

2

Nuevas reconstrucciones

2.1

Introducción

En el capítulo 1 expusimos la teoría asociada a la multirresolución *à la Harten*. La concretamos para dos discretizaciones (valores puntuales y medias en celda) y en ambos casos utilizamos polinomios interpoladores para definir las reconstrucciones. En este capítulo nos planteamos introducir nuevas reconstrucciones. Veremos si es posible incluirlas en esquemas de multirresolución *à la Harten*, estudiaremos su comportamiento y en capítulos posteriores las aplicaremos a la eliminación de ruido en señales digitales.

2.2

Reconstrucción interpolación aproximación

La nueva reconstrucción vendrá dada por un polinomio tal que interpole los extremos del intervalo de trabajo y aproxime por mínimos cuadrados en una serie de nodos adyacentes a dicho intervalo. Esta elección no es arbitraria, ya que la interpolación en los extremos será necesaria para que se cumpla que $\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k f^k = f^k$, y la aproximación se introduce con el fin de trabajar con funciones a las que se les ha introducido ruido.

Nos referiremos a esta reconstrucción como *interpolación aproximación para valores puntuales* ($\overline{\mathcal{IAP}}$).

2.2.1

Interpolación aproximación para valores puntuales ($\overline{\mathcal{IAP}}$)

Tomando la discretización por valores puntuales y teniendo en cuenta las notaciones expuestas en la sección 1.2, definimos la reconstrucción **interpolación aproximación para valores puntuales** como sigue:

Dado un k y el intervalo $I_i^k = [x_{i-1}^k, x_i^k]$ construimos el polinomio que interpola a x_{i-1}^k, x_i^k y aproxima por mínimos cuadrados en m puntos de X^k adyacentes a I_i^k , para $i = 1, 2, \dots, J_k$. Llamamos $q_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; f^k, r)$ a dicho polinomio. El interpolante global viene definido por:

$$\overline{\mathcal{IAP}}_k(x; f^k) = q_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; f^k, r), \quad x \in [x_{i-1}^k, x_i^k], \quad i = 1, \dots, J_k. \quad (2.1)$$

Gracias a la interpolación en los extremos de cada intervalo, podemos asegurar que se cumple $\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k f^k = f^k$, siendo $\overline{\mathcal{IAP}}_k(x; f^k) := \mathcal{R}_k f^k(x)$ un operador reconstrucción según la Definición 1.7. Así pues:

$$(P_{k-1}^k f^{k-1})_i = (\mathcal{D}_k \overline{\mathcal{IAP}}_{k-1}(\cdot f^{k-1}))_i = \overline{\mathcal{IAP}}_{k-1}(x_i^k; f^{k-1}).$$

El error de predicción se define como $e_i^k = f_i^k - \overline{\mathcal{IAP}}_{k-1}(x_i^k; f^{k-1})$, $i = 0, \dots, J_k$, con $e_i^k = 0$, $\forall i$ tal que $x_i^k \in X^{k-1}$. Los coeficientes $d^k = \{d_j^k\}$ son $d_j^k = e_{2j-1}^k$ para $j = 1, \dots, J_{k-1}$.

Con esto queda definida la reconstrucción *interpolación aproximación* cumpliendo las condiciones necesarias para ser una reconstrucción en el contexto de multirresolución *à la Harten*.

Cálculo de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$

Para cada intervalo $I_i^{k-1} = [x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$ buscamos un polinomio de grado r que interpole a la función en los extremos de dicho intervalo y que la aproxime por mínimos cuadrados en m puntos adyacentes al intervalo.

Sea $q(x) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1}$ dicho polinomio y $\{f_i^k\}_i$ la discretización de la función a reconstruir.

NOTA 2.1. Sin pérdida de generalidad y con el fin de simplificar la exposición, calcularemos $q(x)$ sobre los nodos $0, 1, 2, \dots$ y no sobre $\{x_i^{k-1}\}_i$ ya que éstos los suponemos equiespaciados.

Imponiendo que interpole en los extremos:

$$q(0) = a_1 = f_{i-1}^{k-1}, \quad (2.2)$$

$$q(1) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l = f_i^{k-1} \Rightarrow a_2 = f_i^{k-1} - f_{i-1}^{k-1} - \sum_{l=3}^{r+1} a_l. \quad (2.3)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} q(x) &= f_{i-1}^{k-1} + \left(f_i^{k-1} - f_{i-1}^{k-1} - \sum_{l=3}^{r+1} a_l \right) x + \sum_{l=3}^{r+1} a_l x^{l-1} \\ &= (1-x)f_{i-1}^{k-1} + x f_i^{k-1} + \sum_{l=3}^{r+1} a_l (x^{l-1} - x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde desconocemos $r - 1$ incógnitas.

Para determinar dichas incógnitas podemos imponer $nl - 1$ condiciones a la izquierda de x_{i-1}^{k-1} y $nr - 1$ a la derecha de x_i^{k-1} , con $nl + nr > r + 1$ (si $nl + nr = r + 1$ estaríamos únicamente interpolando):

$$q(-j) = f_{i-j-1}^{k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, nl - 1, \quad (2.5)$$

$$q(j+1) = f_{i+j}^{k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, nr - 1. \quad (2.6)$$

De (2.4), (2.5) y (2.6), obtenemos las $m = nl + nr - 2$ ecuaciones:

$$\sum_{l=3}^{r+1} a_l ((-j)^{l-1} + j) = f_{i-j-1}^{k-1} + (-j-1)f_{i-1}^{k-1} + jf_i^{k-1}, \quad j = 1, \dots, nl - 1,$$

$$\sum_{l=3}^{r+1} a_l ((j+1)^{l-1} - (j+1)) = f_{i+j}^{k-1} + jf_{i-1}^{k-1} - (j+1)f_i^{k-1}, \quad j = 1, \dots, nr - 1.$$

En forma matricial sería $A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}} \hat{a} = \hat{f} - \hat{b}_0 f_{i-1}^{k-1} - \hat{b}_1 f_i^{k-1}$, donde tenemos la matriz $(nl + nr - 2) \times (r - 1)$:

$$A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}} = \begin{bmatrix} (-(nl-1))^2 + nl - 1 & \cdots & (-(nl-1))^r + nl - 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 6 & \cdots & (-2)^r + 2 \\ 2 & \cdots & (-1)^r + 1 \\ 2 & \cdots & 2^r - 2 \\ 6 & \cdots & 3^r - 3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (nr)^2 - nr & \cdots & (nr)^r - nr \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

y los vectores

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{r+1} \end{bmatrix}, \quad \hat{f} = \begin{bmatrix} f_{i-nl}^{k-1} \\ \vdots \\ f_{i-3}^{k-1} \\ f_{i-2}^{k-1} \\ f_{i+1}^{k-1} \\ f_{i+2}^{k-1} \\ \vdots \\ f_{i+nr-1}^{k-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{b}_0 = \begin{bmatrix} nl \\ \vdots \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ \vdots \\ -nr + 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{b}_1 = \begin{bmatrix} -nl + 1 \\ \vdots \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ nr \end{bmatrix}.$$

Para obtener los coeficientes $\{a_3, \dots, a_{r+1}\}$ del polinomio $q(x)$ debemos resolver el sistema $A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}}^T A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}} \hat{a} = A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}}^T (\hat{f} - \hat{b}_0 f_{i-1}^{k-1} - \hat{b}_1 f_i^{k-1})$:

$$\hat{a} = \left(A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}}^T A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}} \right)^{-1} A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}}^T (\hat{f} - \hat{b}_0 f_{i-1}^{k-1} - \hat{b}_1 f_i^{k-1}). \quad (2.8)$$

Finalmente mediante (2.2) y (2.3) hallamos a_1 y a_2 . En efecto, si definimos la matriz $(r-1) \times m : C = \left(A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}}^T A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}} \right)^{-1} A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAP}}}^T$, tenemos:

$$\begin{aligned} a_1 &= f_{i-1}^{k-1}, \\ a_2 &= f_i^{k-1} - f_{i-1}^{k-1} - \mathbf{1}_{r-1}^T \hat{a} \\ &= f_i^{k-1} - f_{i-1}^{k-1} - \mathbf{1}_{r-1}^T C \hat{f} + \mathbf{1}_{r-1}^T C \hat{b}_0 f_{i-1}^{k-1} + \mathbf{1}_{r-1}^T C \hat{b}_1 f_i^{k-1}. \end{aligned}$$

Al polinomio $q(x)$ que hemos calculado lo denotaremos

$$\overline{\mathcal{IAP}}_{nl,nr}^r(x, f^{k-1}) = p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; f^{k-1}, r).$$

Sobre los nodos $\{x_i^{k-1}\}$, la notación será $q_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; f^{k-1}, r)$.

El valor que aproxima a f_{2i-1}^k será $p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(\frac{1}{2}; f^{k-1}, r)$. Así:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2i-1}^k &= \sum_{l=1}^{r+1} a_l \frac{1}{2^{l-1}} = f_{i-1}^{k-1} + \frac{1}{2} f_i^{k-1} - \frac{1}{2} f_{i-1}^{k-1} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{r-1}^T C \hat{f} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{r-1}^T C \hat{b}_0 f_{i-1}^{k-1} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{r-1}^T C \hat{b}_1 f_i^{k-1} + \left(\frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^r} \right) C \hat{f} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^r} \right) C \hat{b}_0 f_{i-1}^{k-1} - \left(\frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^r} \right) C \hat{b}_1 f_i^{k-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^r} \right) C \hat{b}_0 \right) f_{i-1}^{k-1} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^r} \right) C \hat{b}_1 \right) f_i^{k-1} + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^r} - \frac{1}{2} \right) C \hat{f} \\ &= \sum_{l=-nl}^{nr-1} (\beta_{nl,nr}^r)_l f_{i+l}^{k-1} \equiv \overline{\mathcal{IAP}}_{nl,nr}^r(x_{2i-1}^k, f^{k-1}), \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} (\beta_{nl,nr}^r)_l &= \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^r} - \frac{1}{2} \right) C e_{l+nl+1}, \quad l = -nl, \dots, -2, \\ (\beta_{nl,nr}^r)_{-1} &= \left(1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^r} \right) C \hat{b}_0 \right), \\ (\beta_{nl,nr}^r)_0 &= \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^r} \right) C \hat{b}_1 \right), \end{aligned}$$

$$(\beta_{nl,nr}^r)_l = \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^r} - \frac{1}{2}\right) C e_{nl-1+l}, \quad l = 1, \dots, nr - 1,$$

siendo $e_j = (\delta_{j,k})_{k=1}^{nl+nr-2}$. En la Tabla 2.1, podemos ver¹ los filtros para ciertos grados y tamaños del *stencil*. Se cumple:

$$(\beta_{nl,nr}^r)_{-nl+l} = (\beta_{nr,nl}^r)_{nl-l-1}, \quad l = 0, \dots, nl + nr - 1. \quad (2.9)$$

NOTA 2.2. En (2.9) algunos coeficientes pueden no ser exactamente la misma fracción, aunque en su forma decimal serán muy aproximados. Se debe a que las últimas cifras decimales difieren por precisión en los cálculos y al pasarlas a fracción no son exactamente iguales.

l	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(\beta_{3,1}^2)_l$			$-\frac{3}{80}$	$-\frac{1}{80}$	$\frac{51}{80}$	$\frac{33}{80}$			
$(\beta_{2,2}^2)_l$				$-\frac{1}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{1}{16}$		
$(\beta_{4,1}^2)_l$		$-\frac{3}{184}$	$-\frac{3}{368}$	$-\frac{1}{368}$	$\frac{219}{368}$	$\frac{159}{368}$			
$(\beta_{3,2}^2)_l$			$-\frac{3}{88}$	$-\frac{1}{88}$	$\frac{27}{44}$	$\frac{39}{88}$	$-\frac{1}{88}$		
$(\beta_{5,1}^2)_l$	$-\frac{5}{584}$	$-\frac{3}{584}$	$-\frac{3}{1168}$	$-\frac{1}{1168}$	$\frac{669}{1168}$	$\frac{519}{1168}$			
$(\beta_{4,2}^2)_l$		$-\frac{3}{188}$	$-\frac{3}{376}$	$-\frac{1}{376}$	$\frac{111}{188}$	$\frac{165}{376}$	$-\frac{1}{376}$		
$(\beta_{3,3}^3)_l$			$-\frac{3}{160}$	$-\frac{1}{160}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{21}{40}$	$-\frac{1}{160}$	$-\frac{3}{160}$	
$(\beta_{4,4}^3)_l$		$-\frac{3}{368}$	$-\frac{3}{736}$	$-\frac{1}{736}$	$\frac{189}{368}$	$\frac{189}{368}$	$-\frac{1}{736}$	$-\frac{3}{736}$	$-\frac{3}{368}$
f_{i-l}^{k-1}	f_{i-5}^{k-1}	f_{i-4}^{k-1}	f_{i-3}^{k-1}	f_{i-2}^{k-1}	f_{i-1}^{k-1}	f_i^{k-1}	f_{i+1}^{k-1}	f_{i+2}^{k-1}	f_{i+3}^{k-1}

Tabla 2.1: Aproximaciones a f_{2i-1}^k , con grado del polinomio r , $\overline{\mathcal{IAP}}_{nl,nr}^r(x_{2i-1}^k, f^{k-1}) = \sum_{l=-nl}^{nr-1} (\beta_{nl,nr}^r)_l f_{i+l}^{k-1}$, utilizando interpolación con 2 puntos y aproximación con $nl - 1$ puntos a la izquierda de x_{i-1}^{k-1} y $nr - 1$ puntos a la derecha de x_i^{k-1} .

Si $n = nl = nr$ obtenemos que el intervalo donde interpolamos está centrado con respecto a los nodos en los que aproximamos.

¹En <http://www.uv.es/anim/noguera/> podemos descargar una GUI y programas en MATLAB® que calculan los filtros según los datos introducidos por el usuario.

En caso contrario hay más nodos a un lado que al otro, lo cual se utilizará para evitar las discontinuidades, además de localizarlas.

Orden de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$

Para determinar de qué orden es la reconstrucción nos basaremos en estudiar qué polinomios reconstruye de forma exacta.

PROPOSICIÓN 2.1. Si $q_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; f^{k-1}, r)$ es el polinomio $\overline{\mathcal{IAP}}$ para valores puntuales de grado r , la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$ recupera de forma exacta polinomios de grado menor o igual a r .

Demostración. Sin pérdida de generalidad, trabajamos sobre nodos enteros.

Sea $p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1}$ y sea $f(x) = q(x) = \sum_{l=1}^{s+1} b_l x^{l-1}$ la función a reconstruir.

Si $s > r$, la reconstrucción no es exacta en general, ya que un polinomio de grado s no puede ser recuperado por otro de grado inferior.

Si $s = r$, se deben cumplir las ecuaciones de interpolación:

$$p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(0) = q(0) \quad \text{y} \quad p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(1) = q(1) \quad (2.10)$$

y las de aproximación;

$$p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(j) = q(j), \quad j = -(nl - 1), \dots, -1, 2, 3, \dots, nr, \quad (2.11)$$

donde $nl \geq 1$, $nr \geq 1$ y $nl + nr > r + 1$.

Mediante la matriz $r + 1 \times (nl + nr)$:

$$M_{r+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - nl & (1 - nl)^2 & \cdots & (1 - nl)^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^r \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \cdots & 2^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & nr & nr^2 & \cdots & nr^r \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

podemos expresar (2.10) y (2.11) en forma matricial:

$$M_{r+1} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r+1} \end{bmatrix} = M_{r+1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{r+1} \end{bmatrix}.$$

Haciendo el producto

$$M_{r+1} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{r+1} \end{bmatrix},$$

el sistema

$$M_{r+1} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{r+1} \end{bmatrix},$$

es de solución única si $\text{rang}(M_{r+1}) = r + 1$, en cuyo caso, dado que $[b_1, \dots, b_{r+1}]^T$ es una solución, por unicidad $a_i = b_i$ para $i = 1, \dots, r + 1$ y por tanto el polinomio $q(x)$ se recupera de forma exacta.

Si tomamos $r + 1$ filas de la matriz M_{r+1} tenemos una matriz de *Vandermonde* con determinante distinto de cero, con lo que efectivamente $\text{rang}(M_{r+1}) = r + 1$ y ya estaría probado.

Si $s < r$ se reduce al caso anterior sin más que anular los coeficientes a_l para $s + 1 < l \leq r + 1$.

Por tanto la reconstrucción es exacta para polinomios de grado menor o igual a r .

□

COROLARIO 2.1. El orden de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$ es $r + 1$.

ENO

Al igual que en las reconstrucciones exclusivamente interpolatorias, para cada discontinuidad se producen una serie de intervalos de escasa aproximación. En concreto, si el intervalo que contiene la discontinuidad es $(x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1})$ y estamos trabajando con condiciones centradas con $nl = nr = n$, los intervalos afectados son: $[x_{i-n}^{k-1}, \dots, x_{i+n-1}^{k-1}]$. Y en términos de coeficientes de escala:

$$d_l^{k-1}, \quad i - nl + 1 \leq l \leq i + nr. \quad (2.13)$$

Incluiremos adaptatividad en las discontinuidades con el objetivo de evitar utilizar *stencils* que crucen discontinuidades. Si la función con la que trabajamos no contiene ruido, podemos utilizar el esquema *ENO* aplicando el Algoritmo 1.1 o 1.2 (*ENO-VP-I* o *ENO-VP-II* respectivamente) para *stencils* de longitud $nl + nr$.

Cuando desplazamos un *stencil* según la asignación *ENO* hemos de tener en cuenta que en nuestra reconstrucción, si trabajamos en el intervalo I_i^{k-1} , debemos interpolar en los nodos x_{i-1}^{k-1} , x_i^{k-1} y podemos variar el número de nodos donde aproximamos a izquierda y derecha para conseguir dicho desplazamiento. Para cada $m = nl + nr$ fijo, esto se traduce en tomar (ver Figura 2.1):

$$nl_i = i - s_i + 1, \quad nr_i = m - nl_i, \quad (2.14)$$

con $i - m + 2 \leq s_i \leq i + m - 2$, siendo s_i el definido en la sección 1.2.2.

Con esto conseguimos que para una función suave los *stencils* no crucen discontinuidades, mejorando los resultados.

WENO

Basándonos en lo expuesto en la sección 1.2.4, veremos si es posible adaptar *WENO* a la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$. Los pasos son:

1.- Expresar la aproximación de orden $r + 1$ como una combinación lineal de las n aproximaciones de orden $s + 1$, con $r > s$:

$$p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}_{n,n}^r}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^s p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}_{n-k,k+1}^s}(x),$$

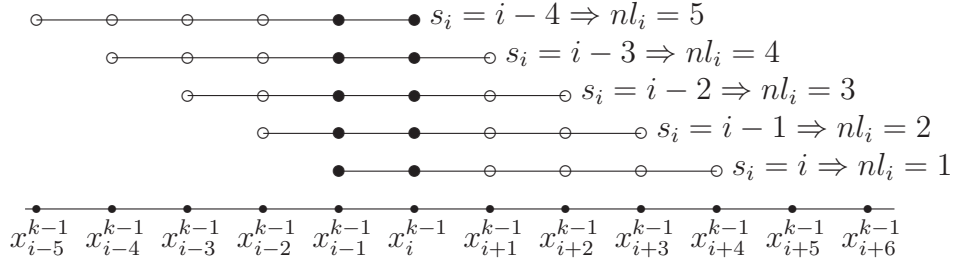


Figura 2.1: Posibles stencils de 6 nodos ($m = 6 = nl + nr$) para el intervalo $I_i^{k-1} = [x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$ en la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$. Se marca con un círculo los nodos donde se interpola y con una circunferencia donde se aproxima.

con $C_k^s \geq 0 \forall k$, y $\sum_{k=0}^{n-1} C_k^s = 1$, siendo $p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}_{nl,nr}^t}$ el polinomio interpolación aproximación de orden $t+1$ construido tomando nl nodos a la izquierda y nr a la derecha de x_{2i-1}^k .

En WENO para valores puntuales y reconstrucción interpolatoria $r = 2s - 1$ debido a que la longitud del stencil determina el grado del polinomio interpolador. En este caso debe cumplirse simplemente que $r > s$ para que WENO produzca un aumento del orden de aproximación. Además también podemos elegir el número de nodos, $n = nl = nr$, donde aproximamos, teniendo en cuenta que $2n > r + 1$ y $2(n - 1) > s + 1$ para que se aproxime y no se interpole.

En la Tabla 2.2 vemos los coeficientes C_k^r que obtenemos para algunos valores de n , r y s . Notar que los casos viables para WENO son los que cumplen $C_k^s \geq 0$ y $\sum_{k=0}^{n-1} C_k^s = 1$. La mayoría de casos nos salen incompatibles. En otros casos, como para $s = 2$, $r = 4$ y $n = 3$ no se cumple que $C_k^s \geq 0 \forall k$.

