

4

ENO-wavelets

En este capítulo nos centramos en describir el método *ENO-wavelet*, presentado por T. F. Chan y H. M. Zhou en el año 2000, [26], [25]. Veremos una nueva manera de calcular sus coeficientes que proporciona ciertas ventajas respecto del esquema original, como por ejemplo generalizar el método de forma sencilla para orden arbitrario. La transformada *ENO-wavelet* se basa en combinar dos ideas: los algoritmos *wavelet* y la técnica *ENO*. Como vimos en la sección 1.4.2, si trabajamos con funciones discontinuas compuestas por trozos suaves y aplicamos la transformada *wavelet* lineal, aparece el *fenómeno de Gibbs* en las cercanías de los saltos, fruto de eliminar los coeficientes de altas frecuencias de magnitud elevada que surgen al utilizar *stencils* que crucen discontinuidades. Por otra parte, la técnica *ENO* consiste en elegir un *stencil* que no cruce las discontinuidades, según la magnitud de las diferencias divididas. En este caso no se utilizarán diferencias divididas pero sí la idea de evitar discontinuidades y emplear información

de un único lado de la discontinuidad. El método constará de dos pasos:

1. Localización de discontinuidades.
2. Cálculo de los coeficientes de altas y bajas frecuencias utilizando información de un sólo lado de la discontinuidad.

El primer punto fue estudiado con detalle en el capítulo anterior, tanto para funciones con ruido como sin él. Este paso es independiente del segundo y podemos utilizar el método de localización que más nos interese. La base *wavelet* utilizada¹ en todo el capítulo será *DB2p* y supondremos que se cumple a *Propiedad de Separación de Discontinuidades, DSP* (Definición 3.1).

En el segundo punto, el objetivo es utilizar información de un único lado de la discontinuidad. La idea más sencilla se basa en utilizar extrapolaciones en aquellos *stencils* que crucen discontinuidades en el presente nivel y calcular los datos del siguiente nivel con dichos valores. Es lo que se conoce como *función de extrapolación directa*.

4.1

Función de extrapolación directa

Supongamos que estamos en el nivel $j + 1$ y que tenemos localizada una discontinuidad entre $\alpha_{j+1,2i+l-2}$ y $\alpha_{j+1,2i+l-1}$, siendo $l + 1$ la longitud del *stencil*. Teniendo en cuenta las ecuaciones de la transformada *wavelet* rápida (1.77), se verían afectados los coeficientes $\alpha_{j,i+m}$, $\beta_{j,i+m}$ para $i \leq m \leq i + k - 2$ con $l = 2k - 1$. Para evitarlo, si estamos a la izquierda de la discontinuidad, extrapolamos $\hat{\alpha}_{j+1,2i+l-1}, \dots, \hat{\alpha}_{j+1,2i+2l-3}$ a partir de información a la izquierda y hallamos los coeficientes del siguiente nivel $\hat{\alpha}_{j,i+m}$, $\hat{\beta}_{j,i+m}$ para $i \leq m \leq i + k - 2$ con $l = 2k - 1$. Análogamente por la derecha, extrapolamos $\bar{\alpha}_{j+1,2i}, \dots, \bar{\alpha}_{j+1,2i+l-2}$ con información de la derecha y

¹El método es aplicable para otras bases, como por ejemplo la base de *Haar*, ver [26].

hallamos los coeficientes $\bar{\alpha}_{j,i+m}$, $\bar{\beta}_{j,i+m}$ para $i \leq m \leq i+k-2$ con $l = 2k - 1$.

Para mantener el orden de aproximación, si la base *wavelet* posee p momentos nulos, la extrapolación debe ser de grado $(p - 1)$. Si trabajamos con funciones sin ruido, podemos utilizar extrapolación por polinomios de Lagrange o por polinomios de Taylor, mientras que si la función de partida contiene ruido, podemos utilizar extrapolación por mínimos cuadrados o por polinomios de *interpolación aproximación* (introducidos en el capítulo 2).

En la posición (j, i) se obtienen 4 valores $\hat{\alpha}_{j,i}$, $\hat{\beta}_{j,i}$, $\bar{\alpha}_{j,i}$ y $\bar{\beta}_{j,i}$, en vez de 2 del método estándar. Esto es un problema de vital importancia ya que las secuencias de salida son diferentes que las de entrada, imposibilitando la inclusión de este método en los algoritmos piramidales propios de la transformada *wavelet*.

4.2

Extrapolación en el nivel grosero

Chan y Zhou plantean en [26] un método que permite utilizar información de un sólo lado de la discontinuidad y mantiene la misma longitud de las secuencias de salida tanto si hay discontinuidad o no. La idea consiste en invertir el orden de los pasos de la *función de extrapolación directa*. Situándonos a la izquierda de una discontinuidad, extrapolamos los coeficientes de bajas frecuencias que la crucen de los niveles más groseros, obteniendo $\hat{\alpha}_{j,m}$ con información de la izquierda y extendemos los coeficientes $\hat{\beta}_{j,m}$ a cero (o a otro valor predefinido). Posteriormente con estos datos hallamos los coeficientes del nivel $j + 1$. Pero esto plantea problemas en ciertos casos. En *DB2p* no siempre podemos predefinir $\hat{\alpha}_{j,m}$ y $\hat{\beta}_{j,m}$ simultáneamente, ya que pueden ser linealmente dependientes. Veamos un ejemplo. Supongamos que la discontinuidad se halla entre $\alpha_{j+1,2i+l-2}$ y $\alpha_{j+1,2i+l-1}$. Según (1.77) el cálculo de $\hat{\alpha}_{j,i}$ y $\hat{\beta}_{j,i}$ es:

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{j,i} \\ \hat{\beta}_{j,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=0}^{l-2} c_s \alpha_{j+1,2i+s} + c_{l-1} \hat{\alpha}_{j+1,2i+l-1} + c_l \hat{\alpha}_{j+1,2i+l} \\ \sum_{s=0}^{l-2} h_s \alpha_{j+1,2i+s} + h_{l-1} \hat{\alpha}_{j+1,2i+l-1} + h_l \hat{\alpha}_{j+1,2i+l} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta_{j,i} \\ \gamma_{j,i} \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{j+1,2i+l-1} \\ \hat{\alpha}_{j+1,2i+l} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde $\delta_{j,i} = \sum_{s=0}^{l-2} c_s \alpha_{j+1,2i+s}$ y $\gamma_{j,i} = \sum_{s=0}^{l-2} h_s \alpha_{j+1,2i+s}$ son datos conocidos por estar a la izquierda de la discontinuidad y A viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} c_{l-1} & c_l \\ h_{l-1} & h_l \end{pmatrix}.$$

Para la transformada de Daubechies se cumple $\frac{h_{l-1}}{c_{l-1}} = \frac{h_l}{c_l}$, con lo cual A será singular. Para que el sistema tenga solución, la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} c_{l-1} & c_l & \hat{\alpha}_{j,i} - \delta_{j,i} \\ h_{l-1} & h_l & \hat{\beta}_{j,i} - \gamma_{j,i} \end{bmatrix}$$

debe de tener rango 1. En este caso podemos hallar $\hat{\alpha}_{j,i}$ a partir de $\hat{\beta}_{j,i}$ y viceversa:

$$\hat{\beta}_{j,i} = \gamma_{j,i} + \frac{h_l}{c_l} (\hat{\alpha}_{j,i} - \delta_{j,i}), \quad \hat{\alpha}_{j,i} = \delta_{j,i} + \frac{c_l}{h_l} (\hat{\beta}_{j,i} - \gamma_{j,i}).$$

Lo cual nos dice que no podemos predefinir $\hat{\alpha}_{j,i}$ y $\hat{\beta}_{j,i}$ a la vez. Tenemos dos posibles elecciones:

1. Extrapolamos los coeficientes $\hat{\alpha}_{j,i}$ con información de un sólo lado de la discontinuidad y después determinamos los $\hat{\beta}_{j,i}$.
2. Damos a $\hat{\beta}_{j,i}$ un valor predefinido (cero normalmente) y después hallamos los $\hat{\alpha}_{j,i}$.

Notar que en el primer caso sólo es necesario almacenar los $\hat{\beta}_{j,i}$, ya que el $\hat{\alpha}_{j,i}$ lo podemos deducir. En el segundo caso ocurre lo mismo, sólo hemos de almacenar los $\hat{\alpha}_{j,i}$, ya que los $\hat{\beta}_{j,i}$ poseen un valor predefinido. Por tanto, el número de coeficientes se mantiene constante.

Hemos de decidir con qué elección nos quedamos, incluso podemos usar la misma para ambos lados de la discontinuidad. Si por ejemplo elegiésemos la primera en ambos lados, almacenaríamos dos valores de $\hat{\beta}_{j,i}$ para cada *stencil* que cruce una discontinuidad. Esto plantea problemas, ya que para aplicar los algoritmos correctamente necesitamos igual número de α 's y β 's. Para mantener el

mismo número de α 's y β 's debemos tomar elecciones distintas a izquierda y derecha de la discontinuidad. Nosotros hemos optado por la elección 1 si nos encontramos a la izquierda, y por la 2 si estamos a la derecha. Con este método solucionamos los problemas de la *función de extrapolación directa*, ya que mantenemos el mismo tamaño de las secuencias de entrada y salida. En la Figura 4.1 exponemos un esquema del funcionamiento de la *extrapolación en el nivel grosero* para un caso de DB4.

Para poder reconstruir los datos, necesitamos almacenar la posición de las discontinuidades para saber en cada caso si los coeficientes de bajas y altas frecuencias son fruto de la *extrapolación en el nivel grosero*. Para cada *stencil* que cruce una discontinuidad, necesitamos un bit extra para almacenar dicha posición. Este almacenamiento extra (en coma flotante) por *stencil* que se necesita en la extrapolación de los coeficientes de bajas frecuencias es de $O(1)$ y de $O(l)$ para el cálculo de los correspondientes coeficientes de altas y bajas frecuencias, siendo l el tamaño del *stencil*. En general el coste extra sobre la transformada *wavelet* estándar es de orden $O(dl)$ siendo d el número de discontinuidades. Dado que el coste de la transformada estándar es de orden $O(ln)$, siendo n el número de datos iniciales, la ratio del coste extra respecto a la transformada estándar es $O(d/n)$, independiente de l , y despreciable cuando n es elevado.

4.3

Error de aproximación para *ENO-wavelets*

En el Teorema 1.1 enunciamos un resultado sobre el error de aproximación que se comete mediante la transformada *wavelet* al realizar una aproximación lineal. Para *ENO-wavelets* podemos encontrar un resultado similar, cuya demostración se encuentra en [26]:

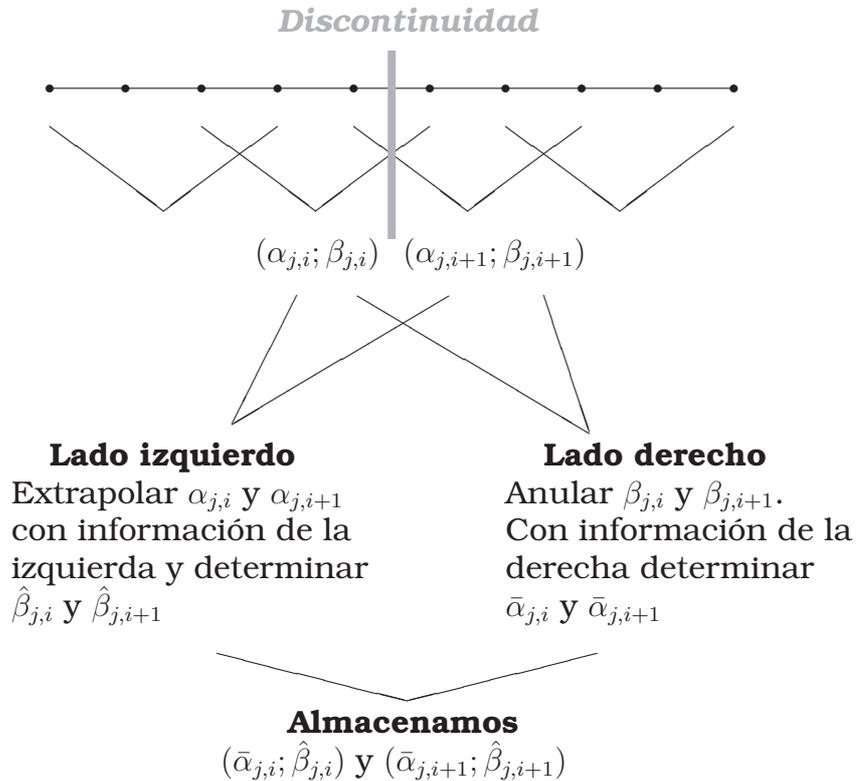


Figura 4.1: Extrapolación en el nivel grosero para DB4.

