.82)$$

$$\beta_{j,i} = h_0\alpha_{j+1,2i} + h_1\alpha_{j+1,2i+1} + h_2\alpha_{j+1,2i+2} + h_3\alpha_{j+1,2i+3}, \quad (1.83)$$

y la inversa:

$$\alpha_{j+1,2i} = r_1\alpha_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\alpha_{j,i-1} + d_3\beta_{j,i-1}, \quad (1.84)$$

$$\alpha_{j+1,2i+1} = r_0\alpha_{j,i} + d_0\beta_{j,i} + r_2\alpha_{j,i-1} + d_2\beta_{j,i-1}, \quad (1.85)$$

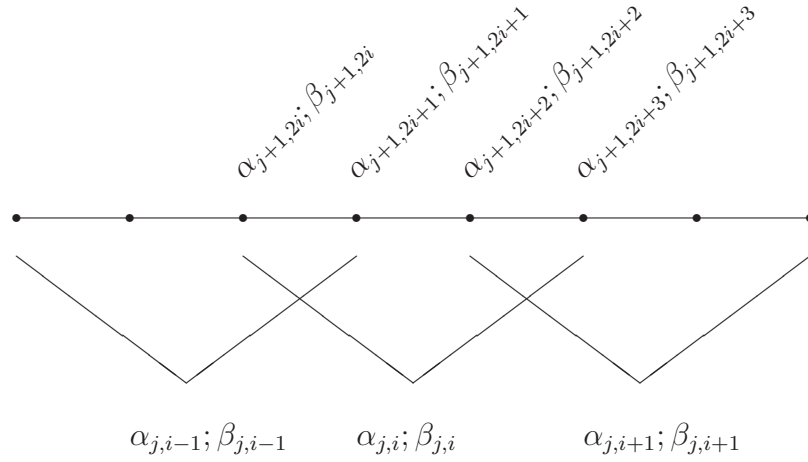
donde: $r_{2i+1} = c_{2i}$, $r_{2i} = c_{2i+1}$, $d_{2i+1} = h_{2i}$, $d_{2i} = h_{2i+1}$, para $i = 0, 1$.

En el caso de fronteras no periódicas debemos añadir las nuevas condiciones. Si n es el número de datos de partida, en la transformada directa debemos incluir:

$$\alpha_{j,n-1} = c_0\alpha_{j+1,2n-2} + c_1\alpha_{j+1,2n-1} + c_2\alpha_{j+1,0} + c_3\alpha_{j+1,1}.$$

En la transformada inversa las nuevas condiciones en la frontera izquierda son:

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1,0} &= c_0\alpha_{j,0} + c_2\alpha_{j,3} + h_0\beta_{j,0} + h_2\beta_{j,3}, \\ \alpha_{j+1,1} &= c_1\alpha_{j,0} + c_3\alpha_{j,3} + h_1\beta_{j,0} + h_2\beta_{j,3}, \end{aligned}$$

**Figura 1.13:** Transformada directa DB4

y en la frontera derecha:

$$\begin{aligned}\alpha_{j+1,2n-2} &= c_2\alpha_{j,2} + c_0\alpha_{j,3} + h_2\beta_{j,2} + h_0\beta_{j,3}, \\ \alpha_{j+1,2n-1} &= c_3\alpha_{j,2} + c_1\alpha_{j,3} + h_3\beta_{j,2} + h_1\beta_{j,3}.\end{aligned}$$

Siguiendo con el ejemplo de función propuesto (1.44), en las Figuras 1.14 y 1.15 mostramos los coeficientes $\alpha_{j,i}$ y $\beta_{j,i}$ obtenidos al utilizar 4 niveles. Observamos que los coeficientes $\beta_{j,i}$ contienen los detalles de la función. En las zonas suaves los coeficientes $\beta_{j,i}$ son de pequeña magnitud y por tanto podremos despreciarlos. De ahí las excelentes cualidades de esta transformada para la compresión. Sin embargo si los coeficientes $\beta_{j,i}$ son calculados a partir de *stencils* que cruzan discontinuidades su magnitud es elevada y si los eliminamos se produce el *fenómeno de Gibbs* en las proximidades de cada discontinuidad (ver la Figura 1.16). Para evitar estos problemas existen estrategias como los *ENO-wavelets* [26] y *wavelet-shrinkage* [63, 34, 51, 70] que veremos en secciones posteriores.

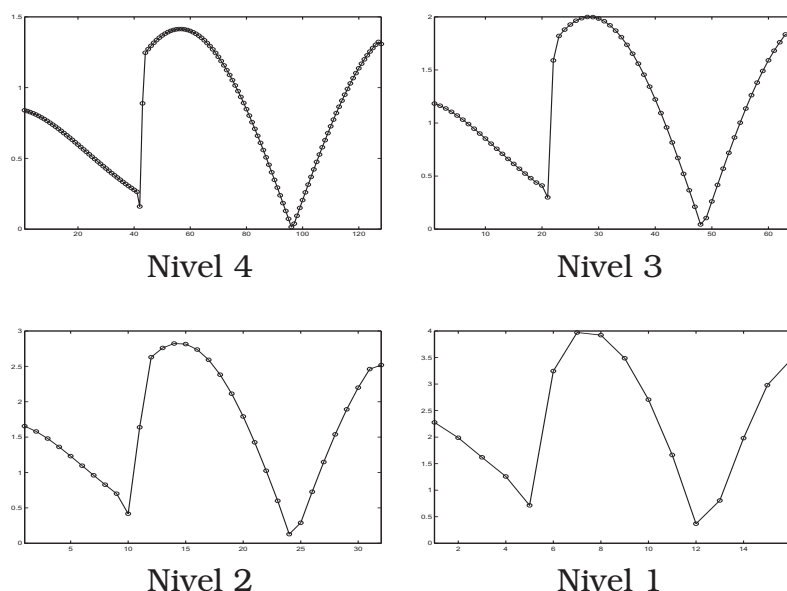


Figura 1.14: Coeficientes de bajas frecuencias al aplicar 4 niveles de la transformada wavelet DB4. Consideramos las fronteras periódicas y partimos de 256 puntos iniciales.

