ELECCIÓN DE CUATRO PROBLEMAS GEOMÉTRICOS PARA UNA INVESTIGACIÓN SOBRE LA COMPRENSIÓN DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS. UNA JUSTIFICACIÓN.

Ricardo Barroso Campos

Universidad de Sevilla

Introducción.

Hacer un estudio de la comprensión de propiedades geométricas y analizar si el uso del programa de simulación geométrica Cabri-Géomètre ayuda a la misma consideramos que puede aportar consideraciones didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Para ello se ha elegido entre diversos instrumentos cuatro problemas geométricos.

En esta comunicación se presentan y justifican dichos problemas teniendo en cuenta que los alumnos a los que se dirige el estudio son estudiantes para profesor de Primaria.

Abstract

To make a study of the understanding of geometric properties and to analyze if the use of the program of geometric simulation Cabri-Géomètre helps the same one we considered that it can contribute to didactic considerations for education and learning of geometry.

For it one has chosen between diverse instruments four geometric problems.

In this communication these problems appear and justify considering that the students to whom he goes the study are students for Primary teacher.

INTRODUCCIÓN

La investigación pretende desde el paradigma de investigación-acción observar si el ordenador (en este caso el programa de geometría dinámica Cabri II) ayuda a la comprensión de propiedades geométricas. Tras una fase de inmersión en el Programa, con sesiones de introducción al mismo, a un grupo de alumnos de Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla estructurados en parejas o tríos, se les propondrá en primer lugar varios problemas geométricos de inmersión para su resolución con lápiz y papel, y, posteriormente, con Cabri.

Una vez familiarizados con el Programa, se les propondrán a los mismos alumnos los cuatro problemas presentados en este documento, de nuevo con lápiz y papel y después con Cabri en los que entendemos pueden poner de manifiesto sus conocimientos geométricos.

Para Laborde, y Capponi (1994), una figura no se refiere a un objeto sino a una infinidad de objetos. Lo que es invariante son las relaciones entre los objetos. La figura según Laborde y Caponni (1994) consiste en un referente dado a todos sus dibujos, y es el conjunto de parejas de dos términos, siendo el primero el referente y el segundo los dibujos que lo representan; se toma en el universo de todos los posibles dibujos del referente.

Para Laborde y Capponi (1994), un dibujo geométrico no es necesariamente interpretado por un lector como un objeto geométrico, y las interpretaciones de un mismo objeto son múltiples tanto por las interpretaciones del lector y sus conocimientos como por la naturaleza misma del dibujo, que por sí mismo no puede caracterizar un objeto geométrico.

Señalan que Cabri permite la puesta en evidencia aspectos tradicionalmente abandonados de la enseñanza de la geometría, así como que permite poner en evidencia aspectos invariantes de una figura observando numerosos dibujos con las mismas propiedades geométricas.

Se analizarán los resultados desde una perspectiva inductiva, teniendo como marco teórico de referencia la tríada de Piaget y García (1982): nivel intrafigural, interfigural y transfigural, además de hacer un intento por establecer un determinado entorno acerca de la propiedad que se debe establecer, y observar si los alumnos se sitúan cerca o lejos de la misma.

De los datos obtenidos y las correspondientes comparaciones entre un recurso y otro, esperamos obtener resultados acerca de nuestro propósito.

PRESENTACIÓN DE LOS PROBLEMAS

Los problemas se han elegido teniendo en cuenta el nivel de los alumnos, las propiedades geométricas implicadas y lo que los autores de correspondientes han puesto de manifiesto con relación a las propiedades geométricas implicadas.

Además, hacemos un análisis de las posibles implicaciones. Estos serían los cuatro problemas preparados.

PRIMER PROBLEMA

Sean ABC un triángulo rectángulo y P un punto móvil en la hipotenusa BC. Si I está en AB y J en AC son tales que PI es perpendicular a AB y PJ es perpendicular a AC, ¿existe una situación en la que IJ tiene un valor mínimo?