Tras efectuar los cálculos con diferentes grados y longitudes de stencil, los casos factibles para aplicar WENO son:

$$p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}_{n,n}^3}(x) = \frac{1}{2} p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}_{n,1}^2}(x) + \frac{1}{2} p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}_{1,n}^2}(x), \quad n \geq 2,$$

es decir:

$$\sum_{l=-n}^{n-1} (\beta_{n,n}^3)_l f_{i+l} = \frac{1}{2} \sum_{l=-n}^0 (\beta_{n,1}^2)_l f_{i+l} + \frac{1}{2} \sum_{l=-1}^{n-1} (\beta_{1,n}^2)_l f_{i+l}, \quad n \geq 2. \quad (2.15)$$

2.- Definimos $\alpha_k^s = \frac{C_k^s}{(\varepsilon + \mathcal{IS}_{n-k,k+1})^2}$, $k = 0, \dots, n-1$, con $\mathcal{IS}_{n-k,k+1}$ un

		$s = 2$			$s = 3$		
		$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$r = 3$	C_0^s	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
	C_1^s	0	0	0			
	C_2^s	$\frac{1}{2}$	0	0			
	C_3^s		$\frac{1}{2}$	0			
	C_4^s			$\frac{1}{2}$			
$r = 4$	C_0^s	$-\frac{5}{16}$	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.
	C_1^s	$\frac{13}{8}$	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.
	C_2^s	$-\frac{5}{16}$	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.
	C_3^s		S.I.	S.I.	S.I.	S.I.	S.I.
	C_4^s			S.I.		S.I.	S.I.
	C_5^s						S.I.

Tabla 2.2: Coeficientes C_k^s tales que $p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}_{n,n}^r}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^s p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}_{n-k,k+1}^s}(x)$. S.I. significa que el sistema es incompatible.

indicador de suavidad de $f(x)$ en el *stencil* $\{x_{i-n-k}^{k-1}, \dots, x_{i+k}^{k-1}\}$. Para comprobar el funcionamiento del algoritmo emplearemos en indicador de suavidad de Liu et al. (1.28) o el de Jiang y Shu (1.29). Dichos indicadores están diseñados para reconstrucciones interpolatorias, aunque los utilizaremos en $\overline{\mathcal{IAP}}$ ya que nuestra pretensión es únicamente ver la viabilidad de *WENO* para la nueva reconstrucción. Para ser totalmente rigurosos deberíamos adaptar los indicadores de suavidad a la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$.

3.- La aproximación *WENO* será

$$p_i^{WENO-\overline{\mathcal{IAP}}}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^s p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}_{n-k,k+1}^s}(x),$$

donde $\omega_k^s = \frac{\alpha_k^s}{\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j^s}$, para $k = 0, \dots, n-1$.

PPH

Este caso es análogo al visto para la reconstrucción interpolatoria, sección 1.2.5, ya que los coeficientes son los mismos:

$$\overline{\mathcal{IAP}}_{2,2}^2(x_{2i-1}^k, f^{k-1}) = -\frac{1}{16}f_{i-2}^{k-1} + \frac{9}{16}f_{i-1}^{k-1} + \frac{9}{16}f_i^{k-1} - \frac{1}{16}f_{i+1}^{k-1}. \quad (2.16)$$

con lo cual, tomando la media armónica $H(x, y)$, (1.30):

$$\left(\overline{\mathcal{IAP}}_{2,2}^2\right)^{PPH}(x_{2i-1}^k, f^{k-1}) = \frac{1}{2}(f_{i-1}^{k-1} + f_i^{k-1}) - \frac{1}{8}H(d^2 f_{i-1}^{k-1}, d^2 f_i^{k-1}),$$

La anterior es la única elección posible para proporcionar una aproximación con *stencils* de 4 nodos, ya que si $r = 1$ no se cumple la condición de aproximación.

ENO-SR

Basándonos en el algoritmo *ENO-SR* para valores puntuales y reconstrucción interpolatoria, lo adaptamos para la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$ de la siguiente manera:

1.- Tomando *stencils* de $m = nl + nr$ nodos, calculamos los *stencils* *ENO* mediante el Algoritmo 1.1 o 1.2 (*ENO-VP-I* o *ENO-VP-II*) y asignamos los nodos donde aproximaremos para cada intervalo según (2.14).

2.- Si $nl_{i-1} = m - 1$ y $nl_{i+1} = 1$ los *stencils* para las celdas I_{i-1}^{k-1} y I_{i+1}^{k-1} son disjuntos. Etiquetamos dicha celda como *sospechosa* de contener una discontinuidad.

3.- Para cada celda sospechosa definimos la función

$$G_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x) = q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; f^{k-1}, r) - q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; f^{k-1}, r),$$

donde s_i indica que elegimos el *stencil* según la elección *ENO*. Si $G_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_i^{k-1}) < 0$ etiquetamos la celda I_i^{k-1} como singular.

4.- Si $G_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{2i-1}^k) < 0$, el punto x_{2i-1}^k se halla a la derecha de la discontinuidad.

Antes de exponer el cálculo detallado de filtros una cuestión de notación. En lo que resta de apartado denotaremos:

$$\begin{aligned}
C^I &= \left(A_{nl+nr-1,1}^{\overline{\mathcal{IAP}}}^T A_{nl+nr-1,1}^{\overline{\mathcal{IAP}}} \right)^{-1} A_{nl+nr-1,1}^{\overline{\mathcal{IAP}}}^T, \\
\hat{b}_0^I &= [nl + nr - 1, nl + nr - 2, \dots, 2]^T, \\
\hat{b}_1^I &= [-nl - nr + 2, -nl - nr + 3, \dots, -1]^T, \\
C^D &= \left(A_{1,nl+nr-1}^{\overline{\mathcal{IAP}}}^T A_{1,nl+nr-1}^{\overline{\mathcal{IAP}}} \right)^{-1} A_{1,nl+nr-1}^{\overline{\mathcal{IAP}}}^T, \\
\hat{b}_0^D &= [-1, -2, \dots, -nl - nr + 2]^T, \\
\hat{b}_1^D &= [2, 3, \dots, nl + nr - 1]^T, \\
\hat{f}_D &= [f_{i+1}^{k-1}, \dots, f_{i+nl+nr-2}^{k-1}]^T, \\
\hat{f}_I &= [f_{i-nl-nr}^{k-1}, \dots, f_{i-2}^{k-1}]^T.
\end{aligned}$$

Los filtros para $\tilde{f}_{2i-1}^k$ cuando nos encontramos a la derecha de la discontinuidad se obtienen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{2i-1}^k &= q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}, r) = p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(-1/2; f^{k-1}, r) \\
&= \sum_{l=1}^{r+1} a_l \left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1} = a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \sum_{l=3}^{r+1} a_l \left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1} \\
&= f_i^{k-1} - \frac{1}{2} \left[f_{i+1}^{k-1} - f_i^{k-1} - \mathbf{1}_{r-1}^T C^D \left(\hat{f}_D - \hat{b}_0^D f_i^{k-1} - \hat{b}_1^D f_{i+1}^{k-1} \right) \right] \\
&\quad + \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^r \right] C^D \left(\hat{f}_D - \hat{b}_0^D f_i^{k-1} - \hat{b}_1^D f_{i+1}^{k-1} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{nl+nr-1} (\beta_{0,nl+nr}^r)_l f_l^{k-1}, \tag{2.17}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
(\beta_{0,nl+nr}^r)_0 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{r-1}^T C^D \hat{b}_0^D - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^r \right] C^D \hat{b}_0^D, \\
(\beta_{0,nl+nr}^r)_1 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{r-1}^T C^D \hat{b}_1^D - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^r \right] C^D \hat{b}_1^D, \\
(\beta_{0,nl+nr}^r)_l &= \left(\frac{1}{2} \mathbf{1}_{r-1}^T + \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^r \right] \right) C^D e_l,
\end{aligned}$$

siendo $e_l = (\delta_{l,k})_{k=2}^{nl+nr-1}$ para $l = 2, \dots, nl + nr - 1$. En la Tabla 2.3 podemos ver dichos coeficientes para ciertos valores de nl , nr y r .

En otro caso x_{2i-1}^k se halla a la izquierda de la discontinuidad: $\tilde{f}_{2i-1}^k = q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}, r)$ (o bien $\tilde{f}_{2i-1}^k = p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(3/2; f^{k-1}, r)$).

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{2i-1}^k &= q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}, r) = p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(3/2; f^{k-1}, r) \\
 &= \sum_{l=1}^{r+1} a_l \left(\frac{3}{2}\right)^{l-1} = a_1 + \frac{3}{2}a_2 + \sum_{l=3}^{r+1} a_l \left(\frac{3}{2}\right)^{l-1} \\
 &= f_{i-2}^{k-1} + \frac{3}{2} \left[f_{i-1}^{k-1} - f_{i-2}^{k-1} - \mathbf{1}_{r-1}^T C^I \left(\hat{f}_I - \hat{b}_0^I f_{i-2}^{k-1} - \hat{b}_1^I f_{i-1}^{k-1} \right) \right] \\
 &\quad + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^r \right] C^I \left(\hat{f}_I - \hat{b}_0^I f_{i-2}^{k-1} - \hat{b}_1^I f_{i-1}^{k-1} \right) \\
 &= \sum_{l=-nl-nr}^{-1} (\beta_{nl+nr,0}^r)_l f_l^{k-1}, \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 (\beta_{nl+nr,0}^r)_{-1} &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \mathbf{1}_{r-1}^T C^I \hat{b}_1^I - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^r \right] C^I \hat{b}_1^D, \\
 (\beta_{nl+nr,0}^r)_{-2} &= 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \mathbf{1}_{r-1}^T C^I \hat{b}_0^I - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^r \right] C^I \hat{b}_0^D, \\
 (\beta_{nl+nr,0}^r)_l &= - \left(\frac{3}{2} \mathbf{1}_{r-1}^T + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^r \right] \right) C^I e_l,
 \end{aligned}$$

siendo $e_l = (\delta_{l,k})_{k=-nl-nr}^{-3}$ para $l = -nl-nr, \dots, -3$. Dichos coeficientes pueden deducirse de los hallados para el caso derecho ya que se cumple (ver Nota 2.2):

$$(\beta_{0,nl+nr}^r)_l = (\beta_{nl+nr,0}^r)_{-l-1}, \quad l = 0, \dots, nl + nr - 1$$

NOTA 2.3. Al aplicar SR de la forma descrita, f_{2i-1}^k no está en el centro de un intervalo donde se interpolan los extremos, sino que el intervalo donde se interpola está a izquierda o a derecha de f_{2i-1}^k . Esta modificación nos permite adaptar SR para interpolación aproximación.

Para finalizar el apartado, detallamos el cálculo de filtros para la función $G^{\overline{\mathcal{IAP}}}$:

$$G_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l (x-1)^{l-1} - \sum_{l=1}^{r+1} b_l (x+1)^{l-1}$$

l	0	1	2	3	4	5
$(\beta_{0,4}^2)_l$	$\frac{141}{80}$	$-\frac{73}{80}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{9}{80}$		
$(\beta_{0,6}^2)_l$	$\frac{1947}{1168}$	$-\frac{839}{1168}$	$\frac{3}{1168}$	$\frac{9}{1168}$	$\frac{9}{584}$	$\frac{15}{584}$
$(\beta_{0,6}^3)_l$	$\frac{1044}{545}$	$-\frac{626}{521}$	$\frac{388}{4425}$	$\frac{94}{569}$	$\frac{314}{2331}$	$-\frac{326}{3207}$
f_{i+l}^{k-1}	f_i^{k-1}	f_{i+1}^{k-1}	f_{i+2}^{k-1}	f_{i+3}^{k-1}	f_{i+4}^{k-1}	f_{i+5}^{k-1}

Tabla 2.3: Aproximaciones a f_{2i-1}^{k-1} , de orden $r+1$, $\overline{\mathcal{IAP}}_{0,nl+nr}^r(x_{2i-1}^k, f^{k-1}) = \sum_{l=0}^{nl+nr-1} (\beta_{0,nl+nr}^r)_l f_{i+l}^{k-1}$, utilizando interpolación en f_i^{k-1} , f_{i+1}^{k-1} y aproximación en $nl + nr - 2$ puntos a la derecha de f_{i+1}^{k-1} .

$$\begin{aligned}
&= a_1 + (x-1)a_2 + \sum_{l=3}^{r+1} a_l (x-1)^{l-1} - b_1 - (x+1)b_2 - \sum_{l=3}^{r+1} (x+1)^{l-1} \\
&= f_i^{k-1} + (x-1) \left[f_{i+1}^{k-1} - f_i^{k-1} - \mathbf{1}_{r-1}^T C^D \left(\hat{f}_D - \hat{b}_0^I f_i^{k-1} - \hat{b}_1^I f_{i+1}^{k-1} \right) \right] \\
&\quad + [(x-1)^2, \dots, (x-1)^r] C^D \left(\hat{f}_D - \hat{b}_0^D f_i^{k-1} - \hat{b}_1^D f_{i+1}^{k-1} \right) \\
&= -f_{i-2}^{k-1} - (x-1) \left[f_{i-1}^{k-1} - f_{i-2}^{k-1} - \mathbf{1}_{r-1}^T C^I \left(\hat{f}_I - \hat{b}_0^I f_{i-2}^{k-1} - \hat{b}_1^I f_{i-1}^{k-1} \right) \right] \\
&\quad + [(x+1)^2, \dots, (x+1)^r] C^I \left(\hat{f}_I - \hat{b}_0^I f_{i-2}^{k-1} - \hat{b}_1^I f_{i-1}^{k-1} \right) \\
&= \sum_{l=-nl-nr}^{nl+nr-1} (\sigma_{nl,nr}^r)_l f_l^{k-1},
\end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
(\sigma_{nl,nr}^r)_0 &= 2 - x + (x-1) \mathbf{1}_{r-1}^T C^D \hat{b}_0^D - [(x-1)^2, \dots, (x-1)^r] C^D \hat{b}_0^D, \\
(\sigma_{nl,nr}^r)_1 &= (x-1) + (x-1) \mathbf{1}_{r-1}^T C^D \hat{b}_1^D - [(x-1)^2, \dots, (x-1)^r] C^D \hat{b}_1^D, \\
(\sigma_{nl,nr}^r)_{-1} &= -(x+1) - (x+1) \mathbf{1}_{r-1}^T C^I \hat{b}_1^I + [(x+1)^2, \dots, (x+1)^r] C^I \hat{b}_1^I, \\
(\sigma_{nl,nr}^r)_{-2} &= x - (x+1) \mathbf{1}_{r-1}^T C^I \hat{b}_0^I + [(x+1)^2, \dots, (x+1)^r] C^I \hat{b}_0^I, \\
(\sigma_{nl,nr}^r)_l &= [(x-1) \mathbf{1}_{r-1}^T C^D + [(x-1)^2, \dots, (x-1)^r] C^D] e_l^D, \\
&\quad \text{para } l = 2, \dots, nl + nr - 1, \\
(\sigma_{nl,nr}^r)_l &= [(x+1) \mathbf{1}_{r-1}^T C^I - [(x+1)^2, \dots, (x+1)^r] C^I] e_l^I, \\
&\quad \text{para } l = -nl - nr, \dots, -1,
\end{aligned}$$

donde $e_j^D = (\delta_{j,k})_{k=2}^{nl+nr-1}$ y $e_j^I = (\delta_{j,k})_{k=-nl-nr}^{-1}$.

Como ejemplo, los filtros para $nl + nr = 6$ y $r = 3$ son:

$$\begin{aligned}
 G_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{i-1}^{k-1}) &= -f_{i-1}^{k-1} + \frac{1063}{335}f_i^{k-1} - \frac{2856}{953}f_{i+1}^{k-1} + \frac{244}{953}f_{i+2}^{k-1} \\
 &\quad + \frac{459}{953}f_{i+3}^{k-1} + \frac{372}{953}f_{i+4}^{k-1} - \frac{290}{953}f_{i+5}^{k-1}, \\
 G_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{2i-1}^k) &= \frac{470}{1207}f_{i-6}^{k-1} - \frac{3395}{6147}f_{i-5}^{k-1} - \frac{1727}{2581}f_{i-4}^{k-1} - \frac{918}{2593}f_{i-3}^{k-1} \\
 &\quad + \frac{1245}{358}f_{i-2}^{k-1} - \frac{1919}{583}f_{i-1}^{k-1} + \frac{1044}{545}f_i^{k-1} - \frac{626}{521}f_{i+1}^{k-1} \\
 &\quad + \frac{388}{4425}f_{i+2}^{k-1} + \frac{94}{569}f_{i+3}^{k-1} + \frac{314}{2331}f_{i+4}^{k-1} - \frac{326}{3207}f_{i+5}^{k-1}, \\
 G_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_i^{k-1}) &= \frac{1650}{953}f_{i-6}^{k-1} - \frac{2248}{953}f_{i-5}^{k-1} - \frac{1537}{953}f_{i-4}^{k-1} \\
 &\quad - \frac{1454}{256}f_{i-3}^{k-1} + \frac{3447}{256}f_{i-2}^{k-1} - \frac{8990}{953}f_{i-1}^{k-1} + f_i^{k-1}.
 \end{aligned}$$

Ejemplos

Aplicaremos las diferentes reconstrucciones a la función (1.44). El experimento consiste en bajar tres niveles por valores puntuales, eliminar los coeficientes de escala y subir tres niveles aplicando los diferentes operadores reconstrucción. En primer lugar utilizamos la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$ con *stencils* centrados (excepto en las fronteras que sí se han adaptado) de 6 puntos, es decir con $nl = nr = 3$. Como vemos en la Figura 2.2 (a) para cada discontinuidad hay 5 coeficientes de escala afectados, en concordancia con (2.13). En la Figura (b) representamos la posición de los $d_i^k \geq 10^{-3}$ para cada nivel (eje Y).

Al introducir la técnica *ENO* adaptada para esta reconstrucción obtenemos que el intervalo de escasa aproximación se reduce al que contiene la discontinuidad, Figura 2.2 (c). Lo mismo podemos decir de la técnica *WENO* y *PPH*, Figuras (e) y (f) respectivamente.

Finalmente, con la técnica *SR* la aproximación mejora en la esquina pero no en el salto, ya que en este caso la función $G_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x)$ no cambia de signo en los extremos del intervalo que contiene la discontinuidad, Figura 2.2 (c).

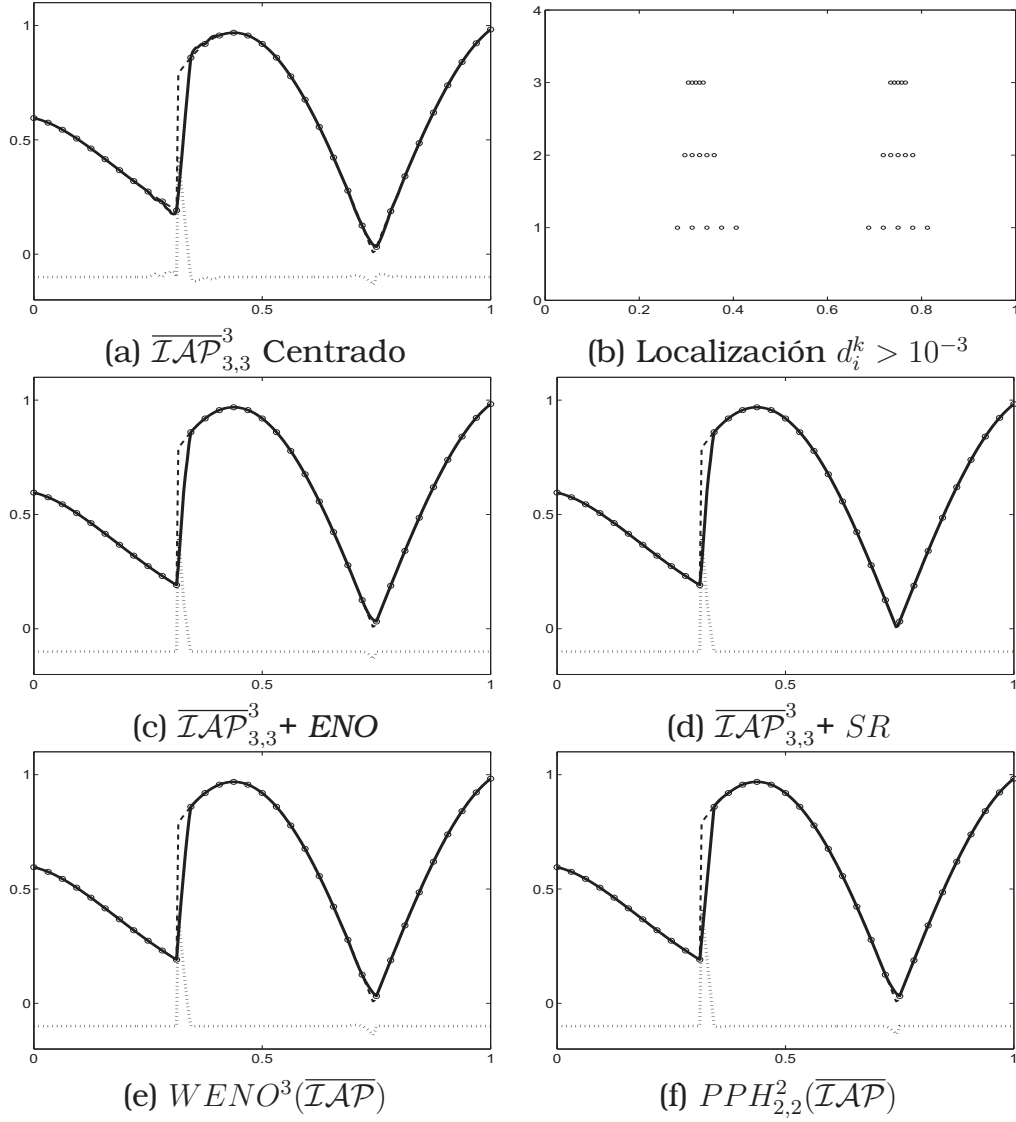


Figura 2.2: Aplicamos 3 niveles de decimación por valores puntuales y 3 niveles de predicción a la función (1.44) discretizada con 257 nodos. En (b) 'o' representa, para cada nivel, la localización de los coeficientes $d_i^k > 10^{-3}$. En el resto, '- -' representa la función de partida, '-.' la reconstrucción, 'o' la función en el nivel más grosero y '..' la diferencia entre la discretización inicial y la reconstrucción (desplazada $-0,1$ en el eje OY).