TEOREMA 4.1. Supongamos que la función de escala $\phi(x)$ y su correspondiente wavelet $\psi(x)$ tienen soporte finito en $[0, l]$ y que $\psi(x)$ posee p momentos nulos. Sea $f(x)$ una función suave a trozos en $[a, b]$, con p derivadas acotadas en cada región suave. Sea $f_j(x)$ la proyección ENO-wavelet en el nivel j obtenida por extrapolación, con una elección que satisface (3.5). Si la proyección $f_{j+1}(x)$ cumple la DSP, entonces:

$$\|f(x) - f_j(x)\| \leq C(\Delta x)^p \|f^p(x)\|_{(a,b) \setminus D},$$

donde $\Delta x = 2^{-j}$ y D es el conjunto de discontinuidades de la función o de sus derivadas mayores de orden p . $\|\cdot\|$ puede ser tanto la norma en L^2 como en L^∞ .

El teorema nos asegura que la aproximación es similar a la que obtenemos con la transformada *wavelet* estándar, excepto en aquellos puntos donde haya discontinuidades. En los experimentos numéricos comprobaremos que el teorema se cumple.

4.4

ENO-DB4

Esta transformada la describimos en la sección 1.4.2. Para bajar un nivel utilizamos las ecuaciones (1.82), (1.82) y para subir (1.84), (1.85). Suponiendo las discontinuidades detectadas, es decir, si el *stencil* $\{\alpha_{j+1,2i}, \dots, \alpha_{j+1,2i+3}\}$ cruza una discontinuidad, guardamos esta posición como $s_{j,i} = 1$ y en caso contrario $s_{j,i} = 0$. Tenemos dos opciones posibles: cuando la discontinuidad se halla entre $\alpha_{j+1,2i+1}$ y $\alpha_{j+1,2i+2}$ hay un único *stencil* afectado, mientras que si se encuentra entre $\alpha_{j+1,2i+2}$ y $\alpha_{j+1,2i+3}$ hay dos *stencils* afectados, como se indica en la Figura 4.2. Veamos cómo modificamos la transformada *DB4* en presencia de discontinuidades:

Caso 1: un *stencil* afectado

Para hallar $\beta_{j,i}$ utilizando información únicamente a la izquierda de la discontinuidad seguimos el siguiente esquema:

- Extrapolamos $\alpha_{j,i}$ y lo denotamos $\hat{\alpha}_{j,i}$. Para mantener el orden del método utilizamos extrapolación de grado uno, es decir $\hat{\alpha}_{j,i} = 2\alpha_{j,i-1} - \alpha_{j,i-2}$.
- Despejamos de (1.82) el bloque

$$c_2\hat{\alpha}_{j+1,2i+2} + c_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+3} = \hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1}.$$

- Utilizando que $\frac{h_2}{c_2} = \frac{h_3}{c_3}$, obtenemos

$$\hat{\beta}_{j,i} = h_0\alpha_{j+1,2i} + h_1\alpha_{j+1,2i+1} + \frac{h_2}{c_2} (\hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1}).$$

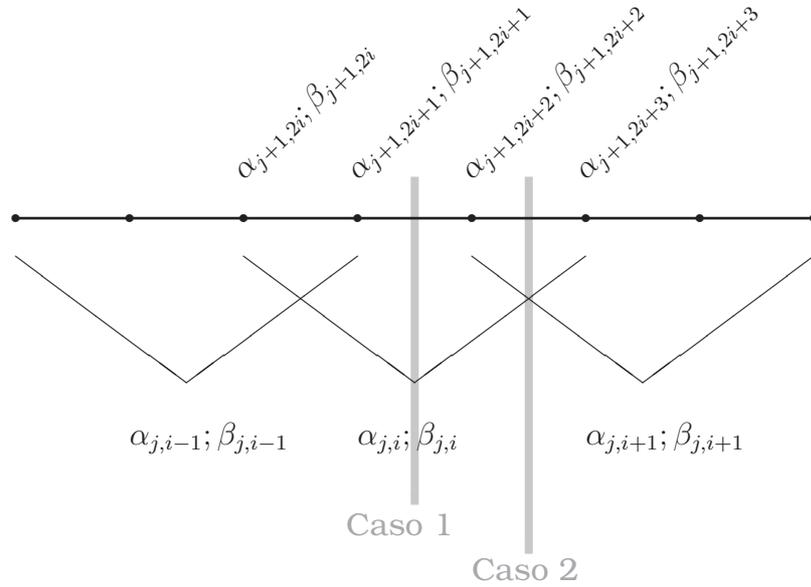


Figura 4.2: Transformación directa DB4, donde indicamos los dos posibles casos en que podemos localizar una discontinuidad, dando lugar a uno o dos stencils afectados.

Con esto hallamos $\hat{\beta}_{j,i}$ utilizando únicamente información a la izquierda de la discontinuidad. Para calcular $\bar{\alpha}_{j,i}$ con información de la derecha:

- Igualamos $\beta_{j,i} = 0$. Luego de (1.83),

$$h_0 \bar{\alpha}_{j+1,2i} + h_1 \bar{\alpha}_{j+1,2i+1} = -h_2 \alpha_{j+1,2i+2} - h_3 \alpha_{j+1,2i+3}.$$

- Utilizando de nuevo la relación $\frac{h_0}{c_0} = \frac{h_1}{c_1}$ podemos hallar $\bar{\alpha}_{j,i}$ con información a la derecha de la discontinuidad:

$$\bar{\alpha}_{j,i} = -\frac{c_0}{h_0} (h_2 \alpha_{j+1,2i+2} + h_3 \alpha_{j+1,2i+3}) + c_2 \alpha_{j+1,2i+2} + c_3 \alpha_{j+1,2i+3}.$$

Hemos obtenido $(\bar{\alpha}_{j,i}; \hat{\beta}_{j,i})$ donde cada valor ha sido calculado utilizando información de un sólo lado de la discontinuidad. Por tanto el valor de $\hat{\beta}_{j,i}$ será pequeño y no habrá una gran pérdida de información si lo eliminamos. Los valores que almacenamos son $(\bar{\alpha}_{j,i}; \hat{\beta}_{j,i})$, en lugar de $(\alpha_{j,i}; \beta_{j,i})$.

Caso 2: dos *stencils* afectados

Debemos calcular $(\alpha_{j,i}; \beta_{j,i})$ y $(\alpha_{j,i+1}; \beta_{j,i+1})$. La discontinuidad se encuentra entre $\alpha_{j+1,2i+2}$ y $\alpha_{j+1,2i+3}$, con lo que el cálculo de $\beta_{j,i}$ es sencillo:

- Extrapolamos $\alpha_{j,i}$, obteniendo $\hat{\alpha}_{j,i}$. Despejando de (1.82):

$$\hat{\alpha}_{j+1,2i+3} = \frac{1}{c_3} (\hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1} - c_2\alpha_{j+1,2i+2}).$$

- Para hallar $\bar{\beta}_{j,i}$ basta con sustituir:

$$\bar{\beta}_{j,i} = h_0\alpha_{j+1,2i} + h_1\alpha_{j+1,2i+1} + h_2\alpha_{j+1,2i+2} + h_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+3}.$$

Pasemos al cálculo de $\beta_{j,i+1}$. Sólo conocemos $\alpha_{j+1,2i+2}$, pero también podemos utilizar $\hat{\alpha}_{j+1,2i+3}$, que ha sido calculado con información de la derecha. Los pasos a realizar son:

- Extrapolamos $\alpha_{j,i+1}$, obteniendo $\hat{\alpha}_{j,i+1}$. Calculamos el bloque

$$c_2\hat{\alpha}_{j+1,2i+4} + c_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+5} = \hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i+2} - c_1\hat{\alpha}_{j+1,2i+3}.$$

- Por tanto:

$$\hat{\beta}_{j,i+1} = h_0\alpha_{j+1,2i+2} + h_1\hat{\alpha}_{j+1,2i+3} + \frac{h_3}{c_3} (\hat{\alpha}_{j,i+1} - c_0\alpha_{j+1,2i+2} - c_1\hat{\alpha}_{j+1,2i+3}).$$

En el lado derecho de la discontinuidad queremos obtener $\alpha_{j,i}$ y $\alpha_{j,i+1}$. Los pasos a seguir son análogos al lado izquierdo, pero ahora en vez de extrapolar igualamos los β 's a cero. Empecemos con $\alpha_{j,i+1}$:

- Igualamos $\beta_{j,i+1} = 0$. Calculamos $\alpha_{j+1,2i+2}$ con información de la derecha:

$$\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} = -\frac{1}{h_0} (h_1\alpha_{j+1,2i+3} + h_2\alpha_{j+1,2i+4} + h_3\alpha_{j+1,2i+5}).$$

- Con lo que podemos hallar $\bar{\alpha}_{j,i+1}$:

$$\bar{\alpha}_{j,i+1} = c_0\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} + c_1\alpha_{j+1,2i+3} + c_2\alpha_{j+1,2i+4} + c_3\alpha_{j+1,2i+5}.$$

Para calcular $\alpha_{j,i}$ utilizamos el valor de $\bar{\alpha}_{j+1,2i+2}$:

- Igualamos $\beta_{j,i} = 0$. Obtenemos el bloque

$$h_0\bar{\alpha}_{j+1,2i} + h_1\bar{\alpha}_{j+1,2i+1} = -h_2\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} - h_3\alpha_{j+1,2i+3}.$$

- Con lo cual:

$$\bar{\alpha}_{j,i} = \frac{c_0}{h_0} (h_2\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} + h_3\alpha_{j+1,2i+3}) + c_2\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} + c_3\alpha_{j+1,2i+3}.$$

4.4.1

Reconstrucción

Para recuperar los datos iniciales cuando trabajamos con *stencils* que cruzan discontinuidades debemos extrapolar las α 's para recuperar los datos de la izquierda e igualar los β 's a cero para recuperar la información de la derecha. Detalladamente:

1. $s_{j,i} = 0$ y $s_{j,i-1} = 0$. En este caso no intervienen discontinuidades y, por tanto, utilizamos la reconstrucción habitual (1.84) y (1.85).

2. $s_{j,i} = 1$ y $s_{j,i-1} = 0$. Queremos hallar $\alpha_{j+1,2i}$ y $\alpha_{j+1,2i+1}$, que están ambos a la izquierda de la discontinuidad. Debemos extrapolar $\alpha_{j,i}$, ya que este valor está calculado a partir de información a la derecha del salto. El $\beta_{j,i}$ es correcto, pues ha sido calculado con información de la izquierda. El resto, $(\alpha_{j,i-1}; \beta_{j,i-1})$ también es correcto porque han sido calculados con *stencils* a la izquierda que no cruzan la discontinuidad. Luego:

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1,2i} &= r_1\hat{\alpha}_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\alpha_{j,i-1} + d_3\beta_{j,i-1}, \\ \alpha_{j+1,2i+1} &= r_0\hat{\alpha}_{j,i} + d_0\beta_{j,i} + r_2\alpha_{j,i-1} + d_2\alpha_{j,i-1}. \end{aligned}$$

3. $s_{j,i} = 0$ y $s_{j,i-1} = 1$. Los datos se hallan a la derecha de la discontinuidad. $(\alpha_{j,i}; \beta_{j,i})$ son correctos, ya que provienen de *stencils* a la derecha del salto y que no lo cruzan. El valor de $\alpha_{j,i-1}$ es válido ya que proviene de información a la derecha. Pero $\beta_{j,i-1}$ proviene de datos de la izquierda y por tanto debemos igualarlo a cero:

$$\alpha_{j+1,2i} = r_1\alpha_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\alpha_{j,i-1},$$

$$\alpha_{j+1,2i+1} = r_0\alpha_{j,i} + d_0\beta_{j,i} + r_2\alpha_{j,i-1}.$$

4. $s_{j,i} = 1$ y $s_{j,i-1} = 1$. $\alpha_{j+1,2i}$ estará a la izquierda de la discontinuidad y $\alpha_{j+1,2i+1}$ a la derecha. Empecemos por $\alpha_{j+1,2i}$. En este caso $\beta_{j,i-1}$ y $\beta_{j,i}$ son correctos, ya que provienen de datos a la izquierda. Pero $\alpha_{j,i-1}$ y $\alpha_{j,i}$ son ambos incorrectos y debemos extrapolarlos:

$$\alpha_{j+1,2i} = r_1\hat{\alpha}_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\hat{\alpha}_{j,i-1} + d_3\beta_{j,i-1}.$$

Nos queda calcular $\alpha_{j+1,2i+1}$. Ahora $\alpha_{j,i-1}$ y $\alpha_{j,i}$ son válidos, pero $\beta_{j,i-1}$ y $\beta_{j,i}$ deben ser igualados a cero. Por tanto:

$$\alpha_{j+1,2i+1} = r_0\alpha_{j,i} + r_2\alpha_{j,i-1}.$$

4.5

ENO-DB6

En este caso la transformada directa es:

$$\alpha_{j,i} = \sum_{k=0}^5 c_k \alpha_{j+1,2i+k}, \quad (4.2)$$

$$\beta_{j,i} = \sum_{k=0}^5 h_k \alpha_{j+1,2i+k}, \quad (4.3)$$

donde los coeficientes² son:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0,03522629188210, & h_0 &= -0,33267055295096, \\ c_1 &= -0,08544127388224, & h_1 &= 0,80689150931334, \\ c_2 &= -0,13501102001039, & h_2 &= -0,45987750211933, \\ c_3 &= 0,45987750211933, & h_3 &= -0,13501102001039, \\ c_4 &= 0,80689150931334, & h_4 &= 0,08544127388224, \\ c_5 &= 0,33267055295096, & h_5 &= 0,03522629188210. \end{aligned}$$

La inversa es como sigue:

$$\alpha_{j+1,2i} = r_1\alpha_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\alpha_{j,i-1} + d_3\beta_{j,i-1} + r_5\alpha_{j,i-2} + d_5\beta_{j,i-2} \quad (4.4)$$

²Estos coeficientes pueden obtenerse con MATLAB® mediante *wfilters.m*.