Señala Gravina (1996) que asociada a una propiedad geométrica siempre tenemos una configuración, es decir, objetos geométricos en relación a sus componentes conceptual y figural. Deducir una propiedad significa establecer una cadena lógica de raciocinios conectando las propiedades del enunciado tomadas como presupuestos (hipótesis) a las propiedades las propiedades que se quieren demostrar (tesis).

Pues bien, en este problema, indica que los alumnos hacen de manera natural una primera conjetura,

IJ es mínimo cuando AIPJ es un cuadrado, ya que un cuadrado es un caso particular entre todos los rectángulos AIPJ así como el mínimo de un valor particular para los segmentos IJ.

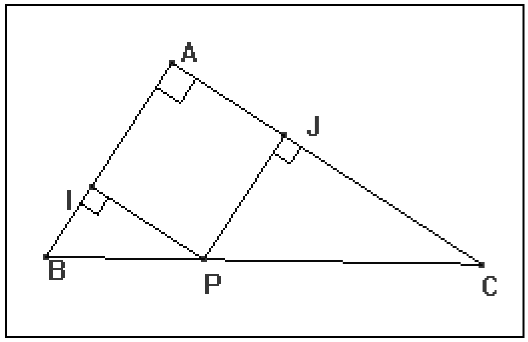

Ilustración 1

Esta conjetura (Ilustración 1) permanece estable durante algún tiempo, apoyándose en el aspecto visual del segmento IJ en términos de su tamaño.

Los participantes en esta investigación de Gravina, eran estudiantes para profesor de la Universidad Federal de Rio Grande del Sur (Brasil).

Consideramos que esta primera conjetura está fundamentada en el hecho de ser el cuadrado un objeto geométrico muy conocido por los estudiantes y con la propiedad de ser el rectángulo que tiene mayor área de todos los que tienen el mismo perímetro,.

Señala Gravina (1999) que tal conjetura es cierta para triángulos rectángulos isósceles, y que tal comportamiento evidencia una imagen mental que guarda un triángulo prototípico, el de los triángulos rectángulos tales que las medidas de los catetos son similares.

Utilizando los recursos de “dibujo en movimiento” y medición de segmentos ofrecidos por el programa Cabri, los alumnos comienzan a explorar situaciones diferentes de las prototípicas:

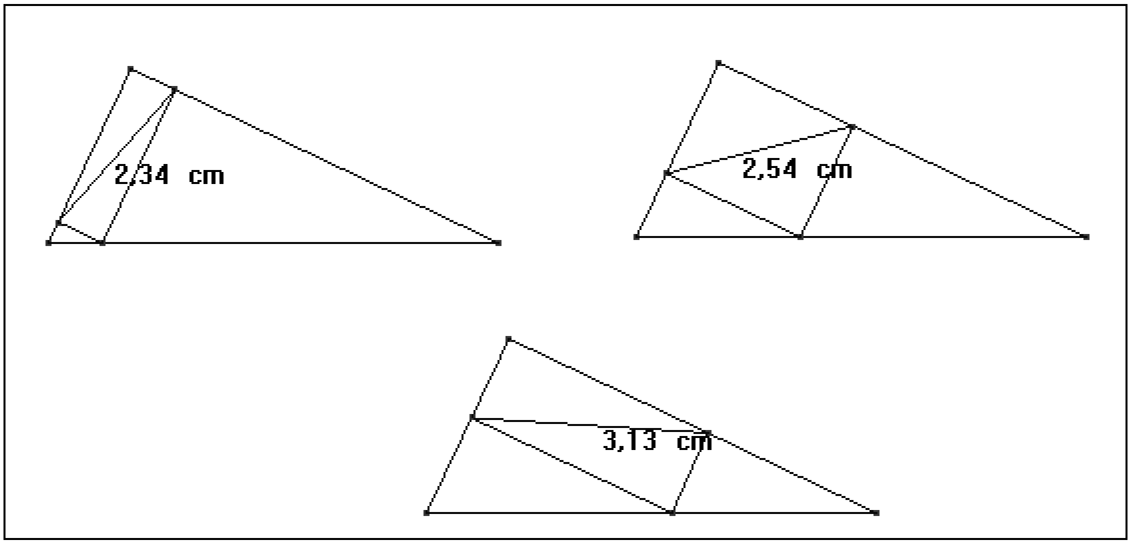

Ilustración 2

La conjetura inicial no se sostiene más. Señala Gravina que surge de manera natural la pregunta:

"¿Qué particularidad tiene un rectángulo AIPJ determinado para garantizar el valor mínimo para IJ?"

Haciendo un análisis puramente visual y experimental, los alumnos perciben la solución del problema (Ilustración 2).

En nuestra opinión, este problema se puede "ver" bajo la perspectiva de Fischbein (1993) de figural concept, según la cual, el razonamiento matemático no se refiere a objetos materiales o a sus dibujos.

Para Fischbein, los objetos materiales son sólo modelos materializados de entidades mentales con las que tratan las matemáticas.

Sólo en un sentido conceptual puede ser considerada la perfección absoluta de las entidades geométricas: líneas rectas, círculos, cuadrados, cubos, etc..

Una figura geométrica puede ser descrita como teniendo intrínsecamente, propiedades conceptuales. No es un simple dibujo sobre un papel. Es una figura controlada por su definición, y a partir de sus propiedades iniciales se pueden ir descubriendo otras.

Estas consideraciones de Fischbein entendemos que se pueden aplicar al problema propuesto por Gravina, debido a que si “vemos” la figura por sus propiedades, llegamos a las conclusiones siguientes:

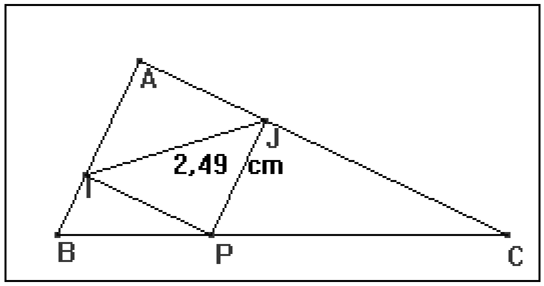

Ilustración 3

(1) Por ser PJ perpendicular a PI, y AJ perpendicular a AI, la figura PJAI es rectángulo.

(2) Al ser IJ una diagonal del rectángulo PJAI y ser AP la otra diagonal, miden igual

(3) IJ será mínimo cuando lo sea AP.

(4) AP es mínimo sobre la perpendicular a BC, pues en otro caso.....(Ver Ilustración 3)

Es decir, consideramos que es a través de las propiedades de la figura, tal y como señala Fischbein, podemos encontrar la solución del problema.

SEGUNDO PROBLEMA

El enunciado es:

2.- Si Z y X son centros de cuadrados construidos hacia el exterior sobre dos lados de un triángulo ABC cualquiera, y M es el punto medio del tercer lado, entonces ZMX es isósceles y tiene un ángulo recto en M. Finney (1970)

Respecto a este problema y otros similares de los que hace un estudio, señala Finney (1970) que observaciones sencillas acerca de las transformaciones del plano llevan a demostraciones elegantes de teoremas de Euclides que no son usuales.

Los teoremas son establecidos fácilmente, en la opinión de Finney, y muchos de ellos pueden ser conjeturados a partir de un dibujo con lápiz y papel.

Indica que las demostraciones no utilizan coordenadas ni vectores, y simplemente se requiere una familiaridad con rotaciones y traslaciones.

Señala que la propiedad se mantiene si los cuadrados son construidos hacia el interior del triángulo.

Indica que si se construye el tercer cuadrado, los segmentos que unen dos centros de cuadrados y el tercer centro con el vértice opuesto a él, tienen la misma longitud y son perpendiculares.