2.2.2

Interpolación aproximación para medias en celda ($\overline{\mathcal{IAC}}$)

Trabajando con la discretización por medias en celda, definimos la reconstrucción **interpolación aproximación para medias en celda** y la denotamos por $\overline{\mathcal{IAC}}$ de la siguiente manera:

$$(\overline{\mathcal{IAC}} \bar{f}^k)(x) := \frac{d}{dx} \overline{\mathcal{IAP}}(x, F^k),$$

donde $\overline{\mathcal{IAP}}$ es la reconstrucción definida en la sección 2.2.1.

Dado que $\overline{\mathcal{IAP}}$ interpola a los valores de $F(x)$ en los extremos de cada intervalo:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_k(\overline{\mathcal{IAC}} \bar{f}^k)(x))_i &= \frac{1}{h_k} \int_{x_{i-1}^k}^{x_i^k} \frac{d}{dx} \overline{\mathcal{IAP}}(x, F^k) \\ &= \frac{\overline{\mathcal{IAP}}(x_i^k, F^k) - \overline{\mathcal{IAP}}(x_{i-1}^k, F^k)}{h_k} = \frac{F_i^k - F_{i-1}^k}{h_k} = \bar{f}_i^k. \end{aligned}$$

y por tanto es un operador reconstrucción (Definición 1.7).

El operador predicción se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} (P_{k-1}^k f^{k-1})_{2i-1} &= (\mathcal{D}_k \overline{\mathcal{IAC}} f^{k-1})_{2i-1} = \frac{1}{h_k} \int_{x_{2i-2}^k}^{x_{2i-1}^k} \frac{d}{dx} \overline{\mathcal{IAP}}(x; F^{k-1}) \\ &= \frac{1}{h_k} (\overline{\mathcal{IAP}}(x_{2i-1}^k, F^{k-1}) - \overline{\mathcal{IAP}}(x_{2i-2}^k, F^{k-1})) \\ &= \frac{1}{h_k} (\overline{\mathcal{IAP}}(x_{2i-1}^k, F^{k-1}) - F_{i-1}^{k-1}) \equiv \overline{\mathcal{IAC}}(x_{2i-1}^k, f^{k-1}). \end{aligned}$$

Cálculo de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAC}}$

Fijado k , buscamos un polinomio de grado r , $q(x) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1}$, cuya media interpole a la media en celda $\bar{f}_i^{k-1}$ y aproxime en un cierto número de nodos adyacentes. Dicho polinomio puede verse como el de *interpolación aproximación* para valores puntuales a la función $F^{k-1}(x)$. Sin pérdida de generalidad, expresamos el

polinomio sobre números enteros para facilitar la exposición. Las condiciones de interpolación requeridas se traducen en:

$$\frac{q(1) - q(0)}{1} = \sum_{l=2}^{r+1} a_l = \bar{f}_i^{k-1}.$$

Dado que $a_2 = \bar{f}_i^{k-1} - \sum_{l=3}^{r+1} a_l$, entonces:

$$q(x) = a_1 + (\bar{f}_i^{k-1} - \sum_{l=3}^{r+1} a_l)x + \sum_{l=3}^{r+1} a_l x^{l-1} = a_1 + x\bar{f}_i^{k-1} + \sum_{l=3}^{r+1} a_l (x^{l-1} - x).$$

Calculemos las medias en celda de la función en $[j, j+1]$:

$$\begin{aligned} \frac{q(j+1) - q(j)}{1} &= a_1 + (j+1)\bar{f}_i^{k-1} + \sum_{l=3}^{r+1} a_l ((j+1)^{l-1} - j - 1) \\ &\quad - a_1 - j\bar{f}_i^{k-1} - \sum_{l=3}^{r+1} a_l (j^{l-1} - j) \\ &= \bar{f}_i^{k-1} + \sum_{l=3}^{r+1} a_l ((j+1)^{l-1} - j^{l-1} - 1). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Imponemos nl condiciones a la izquierda y nr a la derecha de $\bar{f}_i^{k-1}$, con $nl + nr \geq r$ para asegurarnos que aproximemos y no interpolamos. Las ecuaciones de mínimos cuadrados son:

$$\sum_{l=3}^{r+1} a_l ((j+1)^{l-1} - j^{l-1} - 1) = \bar{f}_{i+j}^{k-1} - \bar{f}_i^{k-1}, \quad (2.20)$$

para $j = -nl, -nl+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, nr$.

En forma matricial tenemos $A_{nl,nr}^{\mathcal{IAC}} \hat{a} = \hat{f} - \mathbf{1}_{nl+nr} \bar{f}_i$, donde:

$$A_{nl,nr}^{\mathcal{IAC}} = \begin{bmatrix} (-nl+1)^2 - (-nl)^2 - 1 & \cdots & (-nl+1)^r - (-nl)^r - 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & \cdots & -(-1)^r - 1 \\ 2 & \cdots & 2^r - 2 \\ 4 & \cdots & 3^r - 2^r - 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (nr+1)^2 - (nr)^2 - 1 & \cdots & (nr+1)^r - (nr)^r - 1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

con $\hat{a} = [a_3, \dots, a_{r+1}]^T$ y $\hat{f} = [\bar{f}_{i-nl}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i-1}^{k-1}, \bar{f}_{i+1}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i+nr}^{k-1}]^T$.

Para obtener los coeficientes $\{a_3, \dots, a_{r+1}\}$ del polinomio $q(x)$ resolvemos el sistema $A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}^T A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}} \hat{a} = A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}^T (\hat{f} - \mathbf{1}_{nl+nr} \bar{f}_i)$:

$$\hat{a} = \left(A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}^T A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}} \right)^{-1} A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}^T (\hat{f} - \mathbf{1}_{nl+nr} \bar{f}_i). \quad (2.22)$$

Definiendo $C = \left(A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}^T A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}} \right)^{-1} A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}^T$, tenemos que:

$$\begin{aligned} a_2 &= \bar{f}_i - \mathbf{1}_{r-1}^T \hat{a} = \bar{f}_i - \mathbf{1}_{r-1}^T C \hat{f} + \mathbf{1}_{r-1}^T C \mathbf{1}_{nl+nr} \bar{f}_i \\ &= (1 + \mathbf{1}_{r-1}^T C \mathbf{1}_{nl+nr}) \bar{f}_i - \mathbf{1}_{r-1}^T C \hat{f}. \end{aligned}$$

NOTA 2.4. El coeficiente a_1 queda sin ser calculado, aunque esto no supone ningún problema, ya que, como finalmente buscamos las medias del polinomio $q(x)$, el coeficiente a_1 se elimina.

Al polinomio $q(x)$ que hemos calculado lo denotamos por:

$$p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r) \equiv p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1).$$

Sobre $\{x_i^{k-1}\}_i$ se denotará $q_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r) \equiv q_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1)$.

Una vez hallados $\{a_l\}_{l=3}^{r+1}$ el valor que aproxima a $\bar{f}_{2i-1}^k$ será:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{2i-1}^k &= \frac{p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(\frac{1}{2}; F^{k-1}, r) - p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(0; F^{k-1}, r)}{1/2} = 2 \left(\sum_{l=1}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} - a_1 \right) \\ &= \sum_{l=2}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-2} = a_2 + \left(\frac{1}{2^1}, \dots, \frac{1}{2^{r-1}}\right)^T \hat{a} \\ &= (1 + \mathbf{1}_{r-1}^T C \mathbf{1}_{nl+nr}) \bar{f}_i - \mathbf{1}_{r-1}^T C \hat{f} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^1}, \dots, \frac{1}{2^{r-1}}\right)^T C \hat{f} - \left(\frac{1}{2^1}, \dots, \frac{1}{2^{r-1}}\right)^T C \mathbf{1}_{nl+nr} \bar{f}_i \\ &= \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2^1}, \dots, 1 - \frac{1}{2^{r-1}}\right)^T C \mathbf{1}_{nl+nr}\right) \bar{f}_i + \left(\frac{1}{2^1} - 1, \dots, \frac{1}{2^{r-1}} - 1\right)^T C \hat{f} \\ &= \sum_{l=-nl}^{nr} (\gamma_{nl,nr}^r)_l \bar{f}_{i+l} \equiv \overline{\mathcal{IAC}}_{nl,nr}^{r-1}(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}), \end{aligned}$$

siendo² (ver la Tabla 2.4):

$$\begin{aligned}(\gamma_{nl,nr}^r)_0 &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2^1}, \dots, 1 - \frac{1}{2^{r-1}}\right)^T C \mathbf{1}_{nl+nr}, \\(\gamma_{nl,nr}^r)_l &= \left(\frac{1}{2^1} - 1, \dots, \frac{1}{2^{r-1}} - 1\right)^T C e_{l+nl+1}, \quad l = -nl, \dots, -1, \\(\gamma_{nl,nr}^r)_l &= \left(\frac{1}{2^1} - 1, \dots, \frac{1}{2^{r-1}} - 1\right)^T C e_{nl+l}, \quad l = 1, \dots, nr,\end{aligned}$$

donde $e_j = (\delta_{j,k})_{k=1}^{nl+nr}$.

l	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$(\gamma_{2,0}^2)_l$			$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{17}{20}$				
$(\gamma_{3,0}^2)_l$		$\frac{3}{56}$	$\frac{2}{56}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{50}{56}$				
$(\gamma_{4,0}^2)_l$	$\frac{4}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{110}{120}$				
$(\gamma_{0,2}^2)_l$					$\frac{23}{20}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{2}{20}$		
$(\gamma_{0,3}^2)_l$					$\frac{62}{56}$	$-\frac{1}{56}$	$-\frac{2}{56}$	$-\frac{3}{56}$	
$(\gamma_{0,4}^2)_l$					$\frac{130}{120}$	$-\frac{1}{120}$	$-\frac{2}{120}$	$-\frac{3}{120}$	$-\frac{4}{120}$
$(\gamma_{2,2}^3)_l$			$\frac{2}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{40}{40}$	$-\frac{1}{40}$	$-\frac{2}{40}$		
$(\gamma_{3,3}^3)_l$		$\frac{3}{112}$	$\frac{2}{112}$	$\frac{1}{112}$	$\frac{112}{112}$	$-\frac{1}{112}$	$-\frac{2}{112}$	$-\frac{3}{112}$	
$(\gamma_{4,4}^3)_l$	$\frac{4}{240}$	$\frac{3}{240}$	$\frac{2}{240}$	$\frac{1}{240}$	$\frac{240}{240}$	$-\frac{1}{240}$	$-\frac{2}{240}$	$-\frac{3}{240}$	$-\frac{4}{240}$
$\bar{f}_{i+l}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-4}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-3}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-2}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-1}^{k-1}$	$\bar{f}_i^{k-1}$	$\bar{f}_{i+1}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+2}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+3}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+4}^{k-1}$

Tabla 2.4: Aproximaciones a $\bar{f}_{2i-1}^k$, con grado del polinomio $r - 1$ (r para F), $\overline{\mathcal{IAC}}_{nl,nr}^r(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}) = \sum_{l=-nl}^{nr-1} (\gamma_{nl,nr}^r)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1}$, interpolando en $\bar{f}_i^{k-1}$ y aproximando con nl nodos a la izquierda y nr nodos a la derecha de $\bar{f}_i^{k-1}$.

Si $nl = nr$ el *stencil* es centrado, pero en caso contrario se tomarían más nodos a un lado que al otro, hecho que utilizaremos para adaptar la técnica *ENO* al caso que nos ocupa.

Orden de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAC}}$

Siendo $F(x) = p(x) = \sum_{l=1}^{s+1} b_l x^{l-1}$ un polinomio de grado s , veremos si puede ser recuperado de forma exacta mediante la reconstrucción *interpolación aproximación* por medias en celda. Tomemos

²En <http://www.uv.es/anims/noguera/> se pueden descargar programas y una GUI en MATLAB® que calculan dichos filtros según los datos introducidos por el usuario.

$p^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1}$ como el polinomio de *interpolación aproximación* de grado r construido a partir de $F(x)$.

En primer lugar estudiamos el caso $s = r$, debiéndose cumplir

$$\frac{p^{\overline{\mathcal{IAC}}}(j+1) - p^{\overline{\mathcal{IAC}}}(j)}{1} = \frac{p(j+1) - p(j)}{1}, \quad j = -nl, \dots, nr,$$

o desarrollando:

$$\sum_{l=1}^{r+1} a_l ((j+1)^{l-1} - j^{l-1}) = \sum_{l=1}^{r+1} b_l ((j+1)^{l-1} - j^{l-1}), \quad j = -nl, \dots, nr,$$

siendo $p^{\overline{\mathcal{IAC}}}(1) - p^{\overline{\mathcal{IAC}}}(0) = \sum_{l=2}^{r+1} a_l = \sum_{l=2}^{r+1} b_l$ la condición interpolatoria.

En forma matricial:

$$M_n \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r+1} \end{bmatrix} = M_n \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{r+1} \end{bmatrix},$$

con

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & (-nl+1)^2 - (-nl)^2 & \cdots & (-nl+1)^{r+1} - (-nl)^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -(-1)^{r+1} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 2^{r+1} - 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & (nr+1)^2 - nr^2 & \cdots & (nr+1)^{r+1} - nr^{r+1} \end{bmatrix}.$$

Observamos que la primera columna es nula lo cual indica que el coeficiente b_1 no puede ser determinado. Esto no representa ningún problema, ya que como lo que vamos a calcular es $p^{\overline{\mathcal{IAC}}}(j+1) - p^{\overline{\mathcal{IAC}}}(j)$, dicho coeficiente se elimina.

Si trabajamos con la matriz

$$M'_n = \begin{bmatrix} 1 & (-nl+1)^2 - (-nl)^2 & \cdots & (-nl+1)^{r+1} - (-nl)^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & -(-1)^{r+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \cdots & 2^{r+1} - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (nr+1)^2 - nr^2 & \cdots & (nr+1)^{r+1} - nr^{r+1} \end{bmatrix},$$

el sistema

$$M'_n \begin{bmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_{r+1} \end{bmatrix} = M'_n \begin{bmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_{r+1} \end{bmatrix},$$

tiene solución única al igual que vimos en la Proposición 2.1. El resto de casos ($r \neq s$) también fueron estudiados en dicha proposición.

Dado que $\bar{f}(x)$ es un grado menor que $F(x)$, podemos enunciar los siguientes resultados:

PROPOSICIÓN 2.2. Si $q_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1)$ es el polinomio de interpolación aproximación para medias en celda de grado $r-1$ (de grado r para $q_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r)$), la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAC}}$ recupera de forma exacta polinomios de grado menor o igual a $r-1$.

COROLARIO 2.2. El orden de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAC}}$ es r .

ENO

Utilizando *stencils* centrados obtenemos coeficientes de escala de elevada magnitud. Con $2n+1$ nodos, si $nl = nr = n$ y en (x_{2i-1}^k, x_{2i}^k) hay una discontinuidad, los coeficientes de escala afectados son

$$d_l^k, \quad i-n \leq l \leq i+n, \quad (2.23)$$

mientras que si la discontinuidad se halla en (x_{2i-2}^k, x_{2i-1}^k) son

$$d_l^k, \quad i-n \leq l \leq i+n-1. \quad (2.24)$$

Para minimizar el número de coeficientes de escala afectados por discontinuidades debemos utilizar la técnica *ENO*. La elección del *stencil* se realiza con el Algoritmo 1.3 o 1.4 (*ENO-MC-I* o *ENO-MC-II*) para medias en celda, vistos en la sección 1.3.1, obteniendo para cada i el valor s_i , que en términos de nl será:

$$nl_i = i - s_i. \quad (2.25)$$

WENO

Partiendo de lo expuesto en la sección 1.3.3, veremos si es posible adaptar *WENO* a la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAC}}$. Los pasos son:

1.- Expresar la aproximación de orden r como una combinación lineal de las $n + 1$ aproximaciones de orden s :

$$p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}_{n,n}^{r-1}} = \sum_{k=0}^n C_k^s p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}_{n-k,k}^{s-1}}, \quad (2.26)$$

con $C_k^s \geq 0 \forall k$ y $\sum_{k=0}^n C_k^s = 1$, siendo $p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}_{nl,nr}^{t-1}}$ el polinomio de orden t de *interpolación aproximación* para medias en celda construido tomando nl nodos a la izquierda y nr nodos a la derecha de $\bar{f}_i^{k-1}$.

En (2.26) se debe cumplir:

- $r > s$ para que aumente el orden de aproximación.
- $2n \geq r$ para que en $p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}_{n,n}^{r-1}}$ se aproxime y no sólo se interpole.
- $n \geq s$ para que en $p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}_{n-k,k}^{s-1}}$ se aproxime y no únicamente se interpole.

Es fácil comprobar que los únicos casos que cumplen las condiciones deseadas son:

$$p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}_{n,n}^2} = \frac{1}{2} p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}_{n,0}^1} + \frac{1}{2} p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}_{0,n}^1}, \quad n \geq 2,$$

es decir:

$$\sum_{l=-n}^{n-1} (\beta_{n,n}^3)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1} = \frac{1}{2} \sum_{l=-n}^0 (\beta_{n,0}^2)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1} + \frac{1}{2} \sum_{l=-1}^{n-1} (\beta_{0,n}^2)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1}, \quad n \geq 2. \quad (2.27)$$

2.- Definimos $\alpha_k^s = \frac{C_k^s}{(\varepsilon + \overline{\mathcal{IS}}_{n-k,k})^2}$, $k = 0, \dots, n$, con $\overline{\mathcal{IS}}_{n-k,k}$ un indicador de suavidad de $\bar{f}(x)$ en el *stencil* $\{x_{i-n+k}^{k-1}, \dots, x_{i+k}^{k-1}\}$, como el de Liu et al. (1.63) o el de Jiang y Shu (1.64) de las reconstrucciones interpolatorias.

3.- La aproximación *WENO* será

$$p_i^{WENO-\overline{\mathcal{IAC}}}(x) = \sum_{k=0}^n \omega_k^s p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}_{n-k,k}^{s-1}}(x),$$

donde $\omega_k^s = \frac{\alpha_k^s}{\sum_{j=0}^n \alpha_j^s}$, para $k = 0, \dots, n$.

PPH

Los coeficientes de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$ son los mismos que para $\overline{\mathcal{IP}}$, es decir:

$$\overline{\mathcal{IAP}}_{2,2}^2(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}) = -\frac{1}{16}\bar{f}_{i-2}^{k-1} + \frac{9}{16}\bar{f}_{i-1}^{k-1} + \frac{9}{16}\bar{f}_i^{k-1} - \frac{1}{16}\bar{f}_{i+1}^{k-1}. \quad (2.28)$$

Siendo ésta la única elección posible que cumpla la condición de aproximación con *stencils* de 4 nodos. Repitiendo el razonamiento expuesto para $\overline{\mathcal{IC}}$ en la sección 1.3.4, obtenemos

$$\left(\overline{\mathcal{IAC}}_{1,1}^1\right)^{PPH}(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}) = \bar{f}_i^{k-1} - \frac{1}{4}H(d^1 \bar{f}_i^{k-1}, d^1 \bar{f}_i^{k-1}). \quad (2.29)$$

donde $H(x, y)$ es la media armónica definida en (1.30).

SR

Los pasos para aplicar *SR* para la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAC}}$ son:

1.- Calculamos los *stencils* *ENO* mediante el Algoritmo 1.3 o 1.4 (*ENO-MC-I* o *ENO-MC-II*) y asignamos los nodos donde interpolaremos para cada intervalo según (2.25).

2.- Si $nr_{i-1} = 0$ y $nl_{i+1} = 0$ los *stencils* para las celdas I_{i-1}^{k-1} y I_{i+1}^{k-1} son disjuntos. Etiquetamos dicha celda como *sospechosa* de contener una discontinuidad.