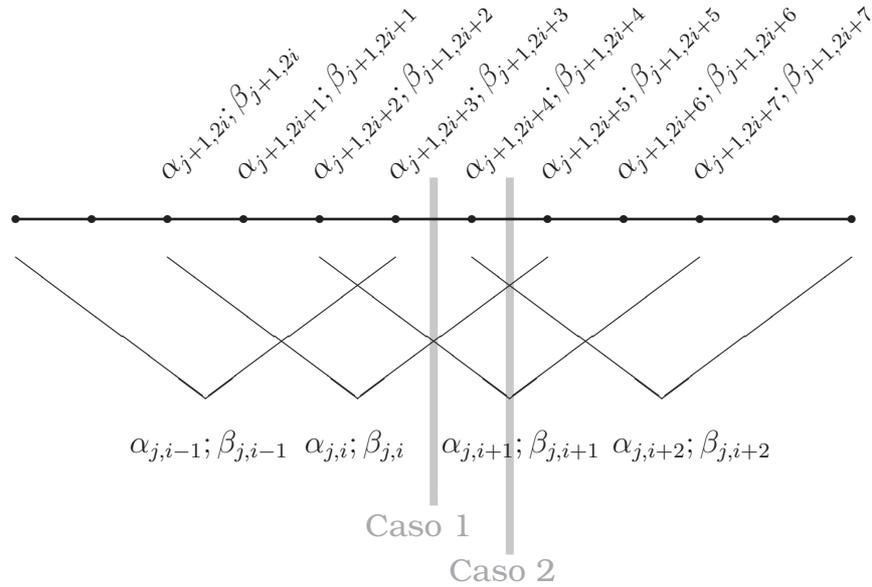


Figura 4.3: Transformación directa DB6, donde indicamos los dos posibles casos en que podemos localizar una discontinuidad, dando lugar a dos o tres stencils afectados

$$\alpha_{j+1,2i+1} = r_0\alpha_{j,i} + d_0\beta_{j,i} + r_2\alpha_{j,i-1} + d_2\beta_{j,i-1} + r_4\alpha_{j,i-2} + d_4\beta_{j,i-2} \quad (4.5)$$

donde: $r_{2i+1} = c_{2i}$, $d_{2i+1} = h_{2i}$, $r_{2i} = c_{2i+1}$, $d_{2i} = h_{2i+1}$, $i = 0, 1, 2$.

Al igual que en DB4 tenemos dos casos. En el primero la discontinuidad se localiza entre $\alpha_{j+1,2i+3}$ y $\alpha_{j+1,2i+4}$, dando lugar a dos stencils afectados. En el segundo caso la discontinuidad se halla entre $\alpha_{j+1,2i+4}$ y $\alpha_{j+1,2i+5}$ y afecta a tres stencils, ver la Figura 4.3.

Caso 1: dos stencils afectados

Lado izquierdo

1. $\beta_{j,i}$. Extrapolamos $\alpha_{j,i}$ y lo denotamos $\hat{\alpha}_{j,i}$. Para mantener el orden del método utilizamos extrapolación de orden 2. Despejamos de (4.2) el bloque

$$c_4\hat{\alpha}_{j+1,2i+4} + c_5\hat{\alpha}_{j+1,2i+5} = \hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1}$$

$$-c_2\alpha_{j+1,2i+2} - c_3\alpha_{j+1,2i+3}.$$

Utilizando que $\frac{h_4}{c_4} = \frac{h_5}{c_5}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{j,i} &= h_0\alpha_{j+1,2i} + h_1\alpha_{j+1,2i+1} + h_2\alpha_{j+1,2i+2} + h_3\alpha_{j+1,2i+3} \\ &+ \frac{h_4}{c_4} (\hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1} - c_2\alpha_{j+1,2i+2} - c_3\alpha_{j+1,2i+3}).\end{aligned}$$

2. $\beta_{j,i+1}$. Extrapolamos $\alpha_{j,i+1} \rightarrow \hat{\alpha}_{j,i+1}$. Con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{j,i+1} &= c_0\alpha_{j+1,2i+2} + c_1\alpha_{j+1,2i+3} + c_2\alpha_{j+1,2i+4} \\ &+ c_3\alpha_{j+1,2i+5} + c_4\alpha_{j+1,2i+6} + c_5\alpha_{j+1,2i+7}. \\ \hat{\beta}_{j,i+1} &= h_0\alpha_{j+1,2i+2} + h_1\alpha_{j+1,2i+3} + h_2\alpha_{j+1,2i+4} \\ &+ h_3\alpha_{j+1,2i+5} + h_4\alpha_{j+1,2i+6} + h_5\alpha_{j+1,2i+7}.\end{aligned}$$

De estas ecuaciones nos falta por conocer $\alpha_{j+1,i+m}$, $m = 4, 5, 6, 7$ y $\hat{\beta}_{j,i+1}$. Con lo cual tenemos un problema, ya que es evidente que con la información disponible no podemos determinar $\hat{\beta}_{j,i+1}$. No podemos utilizar el bloque $c_4\hat{\alpha}_{j+1,2i+4} + c_5\hat{\alpha}_{j+1,2i+5}$ que hemos calculado en el paso previo ya que la relación $\frac{c_2}{c_4} = \frac{c_3}{c_5}$ no se cumple.

Chan y Zhou sugieren en [26] que se extrapole $\hat{\alpha}_{j+1,2i+4}$ y se determine entonces $\hat{\alpha}_{j+1,2i+5}$. Nosotros proponemos una nueva forma de proceder, utilizando la información que proporciona la transformada inversa. Esta idea evita hacer extrapolaciones en el nivel más fino, simplifica los cálculos y permite una generalización más sencilla para $DB2p$, con p un entero arbitrario. En cualquier caso expondremos este método sin aplicar esta idea, que será desarrollada en un apartado posterior.

Así pues, extrapolamos $\hat{\alpha}_{j+1,2i+4}$, con un método de grado 2 y calculamos $\hat{\alpha}_{j+1,2i+5}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{j+1,2i+5} &= \frac{1}{c_5} (\hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1} \\ &- c_2\alpha_{j+1,2i+2} - c_3\alpha_{j+1,2i+3} - c_4\hat{\alpha}_{j+1,2i+4}).\end{aligned}$$

Con esto despejamos el bloque:

$$\begin{aligned}c_4\alpha_{j+1,2i+6} + c_5\alpha_{j+1,2i+7} &= \hat{\alpha}_{j,i+1} - c_0\alpha_{j+1,2i+2} \\ &- c_1\alpha_{j+1,2i+3} - c_2\hat{\alpha}_{j+1,2i+4} - c_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+5}.\end{aligned}$$

Haciendo uso de la relación $\frac{h_4}{c_4} = \frac{h_5}{c_5}$:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{j,i+1} &= h_0\alpha_{j+1,2i+2} + h_1\alpha_{j+1,2i+3} + h_2\hat{\alpha}_{j+1,2i+4} + h_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+5} \\ &\quad + \frac{h_4}{c_4} (\hat{\alpha}_{j,i+1} - c_0\alpha_{j+1,2i+2} - c_1\alpha_{j+1,2i+3} - c_2\hat{\alpha}_{j+1,2i+4} - c_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+5}).\end{aligned}$$

Lado derecho

1. $\alpha_{j,i+1}$. Imponemos que $\bar{\beta}_{j,i+1} = 0$. Dado que $\frac{c_0}{h_0} = \frac{c_1}{h_1}$:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{j,i+1} &= -\frac{c_0}{h_0}(h_2\alpha_{j+1,2i+4} + h_3\alpha_{j+1,2i+5} + h_4\alpha_{j+1,2i+6} + h_5\alpha_{j+1,2i+7}) \\ &\quad + c_2\alpha_{j+1,2i+4} + c_3\alpha_{j+1,2i+5} + c_4\alpha_{j+1,2i+6} + c_5\alpha_{j+1,2i+7}.\end{aligned}$$

2. $\alpha_{j,i}$. Imponemos que $\bar{\beta}_{j,i} = 0$. Partiendo de (4.2) y (4.3) nos encontramos en la misma situación que en el cálculo de $\beta_{j,i+1}$, ya que sólo conocemos $\alpha_{j+1,2i+4}$ y $\alpha_{j+1,2i+5}$. Realizamos la extrapolación con un método de grado 2 en el nivel $j+1$, obteniendo $\bar{\alpha}_{j+1,2i+3}$ con información de la derecha. Así:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} &= \frac{-1}{h_0}(h_1\bar{\alpha}_{j+1,2i+3} + h_2\alpha_{j+1,2i+4} + h_3\alpha_{j+1,2i+5} \\ &\quad + h_4\alpha_{j+1,2i+6} + h_5\alpha_{j+1,2i+7}).\end{aligned}$$

Mediante la relación $\frac{c_0}{h_0} = \frac{c_1}{h_1}$:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{j,i} &= -\frac{c_0}{h_0}(h_2\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} + h_3\bar{\alpha}_{j+1,2i+3} + h_4\alpha_{j+1,2i+4} + h_5\alpha_{j+1,2i+5}) \\ &\quad + c_2\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} + c_3\bar{\alpha}_{j+1,2i+3} + c_4\alpha_{j+1,2i+4} + c_5\alpha_{j+1,2i+5}.\end{aligned}$$

Caso 2: tres *stencils* afectados

Lado Izquierdo.

1. $\beta_{j,i}$. Extrapolamos $\alpha_{j,i}$, denotándolo $\hat{\alpha}_{j,i}$. De (4.2) y (4.3) conocemos $\alpha_{j+1,2i+m}$, $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Despejando:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{j+1,2i+5} &= \frac{1}{c_5} (\hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1} - c_2\alpha_{j+1,2i+2} \\ &\quad - c_3\alpha_{j+1,2i+3} - c_4\alpha_{j+1,2i+4}).\end{aligned}\tag{4.6}$$

Con esto:

$$\begin{aligned} \beta_{j,i} = & h_0\alpha_{j+1,2i} + h_1\alpha_{j+1,2i+1} + h_2\alpha_{j+1,2i+2} \\ & + h_3\alpha_{j+1,2i+3} + h_4\alpha_{j+1,2i+4} + h_5\hat{\alpha}_{j+1,2i+5}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

2. $\beta_{j,i+1}$. Extrapolamos $\alpha_{j,i+1}$. Conocemos $\alpha_{j+1,i+2}$, $\alpha_{j+1,i+3}$ y $\alpha_{j+1,i+4}$ ya que se encuentran a la izquierda de la discontinuidad. Además podemos utilizar $\hat{\alpha}_{j+1,2i+5}$ que ha sido calculado en el paso anterior con información de la izquierda. Con lo cual sabiendo que $\frac{h_4}{c_4} = \frac{h_5}{c_5}$ podemos determinar $\beta_{j,i+1}$:

$$\begin{aligned} \beta_{j,i+1} = & h_0\alpha_{j+1,2i+2} + h_1\alpha_{j+1,2i+3} + h_2\alpha_{j+1,2i+4} + h_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+5} \\ & + \frac{h_4}{c_4} (\hat{\alpha}_{j,i+1} - c_0\alpha_{j+1,2i+2} - c_1\alpha_{j+1,2i+3} - c_2\alpha_{j+1,2i+4} - c_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+5}). \end{aligned}$$

3. $\beta_{j,i+2}$. En este caso no podemos determinar el coeficiente de la manera habitual debiendo utilizar extrapolaciones en el nivel $j+1$. Así, $\alpha_{j+1,2i+6}$ lo extrapolamos con información de la izquierda:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{j+1,2i+7} = & \frac{1}{c_5} (\hat{\alpha}_{j,i+1} - c_0\alpha_{j+1,2i+2} - c_1\alpha_{j+1,2i+3} \\ & - c_2\alpha_{j+1,2i+4} - c_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+5} - c_4\hat{\alpha}_{j+1,2i+6}). \end{aligned}$$

Con estos datos, extrapolando $\alpha_{j,i+2}$ y haciendo uso de la relación $\frac{h_4}{c_4} = \frac{h_5}{c_5}$:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{j,i+2} = & h_0\alpha_{j+1,2i+4} + h_1\hat{\alpha}_{j+1,2i+5} + h_2\hat{\alpha}_{j+1,2i+6} + h_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+7} \\ & + \frac{h_4}{c_4} (\hat{\alpha}_{j,i+2} - c_0\alpha_{j+1,2i+4} - c_1\hat{\alpha}_{j+1,2i+5} - c_2\hat{\alpha}_{j+1,2i+6} - c_3\hat{\alpha}_{j+1,2i+7}). \end{aligned}$$

Lado Derecho.