Este problema, en nuestra consideración, merece ser comparado al Teorema de Napoleón, que se estudia en Davis (1977), y también en Guzmán (1995), que señala lo siguiente:

> Se cuenta que Napoleón hizo el siguiente experimento y descubrió un teorema. Dibujó un triángulo arbitrario ABC. Sobre AB, hacia fuera del triángulo, construyó un triángulo equilátero MAB. Sobre BC construyó otro PBC , siempre hacia fuera. Sobre CA otro QCA. Dibujó luego los centros R, S, T de los tres triángulos equiláteros y los unió obteniendo un triángulo RST. ¿Puedes enunciar el teorema de Napoleón... ?Parece claro que *un resultado como este sólo pudo resultar a través de una repetida experimentación con muchos triángulos ABC de distintas formas. A través de ella surgió el convencimiento de que las cosas son siempre así, el fortalecimiento de una conjetura*.(Cursiva colocada para acentuar la frase). La demostración de este hecho no resulta sencilla y no parece probable que Napoleón llegase hasta ella, a pesar de su gusto confirmado por la historia, hacia las matemáticas.

En nuestra consideración, las palabras del profesor de Guzmán son muy significativas del proceso seguido por Cabri, puesto que esa repetida experimentación, en la que seguramente se sumergió Napoleón, precisamente, la realiza Cabri cuando se quiere contrastar una determinada hipótesis, arrastrando alguno de los elementos básicos de la construcción geométrica.

La similitud del problema propuesto por Finney (1970) con el teorema de Napoleón es relativa a la construcción inicial.

En el caso del problema que nos ocupa, se trata de construir sobre cada lado del triángulo inicial un polígono regular de 4 lados (problema propuesto por Finney), o de 3 lados (teorema de Napoleón).

Además, otra similitud estriba en que en ambos casos se trata de construir los puntos "centrales" de los polígonos regulares. En esta situación, la construcción del centro del cuadrado es hecha de una manera geométrica diferente a la del triángulo equilátero.

A partir de ahí, se establecen diferencias, puesto que mientras que el problema propuesto por Finney toma los puntos centrales de dos cuadrados y el punto central del tercer lado del triángulo original, el teorema de Napoleón continúa con los tres puntos centrales de los triángulos construidos.

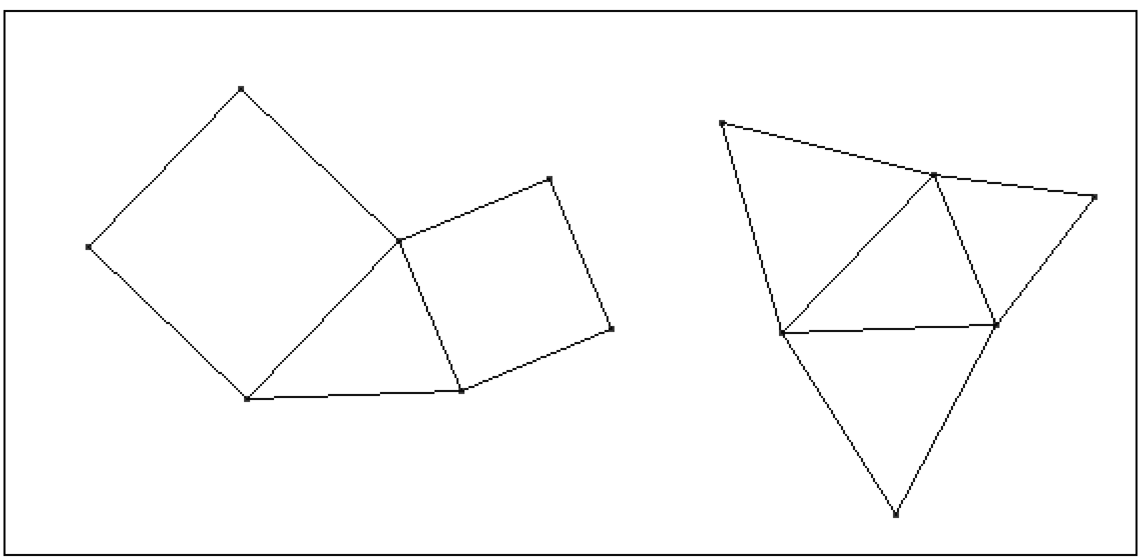

Ilustración 4

En nuestra consideración, estimamos el problema pertinente para esta investigación debido a:

1.- El enunciado es sencillo de interpretar. En nuestra opinión, sucede a veces que la interpretación del enunciado de un problema es dudosa, creando varias posibilidades de "lectura". En esta ocasión, entendemos que es nítida.