3.- Para cada celda sospechosa definimos la función

$$G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x) = q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r) - q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r). \quad (2.30)$$

NOTA 2.5. En (2.30) el polinomio $q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r)$ lo calculamos interpolando en $\bar{f}_{i+1}^{k-1}$ y aproximando en los nodos a la derecha de dicho punto y para $q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x)$ interpolamos en $\bar{f}_{i-1}^{k-1}$ y aproximamos en nodos a la izquierda. Aunque en este intervalo no realizamos interpolación en $\bar{f}_i^{k-1}$, el interpolar en $\bar{f}_{i-1}^{k-1}$ y $\bar{f}_{i+1}^{k-1}$ nos permite expresar $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}$ en función de $\{\bar{f}_i^{k-1}\}_i$

Si $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_i^{k-1}) < 0$ etiquetamos I_i^{k-1} como singular.

4.- Si $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_{2i-1}^k) < 0$, el punto x_{2i-1}^k se halla a la derecha de la discontinuidad, por tanto:

$$\bar{f}_{2i}^k = \frac{q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{2i}^k; F^{k-1}, r) - q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}, r)}{h_k} \equiv \frac{p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(0; F^{k-1}, r) - p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(-1/2; F^{k-1}, r)}{1/2}.$$

Para asegurar consistencia $\bar{f}_{2i-1}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i}^k$.

En otro caso x_{2i-1}^k se halla a la izquierda de la discontinuidad, con lo cual:

$$\bar{f}_{2i-1}^k = \frac{q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}, r) - q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x_{2i}^k; F^{k-1}, r)}{h_k} \equiv \frac{p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(3/2; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(1; F^{k-1}, r)}{1/2}.$$

Para asegurar consistencia $\bar{f}_{2i}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i-1}^k$.

NOTA 2.6. Gracias a las condiciones de interpolación en $\bar{f}_{i+1}^{k-1}$ de $q_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r)$ y en $\bar{f}_{i-1}^{k-1}$ de $q_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r)$ se puede aplicar el mismo razonamiento expuesto para la reconstrucción $\overline{\mathcal{IC}}$ en la sección 1.3.5, con lo que la consistencia queda garantizada.

A continuación expondremos el cálculo detallado de filtros para la realización de la técnica SR de la reconstrucción *interpolación aproximación*. Debemos tener en cuenta que hay una diferencia importante en la definición de $A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IC}}}$ y de $A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}$. En el primer caso, nl y nr admiten valores negativos, mientras que en el segundo caso

no. Por esto, para adaptar la Proposición 1.7 a $\overline{\mathcal{IAC}}$ no podemos simplemente cambiar la matriz $A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IC}}}$ por $A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}$ sino que deberemos introducir modificaciones adicionales.

Con el objetivo de reducir la exposición, en lo que resta del apartado asumiremos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} C^D &= \left(A_{0,nl+nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}{}^T A_{0,nl+nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}} \right)^{-1} A_{0,nl+nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}{}^T, \\ \hat{f}_D &= [\bar{f}_{i+2}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i+nl+nr+1}^{k-1}]^T, \\ C^I &= \left(A_{nl+nr,0}^{\overline{\mathcal{IAC}}}{}^T A_{nl+nr,0}^{\overline{\mathcal{IAC}}} \right)^{-1} A_{nl+nr,0}^{\overline{\mathcal{IAC}}}{}^T, \\ \hat{f}_I &= [\bar{f}_{i-nl-nr-1}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i-2}^{k-1}]^T. \end{aligned}$$

Para el cálculo de filtros de $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x)$ utilizaremos el resultado:

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea $A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}$ la matriz asociada al sistema que resuelve el polinomio de interpolación aproximación para medias en celda, con los nodos expresados sobre enteros (definida en 2.21) y sea $(F_{i-1}^{k-1}, F_i^{k-1})$ la localización de la discontinuidad, la función $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}$ para grado r puede ser expresada como sigue:*

$$\begin{aligned} G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x) &= \bar{f}_i^{k-1} + (x-1) \left((1 + \mathbf{1}_{r-1}^T C^D \mathbf{1}_{nl+nr}) \bar{f}_{i+1}^{k-1} - \mathbf{1}_r^T C^D \hat{f}_D \right) \\ &\quad + [(x-1)^2, \dots, (x-1)^{r+1}] C^D \left(\hat{f}_D - \mathbf{1}_{nl+nr} \bar{f}_{i+1}^{k-1} \right) \\ &\quad - x \left((1 + \mathbf{1}_{r-1}^T C^I \mathbf{1}_{nl+nr}) \bar{f}_{i-1}^{k-1} - \mathbf{1}_{r-1}^T C^I \hat{f}_I \right) \\ &\quad + [(x+1)^2 - 1, \dots, (x+1)^r - 1] C^I \left(\hat{f}_I - \mathbf{1}_{nl+nr} \bar{f}_{i-1}^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Demostración: Tomamos los polinomios de interpolación aproximación para medias en celda contruidos a izquierda y derecha de la celda singular:

$$p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1} \quad \text{y} \quad p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r) = \sum_{l=1}^{r+1} b_l x^{l-1}.$$

Gracias a la condición de interpolación, se cumple que:

$$p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(0; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(1; F^{k-1}, r) = \frac{F_i^{k-1} - F_{i-1}^{k-1}}{1} = \bar{f}_i^{k-1}. \quad (2.31)$$

Por tanto:

$$a_1 - \sum_{l=1}^{r+1} b_l = \bar{f}_i^{k-1} \implies a_1 - b_1 = \bar{f}_i^{k-1} + \sum_{l=2}^{r+1} b_l. \quad (2.32)$$

Tal como hemos definido la matriz $A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{IAC}}}$, necesitamos utilizar un juego de nodos enteros distintos al trabajar con $p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}$ y con $p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}$. La Figura 2.3 muestra las elecciones de nodos enteros para el cálculo de cada polinomio de *interpolación aproximación*. Para la función $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x)$ necesitamos una expresión que escoja correctamente los nodos según cada polinomio. Si observamos la Figura 2.3 es sencillo escribir las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(x_{i-1}^{k-1}) &\rightarrow p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(-1; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(1; F^{k-1}, r), \\ G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(x_{2i-1}^{k-1}) &\rightarrow p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(-1/2; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(3/2; F^{k-1}, r), \\ G_i^{\overline{\mathcal{IC}}}(x_i^{k-1}) &\rightarrow p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(0; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(2; F^{k-1}, r). \end{aligned}$$

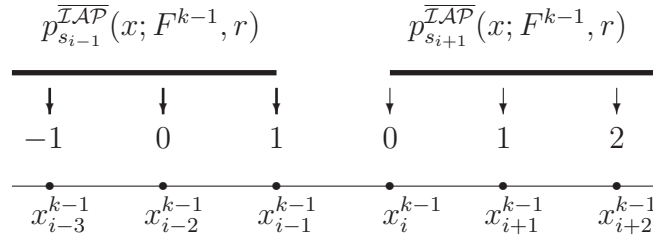


Figura 2.3: Elecciones de nodos enteros necesarios para la correcta construcción de los polinomios $p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r)$ y $p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; F^{k-1}, r)$.

Con esto, la función $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x)$ puede expresarse:

$$G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x) = p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x-1; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x+1; F^{k-1}, r)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{r+1} a_l (x-1)^{l-1} - \sum_{l=1}^{r+1} b_l (x+1)^{l-1} \\
&= a_1 - b_1 + \sum_{l=2}^{r+2} a_l (x-1)^{l-1} - \sum_{l=2}^{r+2} b_l (x+1)^{l-1} \\
&= \bar{f}_i^{k-1} + \sum_{l=2}^{r+1} b_l + \sum_{l=2}^{r+1} a_l (x-1)^{l-1} - \sum_{l=2}^{r+1} b_l (x+1)^{l-1} \\
&= \bar{f}_i^{k-1} + \sum_{l=2}^{r+1} a_l (x-1)^{l-1} - \sum_{l=2}^{r+1} b_l ((x+1)^{l-1} - 1) \\
&= \bar{f}_i^{k-1} + a_2(x-1) + \sum_{l=3}^{r+1} a_l (x-1)^{l-1} - b_2 x - \sum_{l=3}^{r+1} b_l ((x+1)^{l-1} - 1) \\
&= \bar{f}_i^{k-1} + (x-1) \left((1 + \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^D \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}}) \bar{f}_{i+1}^{k-1} - \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^D \hat{f}_D \right) \\
&\quad + [(x-1)^2, \dots, (x-1)^r] C^D (\hat{f}_D - \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}} \bar{f}_{i+1}^{k-1}) \\
&\quad - x \left((1 + \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^I \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}}) \bar{f}_{i-1}^{k-1} - \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^I \hat{f}_I \right) \\
&\quad + [(x+1)^2 - 1, \dots, (x+1)^r - 1] C^I (\hat{f}_I - \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}} \bar{f}_{i-1}^{k-1}) \\
&= \sum_{l=-nl-nr-1}^{nl+nr+1} (\sigma_{nl,nr}^r)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
(\sigma_{nl,nr}^r)_l &= (x \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T + [(x+1)^2 - 1, \dots, (x+1)^r - 1]) C^I e_l^I, \\
&\quad \text{para } l = -nl - nr - 1, \dots, -2, \\
(\sigma_{nl,nr}^r)_{-1} &= -x(1 + \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^I \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}}) - [(x+1)^2 - 1, \dots, (x+1)^r - 1] C^I \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}}, \\
(\sigma_{nl,nr}^r)_0 &= 1, \\
(\sigma_{nl,nr}^r)_1 &= (x-1)(1 + \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^D \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}}) - [(x-1)^2, \dots, (x-1)^r] C^D \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}}, \\
(\sigma_{nl,nr}^r)_l &= (-(x-1) \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T + [(x-1)^2, \dots, (x-1)^r]) C^D e_l^D, \\
&\quad \text{para } l = 2, \dots, nl + nr + 1,
\end{aligned}$$

donde $e_j^D = (\delta_{j,k})_{k=2}^{nl+nr+1}$ y $e_j^I = (\delta_{j,k})_{k=-nl-nr-1}^2$.

□

Los valores que necesitamos para decidir si la celda es singular y para conocer la localización de x_{2i-1}^k respecto a la discontinuidad son $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_{i-1}^{k-1})$, $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_{2i-1}^k)$, $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_i^{k-1})$. Como trabajamos sobre nodos enteros debemos calcular:

$$\begin{aligned} G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_{i-1}^{k-1}) &\rightarrow h_{k-1} G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(0), \\ G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_{2i-1}^k) &\rightarrow h_{k-1} G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(1/2), \\ G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_i^{k-1}) &\rightarrow h_{k-1} G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(1), \end{aligned}$$

aunque como ya advertimos en la Nota 1.17, en la práctica el producto por h_{k-1} puede ser eliminado, ya que en la función G sólo nos interesa el signo, evitando así trabajar con los nodos iniciales.

Utilizando la Proposición 2.3, a modo de ejemplo exponemos los filtros para $nl + nr = 4$ y $r = 3$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_{i-1}^k) & = & h_{k-1} \left(\bar{f}_i^{k-1} - \frac{63}{31} \bar{f}_{i+1}^{k-1} + \frac{81}{155} \bar{f}_{i+2}^{k-1} + \frac{97}{155} \bar{f}_{i+3}^{k-1} \right. \\ & & \left. + \frac{48}{155} \bar{f}_{i+4}^{k-1} - \frac{66}{155} \bar{f}_{i+5}^{k-1} \right), \\ G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_{2i-1}^k) & = & h_{k-1} \left(-\frac{89}{620} \bar{f}_{i-5}^{k-1} + \frac{273}{2480} \bar{f}_{i-4}^{k-1} + \frac{271}{1240} \bar{f}_{i-3}^{k-1} + \frac{451}{2480} \bar{f}_{i-2}^{k-1} \right. \\ & & - \frac{215}{248} \bar{f}_{i-1}^{k-1} + \bar{f}_i^{k-1} - \frac{215}{248} \bar{f}_{i+1}^{k-1} + \frac{451}{2480} \bar{f}_{i+2}^{k-1} \\ & & \left. + \frac{271}{1240} \bar{f}_{i+3}^{k-1} + \frac{273}{2480} \bar{f}_{i+4}^{k-1} - \frac{89}{620} \bar{f}_{i+5}^{k-1} \right), \\ G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_i^k) & = & h_{k-1} \left(-\frac{66}{155} \bar{f}_{i-5}^{k-1} + \frac{48}{155} \bar{f}_{i-4}^{k-1} + \frac{97}{155} \bar{f}_{i-3}^{k-1} + \frac{81}{155} \bar{f}_{i-2}^{k-1} \right. \\ & & \left. - \frac{63}{31} \bar{f}_{i-1}^{k-1} + \bar{f}_i^{k-1} \right). \end{array} \right.$$

Pasemos al cálculo de filtros para el punto cuatro de SR. Dada una celda singular $[x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$, si $G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_{2i-1}^k) \cdot G_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x_i^{k-1}) < 0 \rightarrow \theta_i^{k-1} > x_{2i-1}^k$:

$$\begin{aligned} (P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i-1} &= \frac{p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(\frac{3}{2}; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{IAP}}}(1; F^{k-1}, r)}{1/2} \\ &= 2 \left(\sum_{l=1}^{r+1} b_l \left(\frac{3}{2} \right)^{l-1} - \sum_{l=1}^{r+1} b_l 1^{l-1} \right) \\ &= 2 \left(b_2 \left(\frac{3}{2} - 1 \right) + \sum_{l=3}^{r+1} b_l \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{l-1} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^I \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}}) \bar{f}_{i-1}^{k-1} - \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^I \hat{f}_I \\
&\quad + 2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^r - 1\right] C^I (\hat{f}_I - \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}} \bar{f}_{i-1}^{k-1}) \\
&= \sum_{l=-nl-nr-1}^{-1} (\gamma_{nl+nr+1,-1}^r)_l \bar{f}_l^{k-1},
\end{aligned}$$

donde:

$$(\gamma_{nl+nr+1,-1}^r)_{-1} = (1 + \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^I \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}}) - 2 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^r - 1 \right] C^I \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}},$$

$$(\gamma_{nl+nr+1,-1}^r)_l = -\mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^I + 2 \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1, \dots, \left(\frac{3}{2}\right)^r - 1 \right] C^I e_{-l-nl-nr}.$$

siendo $e_{-l-nl-nr} = (\delta_{-l-nl-nr,-k})_{k=1}^{nl+nr-2}$, para $l = -nl - nr - 1, \dots, -2$.

La notación $\gamma_{nl+nr+1,-1}^r$ no debe confundirnos. El subíndice -1 indica que estamos interpolando en $\bar{f}_{i-1}^{k-1}$ y aproximando a la izquierda de este punto. Se utiliza esta notación por coherencia con expuesto para reconstrucciones interpolatorias. Los filtros resultantes pueden consultarse en la Tabla 2.5.

l	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$(\gamma_{3,-1}^2)$					$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{29}{20}$
$(\gamma_{5,-1}^2)$			$-\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{40}$	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{40}$	$\frac{5}{4}$
$(\gamma_{5,-1}^3)$			$\frac{89}{310}$	$-\frac{273}{1240}$	$-\frac{271}{620}$	$-\frac{451}{1240}$	$\frac{215}{124}$
$(\gamma_{7,-1}^3)$	$\frac{81}{512}$	$-\frac{65}{3584}$	$-\frac{241}{1792}$	$-\frac{171}{896}$	$-\frac{671}{3584}$	$-\frac{443}{3584}$	$\frac{383}{256}$
$(\gamma_{5,-1}^4)$			$-\frac{971}{2208}$	$\frac{1194}{985}$	$-\frac{549}{1472}$	$-\frac{2113}{1123}$	$\frac{1318}{531}$
$(\gamma_{7,-1}^4)$	$-\frac{384}{1349}$	$\frac{511}{1275}$	$\frac{263}{821}$	$-\frac{357}{2497}$	$-\frac{454}{749}$	$-\frac{1913}{2788}$	$\frac{1663}{832}$
$\bar{f}_{i+l}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-7}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-6}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-5}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-4}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-3}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-2}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-1}^{k-1}$

Tabla 2.5: Aproximaciones para $\bar{f}_{2i-1}^{k-1}$ de grado r para $\bar{f}$ ($r+1$ para F), $\overline{\mathcal{IAC}}_{nl,nr}^{r-1}(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}) = \sum_{l=-nl-nr-1}^{-1} (\gamma_{nl+nr+1,-1}^r)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1}$, utilizando interpolación en $\bar{f}_i^{k-1}$ y aproximación en $nl+nr$ puntos a la izquierda de dicho punto.

En otro caso, $\theta_i^{k-1} < x_{2i-1}^k$:

$$(P_{k-1}^k \bar{f}^{k-1})_{2i} = \frac{p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAC}}}(0; F^{k-1}, r) - p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{IAC}}}(\frac{-1}{2}; F^{k-1}, r)}{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= -2\left(-\frac{1}{2}a_2 + \sum_{l=3}^{r+1} a_l \left(-\frac{1}{2}\right)^{l-1}\right) \\
&= (1 + \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^D \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}}) \bar{f}_{i+1}^{k-1} - \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^D \hat{f}_D \\
&\quad - 2\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^r\right] C^D (\hat{f}_D - \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}} \bar{f}_{i+1}^{k-1}) \\
&= \sum_{l=1}^{nl+nr+1} (\gamma_{-1, nl+nr+1}^r)_l \bar{f}_l^{k-1},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
(\gamma_{-1, nl+nr+1}^r)_1 &= 1 + \mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T C^D \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}} + 2 \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^r \right] C^D \mathbf{1}_{\mathbf{nl}+\mathbf{nr}}, \\
(\gamma_{-1, nl+nr+1}^r)_l &= \left(-\mathbf{1}_{\mathbf{r}-1}^T - 2 \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(-\frac{1}{2}\right)^r \right] \right) C^D e_l,
\end{aligned}$$

siendo $e_l = (\delta_{l,k})_{k=2}^{nl+nr+1}$, para $l = 2, \dots, nl + nr + 1$.

Se cumple (ver la Nota 2.2):

$$(\gamma_{-1, nl+nr+1}^r)_l = (\gamma_{nl+nr+1, -1}^r)_{-l}, \quad l = 1, \dots, nl + nr + 1.$$

El valor de $\bar{f}_{2i-1}^k$ se puede hallar mediante $\bar{f}_{2i-1}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i}^k$.

Ejemplos

Los datos de partida corresponden a las medias en celda de una función, en concreto discretizamos la función (1.70) en los nodos centrales de 256 celdas equiespaciadas. Bajamos tres niveles por medias en celda, eliminamos los coeficientes de escala y reconstruimos 3 niveles por *interpolación aproximación*. En la Figura 2.4 (a) usamos la reconstrucción $\mathcal{IAC}$ centrada con $nl = 3$, $nr = 3$ y $r = 3$. En (b) mostramos los d_i^k mayores que 10^{-3} . En el salto hay 7 afectados en concordancia con (2.23). Dichos coeficientes son los que provocan el *fenómeno de Gibbs* en la Figura (a). En la Figura 2.4 (c) utilizamos la técnica *ENO*. Observamos que se mejora la aproximación tanto en la esquina como en el salto, excepto en el intervalo que contiene la discontinuidad, al igual que con *WENO* y *PPH*, Figuras (e) y (f) respectivamente.

En la Figura 2.4 (d), aplicamos la técnica *SR* adaptada a la reconstrucción *interpolación aproximación*. Con dicha adaptación,

aunque la interpolación se produzca en las celdas contiguas a la discontinua y no en ella propia, observamos que la aproximación mejora, consiguiendo los objetivos de dicha técnica.

2.2.3

Funciones límite

Para aproximarnos de forma experimental a la función límite de cada reconstrucción, aplicamos predicción 6 veces a una función nula excepto en un punto.

En la Figura 2.5 partimos de una función con 16 nodos y se aplica predicción 6 niveles. Las funciones límite que se obtienen son suaves y por tanto adecuadas para los esquemas de multirresolución.

Para medias en celda, las funciones límite son más quebradas y por tanto inadecuadas para un esquema de multirresolución como comprobamos en la Figura 2.6.

2.2.4

Diseño de curvas

En este apartado utilizaremos las reconstrucciones de *interpolación aproximación* para el diseño de curvas. Para ello, partimos de una serie de puntos de control y aplicamos varios niveles de la reconstrucción. Tomamos 8 puntos de control $(-3, -5)$, $(-3, -3)$, $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(-1, 3)$, $(-1, 1)$, $(3, -3)$, $(3, -5)$.

En la Figura 2.7 utilizamos $\overline{IAP}$, con diferentes valores para r , nl , nr y cinco niveles. En la Figura 2.8 aplicamos la reconstrucción a otros puntos de control iniciales para 2 dimensiones (derecha) y tres dimensiones (izquierda). Las curvas que obtenemos son suaves en todos los casos.

Para medias en celda, los resultados obtenidos, Figura 2.9, no son satisfactorios ya que se obtienen curvas de escasa suavidad, en consonancia con sus funciones límite vistas en el apartado anterior.