1. $\alpha_{j,i+2}$. Primero hallamos $\alpha_{j+1,2i+4}$,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{j+1,2i+4} = & -\frac{1}{h_0} (h_1\alpha_{j+1,2i+5} + h_2\alpha_{j+1,2i+6} + h_3\alpha_{2i+7} \\ & + h_4\alpha_{j+1,2i+8} + h_5\alpha_{j+1,2i+9}), \end{aligned}$$

donde $\beta_{j,i+2} = 0$. Con lo cual podemos determinar $\alpha_{j,i+2}$,

$$\bar{\alpha}_{j,i+2} = c_0\bar{\alpha}_{j+1,2i+4} + c_1\alpha_{j+1,2i+5} + c_2\alpha_{j+1,2i+6} + c_3\alpha_{2i+7}$$

$$+c_4\alpha_{j+1,2i+8} + c_5\alpha_{j+1,2i+9}.$$

2. $\alpha_{j,i+1}$. Igualamos $\beta_{j,i+1}$ a 0. Utilizando de nuevo que $\frac{c_0}{h_0} = \frac{c_1}{h_1}$:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{j,i+1} &= -\frac{c_0}{h_0} (h_2\bar{\alpha}_{j+1,2i+4} + h_3\alpha_{j+1,2i+5} + h_4\alpha_{j+1,2i+6} + h_5\alpha_{j+1,2i+7}) \\ &\quad + c_2\bar{\alpha}_{j+1,2i+4} + c_3\alpha_{j+1,2i+5} + c_4\alpha_{j+1,2i+6} + c_5\alpha_{j+1,2i+7}.\end{aligned}$$

3. $\alpha_{j,i}$. Igualamos $\beta_{j,i} = 0$. Extrapolamos $\alpha_{j+1,2i+3}$ con información de la derecha, obteniendo $\bar{\alpha}_{j+1,2i+3}$. Con esto:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} &= \frac{-1}{h_0} (h_1\bar{\alpha}_{j+1,2i+3} + h_2\bar{\alpha}_{j+1,2i+4} \\ &\quad + h_3\alpha_{j+1,2i+5} + h_4\alpha_{j+1,2i+6} + h_5\alpha_{j+1,2i+7}).\end{aligned}$$

Mediante la relación $\frac{c_0}{h_0} = \frac{c_1}{h_1}$ y los datos anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_{j,i} &= -\frac{c_0}{h_0} (h_2\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} + h_3\bar{\alpha}_{j+1,2i+3} + h_4\bar{\alpha}_{j+1,2i+4} + h_5\alpha_{j+1,2i+5}) \\ &\quad + c_2\bar{\alpha}_{j+1,2i+2} + c_3\bar{\alpha}_{j+1,2i+3} + c_4\bar{\alpha}_{j+1,2i+4} + c_5\alpha_{j+1,2i+5}.\end{aligned}$$

4.5.1

Reconstrucción

Para recuperar los datos iniciales, utilizamos (4.4) y (4.5). Al igual que con *ENO-DB4* cuando trabajamos con *stencils* que cruzan discontinuidades, debemos extrapolar las α 's e igualar los β 's a cero según si nos hallamos a izquierda o derecha de la discontinuidad respectivamente. Recordemos que hemos guardado un vector s tal que $s_{j,i} = 0$ si el *stencil* $\{\alpha_{j+1,2i}, \alpha_{j+1,2i+1}, \alpha_{j+1,2i+2}, \alpha_{j+1,2i+3}\}$ no cruza una discontinuidad, y $s_{j,i} = 1$ si la cruza. Nos podemos encontrar con los siguientes casos:

1. $s_{j,i} = 0$ y $s_{j,i-1} = 0$ y $s_{j,i-2} = 0$. No hay discontinuidades y por tanto utilizamos las transformadas (4.4) y (4.5).

2. $s_{j,i} = 0$ y $s_{j,i-1} = 0$ y $s_{j,i-2} = 1$. Como $\alpha_{j+1,2i}$ y $\alpha_{j+1,2i+1}$ se encuentran a la derecha de la discontinuidad, $\alpha_{j,i-2}$ es correcto y $\beta_{j,i-2}$ debe ser igualado a cero. Por tanto:

$$\alpha_{j+1,2i} = r_1\alpha_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\alpha_{j,i-1} + d_3\beta_{j,i-1} + r_5\alpha_{j,i-2},$$

$$\alpha_{j+1,2i+1} = r_0\alpha_{j,i} + d_0\beta_{j,i} + r_2\alpha_{j,i-1} + d_2\beta_{j,i-1} + r_4\alpha_{j,i-2}.$$

3. $s_{j,i} = 0$ y $s_{j,i-1} = 1$ y $s_{j,i-2} = 1$. Los datos a recuperar se hallan a la derecha de la discontinuidad. Luego los α 's son correctos mientras que $\beta_{j,i-m}$, $m = 1, 2$, deben ser igualados a cero. Entonces:

$$\begin{aligned}\alpha_{j+1,2i} &= r_1\alpha_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\alpha_{j,i-1} + r_5\alpha_{j,i-2}, \\ \alpha_{j+1,2i+1} &= r_0\alpha_{j,i} + d_0\beta_{j,i} + r_2\alpha_{j,i-1} + r_4\alpha_{j,i-2}.\end{aligned}$$

4. $s_{j,i} = 1$ y $s_{j,i-1} = 1$ y $s_{j,i-2} = 1$. $\alpha_{j+1,2i}$ se halla a la izquierda de la discontinuidad. Los β 's son correctos mientras que los α 's deben ser extrapolados. Por tanto:

$$\alpha_{j+1,2i} = r_1\hat{\alpha}_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\hat{\alpha}_{j,i-1} + d_3\beta_{j,i-1} + r_5\hat{\alpha}_{j,i-2} + d_5\beta_{j,i-2}.$$

$\alpha_{j+1,2i+1}$ está a la derecha del salto. Luego los α 's son correctos y los β 's deben ser igualados a cero. Con lo cual,

$$\alpha_{j+1,2i+1} = r_0\alpha_{j,i} + r_2\alpha_{j,i-1} + r_4\alpha_{j,i-2}.$$

5. $s_{j,i} = 1$ y $s_{j,i-1} = 1$ y $s_{j,i-2} = 0$. Los datos a recuperar se encuentran a la izquierda del salto. Los β son correctos y debemos extrapolar $\alpha_{j,i}$ y $\alpha_{j,i-1}$ con información de la izquierda:

$$\begin{aligned}\alpha_{j+1,2i} &= r_1\hat{\alpha}_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\hat{\alpha}_{j,i-1} + d_3\beta_{j,i-1} + r_5\alpha_{j,i-2} + d_5\beta_{j,i-2}, \\ \alpha_{j+1,2i+1} &= r_0\hat{\alpha}_{j,i} + d_0\beta_{j,i} + r_2\hat{\alpha}_{j,i-1} + d_2\beta_{j,i-1} + r_4\alpha_{j,i-2} + d_4\beta_{j,i-2}.\end{aligned}$$

6. $s_{j,i} = 1$ y $s_{j,i-1} = 0$ y $s_{j,i-2} = 0$. Nos encontramos a la izquierda del salto. Luego $\beta_{j,i}$ es correcto y $\alpha_{j,i}$ debe ser extrapolado:

$$\begin{aligned}\alpha_{j+1,2i} &= r_1\hat{\alpha}_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\alpha_{j,i-1} + d_3\beta_{j,i-1} + r_5\alpha_{j,i-2} + d_5\beta_{j,i-2}, \\ \alpha_{j+1,2i+1} &= r_0\hat{\alpha}_{j,i} + d_0\beta_{j,i} + r_2\alpha_{j,i-1} + d_2\beta_{j,i-1} + r_4\alpha_{j,i-2} + d_4\beta_{j,i-2}.\end{aligned}$$

4.6

Algoritmos utilizando la transformada inversa (TI)

En esta sección presentamos una nueva manera de deducir los coeficientes del nivel más fino una vez que se ha realizado la extrapolación de los coeficientes del nivel grosero, utilizando la información de la transformada inversa. Esta idea evita realizar extrapolaciones en el nivel fino, simplifica los cálculos, garantiza la invertibilidad del método y permite una generalización sencilla para la base DB de cualquier orden.

4.6.1

ENO-DB4-TI

La transformada inversa en varios puntos puede expresarse:

$$\alpha_{j+1,2(i+l)} = r_1\alpha_{j,i+l} + d_1\beta_{j,i+l} + r_3\alpha_{j,i+l-1} + d_3\beta_{j,i+l-1}, \quad (4.8)$$

$$\alpha_{j+1,2(i+l)+1} = r_0\alpha_{j,i+l} + d_0\beta_{j,i+l} + r_2\alpha_{j,i+l-1} + d_2\beta_{j,i+l-1}. \quad (4.9)$$

Caso 1: un *stencil* afectado

Lado izquierdo

1. $\beta_{j,i}$. Extrapolamos $\hat{\alpha}_{j,i}$ y despejamos utilizando (4.8) con $l = 0$:

$$\hat{\beta}_{j,i} = \frac{1}{d_1} (\alpha_{j+1,2i} - r_1\hat{\alpha}_{j,i} - r_3\alpha_{j,i-1} - d_3\beta_{j,i-1}),$$

donde todos los datos a la izquierda del igual son conocidos y se hallan de información a la izquierda de la discontinuidad.

NOTA 4.1. En cada paso tenemos un par de ecuaciones que podemos elegir para despejar, una asociada a $\alpha_{j+1,m}$ y la otra a $\alpha_{j+1,m+1}$. Dado que la reconstrucción es invertible, como se demostrará posteriormente, podemos elegir una u otra indistintamente siempre que se reconstruyan datos de un mismo lado de la discontinuidad. Escogemos la asociada a $\alpha_{j+1,m}$ si calculamos β 's, para asegurarnos que $\alpha_{j+1,m}$ está a la izquierda de la discontinuidad. Siguiendo el mismo razonamiento tomamos la ecuación asociada a $\alpha_{j+1,m+1}$ si estamos calculando α 's. En lo que sigue, la elección se realizará de esta manera.