2.- Las propiedades geométricas que se implementan son elementales.

3.- Permite observar si se hace un *dibujo* o se hace una *construcción* en Cabri II, puesto que con el arrastre de los puntos básicos, los cuadrados "desaparecerían" en caso del dibujo, y "permanecerían" en caso de la construcción geométrica.

4.- Cabri II ofrece varias estrategias para la elaboración del problema, lo que permite también observar las posibles heurísticas utilizadas. Según Polya (1987), la *heurística* moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, y en particular, las operaciones mentales útiles en este proceso.

5.- En sus fases iniciales de construcción, el problema puede ser considerado una generalización del teorema de Napoleón.

6.- Ofrece la posibilidad de utilizar una herramienta innovadora de Cabri II, de comprobar propiedades, es decir, de hacer una "demostración automática de propiedades".

7.- En nuestra opinión, aunque el enunciado es relativamente sencillo, la demostración rigurosa exige un conocimiento acerca de los giros en el plano, lo que permite ampliar los conocimientos geométricos del resolutor, cuestión que, dados los participantes en esta investigación, es muy conveniente.

TERCER PROBLEMA

3.- Un bisectograma es un cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero. Demostrar lo siguiente:

A)Si las diagonales bisecan los ángulos en sus puntos finales, (rombo, cuadrado, cometa, por ejemplo), no existe el bisectograma.

B) Si el bisectograma de un cuadrilátero existe, es cíclico.

C) El bisectograma de un paralelogramo es un rectángulo.

D) El bisectograma de un rectángulo es un cuadrado.

E) El bisectograma de un trapecio isósceles es una cometa cíclica (Tiene dos ángulos rectos). Keyton (1997)

Respecto a la intersección de las bisectrices de un cuadrilátero, Van Hiele (1957) señala que sólo podemos saber si hay o no hay comprensión si estamos seguros de que la situación en la que se coloca al sujeto es lo suficientemente nueva para él. Si entre el conductor y el sujeto de la prueba existe el suficiente entendimiento se podrá cumplir esta condición: el sujeto podrá informar debidamente al conductor de la prueba.

En principio no resulta desatinado suponer que exista este entendimiento. Sin embargo la práctica de la enseñanza es diferente: en muchos casos se suele partir del supuesto de que el alumno intenta ocultar al máximo su ignorancia o su falta de comprensión, por ejemplo, al aprenderse de memoria las respuestas de ciertas preguntas que se le puedan formular. Así evita la dificultad de tener que enfrentarse a una nueva situación. La tarea del profesor en ese caso es hacer preguntas que el alumno no espera y que son características de la comprensión que se pretende determinar. Estas preguntas se conocen con un nombre: preguntas-comprensión.

Supongamos que se conoce el siguiente teorema: "En un triángulo las bisectrices de los ángulos pasan por un mismo punto". Supongamos también que se ha estudiado la demostración de este teorema. Para comprobar la comprensión del alumno le podemos preguntar lo siguiente:

a. "¿Las bisectrices de un cuadrilátero pasan en general por un mismo punto? Justifica tu respuesta".