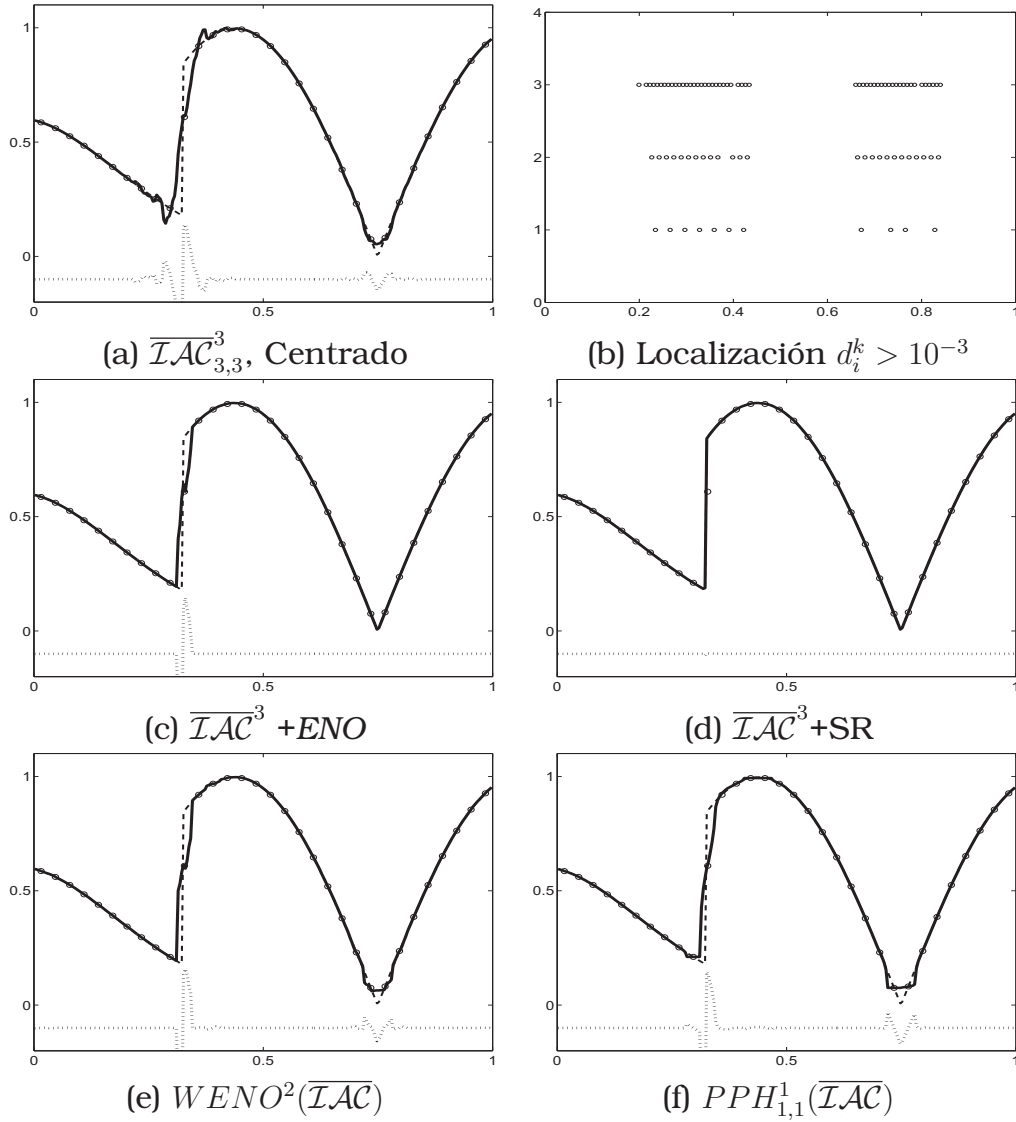


Figura 2.4: Aplicamos 3 niveles de decimación por medias en celda y 3 niveles de predicción a la función (1.70) discretizada con 256 nodos. En (b) 'o' representa, para cada nivel, la localización de los coeficientes $d_i^k > 10^{-3}$. En el resto, '-' representa la función de partida, '.' la reconstrucción, 'o' la función en el nivel más grosero y '-.' la diferencia entre la discretización inicial y la reconstrucción (desplazada $-0,1$ en el eje OY).

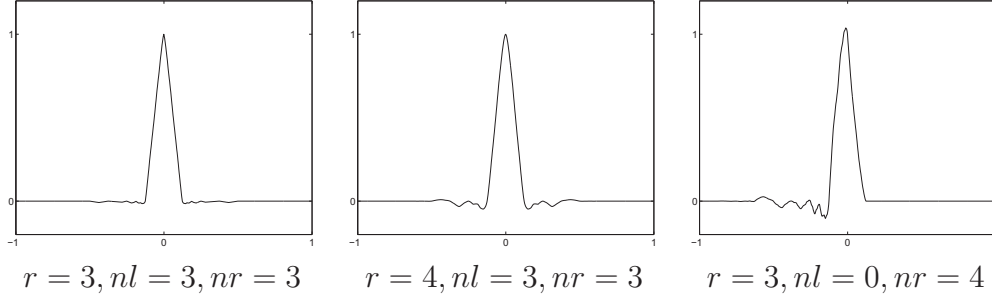


Figura 2.5: Función límite para la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$. Utilizamos diferentes grados, r , y números de nodos donde aproximamos, nl , nr , para el polinomio $p_i^{\overline{\mathcal{IAP}}}(x; f^k, r)$.

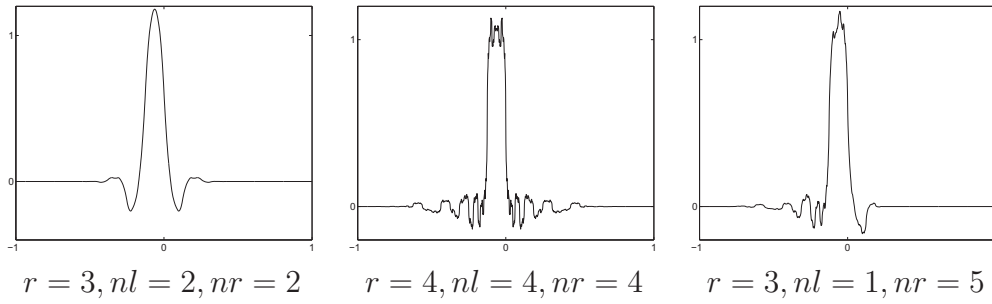


Figura 2.6: Función límite para la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAC}}$. Utilizamos diferentes grados, r , y número de nodos, nl, nr , para el polinomio $p_i^{\overline{\mathcal{IAC}}}(x; f^k, r)$.

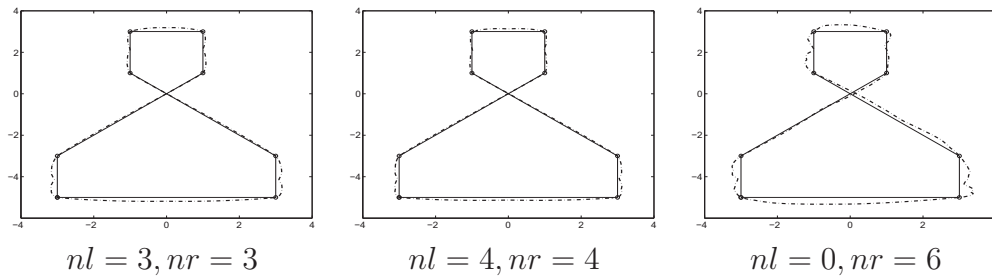


Figura 2.7: Puntos de control iniciales (o-) y curva generada (.-) utilizando cinco niveles de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$ para $r = 3$ y diferentes valores nl (número de nodos a la izquierda de x_{2i-1}^k) y nr (número de nodos a la derecha de x_{2i-1}^k).

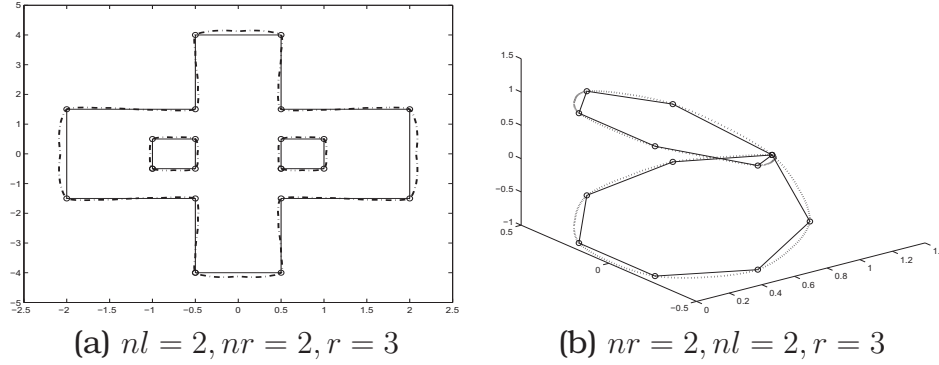


Figura 2.8: Puntos de control iniciales (o-) y curva generada (.-) aplicando 5 niveles de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAP}}$ para valores puntuales en un ejemplo en 2 dimensiones (a) y otro para 3 dimensiones (b).

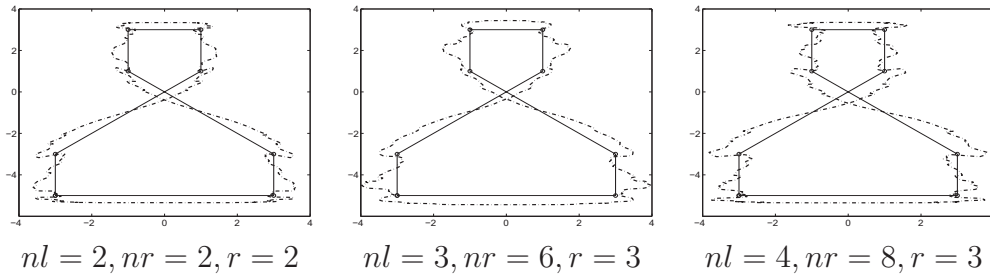


Figura 2.9: Puntos de control iniciales y curva generada utilizando 5 niveles de la reconstrucción $\overline{\mathcal{IAC}}$.

2.3

Reconstrucción utilizando aproximaciones

En este apartado partiremos de los bien conocidos mínimos cuadrados para introducir la reconstrucción por *aproximaciones* en esquemas de multirresolución *à la Harten*, particularizándola para valores puntuales y para medias en celda. Los esquemas tendrán una diferencia fundamental respecto a la reconstrucción *interpolación aproximación*, ya que al eliminar las condiciones interpolatorias, las transformaciones entre $\{F_i^k\}_i$ y sus medias $\{\bar{f}_i^k\}_i$

no serán factibles en todas las situaciones. Aun así, trataremos de aplicar las técnicas vistas en apartados anteriores, *ENO*, *SR*, *WENO*, *PPH*, calculando todos los filtros necesarios para construir las reconstrucciones.

2.3.1

Aproximaciones para valores puntuales ($\overline{\mathcal{AP}}$)

Trabajando con la discretización por valores puntuales (sección 1.2), definimos la **reconstrucción por aproximaciones para valores puntuales** y la denotamos por $\overline{\mathcal{AP}}$ como sigue:

Dados k y el intervalo $[x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$, construimos el polinomio de mínimos cuadrados que aproxima a los valores de f en m puntos adyacentes a $[x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$ para $i = 1, 2, \dots, J_k$. Llamando $q_i^{\overline{\mathcal{AP}}}(x; f^k, r)$ a dicho polinomio:

$$\overline{\mathcal{AP}}_{k-1}(x; f^{k-1}) = q_i^{\overline{\mathcal{AP}}}(x; f^{k-1}, r), \quad x \in [x_{i-1}^k, x_i^k], \quad i = 1, \dots, J_k.$$

NOTA 2.7. No podemos asegurar que la reconstrucción $\overline{\mathcal{AP}}$ cumpla $\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k \bar{f}^k = \bar{f}^k$ con lo cual no es un operador reconstrucción según la Definición 1.7, aunque por abuso del lenguaje seguiremos denominándola como tal.

La predicción se define de la siguiente manera:

$$(P_{k-1}^k f^{k-1})_i = (\mathcal{D}_k \overline{\mathcal{AP}}_{k-1}(\cdot, f^{k-1}))_i = \overline{\mathcal{AP}}_{k-1}(x_i^k, f^{k-1}).$$

El error de predicción será: $e_i^k = f_i^k - \overline{\mathcal{AP}}_{k-1}(x_i^k; f^{k-1})$, $i = 0, \dots, J_k$. Dado que estamos en valores puntuales $e_i^k = 0$, $\forall i$ tal que $x_i^k \in X^{k-1}$ y $d_j^k = e_{2j-1}^k$ para $j = 1, \dots, J_{k-1}$.

Cálculo de la reconstrucción $\overline{\mathcal{AP}}$

Para cada intervalo $I_i^{k-1} = [x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$ buscamos un polinomio de grado r que aproxime a la función por mínimos cuadrados en

m puntos adyacentes al intervalo. Sea $q(x) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1}$ dicho polinomio y $\{f_i^{k-1}\}_i$ la discretización de la función a reconstruir,

NOTA 2.8. Con el fin de simplificar la exposición, al igual que en la reconstrucción $\overline{AP}$ y sin pérdida de generalidad, calcularemos $q(x)$ sobre los nodos $0, 1, 2, \dots$ y no sobre $\{x_i^k\}_i$ ya que éstos los suponemos equiespaciados.

Para aplicar mínimos cuadrados necesitamos al menos $r + 2$ condiciones. Si $m \geq r + 2$ es el número de condiciones, tomamos nl a la izquierda de f_{2i-1}^k y nr a la derecha:

$$q(j) = f_{i+j-1}^{k-1}, \quad j = -nl + 1, \dots, nr. \quad (2.34)$$

En forma matricial, tenemos la matriz $(nl + nr) \times (r + 1)$

$$A_{nl,nr}^{\overline{AP}} = \begin{bmatrix} 1 & (-nl + 1) & \cdots & (-nl + 1)^r \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \cdots & (-1)^r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1^r \\ 1 & 2 & \cdots & 2^r \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (nr) & \cdots & (nr)^r \end{bmatrix},$$

con $\hat{a} = [a_1, \dots, a_{r+1}]$, y $\hat{f} = [f_{i-nl}^{k-1}, \dots, f_{i-1}^{k-1}, f_i^{k-1}, \dots, f_{i+nr-1}^{k-1}]^T$.

Para obtener los coeficientes $\{a_1, \dots, a_{r+1}\}$ del polinomio $q(x)$ debemos resolver el sistema $A_{nl,nr}^{\overline{AP}^T} A_{nl,nr}^{\overline{AP}} \hat{a} = A_{nl,nr}^{\overline{AP}^T} \hat{f}$, es decir:

$$\hat{a} = \left(A_{nl,nr}^{\overline{AP}^T} A_{nl,nr}^{\overline{AP}} \right)^{-1} A_{nl,nr}^{\overline{AP}^T} \hat{f}. \quad (2.35)$$

Al polinomio calculado, $q(x)$, lo denotaremos $p_i^{\overline{AP}}(x; f^{k-1}, r)$, o bien $q_i^{\overline{AP}}(x; f^{k-1}, r)$ si los nodos son $\{x_i^{k-1}\}_i$.

El valor que aproxima a f_{2i-1}^k será $p_i^{\overline{AP}}(\frac{1}{2}; f^{k-1}, r)$. Así:

$$\tilde{f}_{2i-1}^k = \sum_{l=1}^{r+1} a_l \frac{1}{2^{l-1}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^r}\right) C \hat{f}$$

$$= \sum_{l=-nl}^{nr-1} (\beta_{nl,nr}^r)_l f_{i+l}^{k-1} \equiv \overline{\mathcal{AP}}_{nl,nr}^r(x_{2i-1}^{k-1}; f^{k-1}),$$

siendo

$$C = \left(A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{AP}}}{}^T A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{AP}}} \right)^{-1} A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{AP}}}{}^T,$$

$$(\beta_{nl,nr}^r)_l = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^r} \right) C e_{nl+l+1}, \quad l = -nl, \dots, nr-1,$$

donde $e_j = (\delta_{j,k})_{k=1}^{nl+nr}$. En la Tabla 2.6 mostramos³ algunos de estos filtros. Se cumple (ver Nota 2.2):

$$(\beta_{nl,nr}^r)_{-nl+l} = (\beta_{nr,nl}^r)_{nl-l-1}, \quad l = 0, \dots, nl + nr - 1. \quad (2.36)$$

l	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(\beta_{3,1}^1)_l$			$\frac{-1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{11}{20}$			
$(\beta_{2,2}^1)_l$				$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$		
$(\beta_{3,1}^2)_l$			$\frac{-9}{80}$	$\frac{17}{80}$	$\frac{33}{80}$	$\frac{39}{80}$			
$(\beta_{3,2}^2)_l$			$\frac{-3}{20}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{20}$		
$(\beta_{3,3}^2)_l$			$\frac{-3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{-3}{32}$	
$(\beta_{5,1}^3)_l$	$\frac{151}{2016}$	$\frac{-323}{2016}$	$\frac{-23}{504}$	$\frac{113}{504}$	$\frac{131}{288}$	$\frac{911}{2016}$			
$(\beta_{4,2}^3)_l$		$\frac{9}{224}$	$\frac{-33}{224}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{123}{224}$	$\frac{-11}{224}$		
$(\beta_{4,4}^3)_l$		$\frac{-3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{-3}{32}$
f_{i+l}^{k-1}	f_{i-5}^{k-1}	f_{i-4}^{k-1}	f_{i-3}^{k-1}	f_{i-2}^{k-1}	f_{i-1}^{k-1}	f_i^{k-1}	f_{i+1}^{k-1}	f_{i+2}^{k-1}	f_{i+3}^{k-1}

Tabla 2.6: Aproximaciones a f_{2i-1}^k , de grado r , $\overline{\mathcal{AP}}_{nl,nr}^r(x_{2i-1}^k, f^{k-1}) \equiv \sum_{l=-nl}^{nr-1} (\beta_{nl,nr}^r)_l f_{i+l}^{k-1}$, con nl nodos a izquierda y nr a derecha de f_{2i-1}^k .

Orden de la reconstrucción

Los siguientes resultados son triviales teniendo en cuenta la técnica de mínimos cuadrados polinómicos:

³En <http://www.uv.es/anim/noguera/> podemos descargar programas y una GUI en MATLAB® que calculan dichos filtros según los datos introducidos por el usuario.

PROPOSICIÓN 2.4. Si $q_i^{\overline{\mathcal{AP}}}(x; f^{k-1}, r)$ es el polinomio por aproximaciones para valores puntuales de grado r , la reconstrucción $\overline{\mathcal{AP}}$ recupera de forma exacta polinomios de grado menor o igual a r .

COROLARIO 2.3. El orden de la reconstrucción $\overline{\mathcal{AP}}$ es $r + 1$.

ENO

Al utilizar condiciones centradas obtenemos una serie de intervalos de escasa aproximación alrededor de cada discontinuidad. Si $n = nl = nr$ y la discontinuidad se halla en $[x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$ los intervalos afectados son $[x_{i-n}^{k-1}, \dots, x_{i+n-1}^{k-1}]$. Y en términos de coeficientes de escala:

$$d_l^{k-1}, \quad i - nl + 1 \leq l \leq i + nr. \quad (2.37)$$

Para evitar utilizar *stencils* que crucen discontinuidades se utiliza el Algoritmo 1.1 o 1.2 (ENO-VP-I o ENO-VP-II) para *stencils* de longitud m . Para cada intervalo $[x_{i-1}^{k-1}, x_i^{k-1}]$ obtenemos el valor s_i que da lugar al *stencil* $\mathcal{S}_i^{ENO} = \{x_{s_i-1}^{k-1}, \dots, x_{m+s_i-2}^{k-1}\}$. Para construir el polinomio de mínimos cuadrados sobre $\mathcal{S}_i^{ENO}$ utilizamos las ecuaciones (2.34) con (de forma similar a la Figura 2.1 pero aproximado en todos los nodos):

$$nl_i = i - s_i + 1, \quad nr_i = m - nl_i. \quad (2.38)$$

WENO

El primer paso para aplicar WENO a la reconstrucción por aproximaciones para valores puntuales es expresar la aproximación de orden $r + 1$ como una combinación lineal de las n aproximaciones de orden $s + 1$, con $r > s$:

$$\overline{\mathcal{AP}}_{n,n}^r p_i = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^s \overline{\mathcal{AP}}_{n-k,k+1}^s p_i, \quad (2.39)$$

con $C_k^s \geq 0$ y $\sum_{k=0}^{n-1} C_k^s = 1$, siendo $\overline{\mathcal{AP}}_{nl,nr}^t$ el polinomio de la reconstrucción por *aproximaciones* de grado t construido tomando nl nodos a la izquierda y nr a la derecha de x_{2i-1}^k . Para que realmente se aproxime, en (2.39) debemos tomar $2n \geq r+2$ y $2n \geq s+2$.

En (2.39) no se ha podido hallar ninguna combinación que cumpla las condiciones expuestas, con lo que *WENO* no es viable para esta reconstrucción.