Lado derecho

1. $\alpha_{j,i}$. Igualamos $\bar{\beta}_{j,i} = 0$. Para poder despejar $\bar{\alpha}_{j,i}$ a partir de datos conocidos, elegimos (4.9) con $l = 1$, obteniendo:

$$\bar{\alpha}_{j,i} = \frac{1}{r_2} (\alpha_{j+1,2i+3} - r_0 \alpha_{j,i+1} - d_0 \beta_{j,i+1}).$$

Caso 2: dos stencils afectados

Lado izquierdo

1. $\beta_{j,i}$. Al estar a la izquierda de la discontinuidad, extrapolamos $\hat{\alpha}_{j,i}$. Hacemos uso de (4.8) con $l = 0$ y despejamos:

$$\hat{\beta}_{j,i} = \frac{1}{d_1} (\alpha_{j+1,2i} - r_1 \hat{\alpha}_{j,i} - r_3 \alpha_{j,i-1} - d_3 \beta_{j,i-1}),$$

2. $\beta_{j,i+1}$. Extrapolamos $\alpha_{j,i+1}$ y utilizando (4.8) con $l = 1$ podemos hallar $\beta_{j,i+1}$ con información a la izquierda del salto:

$$\hat{\beta}_{j,i+1} = \frac{1}{d_1} (\alpha_{j+1,2i+2} - r_1 \hat{\alpha}_{j,i+1} - r_3 \hat{\alpha}_{j,i} - d_3 \hat{\beta}_{j,i}).$$

Lado derecho

1. $\alpha_{j,i+1}$. Igualamos $\bar{\beta}_{j,i+1} = 0$. Mediante (4.9) con $l = 2$:

$$\bar{\alpha}_{j,i+1} = \frac{1}{r_2} (\alpha_{j+1,2i+5} - r_0 \alpha_{j,i+2} - d_0 \beta_{j,i+2}).$$

2. $\alpha_{j,i}$. Igualamos $\bar{\beta}_{j,i} = 0$. Utilizando (4.9) con $l = 1$ nos queda:

$$\bar{\alpha}_{j,i} = \frac{1}{r_2} (\alpha_{j+1,2i+3} - r_0 \bar{\alpha}_{j,i+1}).$$

4.6.2

ENO-DB6-TI

La transformada inversa para DB6 podemos expresarla como:

$$\alpha_{j+1,2i+2l} = \sum_{k=0}^2 r_{2k+1} \alpha_{j,i-k+l} + d_{2k+1} \beta_{j,i-k+l}, \quad (4.10)$$

$$\alpha_{j+1,2i+2l+1} = \sum_{k=0}^2 r_{2k} \alpha_{j,i-k+l} + d_{2k} \beta_{j,i-k+l}. \quad (4.11)$$

Caso 1: dos *stencils* afectados

Lado izquierdo

1. $\beta_{j,i}$. Extrapolamos $\hat{\alpha}_{j,i}$ y utilizando (4.10) para $l = 0$:

$$\hat{\beta}_{j,i} = \frac{1}{d_1} (\alpha_{j+1,2i} - r_1 \hat{\alpha}_{j,i} - r_3 \alpha_{j,i-1} - d_3 \beta_{j,i-1} - r_5 \alpha_{j,i-2} - d_5 \beta_{j,i-2}).$$

2. $\beta_{j,i+1}$. Extrapolamos $\hat{\alpha}_{j,i+1}$ y utilizando (4.10) para $l = 1$:

$$\hat{\beta}_{j,i+1} = \frac{1}{d_1} (\alpha_{j+1,2i+2} - r_1 \hat{\alpha}_{j,i+1} - r_3 \hat{\alpha}_{j,i} - d_3 \hat{\beta}_{j,i} - r_5 \alpha_{j,i-1} - d_5 \beta_{j,i-1}).$$

Lado derecho

1. $\alpha_{j,i+1}$. Igualamos $\bar{\beta}_{j,i+1}$ a cero. Utilizando (4.11) para $l = 3$:

$$\bar{\alpha}_{j,i+1} = \frac{1}{r_4} (\alpha_{j+1,2i+7} - r_0 \alpha_{j,i+3} - d_0 \beta_{j,i+3} - r_2 \alpha_{j,i+2} - d_2 \beta_{j,i+2}).$$

2. $\alpha_{j,i}$. Igualamos $\bar{\beta}_{j,i}$ a cero. Utilizando (4.11) para $l = 2$:

$$\bar{\alpha}_{j,i} = \frac{1}{r_4} (\alpha_{j+1,2i+5} - r_0 \alpha_{j,i+2} - d_0 \beta_{j,i+2} - r_2 \bar{\alpha}_{j,i+1}).$$

Caso 2: tres *stencils* afectados**Lado izquierdo**

1. $\hat{\beta}_{j,i}$ y $\hat{\beta}_{j,i+1}$. Se calculan igual que en el caso de dos *stencils* afectados.

2. $\beta_{j,i+2}$. Extrapolamos $\hat{\alpha}_{j,i+2}$. Utilizando (4.10) con $l = 2$:

$$\hat{\beta}_{j,i+2} = \frac{1}{d_1} \left(\alpha_{j+1,2i+4} - r_1 \hat{\alpha}_{j,i+2} - r_3 \hat{\alpha}_{j,i+1} - d_3 \hat{\beta}_{j,i+1} - r_5 \hat{\alpha}_{j,i} - d_5 \hat{\beta}_{j,i} \right).$$

Lado derecho

1. $\alpha_{j,i+2}$. Igualamos $\beta_{j,i+2}$ a cero. Utilizando (4.11) con $l = 4$:

$$\bar{\alpha}_{j,i+2} = \frac{1}{r_4} \left(\alpha_{j+1,2i+9} - r_0 \alpha_{j,i+4} - d_0 \beta_{j,i+4} - r_2 \alpha_{j,i+3} - d_2 \beta_{j,i+3} \right).$$

2. $\alpha_{j,i+1}$. Igualamos $\beta_{j,i+1}$ a cero. Mediante (4.11) con $l = 3$:

$$\bar{\alpha}_{j,i+1} = \frac{1}{r_4} \left(\alpha_{j+1,2i+7} - r_0 \alpha_{j,i+3} - d_0 \beta_{j,i+3} - r_2 \bar{\alpha}_{j,i+2} \right).$$

3. $\alpha_{j,i}$. Igualamos $\beta_{j,i}$ a cero. Utilizando (4.11) con $l = 2$:

$$\bar{\alpha}_{j,i} = \frac{1}{r_4} \left(\alpha_{j+1,2i+5} - r_0 \bar{\alpha}_{j,i+2} - r_2 \bar{\alpha}_{j,i+1} \right).$$

4.6.3**Algoritmo general**

Mediante la transformada inversa hemos obtenido los algoritmos *ENO-DB4-TI* y *ENO-DB6-TI*. Observamos que la manera de proceder es similar en ambos casos. En esta sección construiremos un algoritmo general que llamaremos *ENO-DB2p-TI*, con p natural.

La transformada directa $DB2p$ en general puede expresarse:

$$\alpha_{j,i} = \sum_{k=2i}^{2i+2p-1} c_{k-2i} \alpha_{j+1,k}, \quad (4.12)$$

$$\beta_{j,i} = \sum_{k=2i}^{2i+2p-1} h_{k-2i} \alpha_{j+1,k}, \quad (4.13)$$

y la transformada inversa como:

$$\alpha_{j+1,2i-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (r_{2k} \alpha_{j,i-k} + d_{2k} \beta_{j,i-k}), \quad (4.14)$$

$$\alpha_{j+1,2i} = \sum_{k=0}^{p-1} (r_{2k+1} \alpha_{j,i-k} + d_{2k+1} \beta_{j,i-k}), \quad (4.15)$$

donde $r_{2k} = c_{2k+1}$, $d_{2k} = h_{2k+1}$, $r_{2k+1} = c_{2k}$, $d_{2k+1} = h_{2k}$, con $k = 0, 1, 2, \dots$

Caso de $p - 1$ stencils afectados

Lado izquierdo

Extrapolamos $\alpha_{j,k} \leftrightarrow \hat{\alpha}_{j,k}$, para $k = i, i + 1, \dots, i + p - 2$. La extrapolación debe de ser de grado $p - 1$. El sobrescribir los coeficientes no es ningún problema, ya que para el lado derecho no se utilizan los α 's originales. Los β 's a modificar son:

$$\beta_{j,i+m} = \frac{1}{d_1} (\alpha_{j+1,2(i+m)} - r_1 \alpha_{j,i+m} - \sum_{k=1}^{p-1} [r_{2k+1} \alpha_{j,i-k+m} + d_{2k+1} \beta_{j,i-k+m}]) \quad (4.16)$$

con $m = 0, 1, \dots, p - 2$.

Guardamos la posición de los coeficientes calculados a partir de *stencils* que cruzan discontinuidades en un vector auxiliar: $s_{j,m} = 1$, para $m = i, i + 1, \dots, i + p - 2$.

Lado derecho

Igualamos $\beta_{j,k} = 0$, para $k = p - 2, p - 1, \dots, 0$. En este caso sí necesitamos almacenar los β 's que hemos calculado para el

lado izquierdo en vectores auxiliares para asegurar la invertibilidad, a menos que realicemos una aproximación lineal. Los α 's modificados son:

$$\alpha_{j,i+m} = \frac{1}{r_{2^{p-2}}} (\alpha_{j+1,2(i+p+m)-1} - \sum_{k=0}^{p-2} [r_{2^k} \alpha_{j,i-k+p+m-1} + d_{2^k} \beta_{j,i-k+p+m-1}]) \quad (4.17)$$

con $m = p - 2, p - 3, \dots, 0$.

Caso de p stencils afectados

Lado izquierdo

Extrapolamos $\alpha_{j,k} \leftrightarrow \hat{\alpha}_{j,k}$ para $k = i, i + 1, \dots, i + p - 1$. Utilizamos (4.16) con $m = 0, 1, \dots, p - 1$.

Lado derecho

Igualamos $\beta_{j,k} = 0$, para $k = p - 1, p - 2, \dots, 0$ y utilizamos (4.17) con $m = p - 1, p - 2, \dots, 0$.

Reconstrucción

Definimos la matriz S de dimensiones $2p \times p$, nula excepto las diagonales $-1, -2, \dots, -p$ que estarán formadas por unos. Las filas de dicha matriz contienen las distintas posibilidades que podemos encontrarnos para $\{s_{j,i}\}_i$. Si $\{s_{j,i-p}, s_{j,i-p+1}, \dots, s_{j,i}\}$ corresponde a la fila n de S , tenemos los siguientes casos:

- Si $n = 0$, no tenemos ningún *stencil* afectado. Por tanto la reconstrucción es como (4.14) y (4.15).
- Si $n > 0$ y $n < p$, estaremos en el caso de n *stencils* afectados, que van a ser utilizados para recuperar datos a la derecha de la discontinuidad. Luego debemos anular $\beta_{j,k}$, para $k = i - p + 1, \dots, i - p + n - 2$. Posteriormente utilizando (4.14) y (4.15), tenemos la reconstrucción buscada.

En estos casos también hemos de tener cuidado en no modificar términos que posteriormente necesitaremos. Al igual que en la transformada directa esto se consigue mediante vectores auxiliares.

- Si $n = p$, todos los *stencils* que utilizamos están afectados por el salto. Nos encontramos con dos casos:

$\alpha_{j,2i-1}$ se halla a la izquierda del salto, luego extrapolamos $\alpha_{j,k}$, para $k = i - p - 1, \dots, i$ y usamos (4.14) y (4.15).

$\alpha_{j,2i}$ se localiza a la derecha del salto. Por tanto anulamos $\beta_{j,k}$ para $k = i - p + 1, \dots, i$ y aplicamos (4.14) y (4.15).

- Si $n > p$ reconstruiremos datos a la izquierda del salto. Luego extrapolamos $\alpha_{j,k}$ para $k = i - 2p + l - 1, \dots, i$ y utilizamos (4.14) y (4.15).

Separación de discontinuidades

Para aplicar *ENO-DB2p* correctamente debe cumplirse la *DSP*, Definición 3.1, ¿será válida para *ENO-DB2p-TI*?

El caso más extremo se da cuando hay p *stencils* afectados y la discontinuidad se halla en $(\alpha_{j+1,2(i+p-1)}, \alpha_{j+1,2(i+p-1)+1})$. Por la izquierda, para hallar $\alpha_{j,i}$ necesitamos extrapolaciones de grado $p-1$, es decir utilizamos el *stencil* $\{\alpha_{j,i-p}, \dots, \alpha_{j,i-1}\}$. El valor más a la izquierda del nivel $j + 1$ necesario para calcular $\alpha_{j,i-p}$ es $\alpha_{j+1,2(i-p)}$. Además en *ENO-DB2p-TI* (ver el caso de p *stencils* afectados) no hacemos uso de ningún valor más a la izquierda que éste. Luego entre $\alpha_{j+1,2(i-p)}$ y $\alpha_{j+1,2(i+p-1)}$ no debe haber discontinuidades, es decir, $4p - 2$ intervalos.

Por la derecha el mayor valor que se utiliza es $\alpha_{j,i+2p-2}$ que proviene de $\alpha_{j+1,2(i+2p-2)+p-1}$. Entre este último y $\alpha_{j+1,2(i+p-1)+1}$ no debe haber discontinuidades, es decir $3p - 4$ intervalos, siendo este valor menor que $4p - 2$.

La *DSP* nos dice que para *stencils* de longitud $l + 1$ debe cumplirse que $(l + 2)h < t$, siendo h la longitud de cada intervalo y t la mínima distancia entre dos discontinuidades. En nuestro caso significará que haya $2p + 1$ intervalos libres de discontinuidades.