1.5

Conclusiones

Hemos presentado las teorías matemáticas que utilizaremos en los capítulos posteriores. En primer lugar se han desarrollado las ideas de las descomposiciones multiescala *à la Harten*. Se han descrito con detalle dos realizaciones de estas descomposiciones: la multirresolución dada por la discretización por valores puntuales y la dada por medias en celda. A continuación se han descrito las técnicas de interpolación necesarias para las reconstrucciones multirresolutivas. Se ha visto cómo las técnicas de interpolación no lineales (ENO y SR) mejoran las aproximaciones en presencia de discontinuidades, aplicando cada caso a ejemplos concretos. Se ha prestado especial atención al cálculo de filtros, tanto de las técnicas lineales como de las no lineales. En la mayor parte de

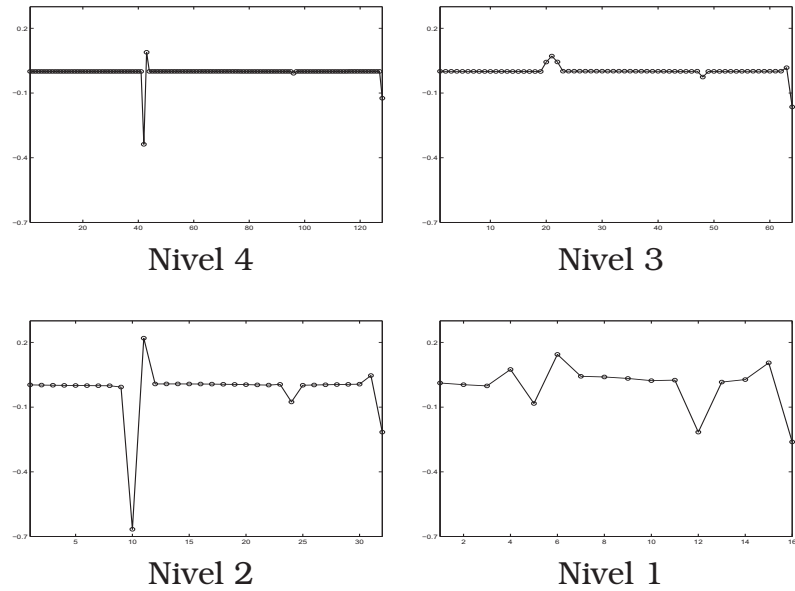


Figura 1.15: Coeficientes de altas frecuencias al aplicar 4 niveles de la transformada wavelet DB4. Consideramos las fronteras periódicas y partimos de 256 puntos iniciales.

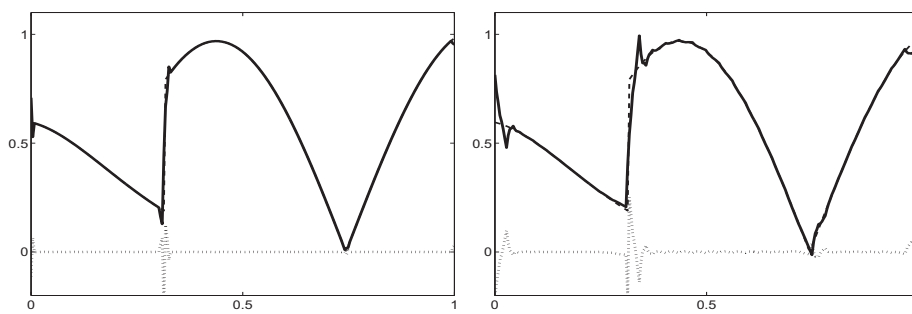


Figura 1.16: Aproximación obtenida mediante la transformada wavelet DB4. En la izquierda se utiliza un único nivel y en la derecha 3. Se eliminan todos los $\beta_{j,i}$ y las fronteras se tratan como periódicas. Partimos de 256 nodos iniciales. La función de partida se representa mediante la línea '-', la reconstrucción mediante línea continua y la diferencia entre ambas, a la que le restamos 0.1, se representa mediante puntos discontinuos.

las publicaciones, este cálculo se realiza a partir de desarrollos de la forma de Newton del polinomio interpolador, sin embargo en este trabajo hemos optado por calcularlos directamente a partir de la definición, haciendo uso de ecuaciones matriciales. Con esto se consiguen obtener de manera sencilla los filtros para diferentes grados y además, mediante cálculos similares, nos permitirá diseñar nuevas reconstrucciones.

En un segundo bloque nos hemos centrado en la transformada *wavelet*. Se ha descrito, tanto en su versión continua como en su versión discreta y se ha desarrollado con detalle la transformada *DB4*, aplicándola a ejemplos concretos.

En conclusión, se han presentado las teorías de multirresolución *à la Harten* y la transformada *wavelet*. Hemos seleccionado aquello que utilizaremos en desarrollos posteriores pero se ha intentado que la exposición sea clara y autocontenida, en el sentido que el lector pueda seguir los desarrollos sin acudir necesariamente a otros trabajos.