PPH

Si trabajamos con *stencils* de 4 nodos ($nl + nr = 4$), tenemos dos posibles elecciones para aplicar *PPH*: $\overline{\mathcal{AP}}_{2,2}^1$ y $\overline{\mathcal{AP}}_{2,2}^2$. Para $r > 2$ no se cumple la condición $r + 2 \leq nl + nr$.

Para $r = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{AP}}_{2,2}^1(x_{2i-1}^k; f^{k-1}) &= \frac{1}{4}f_{i-2}^{k-1} + \frac{1}{4}f_{i-1}^{k-1} + \frac{1}{4}f_i^{k-1} + \frac{1}{4}f_{i+1}^{k-1} \\ &= \frac{1}{2}(f_{i-1}^{k-1} + f_i^{k-1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 f_{i-1}^{k-1} + d^2 f_i^{k-1}}{2}\right). \end{aligned}$$

Con esto

$$\left(\overline{\mathcal{AP}}_{2,2}^1\right)^{PPH}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}) = \frac{1}{2}(f_{i-1}^{k-1} + f_i^{k-1}) + \frac{1}{2}H(d^2 f_{i-1}^{k-1}, d^2 f_i^{k-1}),$$

donde $H(x, y)$ es la media armónica definida en (1.30).

Para $r = 2$ los coeficientes son los mismos que para $\overline{\mathcal{IP}}_{2,2}^3$, con lo cual:

$$\left(\overline{\mathcal{AP}}_{2,2}^2\right)^{PPH}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}) = \frac{1}{2}(f_{i-1}^{k-1} + f_i^{k-1}) - \frac{1}{8}H(d^2 f_{i-1}^{k-1}, d^2 f_i^{k-1}).$$

SR

El algoritmo *SR* adaptado a la reconstrucción por *aproximaciones* para valores puntuales se resume en:

1.- Calculamos los *stencils ENO* mediante el Algoritmo 1.1 o 1.2 (*ENO-VP-I* o *ENO-VP-II*) y construimos el polinomio $p_{s_i}^{\mathcal{AP}}$ según (2.38) y (2.34).

2.- Si $nr_{i-1} = 1$ y $nl_{i+1} = 1$ los *stencils* para las celdas I_{i-1}^{k-1} y I_{i+1}^{k-1} son disjuntos. Etiquetamos dicha celda como *sospechosa* de contener una discontinuidad.

3.- Para cada celda sospechosa definimos la función

$$G_i^{\overline{AP}}(x) = q_{s_{i+1}}^{\overline{AP}}(x; f^{k-1}, r) - q_{s_{i-1}}^{\overline{AP}}(x; f^{k-1}, r).$$

Si $G_i^{\overline{AP}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{AP}}(x_i^{k-1}) < 0$ etiquetamos la celda I_i^{k-1} como singular

4.- Si $G_i^{\overline{AP}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{AP}}(x_{2i-1}^k) < 0$, el punto x_{2i-1}^k se halla a la derecha de la discontinuidad, por tanto $\tilde{f}_{2i-1}^k = q_{s_{i+1}}^{\overline{AP}}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}, r)$ o según nuestra forma de calcular:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2i-1}^k &= p_{s_{i+1}}^{\overline{AP}}(1/2; f^{k-1}, r) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \\ &= \left[1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^r}\right] C^D [f_i^{k-1}, \dots, f_{i+nl+nr-1}^{k-1}]^T = \sum_{l=0}^{nl+nr-1} (\beta_{0, nl+nr}^r)_l f_l^{k-1}, \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} C^D &= \left(A_{0, nl+nr}^{\overline{AP}^T} A_{0, nl+nr}^{\overline{AP}} \right)^{-1} A_{0, nr+nr}^{\overline{AP}^T}, \\ (\beta_{0, nl+nr}^r)_l &= \left[1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^r}\right] C^D e_l^D, \quad l = 0, \dots, nl + nr - 1, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $e_j^D = (\delta_{j,k})_{k=0}^{nl+nr-1}$. En la Tabla 2.7 mostramos estos filtros para ciertos valores de nl , nr y r .

En otro caso x_{2i-1}^k se halla a la izquierda de la discontinuidad, con lo cual $\tilde{f}_{2i-1}^k = q_{s_{i-1}}^{\overline{AP}}(x_{2i-1}^k; f^{k-1}, r)$ o según nuestra forma calcular:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{2i-1}^k &= p_{s_{i-1}}^{\overline{AP}}\left(\frac{1}{2}; f^{k-1}, r\right) = \sum_{l=1}^{r+1} b_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \\ &= \left[1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^r}\right] C^I [f_{i-nl-nr}^{k-1}, \dots, f_{i-1}^{k-1}]^T = \sum_{l=-nl-nr}^{-1} (\beta_{nl+nr, 0}^r)_l f_l^{k-1}, \end{aligned}$$

siendo

$$C^I = \left(A_{nl+nr, 0}^{\overline{AP}^T} A_{nl+nr, 0}^{\overline{AP}} \right)^{-1} A_{nr+nr, 0}^{\overline{AP}^T}, \quad (2.41)$$

$$(\beta_{nl+nr,0}^r)_l = \left[1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^r}\right] C^I e_l^I, \quad l = -nl - nr, \dots, -1,$$

donde $e_j^I = (\delta_{j,k})_{k=-nl-nr}^{-1}$. Estos filtros son simétricos de los anteriores, es decir, se cumple (ver Nota 2.2):

$$(\beta_{0,nl+nr}^r)_l = (\beta_{nl+nr,0}^r)_{-l-1}, \quad l = 0, \dots, nl + nr - 1.$$

l	0	1	2	3	4	5
$(\beta_{0,3}^1)_l$	$\frac{13}{12}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{12}$			
$(\beta_{0,4}^2)_l$	$\frac{123}{80}$	$-\frac{19}{80}$	$-\frac{51}{80}$	$\frac{27}{80}$		
$(\beta_{0,5}^3)_l$	$\frac{2129}{1120}$	$-\frac{583}{560}$	$-\frac{57}{140}$	$\frac{467}{560}$	$-\frac{321}{1120}$	
$(\beta_{0,6}^3)_l$	$\frac{636}{377}$	$-\frac{543}{1199}$	$-\frac{313}{504}$	$\frac{43}{504}$	$\frac{590}{1037}$	$-\frac{77}{288}$
f_{i+l}^{k-1}	f_i^{k-1}	f_{i+1}^{k-1}	f_{i+2}^{k-1}	f_{i+3}^{k-1}	f_{i+4}^{k-1}	f_{i+5}^{k-1}

Tabla 2.7: Aproximaciones a f_{2i-1}^k , de grado r , $\overline{\mathcal{AP}}_{0,nr+nl}^r(x_{2i-1}^k; f^{k-1}) \equiv \sum_{l=-nl}^{nr-1} (\beta_{nl,nr}^r)_l f_{i+l}^{k-1}$, con 0 nodos a izquierda y $nl + nr$ a derecha de f_{2i-1}^k .

Finalmente desarrollemos el cálculo para la función G :

$$\begin{aligned} G_i^{\overline{\mathcal{AP}}}(x) &= p_{s_{i+1}}^{\overline{\mathcal{AP}}}(x; f^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{\mathcal{AP}}}(x; f^{k-1}, r) \\ &= [1, x, \dots, x^r] (C^D [\bar{f}_i^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i+nl+nr-1}^{k-1}]^T - C^I [\bar{f}_{i-nl-nr}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i-1}^{k-1}]^T) \\ &= \sum_{l=-nl-nr}^{nl+nr-1} (\sigma_{nl,nr}^r)_{i+l} \bar{f}_{i+l}^{k-1}, \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} (\sigma_{nl,nr}^r)_l &= -[1, x, \dots, x^r] C^I e_l^I, \quad l = -nl - nr, \dots, -1, \\ (\sigma_{nl,nr}^r)_l &= [1, x, \dots, x^r] C^D e_l^D, \quad l = 0, \dots, nl + nr - 1, \end{aligned}$$

con $e_j^I = (\delta_{j,k})_{k=-nl-nr}^{-1}$, $e_j^D = (\delta_{j,k})_{k=0}^{nl+nr-1}$, y C^D , C^I las definidas en (2.40) y (2.41) respectivamente.

Como ejemplo exponemos los filtros para $r = 3$ y $nl + nr = 6$:

$$\begin{aligned} G_i^{\overline{\mathcal{AP}}}(x_{i-1}^{k-1}) &= \frac{2}{63} f_{i-6}^{k-1} - \frac{11}{126} f_{i-5}^{k-1} + \frac{2}{63} f_{i-4}^{k-1} + \frac{1}{9} f_{i-3}^{k-1} - \frac{8}{63} f_{i-2}^{k-1} - \frac{121}{126} f_{i-1}^{k-1} \\ &\quad + \frac{8}{3} f_i^{k-1} - \frac{4}{3} f_{i+1}^{k-1} - \frac{4}{3} f_{i+2}^{k-1} + \frac{1}{3} f_{i+3}^{k-1} + \frac{4}{3} f_{i+4}^{k-1} - \frac{2}{3} f_{i+5}^{k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_i^{\overline{\mathcal{AP}}}(x_{2i-1}^k) &= \frac{77}{288}f_{i-6}^{k-1} - \frac{590}{1037}f_{i-5}^{k-1} - \frac{43}{504}f_{i-4}^{k-1} + \frac{313}{504}f_{i-3}^{k-1} + \frac{543}{1199}f_{i-2}^{k-1} - \frac{636}{377}f_{i-1}^{k-1} \\
&\quad + \frac{636}{377}f_i^{k-1} - \frac{543}{1199}f_{i+1}^{k-1} - \frac{313}{504}f_{i+2}^{k-1} + \frac{43}{504}f_{i+3}^{k-1} + \frac{590}{1037}f_{i+4}^{k-1} - \frac{77}{288}f_{i+5}^{k-1}, \\
G_i^{\overline{\mathcal{AP}}}(x_i^{k-1}) &= \frac{2}{3}f_{i-6}^{k-1} - \frac{4}{3}f_{i-5}^{k-1} - \frac{1}{3}f_{i-4}^{k-1} + \frac{4}{3}f_{i-3}^{k-1} - \frac{4}{3}f_{i-2}^{k-1} - \frac{8}{3}f_{i-1}^{k-1} \\
&\quad + \frac{121}{126}f_i^{k-1} + \frac{8}{63}f_{i+1}^{k-1} - \frac{1}{9}f_{i+2}^{k-1} - \frac{2}{63}f_{i+3}^{k-1} + \frac{11}{126}f_{i+4}^{k-1} - \frac{2}{63}f_{i+5}^{k-1}.
\end{aligned}$$

Ejemplos

Aplicamos la reconstrucción $\overline{\mathcal{AP}}$ a la función (1.44) compuesta por trozos suaves que contiene un salto y una esquina. Bajamos tres niveles por valores puntuales y subimos tres mediante la reconstrucción $\overline{\mathcal{AP}}$.

En la Figura 2.10 utilizamos *stencils* de 6 nodos centrados y grado 3 para el polinomio de mínimos cuadrados. En (a) se aprecia el *fenómeno de Gibbs* alrededor de los saltos, dando lugar a coeficientes de escala de magnitud elevada, como apreciamos en la Figura (b). En dicho gráfico representamos para cada nivel (eje Y) los coeficientes $d_i^k \geq 10^{-3}$. En el primer nivel aparecen 5 coeficientes de elevada magnitud en consonancia con (2.37).

Al utilizar la técnica *ENO*, Figura 2.10 (c), dichos intervalos se reducen a uno, el que contiene la discontinuidad. Finalmente, mediante *SR*, la aproximación mejora en la esquina y no en el salto ya que $G_i^{\overline{\mathcal{AP}}}(x)$ no cambia de signo en los extremos del intervalo que lo contiene, Figura 2.10 (d).

WENO no aparece, ya que hemos comprobado que no es posible aplicarlo en este caso. Para *PPH*, sin embargo tenemos dos posibilidades con *stencils* de 4 nodos: $r = 1$ y $r = 2$. En ambos casos desaparece el *fenómeno de Gibbs*. Para $r = 2$ la aproximación *PPH* es la misma que para la reconstrucción interpolatoria. Para $r = 1$ la aproximación empeora, debido a que utilizamos rectas para reconstruir.

Observamos que en el caso centrado se produce una reconstrucción de escasa suavidad alrededor de las discontinuidades. Se debe a la imposición de consistencia, $f_{2i}^k = f_i^{k-1}$. Podríamos obtener

aproximaciones más suaves tomando:

$$\tilde{f}_{2i}^k = \sum_{l=1}^{r+1} a_l 1^{l-1} = \mathbf{1}_r^T \left(A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{AP}}}^T A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{AP}}} \right)^{-1} A_{nl,nr}^{\overline{\mathcal{AP}}}^T [f_{i-nl}^{k-1}, \dots, f_{i+nl-1}^{k-1}]^T. \quad (2.42)$$

Con estos cambios obtenemos la Figura 2.11. En el caso centrado conseguimos una reconstrucción suave, pero en la técnica *SR* no se obtiene mejora en la discontinuidad esquina, ya que esta reconstrucción no sería consistente y por tanto perdemos información necesaria para recuperar con exactitud los datos de niveles superiores, hecho que también se observa en el salto.

2.3.2

Aproximaciones para medias en celda ($\overline{\mathcal{AC}}$)

Utilizando la discretización por medias en celda definida con detalle en la sección 1.3, definimos la reconstrucción por **aproximaciones para medias en celda** y la denotamos por $\overline{\mathcal{AC}}$ de la siguiente manera:

$$(\overline{\mathcal{AC}} \bar{f}^k)(x) := \frac{d}{dx} \overline{\mathcal{AP}}(x; F^k).$$

NOTA 2.9. Para asegurar consistencia, (1.1), en la reconstrucción $\overline{\mathcal{AC}}$ debemos utilizar la relación $\bar{f}_{2i}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i-1}^k$ para hallar uno de los dos valores que reconstruimos, es decir, $\bar{f}_{2i}^k$ o $\bar{f}_{2i-1}^k$.

NOTA 2.10. $\overline{\mathcal{AC}}$ no es una reconstrucción según la Definición 1.7 ya que no cumple que $\mathcal{D}_k \overline{\mathcal{AC}} = I_{V^k}$, aunque seguiremos denominándola como tal.

El operador predicción se calcula como sigue:

$$(P_{k-1}^k f^{k-1})_{2i-1} = (\mathcal{D}_k \overline{\mathcal{AC}}_{k-1} f^{k-1})_{2i-1} = \frac{1}{h_k} \int_{x_{2i-2}^k}^{x_{2i-1}^k} \frac{d}{dx} \overline{\mathcal{AP}}(x; F^{k-1})$$

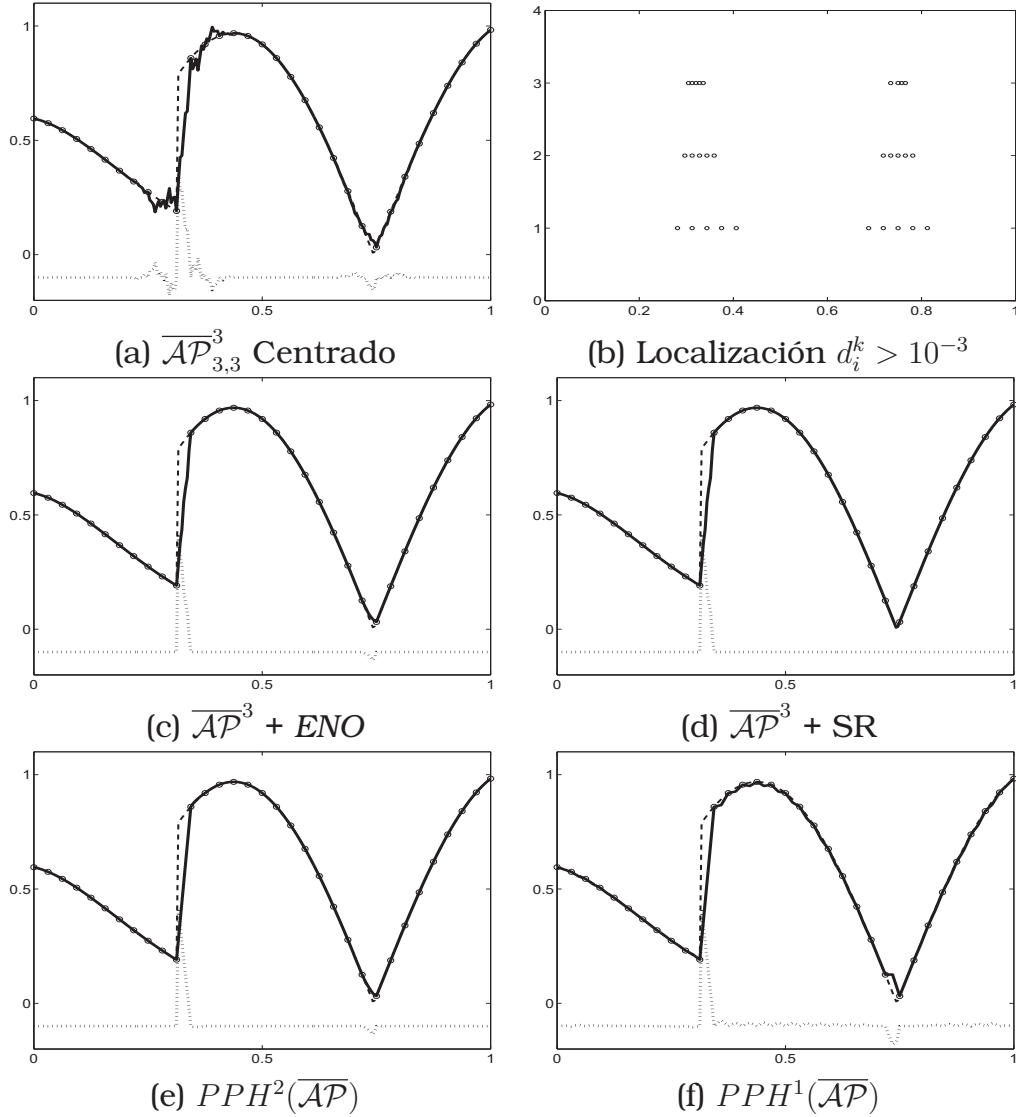


Figura 2.10: Aplicamos 3 niveles de decimación por valores puntuales y 3 niveles de predicción a la función (1.44) discretizada con 257 nodos. En (b) 'o' representa, para cada nivel, la localización de los coeficientes $d_i^k > 10^{-3}$. En el resto, '- -' representa la función de partida, '...' la reconstrucción, 'o' la función en el nivel más grosero y '..' la diferencia entre la discretización inicial y la reconstrucción (desplazada $-0,1$ en el eje OY).

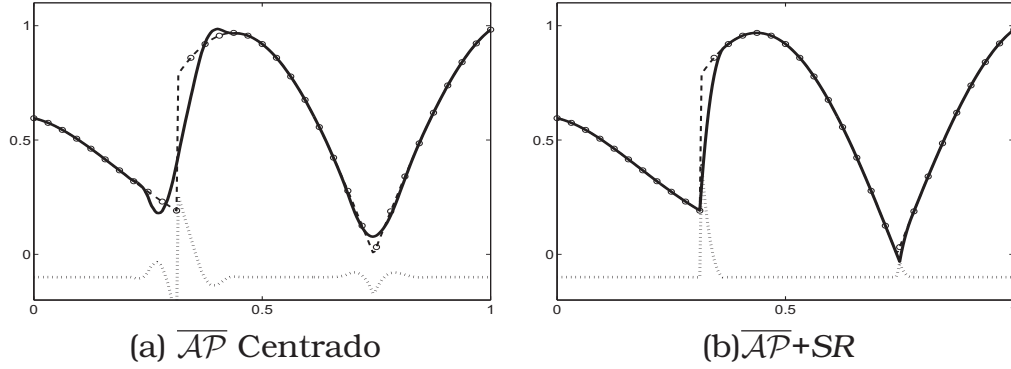


Figura 2.11: Repetimos ciertos casos del experimento de la Figura 2.10 aproximando al reconstruir tanto en f_{2i-1}^k como en f_{2i}^k , según (2.42).

$$= \frac{\overline{\mathcal{AP}}(x_{2i-1}^k; F^{k-1}) - \overline{\mathcal{AP}}(x_{2i-2}^k; F^{k-1})}{h_k} \equiv \overline{\mathcal{AC}}(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}).$$

Cálculo de la reconstrucción $\overline{\mathcal{AC}}$

Fijado k , buscamos un polinomio de grado r , $q(x) = \sum_{l=1}^{r+1} a_l x^{l-1}$, cuyas medias aproximen a las medias en celda $\{\bar{f}_i^{k-1}\}_i$. O dicho de otro modo, $q(x)$ debe interpolar a la función $F^{k-1}(x)$.