Dado que $4p - 2 \geq 2p + 1$ para $p > 1$, debemos utilizar una nueva definición para la DSP:

DEFINICIÓN 4.1. Dado un filtro wavelet con stencils de longitud $l + 1$ con $l > 2$ decimos que la proyección de f en el espacio V_j , con paso espacial $h = 2^{-j}$ satisface la Propiedad de Separación de Discontinuidades para TI (DSP-TI), si $2l \cdot h < t$, con $t = \min\{|x_i - x_j| : x_i, x_j \in D\}$.

4.7

Equivalencia de los métodos ENO-wavelet y ENO-wavelet-TI

En esta sección estudiaremos la posible equivalencia entre los métodos estándar y los basados en la transformada inversa. Empezamos estudiando los diferentes casos para DB4:

Caso 1: un stencil afectado

Lado izquierdo

Nos preguntamos si $(\hat{\beta}_{j,i})_{ENO-DB4} = (\hat{\beta}_{j,i})_{ENO-DB4-TI}$. Veamos:

$$\begin{aligned}
 & (\hat{\beta}_{j,i})_{ENO-DB4} - (\hat{\beta}_{j,i})_{ENO-DB4-TI} = \\
 & = [h_0\alpha_{j+1,2i} + h_1\alpha_{j+1,2i+1} + \frac{h_2}{c_2}(\hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1})] \\
 & \quad - [\frac{1}{d_1}(\alpha_{j+1,2i} - r_1\hat{\alpha}_{j,i} - r_3\alpha_{j,i-1} - d_3\beta_{j,i-1})] \\
 & = [h_0\alpha_{j+1,2i} + h_1\alpha_{j+1,2i+1} + \frac{h_2}{c_2}(\hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1})] \\
 & \quad - [\frac{1}{d_1}(\alpha_{j+1,2i} - r_1\hat{\alpha}_{j,i} \\
 & \quad - r_3(c_0\alpha_{j+1,2i-2} + c_1\alpha_{j+1,2i-1} + c_2\alpha_{j+1,2i} + c_3\alpha_{j+1,2i+1}) \\
 & \quad - d_3(h_0\alpha_{j+1,2i-2} + h_1\alpha_{j+1,2i-1} + h_2\alpha_{j+1,2i} + h_3\alpha_{j+1,2i+1}))].
 \end{aligned}$$

Los coeficientes que multiplican a cada α son:

$$\hat{\alpha}_{j,i} \longrightarrow \frac{h_2}{c_2} + \frac{r_1}{d_1} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{j+1,2i-2} &\longrightarrow \frac{1}{d_1} (r_3 c_0 + d_3 h_0) = 0, \\
\alpha_{j+1,2i-1} &\longrightarrow \frac{1}{d_1} (r_3 c_1 + d_3 h_1) = 0, \\
\alpha_{j+1,2i} &\longrightarrow -\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1} (r_3 c_2 + d_3 h_2) + h_0 - \frac{h_2 c_0}{c_2} = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+1} &\longrightarrow h_1 + \frac{1}{d_1} (r_3 c_3 + d_3 h_3) - \frac{h_2 c_1}{c_2} = 0.
\end{aligned}$$

Lado derecho

$$\begin{aligned}
&(\bar{\alpha}_{j,i})_{ENO-DB4} - (\bar{\alpha}_{j,i})_{ENO-DB4-TI} = \\
&= -\frac{c_0}{h_0} (h_2 \alpha_{j+1,2i+1} + h_3 \alpha_{j+1,2i+3}) + c_2 \alpha_{j+1,2i+1} + c_3 \alpha_{j+1,2i+3} \\
&\quad - \frac{1}{r_2} (\alpha_{j+1,2i+3} - r_0 \alpha_{j,i+1} - d_0 \beta_{j,i+1}) \\
&= -\frac{c_0}{h_0} (h_2 \alpha_{j+1,2i+1} + h_3 \alpha_{j+1,2i+3}) + c_2 \alpha_{j+1,2i+1} + c_3 \alpha_{j+1,2i+3} \\
&\quad - \frac{1}{r_2} (\alpha_{j+1,2i+3} - r_0 (c_0 \alpha_{j+1,2i+2} + c_1 \alpha_{j+1,2i+3} + c_2 \alpha_{j+1,2i+4} + c_3 \alpha_{j+1,2i+5}) \\
&\quad - d_0 (h_0 \alpha_{j+1,2i+2} + h_1 \alpha_{j+1,2i+3} + h_2 \alpha_{j+1,2i+4} + h_3 \alpha_{j+1,2i+5})).
\end{aligned}$$

Los coeficientes de cada α son:

$$\begin{aligned}
\alpha_{j+1,2i+1} &\longrightarrow -\frac{c_0}{h_0} h_2 + c_2 = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+2} &\longrightarrow -\frac{c_0}{h_0} h_2 + c_2 + \frac{r_0}{r_2} c_0 + \frac{d_0}{r_2} h_0 = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+3} &\longrightarrow -\frac{c_0}{h_0} h_3 + c_3 - \frac{1}{r_2} + \frac{r_0}{r_2} c_1 + \frac{d_0}{r_2} h_1 = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+4} &\longrightarrow \frac{r_0}{r_2} c_2 + \frac{d_0}{r_2} h_2 = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+5} &\longrightarrow \frac{r_0}{r_2} c_3 + \frac{d_0}{r_2} h_3 = 0.
\end{aligned}$$

Caso 2: dos stencils afectados

Lado izquierdo

Empecemos por $\beta_{j,i}$:

$$\begin{aligned}
&(\hat{\beta}_{j,i})_{ENO-DB4} - (\hat{\beta}_{j,i})_{ENO-DB4-TI} = \\
&= h_0 \alpha_{j+1,2i} + h_1 \alpha_{j+1,2i+1} + h_2 \alpha_{j+1,2i+2} + h_3 \hat{\alpha}_{j+1,2i+3} \\
&\quad - \frac{1}{d_1} (\alpha_{j+1,2i} - r_1 \hat{\alpha}_{j,i} - r_3 \alpha_{j,i-1} - d_3 \beta_{j,i-1}) \\
&= h_0 \alpha_{j+1,2i} + h_1 \alpha_{j+1,2i+1} + h_2 \alpha_{j+1,2i+2} \\
&\quad + \frac{h_3}{c_3} (\hat{\alpha}_{j,i} - c_0 \alpha_{j+1,2i} - c_1 \alpha_{j+1,2i+1} + c_2 \alpha_{j+1,2i+2}) \\
&\quad - \frac{1}{d_1} (\alpha_{j+1,2i} - r_1 \hat{\alpha}_{j,i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -r_3(c_0\alpha_{j+1,2i-2} + c_1\alpha_{j+1,2i-1} + c_2\alpha_{j+1,2i} + c_3\alpha_{j+1,2i+1}) \\ & -d_3(h_0\alpha_{j+1,2i-2} + h_1\alpha_{j+1,2i-1} + h_2\alpha_{j+1,2i} + h_3\alpha_{j+1,2i+1}). \end{aligned}$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{j,i} & \longrightarrow \frac{h_3}{c_3} + \frac{r_1}{d_1} = 0, \\ \alpha_{j+1,2i-2} & \longrightarrow \frac{1}{d_1}(r_3c_0 + d_3h_0) = 0, \\ \alpha_{j+1,2i-1} & \longrightarrow \frac{1}{d_1}(r_3c_1 + d_3h_1) = 0, \\ \alpha_{j+1,2i} & \longrightarrow h_0 - \frac{h_3}{c_3}c_0 - \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1}(r_3c_2 + d_3h_2) = 0, \\ \alpha_{j+1,2i+1} & \longrightarrow h_1 - \frac{h_3}{c_3}c_1 + \frac{1}{d_1}(r_3c_3 + d_3h_3) = 0, \\ \alpha_{j+1,2i+2} & \longrightarrow h_2 - \frac{h_3}{c_3}c_2 = 0. \end{aligned}$$

Veamos para $\beta_{j,i+1}$:

$$\begin{aligned} & (\hat{\beta}_{j,i+1})_{ENO-DB4} - (\hat{\beta}_{j,i+1})_{ENO-DB4-TI} = \\ & = h_0\alpha_{j+1,2i+2} + h_1\hat{\alpha}_{j+1,2i+3} \\ & + \frac{h_3}{c_3}(\hat{\alpha}_{j,i+1} - c_0\alpha_{j+1,2i+2} + c_1\hat{\alpha}_{j+1,2i+3}) \\ & - \frac{1}{d_1}(\alpha_{j+1,2i+2} - r_1\hat{\alpha}_{j,i+1} - r_3\hat{\alpha}_{j,i} - d_3\hat{\beta}_{j,i}) \\ & = h_0\alpha_{j+1,2i+2} + \frac{h_1}{c_3}(\hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1} - c_2\alpha_{j+1,2i+2}) \\ & + \frac{h_2}{c_2}(\hat{\alpha}_{j,i+1} - c_0\alpha_{j+1,2i+2} - \frac{c_1}{c_3}(\hat{\alpha}_{j,i} - c_0\alpha_{j+1,2i} - c_1\alpha_{j+1,2i+1} - c_2\alpha_{j+1,2i+2})) \\ & - \frac{1}{d_1}(\alpha_{j+1,2i+2} - r_1\hat{\alpha}_{j,i+1} - r_3\hat{\alpha}_{j,i} - d_3(\frac{1}{d_1}(\alpha_{j+1,2i} \\ & - r_1\hat{\alpha}_{j,i} - r_3(c_0\alpha_{j+1,2i-2} + c_1\alpha_{j+1,2i-1} + c_2\alpha_{j+1,2i} + c_3\alpha_{j+1,2i+1}) \\ & - d_3(h_0\alpha_{j+1,2i-2} + h_1\alpha_{j+1,2i-1} + h_2\alpha_{j+1,2i} + h_3\alpha_{j+1,2i+1}))). \end{aligned}$$

Con esto:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{j,i} & \longrightarrow \frac{h_1}{c_3} - \frac{h_2c_1}{c_2c_3} + \frac{r_3}{d_1} - \frac{d_3r_1}{d_1^2} = 0, \\ \hat{\alpha}_{j,i+1} & \longrightarrow \frac{h_2}{c_2} + \frac{r_1}{d_1} = 0, \\ \alpha_{j+1,2i-2} & \longrightarrow -\frac{d_3}{d_1^2}(r_3c_0 + d_3h_0) = 0, \\ \alpha_{j+1,2i-1} & \longrightarrow -\frac{d_3}{d_1^2}(r_3c_1 + d_3h_1) = 0, \\ \alpha_{j+1,2i} & \longrightarrow -\frac{h_1c_0}{c_3} + \frac{h_2c_1c_0}{c_2c_3} - \frac{d_3}{d_1^2}(r_3c_2 + d_3h_2) + \frac{d_3}{d_1^2} = 0, \\ \alpha_{j+1,2i+1} & \longrightarrow -\frac{h_1c_1}{c_3} + \frac{h_2c_1^2}{c_2c_3} - \frac{d_3}{d_1^2}(r_3c_3 + d_3h_3) = 0, \end{aligned}$$

$$\alpha_{j+1,2i+2} \longrightarrow h_0 - \frac{h_1 c_2}{c_3} + \frac{h_2 c_1 c_2}{c_2 c_3} - \frac{h_2 c_0}{c_2} - \frac{1}{d_1} = 0.$$

Lado derechoPara $\alpha_{j,i+1}$:

$$\begin{aligned} & (\bar{\alpha}_{j,i+1})_{ENO-DB4} - (\bar{\alpha}_{j,i+1})_{ENO-DB4-TI} \\ &= c_0 \bar{\alpha}_{j+1,2i+2} + c_1 \alpha_{j+1,2i+3} + c_2 \alpha_{j+1,2i+4} + c_3 \alpha_{j+1,2i+5} \\ & \quad - \frac{1}{r_2} (\alpha_{j+1,2i+5} - r_0 \alpha_{j,i+2} - d_0 \beta_{j,i+2}) \\ &= -c_0 \frac{1}{h_0} (h_1 \alpha_{j+1,2i+3} + h_2 \alpha_{j+1,2i+4} + h_3 \alpha_{j+1,2i+5}) \\ & \quad + c_1 \alpha_{j+1,2i+3} + c_2 \alpha_{j+1,2i+4} + c_3 \alpha_{j+1,2i+5} \\ & \quad - \frac{1}{r_2} (\alpha_{j+1,2i+5} - r_0 (c_0 \alpha_{j+1,2i+4} + c_1 \alpha_{j+1,2i+5} + c_2 \alpha_{j+1,2i+6} + c_3 \alpha_{j+1,2i+7}) \\ & \quad - d_0 (h_0 \alpha_{j+1,2i+4} + h_1 \alpha_{j+1,2i+5} + h_2 \alpha_{j+1,2i+6} + h_3 \alpha_{j+1,2i+7})). \end{aligned}$$