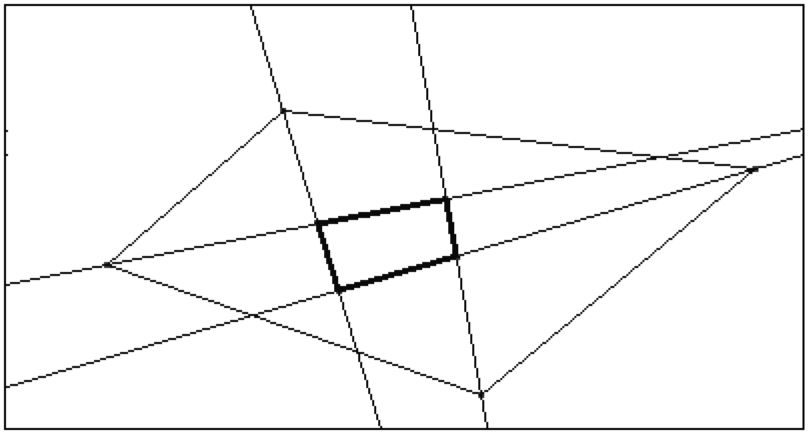

Ilustración 5

Con esta pregunta se pretende saber si el alumno tiene comprensión del teorema auxiliar: "Si las bisectrices de un polígono pasan por un mismo punto, entonces existe un punto que se encuentra a igual distancia de todos los lados". Este teorema ha aparecido implícitamente en la demostración del teorema estudiado, sin que se haya indicado que su validez es más amplia y no sólo circunscrita a los triángulos. Apenas se requiere conocimiento alguno de otros campos de la geometría para solucionar el problema, por lo que puede considerarse como un caso típico para determinar la comprensión.

b. "Si se sabe que las bisectrices de tres de los ángulos de un cuadrilátero pasan por un mismo punto, entonces dicho cuadrilátero tiene un círculo inscrito. Demuéstralo".

Este problema pretende averiguar la existencia de comprensión del teorema auxiliar: "En todo triángulo existe un punto que se encuentra a igual distancia de los lados".

c. "Si un cuadrilátero tiene un círculo inscrito, entonces las bisectrices de todos los ángulos, que cada vez contienen dos lados, pasan por un mismo punto. Demuéstralo".

Con este problema se pretende averiguar la comprensión del teorema auxiliar que se ha aplicado implícitamente: "Si en un polígono hay un punto que está a igual distancia de los lados, entonces las bisectrices pasan por un mismo punto".

Para King (1997) que trata acerca de un problema similar (los cuadriláteros resultantes de las mediatrices de un cuadrilátero), este tipo de problemas debe comenzar con una cuestión delicada, como es la definición exacta de lo que significa un cuadrilátero.

Define un cuadrilátero ABCD como un polígono cuyos vértices son puntos A, B, C, D, diferentes de los que no hay tres colineales.

Pereira-Mendoza (1993) que también estudia esta definición, establece después de una actividad para desarrollar una comprensión del papel de las definiciones en matemáticas, que examinando sólo algunos textos, desde la escuela elemental hasta la universidad, se ve que las definiciones juegan un papel clave en el currículum matemático.

Se pregunta, ¿Comprenden los estudiantes completamente el papel de una precisa, exacta definición?, ¿porqué son necesarias las definiciones?

Establece al final de este desarrollo, que el profesor debe hacer que los estudiantes resuman las ideas claves resultantes en la definición final, y en particular, referida al cuadrilátero, es una figura que tiene:

1. Cuatro lados.
2. Segmentos como lados.
3. Figura cerrada,
4. Todos los vértices en un plano.

Keyton (1997) comienza con una cita de Polya(1962),

> *la mejor manera de aprender es descubrir por uno mismo..*

Cita a Russell(1957):

> *En geometría, en lugar del tedioso aparato de demostraciones falaces por las verdades obvias que constituyen los principios de Euclides, al aprendiz se le debe permitir al principio asumir las verdades de las cuestiones obvias, y debe ser instruido en la demostración de teoremas que sean fácilmente verificables por el dibujo, tales como aquellos en los que se demuestra que tres o más líneas se encuentran en un punto.*

Señala Keyton (1997) que Pólya y Russell estarían entusiasmados con la oportunidad de utilizar software de geometría dinámica tal como The Geometer`s

Sketchpad o Cabri Géomètre II que permiten a los estudiantes descubrir por ellos mismos y generar creencias antes de intentar una demostración.