Al considerar las medias, a_1 será indeterminado y quedarán por calcular r coeficientes. Para aplicar mínimos cuadrados necesitaremos pues m condiciones, con $m \geq r+1$, de las cuales nl se tomarán a la izquierda de $\bar{f}_i^{k-1}$ y nr a la derecha ($m = nl + nr + 1 > r$). Sin pérdida de generalidad, expresamos el polinomio sobre números enteros para facilitar la exposición. Imponiendo dichas condiciones, las ecuaciones de mínimos cuadrados serán:

$$\sum_{l=1}^{r+1} a_l ((j+1)^{l-1} - j^{l-1}) = \bar{f}_{i+j}^{k-1}, \quad j = -nl, \dots, nr. \quad (2.43)$$

En forma matricial el sistema será $A_{nl,nr}^{\overline{AC}} \hat{a} = \hat{f}$, donde:

$$A_{nl,nr}^{\overline{AC}} = \begin{bmatrix} (-nl+1)^1 - (-nl)^1 & \cdots & (-nl+1)^r - (-nl)^r \\ (-nl+2)^1 - (-nl+1)^1 & \cdots & (-nl+2)^r - (-nl+1)^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & -(-1)^r \\ 1 & \cdots & 1^r \\ 1 & \cdots & 2^r - 1^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (nr+1)^1 - (nr)^1 & \cdots & (nr+1)^r - (nr)^r \end{bmatrix},$$

con $\hat{a} = [a_2, \dots, a_{r+1}]^T$, y $\hat{f} = [\bar{f}_{i-nl}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i-1}^{k-1}, \bar{f}_i^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i+nr}^{k-1}]^T$.

Para obtener los coeficientes $\{a_2, \dots, a_{r+1}\}$ del polinomio $q(x)$ resolvemos el sistema $A_{nl,nr}^{\overline{AC}^T} A_{nl,nr}^{\overline{AC}} \hat{a} = A_{nl,nr}^{\overline{AC}^T} \hat{f}$:

$$\hat{a} = (A_{nl,nr}^{\overline{AC}^T} A_{nl,nr}^{\overline{AC}})^{-1} A_{nl,nr}^{\overline{AC}^T} \hat{f} = C \hat{f}.$$

NOTA 2.11. El coeficiente a_1 queda sin ser calculado, aunque esto no supone ningún problema, ya que como finalmente buscamos las medias del polinomio $q(x)$, el coeficiente a_1 se elimina.

Al polinomio $q(x)$ que hemos calculado lo denotamos por:

$$q_i^{\overline{AC}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1) \equiv q_i^{\overline{AP}}(x; F^{k-1}, r),$$

o $p_i^{\overline{AC}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1) \equiv p_i^{\overline{AP}}(x; F^{k-1}, r)$ sobre nodos enteros.

Una vez hallados $\{a_l\}_{l=2}^{r+1}$ el valor que aproxima a $\bar{f}_{2i-1}^k$ será:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{2i-1}^k &= \frac{p_{s_i}^{\overline{AC}}(\frac{1}{2}; \bar{f}^{k-1}, r-1) - p_{s_i}^{\overline{AC}}(0; \bar{f}^{k-1}, r-1)}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left(\sum_{l=1}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} - a_1 \right) = \sum_{l=2}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-2} \\ &= \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{r-1}}\right)^T \hat{a} = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{r-1}}\right)^T C \hat{f} \\ &= \sum_{l=-nl}^{nr} (\gamma_{nl,nr}^r)_l f_{i+l}^{k-1} \equiv \overline{AC}_{nl,nr}^{r-1}(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}), \end{aligned} \quad (2.44)$$

siendo:

$$(\gamma_{nl,nr}^r)_l = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{r-1}})^T C e_{l+nl+1}, \quad l = -nl, \dots, nr,$$

$$C = (A_{nl,nr}^{\overline{AC}})^T (A_{nl,nr}^{\overline{AC}})^{-1} A_{nl,nr}^{\overline{AC}}^T,$$

con $e_j = (\delta_{j,k})_{k=1}^{nl+nr+1}$. En la Tabla 2.8 podemos ver⁴ algunos de estos coeficientes.

l	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$(\gamma_{2,0}^2)_l$			$-\frac{1}{14}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{24}$				
$(\beta_{1,1}^2)_l$				$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{24}$			
$(\gamma_{0,2}^2)_l$					$\frac{23}{24}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{24}$		
$(\gamma_{4,0}^3)_l$	$-\frac{1}{140}$	$-\frac{13}{280}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{17}{56}$	$\frac{97}{140}$				
$(\gamma_{3,1}^3)_l$		$-\frac{23}{140}$	$\frac{13}{56}$	$\frac{29}{70}$	$\frac{107}{280}$	$\frac{19}{140}$			
$(\gamma_{2,2}^3)_l$			$-\frac{1}{28}$	$\frac{103}{280}$	$\frac{17}{35}$	$\frac{89}{280}$	$-\frac{19}{140}$		
$(\gamma_{1,3}^3)_l$				$\frac{53}{140}$	$\frac{101}{280}$	$\frac{19}{70}$	$\frac{31}{280}$	$-\frac{17}{140}$	
$(\gamma_{0,4}^3)_l$					$\frac{151}{140}$	$\frac{59}{280}$	$-\frac{8}{35}$	$-\frac{67}{280}$	$\frac{5}{28}$
$(\gamma_{3,3}^4)_l$	$-\frac{315}{2688}$	$\frac{565}{2688}$	$\frac{925}{2688}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{616}{2688}$	$\frac{29}{384}$	$-\frac{65}{896}$		
$(\gamma_{4,4}^4)_l$	$-\frac{7}{64}$	$\frac{383}{4224}$	$\frac{553}{2636}$	$\frac{1257}{4825}$	$\frac{59}{231}$	$\frac{242}{1169}$	$\frac{784}{6131}$	$\frac{43}{1408}$	$-\frac{51}{704}$
$\bar{f}_{i+l}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-4}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-3}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-2}^{k-1}$	$\bar{f}_{i-1}^{k-1}$	$\bar{f}_i^{k-1}$	$\bar{f}_{i+1}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+2}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+3}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+4}^{k-1}$

Tabla 2.8: Aproximaciones a $\bar{f}_{2i-1}^k$ con grado $r-1$ para $\bar{f}$ (r para F), $\overline{AC}_{nl,nr}^{r-1}(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}) = \sum_{l=-nl}^{nr} (\gamma_{nl,nr}^r)_l \bar{f}_{i+l}^{k-1}$, utilizando aproximación con nl puntos a la izquierda y nr puntos a la derecha de $\bar{f}_i^{k-1}$ (este incluido).

Orden de la reconstrucción $\overline{AC}$

Teniendo en cuenta la definición de la reconstrucción $\overline{AC}$, se cumplen los siguientes resultados:

⁴Desde <http://www.uv.es/animations/noguera/> podemos descargar programas y una GUI en MATLAB® que calculan dichos filtros según los datos introducidos por el usuario.

PROPOSICIÓN 2.5. Si $q_i^{\overline{\mathcal{AC}}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1)$ es el polinomio por aproximaciones para medias en celda de grado $r-1$ (grado r para $q_i^{\overline{\mathcal{AP}}}(x; F^{k-1}, r)$), la reconstrucción $\overline{\mathcal{AC}}$ recupera de forma exacta polinomios de grado menor o igual a $r-1$.

COROLARIO 2.4. El orden de la reconstrucción $\overline{\mathcal{AC}}$ es r .

ENO

Utilizamos *stencils* centrados de $n+1$ nodos, es decir si $nl = nr = n$ y en (x_{2i-1}^k, x_{2i}^k) hay una discontinuidad, los coeficientes de escala afectados son

$$d_l^k, \quad i-n \leq l \leq i+n, \quad (2.45)$$

mientras que si la discontinuidad se halla en (x_{2i-2}^k, x_{2i-1}^k) son

$$d_l^k, \quad i-n \leq l \leq i+n-1. \quad (2.46)$$

Para evitar utilizar *stencils* que crucen discontinuidades aplicamos la técnica *ENO* al igual que en apartados anteriores. La elección del *stencil* se realiza con el Algoritmo 1.3 o 1.4 (*ENO-MC-I* o *ENO-MC-II*), obteniendo para cada i el valor s_i , que en términos de nl_i y nr_i será:

$$nl_i = i - s_i, \quad nr_i = m - nl_i - 1. \quad (2.47)$$

WENO

La primera condición que se debe satisfacer es la expresión de la aproximación de orden r como una combinación lineal de las $n+1$ aproximaciones de orden s :

$$p_i^{\overline{\mathcal{AC}}^{r-1}_{n,n}} = \sum_{k=0}^n C_k^s p_i^{\overline{\mathcal{AC}}^{s-1}_{n-k,k}}, \quad (2.48)$$

con $C_k^s \geq 0$, y $\sum_{k=0}^n C_k^s = 1$, siendo $p_i^{\overline{\mathcal{AC}}_{nl,nr}^t}$ el polinomio de orden t de aproximaciones para medias en celda construido tomando nl nodos a la izquierda y nr nodos a la derecha de $\bar{f}_i^{k-1}$.

En (2.48) se debe cumplir:

- $r > s$ para que aumente el orden de aproximación.
- $2n \geq r$ para que en $p_i^{\overline{\mathcal{AC}}_{n,n}^{r-1}}$ se aproxime y no sólo se interpole.
- $n \geq s$ para que en $p_i^{\overline{\mathcal{AC}}_{n-k,k}^{s-1}}$ se aproxime y no únicamente se interpole.

En (2.48) no se ha podido hallar ninguna combinación que cumpla las condiciones expuestas, con lo que *WENO* no es viable para esta reconstrucción.

PPH

Como vimos para el caso de valores puntuales hay dos posibles elecciones partiendo de *stencils* de 4 nodos para F :

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{AP}}_{2,2}^1(x_{2i-1}^k, F^{k-1}) &= \frac{1}{4}F_{i-2}^{k-1} + \frac{1}{4}F_{i-1}^{k-1} + \frac{1}{4}F_i^{k-1} + \frac{1}{4}F_{i+1}^{k-1}, \\ \overline{\mathcal{AP}}_{2,2}^2(x_{2i-1}^k, F^{k-1}) &= -\frac{1}{16}F_{i-2}^{k-1} + \frac{9}{16}F_{i-1}^{k-1} + \frac{9}{16}F_i^{k-1} - \frac{1}{16}F_{i+1}^{k-1}.\end{aligned}$$

Escogiendo $\overline{\mathcal{AP}}_{2,2}^1$:

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{AC}}^1(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}) &= \frac{q_{s_i}^{\overline{\mathcal{AP}}}(x_{2i-1}^{k-1}; F^{k-1}) - q_{s_i}^{\overline{\mathcal{AP}}}(x_{2i-2}^{k-1}; F^{k-1})}{h_k} \\ &= \frac{-\frac{3}{20}F_{i-2}^{k-1} - \frac{1}{20}F_{i-1}^{k-1} + \frac{1}{20}F_i^{k-1} - \frac{3}{20}F_{i+1}^{k-1}}{h_k}.\end{aligned}$$

A partir de la expresión anterior no se ha podido hallar una reordenación que cumpla las condiciones deseadas, es decir algo del estilo

$$\frac{a(F_i^{k-1} - F_{i-1}^{k-1}) + b(d^2 F_{i-1} + d^2 F_i)}{h_k}.$$

Lo mismo ocurre con el caso $\overline{\mathcal{AP}}_{2,2}^2$, con lo que *PPH* no es aplicable para la reconstrucción $\overline{\mathcal{AC}}$.

Para aplicar SR tenemos el siguiente problema: como no estamos interpolando en ningún punto, la función

$$G_i^{\overline{AC}}(x) = q_{s_{i+1}}^{\overline{AC}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1) - q_{s_{i-1}}^{\overline{AC}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1),$$

no puede expresarse con valores de $\{\bar{f}_i^{k-1}\}_i$. La demostración es análoga a la de la Proposición 2.3, en donde la relación (2.32) no se cumple, y por tanto la diferencia $a_1 - b_1$ no puede ser expresada en términos de $\{\bar{f}_i^{k-1}\}_i$.

Una posible solución es utilizar la función de $\overline{IAC}$, $G_i^{\overline{IAC}}(x)$, para decidir si la celda es o no singular. En el resto de pasos ya utilizamos la reconstrucción $\overline{AC}$. Aunque esto signifique no trabajar únicamente con la reconstrucción por *aproximaciones*, esta licencia nos permite realizar SR para esta reconstrucción, mejorando las soluciones como veremos en los experimentos realizados.

Así pues, la técnica SR puede aplicarse siguiendo estos pasos:

1.- Calculamos los *stencils* ENO mediante el Algoritmo 1.3 o 1.4 (*ENO-MC-I* o *ENO-MC-II* respectivamente) y asignamos los nodos donde interpolaremos para cada intervalo según (2.47).

2.- Si $nr_{i-1} = 0$ y $nl_{i+1} = 0$ los *stencils* para las celdas I_{i-1}^{k-1} y I_{i+1}^{k-1} son disjuntos. Etiquetamos dicha celda como *sospechosa* de contener una discontinuidad.

3.- Para cada celda sospechosa definimos la función

$$G_i^{\overline{IAC}}(x) = q_{s_{i+1}}^{\overline{IAC}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1) - q_{s_{i-1}}^{\overline{IAC}}(x; \bar{f}^{k-1}, r-1).$$

Si $G_i^{\overline{IAC}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{IAC}}(x_i^{k-1}) < 0$ etiquetamos la celda I_i^{k-1} como *singular*

4.- Si $G_i^{\overline{IAC}}(x_{i-1}^{k-1}) \cdot G_i^{\overline{IAC}}(x_{2i-1}^k) < 0$, el punto x_{2i-1}^k se halla a la derecha de la discontinuidad, por tanto:

$$\bar{f}_{2i}^k = \frac{q_{s_{i+1}}^{\overline{AC}}(x_{2i}^k; \bar{f}^{k-1}, r-1) - q_{s_{i+1}}^{\overline{AC}}(x_{2i-1}^k; \bar{f}^{k-1}, r-1)}{h_k} = \frac{p_{s_{i+1}}^{\overline{AP}}(1; F^{k-1}, r) - p_{s_{i+1}}^{\overline{AP}}(1/2; F^{k-1}, r)}{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\sum_{l=1}^{r+1} a_l 1^{l-1} - \sum_{l=1}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \right) = 2 \left(\sum_{l=1}^{r+1} a_l \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}\right) \right) \\
&= 2 \left[1 - \frac{1}{2}, \dots, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r \right] C^D [f_{i+1}^{k-1}, \dots, f_{i+nl+nr+2}^{k-1}]' \\
&= \sum_{l=1}^{nl+nr+1} (\gamma_{-1, nl+nr+1}^r)_l \bar{f}_l^{k-1}, \tag{2.49}
\end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
C^D &= (A_{-1, nl+nr+1}^{\overline{AC}} A_{-1, nl+nr+1}^{\overline{AC}})^{-1} A_{-1, nl+nr+1}^{\overline{AC}}{}^T, \\
(\beta_{-1, nl+nr+2}^r)_l &= 2 \left[1 - \frac{1}{2}, \dots, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r \right] C^D e_l^D,
\end{aligned}$$

con $e_l^D = (\delta_{l,k})_{k=1}^{nl+nr+1}$ para $l = 1, \dots, nl + nr + 1$. En la Tabla 2.9 podemos ver dichos coeficientes para ciertos valores de r, nl, nr .

Para asegurar consistencia, el valor f_{2i-1}^k lo hallamos mediante la relación $\bar{f}_{2i-1}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i}^k$.

En otro caso x_{2i-1}^k se halla a la izquierda de la discontinuidad, con lo cual:

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{2i-1}^k &= \frac{q_{s_{i-1}}^{\overline{AC}}(x_{2i-1}^k; \bar{f}^{k-1}, r-1) - q_{s_{i-1}}^{\overline{AC}}(x_{2i}^k; \bar{f}^{k-1}, r-1)}{h_k} = \frac{p_{s_{i-1}}^{\overline{AP}}(1/2; F^{k-1}, r) - p_{s_{i-1}}^{\overline{AP}}(0; F^{k-1}, r)}{1/2} \\
&= 2 \left(\sum_{l=2}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} - \sum_{l=2}^{r+1} a_l (0)^{l-1} \right) = 2 \left(\sum_{l=2}^{r+1} a_l \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \right) \\
&= 2 \left[\frac{1}{2}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^r \right] C^I [f_{i-nl-nr-1}^{k-1}, \dots, f_{i-1}^{k-1}]' \\
&= \sum_{l=-nl-nr-1}^{-1} (\gamma_{nl+nr+1, -1}^r)_l \bar{f}_l^{k-1}, \tag{2.50}
\end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
C^I &= (A_{nl+nr+1, -1}^{\overline{AC}} A_{nl+nr+1, -1}^{\overline{AC}})^{-1} A_{nl+nr+1, -1}^{\overline{AC}}{}^T, \\
(\gamma_{nl+nr+1, -1}^r)_l &= 2 \left[\frac{1}{2}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^r \right] C^I e_{-l-nr-nl}^I,
\end{aligned}$$

con $e_l^I = (\delta_{l,k})_{k=1}^{nl+nr+1}$ para $l = -nl - nr - 1, \dots, -1$.

Posteriormente, hallamos el valor que falta mediante la relación $\bar{f}_{2i}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i-1}^k$ con el fin de asegurar consistencia. Dichos filtros podemos deducirlos de la Tabla 2.9, ya que se cumple (ver la Nota 2.2):

$$(\gamma_{-1, nl+nr+1}^r)_l = (\gamma_{-1, nl+nr+1}^r)_{-l}, \quad l = 1, \dots, nl + nr.$$

l	1	2	3	4	5	6	7
$(\gamma_{-1,4}^2)$	$\frac{37}{40}$	$\frac{19}{40}$	$\frac{1}{40}$	$-\frac{17}{40}$			
$(\gamma_{-1,5}^3)$	$\frac{43}{28}$	$\frac{23}{240}$	$-\frac{41}{70}$	$-\frac{131}{280}$	$\frac{61}{140}$		
$(\gamma_{-1,6}^4)$	$\frac{2394}{1135}$	$-\frac{6547}{8064}$	$-\frac{1861}{2016}$	$\frac{349}{2016}$	$\frac{529}{605}$	$-\frac{159}{377}$	
$(\gamma_{-1,7}^4)$	$\frac{1663}{898}$	$-\frac{478}{1565}$	$-\frac{501}{629}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{514}{1397}$	$\frac{227}{384}$	$-\frac{1021}{2688}$
$\bar{f}_{i+l}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+1}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+2}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+3}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+4}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+5}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+6}^{k-1}$	$\bar{f}_{i+7}^{k-1}$

Tabla 2.9: Aproximaciones para $\bar{f}_{2i}^k$ de grado $r - 1$ para $\bar{f}$ (r para F), $\overline{\mathcal{AC}}^{r-1}_{nl+nr+1,-1}(x_{2i-1}^k, \bar{f}^{k-1}) = \sum_{l=1}^{nl+nr} (\gamma_{-1,nl+nr+1}^r)_l \bar{f}_l^{k-1}$, utilizando aproximación en $nl + nr$ puntos a la derecha de $\bar{f}_i^{k-1}$.

Ejemplos

Aplicamos la reconstrucción $\overline{\mathcal{AC}}$ a la función (1.70) obteniendo la Figura 2.12. Bajamos tres niveles por medias en celda, eliminamos los coeficientes de escala y subimos tres niveles mediante la reconstrucción por *aproximaciones* para medias en celda. En la Figura (a) utilizamos *stencils* centrados de 7 nodos para $\bar{f}$ (8 nodos para F). Observamos las malas aproximaciones alrededor de las discontinuidades (en las fronteras sí se ha adaptado). En la Figura (b) mostramos para cada nivel los coeficientes de escala mayores o iguales a 10^{-3} . En concreto en el primer nivel observamos que hay 7 coeficientes afectados en concordancia con (2.45). Mediante la técnica *ENO*, Figura (c), los intervalos de escasa aproximación se reducen a uno, al igual que con *WENO*. Al aplicar *SR* se mejora la aproximación tanto en saltos como en esquinas, Figura (d).