Los coeficientes que multiplican a los α son:

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1,2i+3} &\longrightarrow -\frac{c_0 h_1}{h_0} + c_1 = 0, \\ \alpha_{j+1,2i+4} &\longrightarrow -\frac{c_0 h_2}{h_0} + c_2 + \frac{r_0 c_0}{r_2} + \frac{d_0 h_0}{r_2} = 0, \\ \alpha_{j+1,2i+5} &\longrightarrow -\frac{c_0 h_3}{h_0} + c_3 + \frac{r_0 c_1}{r_2} + \frac{d_0 h_1}{r_2} - \frac{1}{r_2} = 0, \\ \alpha_{j+1,2i+6} &\longrightarrow \frac{c_2 r_0}{r_2} + \frac{d_0 h_2}{r_2} = 0, \\ \alpha_{j+1,2i+7} &\longrightarrow \frac{c_3 r_0}{r_2} + \frac{d_0 h_3}{r_2} = 0. \end{aligned}$$

Continuando con $\alpha_{j,i}$:

$$\begin{aligned} & (\bar{\alpha}_{j,i})_{ENO-DB4} - (\bar{\alpha}_{j,i})_{ENO-DB4-TI} = \\ &= -\frac{c_0}{h_0} (h_2 \bar{\alpha}_{j+1,2i+2} + h_3 \alpha_{j+1,2i+3}) + c_2 \bar{\alpha}_{j+1,2i+2} + c_3 \alpha_{j+1,2i+3} \\ & \quad - \frac{1}{r_2} (\alpha_{j+1,2i+3} - r_0 \bar{\alpha}_{j,i+1}) \\ &= -\frac{c_0}{h_0} (-h_2 \frac{1}{h_0} (h_1 \alpha_{j+1,2i+3} + h_2 \alpha_{j+1,2i+4} + h_3 \alpha_{j+1,2i+5}) + h_3 \alpha_{j+1,2i+3}) \\ & \quad + c_2 \frac{1}{h_0} (h_1 \alpha_{j+1,2i+3} + h_2 \alpha_{j+1,2i+4} + h_3 \alpha_{j+1,2i+5}) + c_3 \alpha_{j+1,2i+3} \\ & \quad - \frac{1}{r_2} (\alpha_{j+1,2i+3} - r_0 \frac{1}{r_2} (\alpha_{j+1,2i+5} \\ & \quad - r_0 (c_0 \alpha_{j+1,2i+4} + c_1 \alpha_{j+1,2i+5} + c_2 \alpha_{j+1,2i+6} + c_3 \alpha_{j+1,2i+7}) \\ & \quad - d_0 (h_0 \alpha_{j+1,2i+4} + h_1 \alpha_{j+1,2i+5} + h_2 \alpha_{j+1,2i+6} + h_3 \alpha_{j+1,2i+7}))). \end{aligned}$$

Así pues:

$$\alpha_{j+1,2i+3} \longrightarrow \frac{c_0 h_2 h_1}{h_0^2} - \frac{c_0 h_3}{h_0} - \frac{c_2 h_1}{h_0} + c_3 - \frac{1}{r_2} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{j+1,2i+4} &\longrightarrow \frac{c_0 h_2^2}{h_0^2} - \frac{c_2 h_2}{h_0} - \frac{r_0^2 c_0}{r_2^2} - \frac{r_0 d_0 h_0}{r_2^2} = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+5} &\longrightarrow \frac{c_0 h_2 h_3}{h_0^2} - \frac{c_2 h_3}{h_0} + \frac{r_0}{r_2} - \frac{r_0^2 c_1}{r_2^2} - \frac{r_0 d_0 h_1}{r_2^2} = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+6} &\longrightarrow -\frac{r_0^2 c_2}{r_2^2} - \frac{r_0 d_0 h_2}{r_2^2} = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+7} &\longrightarrow -\frac{r_0^2 c_3}{r_2^2} - \frac{r_0 d_0 h_3}{r_2^2} = 0.
\end{aligned}$$

Con esto queda demostrada la equivalencia para *DB4*.

Procediendo de manera análoga es fácil demostrar la equivalencia para *ENO-DB6* y *ENO-DB6-TI*. Para ello debemos partir de los coeficientes $\{c_i\}$ en su forma exacta y es recomendable utilizar un programa de cálculo simbólico (nosotros hemos utilizado MATHEMATICA®).

Podemos pues enunciar la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 4.1. *Los métodos ENO-DB2p y ENO-DB2p-TI son equivalentes para $p = 2, 3$.*

Todo parece indicar que para $p > 3$ los algoritmos *ENO-DB2p* y *ENO-DB2p-TI* son también equivalentes. Para $p = 4, 5$ los autores W.-C. Chan y C.-C. Yen en [65] han hallado una forma exacta para los coeficientes *scaling* $\{c_i\}$, con lo que se podría demostrar la equivalencia en dichos casos. Sin embargo, para $p > 5$ no disponemos de los coeficientes $\{c_i\}$, en forma exacta y por tanto no podemos demostrar la equivalencia exacta entre los dos esquemas tal como lo hemos hecho para *DB4*. Otra opción sería trabajar con las condiciones que deben cumplir los coeficientes $\{c_i\}$ sin tener en cuenta su valor.

A medida que aumenta p el algoritmo *ENO-DB2p* es más complejo que *ENO-DB2p-TI* ya que, en cada paso, debemos decidir si extrapolar o no en el nivel $j+1$ en función de los datos que conocemos y entendemos que el algoritmo que hemos presentado es más sencillo de generalizar. La equivalencia exacta o no con *ENO-DB2p* para $p > 3$ no ofrece mayor interés, ya que es preferible el uso de *ENO-DB2p-TI*.

Por otra parte, según la *DSP-TI*, Definición 4.1, utilizamos nodos diferentes para *ENO-DB2p* y *ENO-DB2p-TI* con lo cual las re-

construcciones no serían equivalentes. Sin embargo hemos demostrado que para $p = 2, 3$, los coeficientes que multiplican a esos nodos distintos son nulos, con lo que realmente la *DSP-TI* no sería necesaria y podemos utilizar la *DSP* (ya que nuestra hipótesis es que ambos algoritmos son equivalentes $\forall p$). Sin embargo, dado que trabajamos con precisión finita (y partimos de coeficientes $\{c_i\}$ no exactos) es preferible utilizar la *DSP-TI* para *ENO-DB2p-TI*, ya que los valores que multiplican a nodos distintos de los de *ENO-DB2p*, aunque de magnitud muy pequeña, no tienen porqué ser exactamente 0.

4.8

Invertibilidad de los métodos *TI*

Tomemos el esquema *ENO-DB4-TI* y veamos su invertibilidad:

1. $s_{j,i-1} = 0$ y $s_{j,i} = 0$. En este caso no hay discontinuidades y por tanto los datos recuperados son correctos, ya que utilizamos la transformada inversa estándar.

2. $s_{j,i-1} = 0$ y $s_{j,i} = 1$. Evidentemente $\alpha_{j+1,2i}$ es correcto, ya que se define $\beta_{j,i}$ para que cumpla dicho requisito. Sin embargo, debemos comprobar que $\alpha_{j+1,2i+1}$ es correcto:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j+1,2i+1} &:= r_0 \hat{\alpha}_{j,i} + d_0 \hat{\beta}_{j,i} + r_1 \alpha_{j,i-1} + d_1 \beta_{j,i-1} \\
 &= r_0 \hat{\alpha}_{j,i} + \frac{d_0}{d_1} (\alpha_{j+1,2i} - r_1 \hat{\alpha}_{j,i} + r_3 \alpha_{j,i-1} + d_3 \beta_{j,i-1}) + r_1 \alpha_{j,i-1} + d_1 \beta_{j,i-1} \\
 &= (r_0 - \frac{d_0}{d_1} r_1) \hat{\alpha}_{j,i} + \frac{d_0}{d_1} \alpha_{j+1,2i} + (r_2 - \frac{d_0}{d_1} r_2) \alpha_{j,i-1} + (d_2 - \frac{d_0}{d_1} d_2) \beta_{j,i-1} \\
 &= (r_0 - \frac{d_0}{d_1} r_1) \hat{\alpha}_{j,i} \\
 &\quad + \frac{d_0}{d_1} \alpha_{j+1,2i} (r_2 - \frac{d_0}{d_1} r_2) (c_0 \alpha_{j+1,2i-2} + c_1 \alpha_{j+1,2i-1} + c_2 \alpha_{j+1,2i} + c_3 \alpha_{j+1,2i+1}) \\
 &\quad (d_2 - \frac{d_0}{d_1} d_2) (h_0 \alpha_{j+1,2i-2} + h_1 \alpha_{j+1,2i-1} + h_2 \alpha_{j+1,2i} + h_3 \alpha_{j+1,2i+1}).
 \end{aligned}$$

Con lo cual el coeficiente de cada α es:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_{j,i} &\longrightarrow r_0 - \frac{d_0}{d_1} r_1 = 0, \\
 \alpha_{j+1,2i-2} &\longrightarrow (r_2 - \frac{d_0}{d_1} r_3) c_0 + (d_2 - \frac{d_0}{d_1} d_3) h_0 = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{j+1,2i-1} &\longrightarrow (r_2 - \frac{d_0}{d_1}r_3)c_1 + (d_2 - \frac{d_0}{d_1}d_3)h_1 = 0, \\
\alpha_{j+1,2i} &\longrightarrow \frac{d_0}{d_1} + (r_2 - \frac{d_0}{d_1}r_3)c_2 + (d_2 - \frac{d_0}{d_1}d_3)h_2 = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+1} &\longrightarrow (r_2 - \frac{d_0}{d_1}r_3)c_3 + (d_2 - \frac{d_0}{d_1}d_3)h_3 = 1.
\end{aligned}$$

Así el valor $\alpha_{j+1,2i+1}$ se recupera correctamente.

3. $s_{j,i-1} = 1$ y $s_{j,i} = 0$. En este caso $\alpha_{j+1,2i+1}$ es correcto, ya que $\bar{\alpha}_{j,i-1}$ se define con este propósito. Veamos $\alpha_{j+1,2i}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{j+1,2i} &:= r_1\alpha_{j,i} + d_1\beta_{j,i} + r_3\bar{\alpha}_{j,i-1} \\
&= r_1(c_0\alpha_{j+1,2i} + c_1\alpha_{j+1,2i+1} + c_2\alpha_{j+1,2i+2} + c_3\alpha_{j+1,2i+3}) \\
&\quad + d_1(h_0\alpha_{j+1,2i} + h_1\alpha_{j+1,2i+1} + h_2\alpha_{j+1,2i+2} + h_3\alpha_{j+1,2i+3}) \\
&\quad + \frac{r_3}{r_2}(\alpha_{j+1,2i+1} - r_0(c_0\alpha_{j+1,2i} + c_1\alpha_{j+1,2i+1} + c_2\alpha_{j+1,2i+2} + c_3\alpha_{j+1,2i+3}) \\
&\quad - d_0(h_0\alpha_{j+1,2i} + h_1\alpha_{j+1,2i+1} + h_2\alpha_{j+1,2i+2} + h_3\alpha_{j+1,2i+3})).
\end{aligned}$$

Los coeficientes que multiplican a cada α son:

$$\begin{aligned}
\alpha_{j+1,2i} &\longrightarrow (r_1 - \frac{r_3r_0}{r_2})c_0 + (d_1 - \frac{r_3d_0}{r_2})h_0 = 1, \\
\alpha_{j+1,2i+1} &\longrightarrow (r_1 - \frac{r_3r_0}{r_2})c_1 + \frac{r_3}{r_2} + (d_1 - \frac{r_3d_0}{r_2})h_1 = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+2} &\longrightarrow (r_1 - \frac{r_3r_0}{r_2})c_2 + (d_1 - \frac{r_3d_0}{r_2})h_2 = 0, \\
\alpha_{j+1,2i+3} &\longrightarrow (r_1 - \frac{r_3r_0}{r_2})c_3 + (d_1 - \frac{r_3d_0}{r_2})h_3 = 0.
\end{aligned}$$

4. $s_{j,i-1} = 1$ y $s_{j,i} = 1$. No hay nada que demostrar, ya que $\alpha_{j+1,2i}$ se calcula a partir de $\hat{\beta}_{j,i-1}$ y $\hat{\beta}_{j,i}$, que se definen precisamente para asegurar la recuperación de $\alpha_{j+1,2i}$ y lo mismo ocurre con $\alpha_{j+1,2i}$, que hace uso de los valores $\bar{\alpha}_{j,i-1}$ y $\bar{\alpha}_{j,i}$, definidos igualmente para asegurar la reconstrucción de dicho valor.