Señala Keyton (1997) el bisectograma como uno de los problemas estudiados por los estudiantes y que demostraron las cinco proposiciones que se incorporan en el enunciado.

Winicki-Landman (2001), en su experiencia como profesora de estudiantes para profesores de matemáticas, ha observado en general, que los profesores de matemáticas no exponen suficientemente a sus alumnos a experiencias que

a) faciliten investigación matemática genuina y planteamiento de problemas,

b) tratar con toma de decisiones y preguntar por la elección de estrategias,

c) llevar a una discusión la elaboración y presentación de las propias ideas de los estudiantes y las de sus colegas.

Señala que cuando los estudiantes son futuros profesores de matemáticas, el "crimen" es doble dado que se eterniza el error didáctico.

Indica que en el marco de un curso de geometría de estudiantes para profesor de secundaria, se usó software de geometría dinámica, enseñando nuevos conceptos y preguntando cuestiones, observando, haciendo conjeturas, demostrando y refutando.

Se les expuso a los estudiantes varios aspectos de las definiciones matemáticas:

(a) la esencialidad y precisión característica

(b) las dificultades envueltas en la creación de un nuevo concepto como resultado de sucesivos refinamientos debido a añadir restricciones o por cambio de condiciones, y

(c) las interpretaciones de una definición matemática en un contexto diferente como una posible puerta a inesperados resultados.

Define Winicki-Landman (2001) entre otras figuras el bisectograma, como el cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero.

Se plantea las siguientes cuestiones respecto al mismo:

¿Qué cuadriláteros no tienen bisectograma?

Poco a poco desgrana el problema propuesto por Keyton (1997), añadiendo otros cuadriláteros en su estudio, indicando que los alumnos al final hacen una tabla donde organizan y resumen los resultados que tienen una gran riqueza.

Respecto al cuadrilátero que nos ocupa, la tabla indica:

Cuadrado	Rombo	Rectángulo	Paralelogramo	Cometa	Trapezoide	General
punto	punto	cuadrado	rectángulo	punto	cuadrilátero con un par de ángulos rectos opuestos	cuadrilátero cíclico

Siendo la primera fila el cuadrilátero de partida y la segunda el bisectograma.

Estudia dos teoremas:

Teorema: El ***bisectograma*** *de una cometa degenera en un punto.*

Teorema: Si el ***bisectograma*** *de un cuadrilátero existe, es un cuadrilátero cíclico*.

Consideramos este problema adecuado a nuestros requerimientos para realizar esta investigación, debido a los siguientes motivos:

A) Puede ser llevado a cabo con Cabri, por la posibilidad de implementar en el programa las propiedades geométricas necesarias:

B) Creemos que es un problema “nuevo” para los participantes en la investigación.

En el currículum, los alumnos estudian la bisectriz a partir de 5º curso de Primaria (Gómez y Balbuena, 1998).

La conocen y la aplican en problemas de triángulos, pero consideramos desde una perspectiva de nuestra labor docente, que el conocimiento de que disponen acerca de las bisectrices en cuadriláteros es “novedosa” al entrar en los estudios de Primero de la Facultad de Ciencias de la Educación.

C) Es adecuado didácticamente para los participantes en tanto en cuanto “necesitan” hacer varias definiciones, hacer diversas indagaciones, sacar conclusiones, revisar resultados, obtener nuevas conclusiones... lo que lleva a los estudiantes para profesor a una reconsideración de lo que significa estudiar y razonar matemáticas.

D) Una de las referencias utilizadas (Winicki-Landman (2001)) explícitamente tiene como participantes estudiantes para profesor de matemáticas.