Las aproximaciones tan dispares para el caso centrado provienen de imponer consistencia a la reconstrucción $\overline{\mathcal{AC}}$, ya que el valor $\bar{f}_{2i-1}^k$ es fruto de una aproximación, pero $\bar{f}_{2i}^k = 2\bar{f}_i^{k-1} - \bar{f}_{2i-1}^k$. Para mejorarlas podríamos obtener el valor $\bar{f}_{2i}^k$ mediante aproximación pero en este caso perderíamos la propiedad de consistencia, con lo que los operadores predicción no estarían correctamente definidos. Aún así, probamos esta idea para ver los resultados que obtenemos, a fin de aplicar esta reconstrucción en casos prácticos, como por ejemplo la eliminación de ruido. Así pues el valor $\bar{f}_{2i}^k$ se

aproximaría por:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{2i}^k &= \frac{p_{s_i}^{\overline{AC}}(1; \bar{f}^{k-1}, r-1) - p_{s_i}^{\overline{AC}}(\frac{1}{2}; \bar{f}^{k-1}, r-1)}{1/2} \\
 &= 2\left(\sum_{l=2}^{r+1} a_l \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}\right)\right), \\
 &= \left[1 - \frac{1}{2}, \dots, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^r\right] (A_{nl,nr}^{\overline{AC}})^T (A_{nl,nr}^{\overline{AC}})^{-1} (A_{nl,nr}^{\overline{AC}})^T [\bar{f}_{i-nl}^{k-1}, \dots, \bar{f}_{i+nr}^{k-1}].
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Podemos realizar una nueva modificación que asegura la consistencia. Una vez calculados tanto $\hat{f}_{2i-1}^{k-1}$ como $\hat{f}_{2i-1}^{k-1}$ por aproximación, la reconstrucción definitiva sería:

$$\begin{cases} \tilde{f}_{2i-1}^k = \hat{f}_{2i-1}^k + \hat{f}_i^{k-1} - \frac{1}{2}(\hat{f}_{2i-1}^k + \hat{f}_{2i}^k), \\ \tilde{f}_{2i}^k = \hat{f}_{2i}^k + \hat{f}_i^{k-1} - \frac{1}{2}(\hat{f}_{2i-1}^k + \hat{f}_{2i}^k). \end{cases} \tag{2.52}$$

Con estas modificaciones obtenemos la Figura 2.13. Observamos que en el caso centrado se obtienen reconstrucciones de mayor suavidad. Al aplicar SR mediante la reconstrucción no consistente la discontinuidad de salto queda desplazada en la reconstrucción, ya que dejamos de almacenar información necesaria para la correcta reconstrucción de los datos de partida. Al introducir la segunda modificación, se pierde suavidad en la discontinuidad.

2.3.3

Funciones límite

En este apartado representamos las funciones límite para valores puntuales, Figura 2.14, y medias en celda, Figura 2.15. Para su cálculo debemos utilizar suficientes condiciones para realmente aproximar y no interpolar. Lo cual se traduce en que $nl + nr \geq r + 2$ para valores puntuales y $nl + nr \geq r$ para medias en celda. En general, las funciones que se obtienen no son suaves y por tanto inadecuadas para esquemas de multirresolución.

En valores puntuales, la condición $\hat{f}_{2i}^k = \hat{f}_i^{k-1}$ es la que va a producir las oscilaciones que causarán la pérdida de suavidad. Para

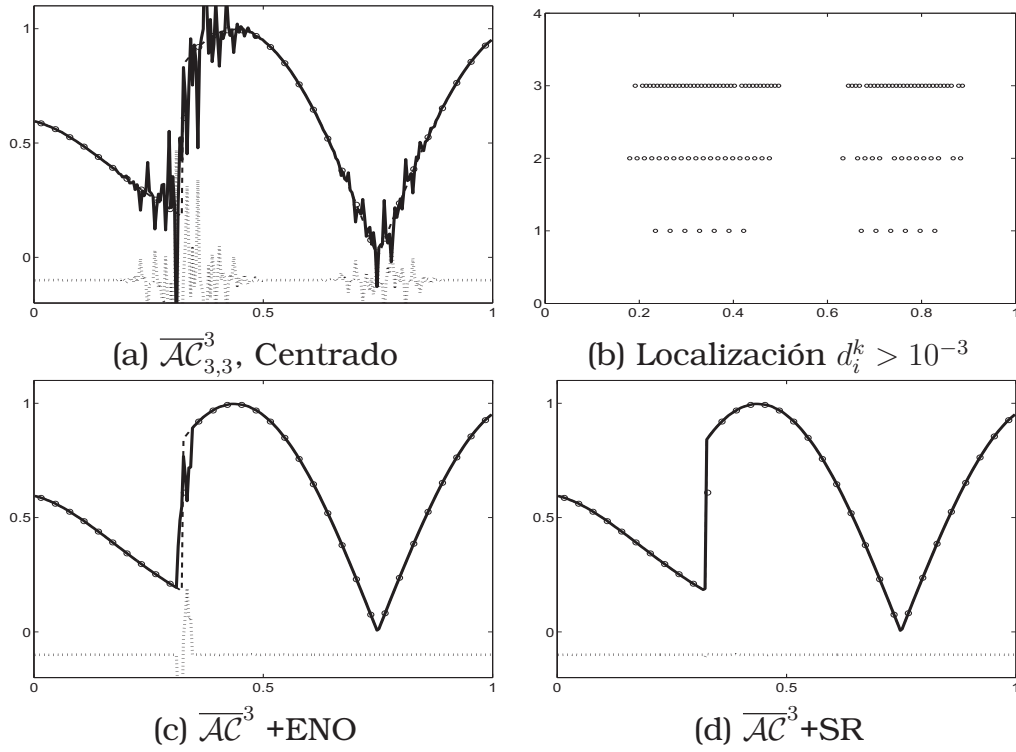


Figura 2.12: Aplicamos 3 niveles de decimación por medias en celda y 3 niveles de predicción a la función (1.70) discretizada con 256 nodos. En (b) 'o' representa, para cada nivel, la localización de los coeficientes $d_i^k > 10^{-3}$. En el resto, '-' representa la función de partida, '-.' la reconstrucción, 'o' la función en el nivel más grosero y '..' la diferencia entre la discretización inicial y la reconstrucción (desplazada $-0,1$ en el eje OY).

evitarlo podríamos modificar el esquema de reconstrucción aproximando también en los nodos pares tal como expusimos en (2.42). Para medias en celda ocurre algo similar, pudiendo introducir las modificaciones (2.51) y (2.52).

En las Figuras 2.16 y 2.17 representamos algunos casos obtenidos por aproximación en ambos nodos para valores puntuales y medias en celda respectivamente. Las funciones límite son más suaves, aunque cabe recordar que no son reconstrucciones consistentes y por tanto las aproximaciones obtenidas pueden desviarse de la original. Forzando consistencia tras aproximar en am-

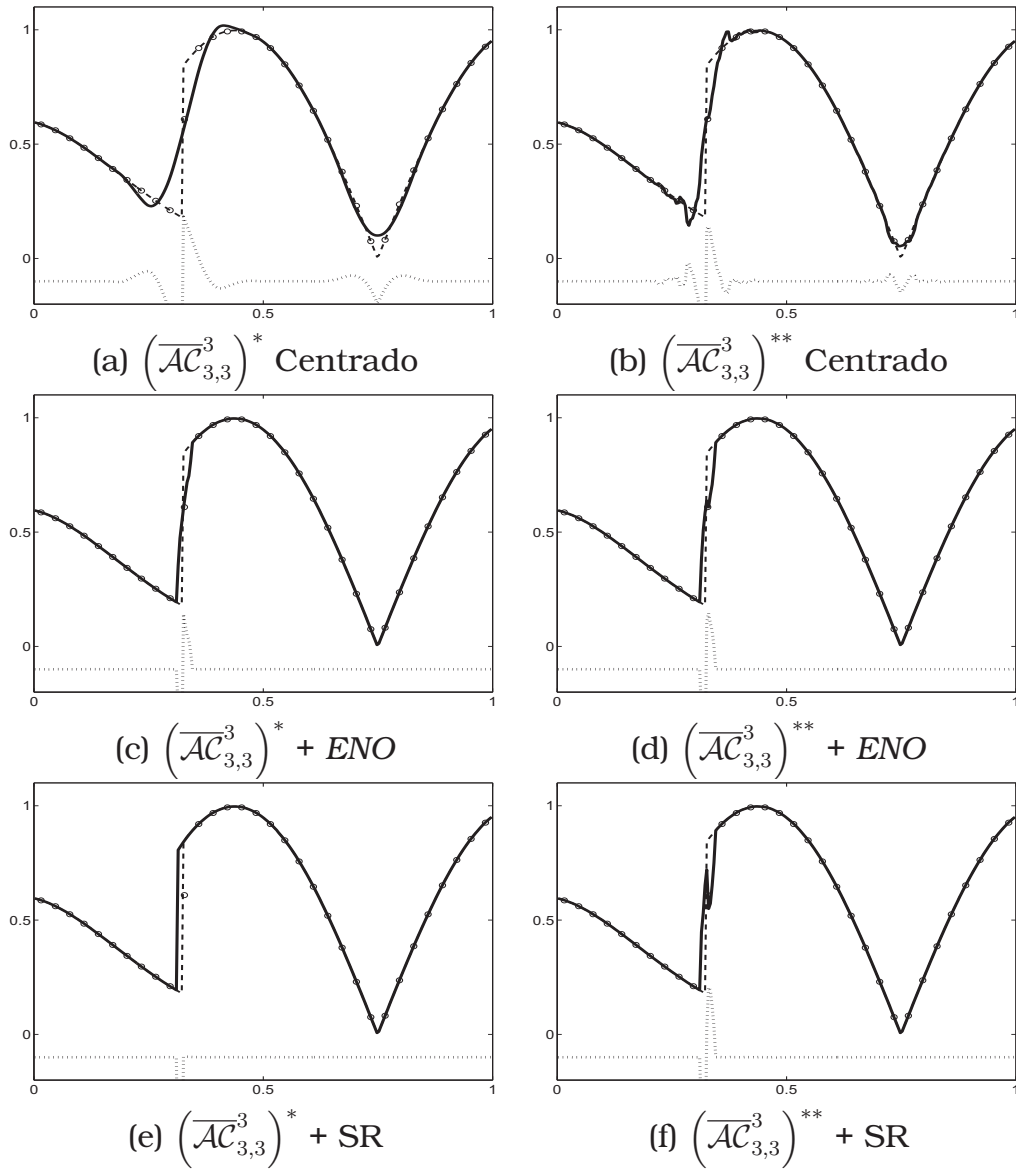


Figura 2.13: Repetimos algunos casos del experimento de la Figura 2.12, pero en (a), (c) y (e), marcado con *, aproximamos tanto en $\bar{f}_{2i-1}^k$ como en $\bar{f}_{2i-1}^k$, según (2.51) y en (b), (d) y (f), marcado con **, introducimos la modificación (2.52) para dotar de consistencia a la reconstrucción por aproximaciones en ambos puntos.

bos, (2.52), obtenemos la Figura 2.18 donde observamos que la función límite vuelve a quebrarse, y por tanto no representa una mejora relevante.

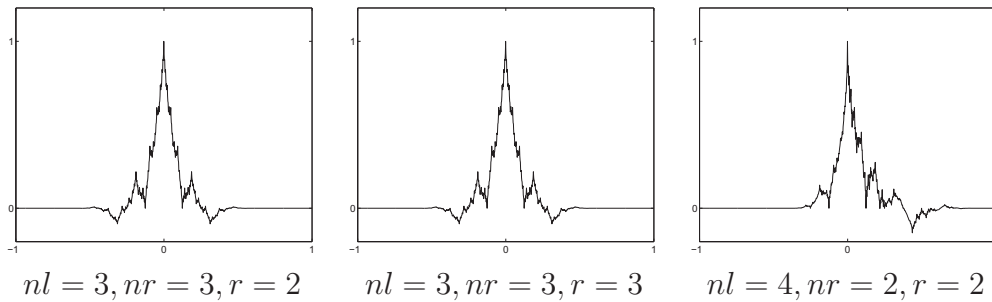


Figura 2.14: Función límite para la reconstrucción $\overline{AP}$. Utilizamos 6 niveles de reconstrucción.

2.3.4

Diseño de curvas

En consonancia con las funciones límite obtenidas, las reconstrucciones por mínimos cuadrados, en general, no son aplicables para la generación de curvas, como observamos en la Figura 2.19.

Con las modificaciones (2.42) y (2.51) se obtienen curvas suaves aunque alejadas de los puntos de control, Figura 2.20, (a) y (b). En (c) forzamos la consistencia mediante (2.52) y obtenemos de nuevo curvas muy quebradas.

2.4

Conclusiones

En este capítulo hemos desarrollado reconstrucciones no exclusivamente interpolatorias. En primer lugar se ha construido una nueva reconstrucción basada en combinar interpolación y aproximación por mínimos cuadrados, comprobando que cumple los requisitos para ser utilizada en esquemas de multirresolución *à la*

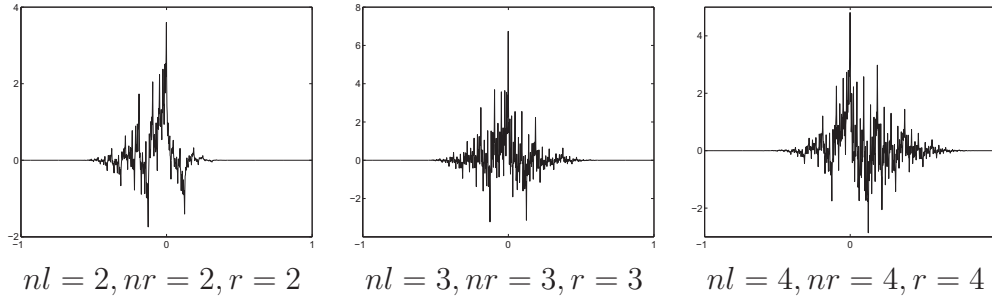


Figura 2.15: Función límite para la reconstrucción $\overline{AC}$. Utilizamos 6 niveles de reconstrucción.

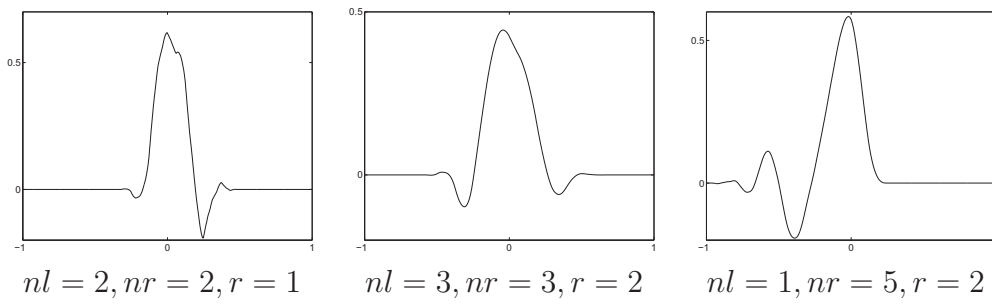


Figura 2.16: Función límite para la reconstrucción $\overline{AP}$ con la modificación (2.42). Utilizamos 6 niveles de reconstrucción.

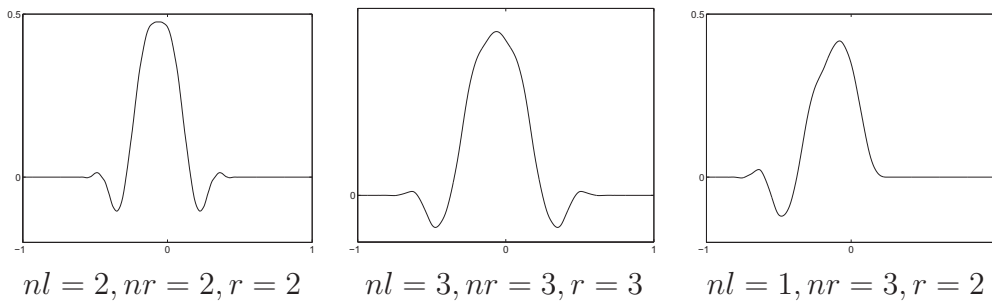


Figura 2.17: Función límite para la reconstrucción $\overline{AC}$ con la modificación (2.51). Utilizamos 6 niveles de reconstrucción.

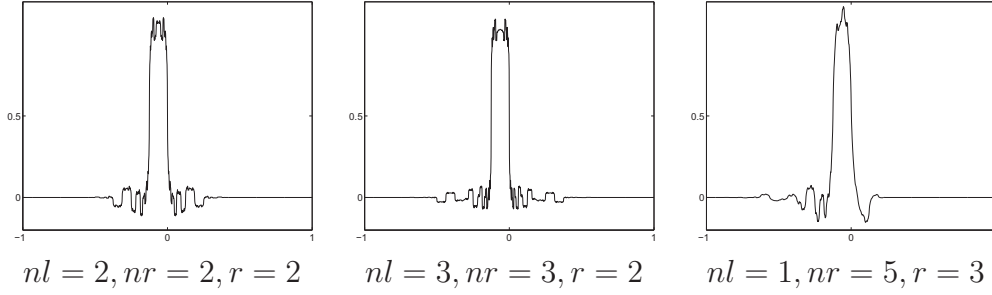


Figura 2.18: Función límite para la reconstrucción $\overline{AC}$ con la modificación (2.52). Utilizamos 6 niveles de reconstrucción.

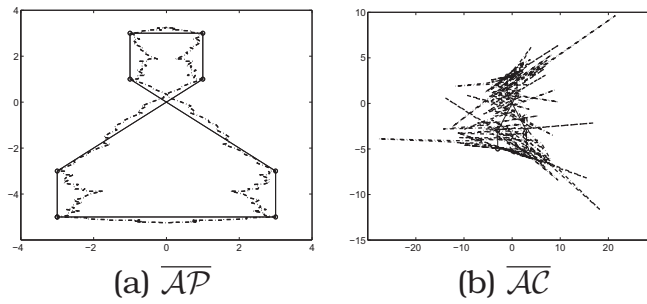


Figura 2.19: Puntos de control iniciales y curva generada aplicando 5 niveles de la reconstrucción $\overline{AP}$, en (a) y $\overline{AC}$ en (b), ambas con $nl = 3$, $nr = 3$ y $r = 3$.

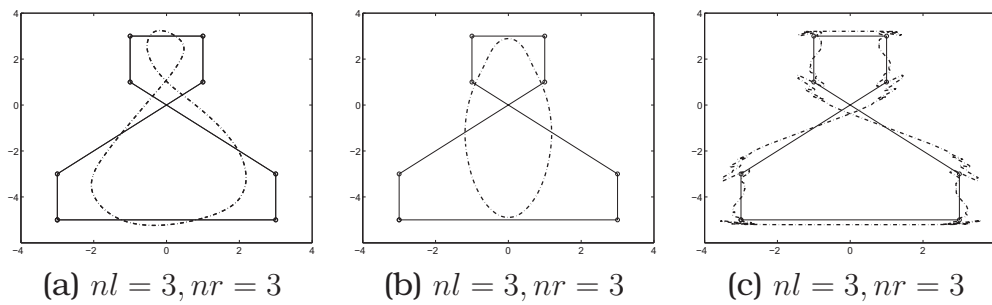


Figura 2.20: Puntos de control iniciales y curva generada aplicando 6 niveles de la reconstrucción $\overline{AP}$ con grado 3, introduciendo la modificación (2.42) en (a) y para la reconstrucción $\overline{AC}$ con grado 3, introduciendo (2.51) en (b) y (2.52) en (c).

Harten. Dicha reconstrucción ha sido desarrollada para las discretizaciones por valores puntuales y por medias en celda, calculando los filtros asociados para los casos más utilizados. Tras simples adaptaciones, los esquemas *ENO* y *SR* son aplicables, mejorando la aproximación en las cercanías de las discontinuidades. La técnica *WENO* sólo es aplicable para ciertos casos, en concreto aumentando de orden tres a cuatro para valores puntuales y de dos a tres para medias en celda. *PPH* con *stencils* de 4 nodos puede también ser aplicado, pero únicamente para orden 3 en valores puntuales y 2 en medias en celda. Finalmente se han estudiado algunas características como el orden de la reconstrucción, funciones límite y aplicación al diseño de curvas. Para valores puntuales se obtienen funciones límite de mayor suavidad que para medias en celda y por tanto son más adecuadas para ser utilizadas en esquemas de multirresolución.

En segundo lugar se han estudiado los *mínimos cuadrados* como reconstrucción dentro de esquemas multirresolutivos basados en discretizaciones por valores puntuales y por medias en celda. Aunque en rigor no podemos hablar de operadores reconstrucción, ya que no cumplen la propiedad $\mathcal{D}_k \mathcal{R}_k = I_{V^k}$, los hemos incluido en los esquemas de multirresolución a fin de conocer su comportamiento. La propiedad de consistencia de la multirresolución a la *Harten* no se cumple de manera natural para medias en celda debido a que no se interpola, pero puede conseguirse forzando a que cumpla la ecuación correspondiente, siendo viable utilizarla dentro de esquemas multiescala y pudiéndose adaptar las ideas *ENO* y *SR* para mejorar las aproximaciones en las cercanías de los saltos. Al imponer consistencia las aproximaciones empeoran notablemente. Se han ofrecido algunas alternativas, aunque no reportan resultados satisfactorios, siendo la mejor opción forzar consistencia e incluir adaptatividad mediante la técnica *SR*. Para *WENO* no ha podido determinarse ningún caso que cumpla los requisitos de esta técnica, ni para valores puntuales ni medias en celda. En cuanto a *PPH* para *stencils* de 4 nodos sólo ha sido posible aplicarlo en valores puntuales de orden 2 y 3. Se han estudiado sus funciones límite obteniendo resultados de escasa suavidad, al igual que las curvas generadas a partir de una serie de puntos de control.

En ambas reconstrucciones se ha hecho incapié en el cálculo mediante filtros en todos los pasos de la reconstrucciones, tanto en el cálculo de los elementos a reconstruir como de las funciones intermedias necesarias para aplicar las técnicas *ENO* y *SR*.

En capítulos posteriores se estudiará la viabilidad de estas reconstrucciones para eliminar ruido de funciones discontinuas compuestas por trozos suaves, aprovechando sus capacidades de aproximación.