Con esto queda demostrada la invertibilidad para *ENO-DB4-TI*. Haciendo uso del software MATHEMATICA® hemos demostrado también la invertibilidad de *ENO-DB6-TI*. Procediendo de manera análoga podríamos demostrar la invertibilidad para *ENO-DB2p-TI*, aunque debemos tener en cuenta las consideraciones expuestas al final del apartado 4.7: o bien trabajamos con coeficientes de escala aproximados (y no podremos comprobar la invertibilidad exacta) o bien debemos hacer uso de las condiciones que deben cumplir dichos coeficientes, como por ejemplo la ortogonalidad.

4.9

Ejemplos

En la Figura 4.4 vemos el resultado de aplicar 5 niveles realizando una aproximación lineal $ENO-DB2p$ para $p = 2, 3$ a la función (1.44) con 2048 puntos iniciales. En ellas mostramos la función original, la reconstrucción y la diferencia entre ambas. Los resultados son excelentes, desapareciendo por completo el *fenómeno de Gibbs*. Notar que, sin tener en cuenta el almacenamiento de la posición de los saltos, hemos conseguido una compresión del $(1 - 32/2048)100 = 98,4\%$ con teóricamente un orden de aproximación 2 y 3 respectivamente.

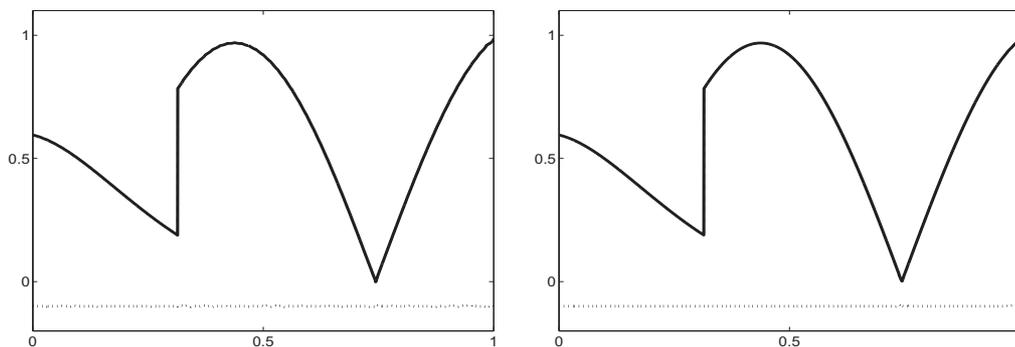


Figura 4.4: Aproximación lineal $ENO-DB2p-TI$ para $p = 2$ (izquierda) y $p = 3$ (derecha). La línea discontinua es la función original (aunque se sobrescribe y no se aprecia), la continua es la aproximación y la punteada es la diferencia entre ambas (desplazada $-0,1$).

En la Figura 4.5 comparamos los coeficientes de las altas frecuencias producidos por $DB4$ y $ENO-DB4$. Podemos comprobar que la magnitud de dichos coeficientes es muy pequeña en todos ellos. Por tanto al eliminarlos la pérdida de información es escasa, lo cual se traduce en una buena aproximación en todos los puntos.

La detección correcta de discontinuidades juega un papel crucial en los esquemas $ENO-wavelet$. En la Figura 4.6 aplicamos

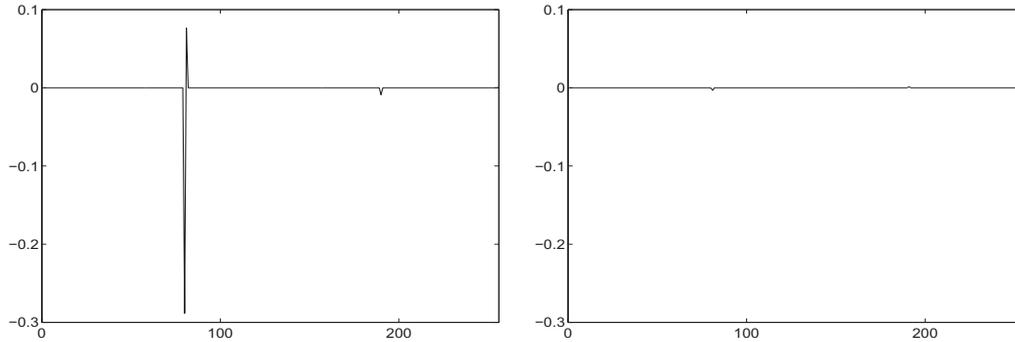


Figura 4.5: Coeficientes de altas frecuencias para DB4 y ENO-DB4 con un nivel, partiendo de la función (1.44) con 512 nodos.

cinco niveles de la transformada ENO-DB6-TI. Visualmente la reconstrucción parece correcta, pero la ampliación de la esquina nos revela que la detección ha fallado en algún paso. Con DB4 este problema no suele ocurrir. La explicación es sencilla, [56]: si partimos de una señal obtenida como muestreo de una función de clase C^p , los coeficientes de altas frecuencias de la transformada DB $2p$ son de orden $O(h^p)$, siendo h el paso espacial de la discretización. De ahí que a mayor p , la compresión y eliminación de ruido mejoran. Sin embargo si se pretenden localizar los puntos donde la pendiente de la señal cambia más bruscamente (esquinas) entonces DB4 es más eficiente que DB $2p$ para $p \geq 3$. Incluso siendo cuidadosos en la elección de las condiciones a y $\beta_{j,i} > \epsilon$, la detección de las esquinas falla en numerosas ocasiones. Podríamos aplicar otro método de detección de discontinuidades como LOCALIZA-ENO-SR-VP-MC (Algoritmo 3.2), aunque también puede fallar en las discontinuidades esquina si utilizamos bastante niveles. En cualquier caso, el error en la detección de discontinuidades esquina no provoca grandes errores en las reconstrucciones.

Para comparar de manera precisa los resultados, utilizaremos los errores L_2 y L_∞ . Para calcular el orden de aproximación, tomamos:

$$\text{Orden}_\infty = \log_2 \frac{E_{\infty,i}}{E_{\infty,i-1}}, \quad \text{Orden}_2 = \log_2 \frac{E_{2,i}}{E_{2,i-1}} \quad (4.18)$$

donde $E_{\infty,i} = \|f(x) - f_j(x)\|_\infty$ y $E_{2,j} = \|f(x) - f_j(x)\|_2$.

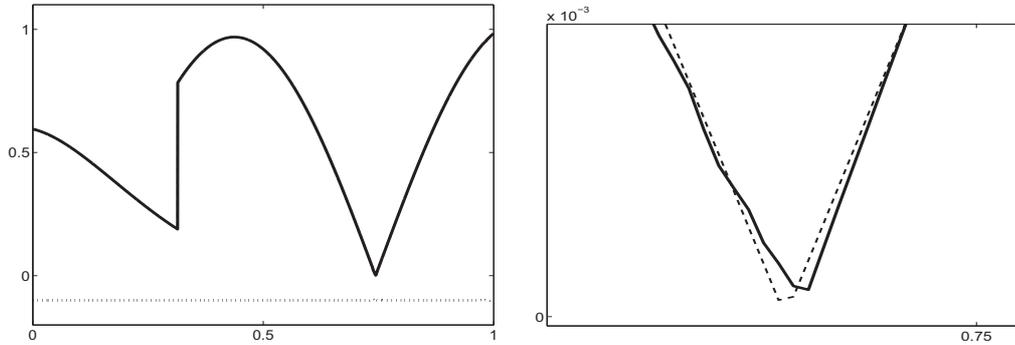


Figura 4.6: Izquierda: 5 niveles de ENO-DB6-TI para la función (1.44) con 2048 nodos. Derecha: ampliación en la discontinuidad esquina.

Definimos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x < 0,1, \\ -\frac{4x-3}{5} \sin\left(\frac{3}{2}\pi\left(\frac{4x-3}{5}\right)^2\right) - \frac{7}{10}, & \text{si } 0,1 \leq x < \frac{\pi}{10}, \\ \left| \sin 2\pi\left(\frac{4x-3}{5}\right) + \frac{\pi}{100} \right| - \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{\pi}{10} \leq x < 0,7, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{si } 0,7 \leq x < 0,9, \\ 0, & \text{si } 0,9 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.19)$$

sin discontinuidades esquina (para evitar los problemas antes mencionados) y con fronteras nulas. Estudiando los errores vemos que ENO-DB2p-TI mantiene el orden p como nos muestran las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 para $p = 2, 3, 4$, a diferencia del método DB2p donde no se alcanzan dichos órdenes en presencia de discontinuidades.

nivel	E_∞	$Orden_\infty$	E_2	$Orden_2$
1	4.5671e-6		6.1104e-5	
2	3.4454e-5	2.9153	2.5558e-4	2.0645
3	9.3240e-5	1.4363	1.0271e-3	2.0067
4	6.6871e-4	2.8423	4.3392e-3	2.0788

Tabla 4.1: E_∞ , E_2 y órdenes de aproximación para ENO-DB4. Hemos utilizado la función (4.19) discretizada con 2048 puntos y las condiciones $a = 2$ y $\beta_{j,i} > 0,001$.

nivel	E_∞	$Orden_\infty$	E_2	$Orden_2$
1	9.4552e-8		1.4113e-7	
2	6.8610e-7	2.8592	1.1479e-6	3.0225
3	1.2568e-5	4.1952	2.1884e-5	4.2527
4	1.3834e-4	3.4604	3.2290e-4	3.9244

Tabla 4.2: E_∞ , E_2 y órdenes de aproximación para ENO-DB6-TI. Hemos utilizado la función (4.19) discretizada con 2048 puntos y las condiciones $a = 2$ y $\beta_{j,i} > 0,001$.

nivel	E_∞	$Orden_\infty$	E_2	$Orden_2$
1	1.4635e-10		3.7453e-10	
2	6.1745e-9	5.3987	1.1469e-8	4.9335
3	1.5814e-7	4.6780	3.0279e-7	4.7225
4	3.5362e-6	4.4829	1.0071e-5	5.0558

Tabla 4.3: E_∞ , E_2 y órdenes de aproximación para ENO-DB8-TI. Hemos utilizado la función (4.19) discretizada con 2048 puntos y las condiciones $a = 2$ y $\beta_{j,i} > 0,001$.

4.10

Conclusiones

En este capítulo hemos revisado el método *ENO-wavelet* propuesto por Chan y Zhou en [26]. A semejanza de la idea *ENO*, se utilizan *stencils* que no cruzan discontinuidades, evitando la creación de coeficientes de escala de magnitud elevada. Así, al realizar la aproximación lineal se elimina el *fenómeno de Gibbs* alrededor de los saltos.

Hemos presentado una nueva manera de calcular los coeficientes *ENO-wavelet*. En el método original para calcular ciertos coeficientes se recurre a extrapolaciones en el nivel más fino, contradiciendo la idea de la *extrapolación en el nivel grosero*. Nosotros hemos utilizado la información de la transformada inversa para dicho cálculo, evitando así el uso de nuevas extrapolaciones. Los nuevos esquemas se han denominado *ENO-wavelet-TI*. Con ellos se consigue generalizar de manera sencilla el método *ENO-DB2p*.

TI para p un natural cualquiera. Se ha demostrado la invertibilidad de $ENO-DB2p-TI$ y su equivalencia con $ENO-DB2p$ para $p = 2, 3$ (si $p > 3$ todo parece indicar que también se cumplirá la equivalencia aunque no ha sido demostrado). También se ha adaptado la *Propiedad de Separación de Discontinuidades* (Definición 3.1) al nuevo esquema.

El único problema para aplicar eficientemente el método reside en la localización de las discontinuidades. Se ha trabajado con el localizador propuesto por Chan y Zhou. Funciona correctamente, aunque debemos ser cuidadosos en la elección de los parámetros del método ya que la detección de saltos, y sobre todo esquinas, es muy sensible a dichas condiciones. Dado que el método es en dos pasos, podemos aplicar otro detector de discontinuidades, como los presentados en el capítulo anterior.

En definitiva, para funciones discontinuas compuestas por trozos suaves, el método *ENO-wavelet* consigue eliminar el *fenómeno de Gibbs* al aproximar linealmente, mantiene el orden de aproximación, su coste computacional es comparable al método estándar y pueden ser incluidos en esquemas de multirresolución ya que no varían el tamaño de las secuencias de salida. Además, mediante el uso de la transformada inversa se evitan extrapolaciones en el nivel fino, manteniendo todas las propiedades de la transformada *ENO-wavelet* y permitiendo generalizar el esquema de forma sencilla.