CUARTO PROBLEMA

4.- En un paralelogramo cualquiera ABCD, M es el punto de intersección de las diagonales y P un punto arbitrario dentro del triángulo MBC. Demostrar que:

área de PDA = área de PBC + área de PDB + área de PCA . Velasco (1983)

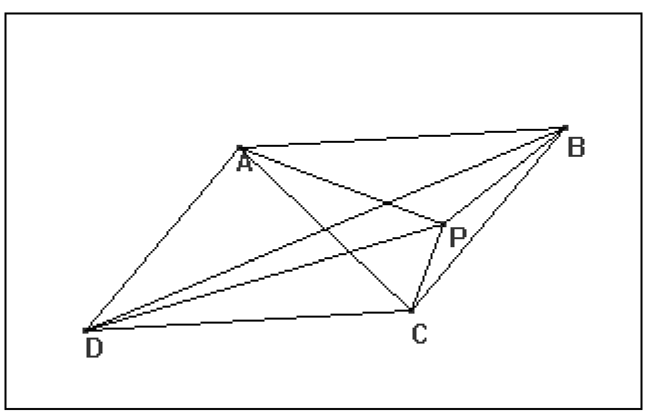

Ilustración 6

Velasco (1983) comienza su Tratado de Geometría con términos y relaciones no definidas, entre las que incluye los puntos y rectas, indicando que se usan de acuerdo con determinados axiomas. A pesar de ello, indica que los alumnos tienen una idea más o menos concreta de lo que significan. Desde un punto de vista puramente formal, esta asociación intuitiva con puntos y rectas no es indispensable; es decir, podría ser válido trabajar en abstracto y eludir cualquier interpretación intuitiva, aunque no aportaría ninguna ventaja especial, excepto la absoluta certeza de que no incluiremos dentro de las demostraciones conclusiones que se sugieren de las figuras pero que no son verdaderas consecuencias lógicas dentro del proceso de la demostración.

Entendemos que estos comentarios de Velasco se pueden atribuir a este problema. El trazar un paralelogramo, sus diagonales, el punto interior a un determinado triángulo, el análisis posterior de áreas, puede verse desde una intuición de lo que la figura geométrica construida da de sí, pero lo que se pretende en realidad es construir abstractamente la figura.

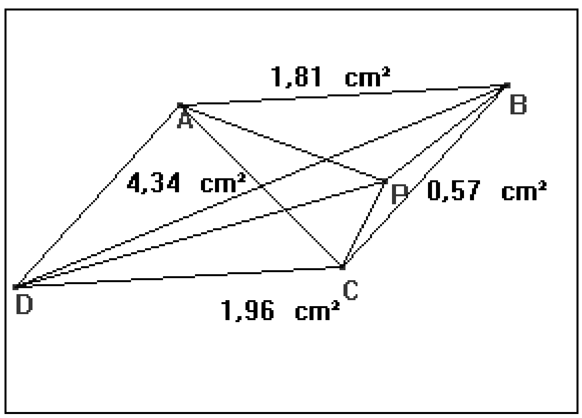

Ilustración 7

La construcción geométrica puede ser alterada "arrastrando" los elementos básicos que en este caso son los puntos A, B y D, y los segmentos AB y AD, observando que permanece la igualdad en las áreas sumadas con la del PDA.

Entendemos que este problema de Velasco (1983) es correcto para esta investigación debido a las siguientes consideraciones:

1.- Las figuras geométricas (paralelogramos, triángulos, cuadriláteros) que intervienen son elementales, por lo que para la formación de futuros profesores de primaria puede significar una consolidación de conocimientos.

2.- La construcción de los elementos implicados en el enunciado, hechos con Cabri II, permite observar si se realiza una figura geométrica o un simple dibujo, mediante el “arrastre” de los elementos básicos correspondientes.

.

3.- El análisis de las áreas significa utilizar herramientas que se han incorporado a la versión de Cabri II, y el cálculo de las sumas se hace de manera que automáticamente al cambiar o arrastrar algún elemento básico, se actualizan.

4.- El razonamiento de descomposición, recomposición y contraste de áreas utilizado en la demostración ofrecida permite un análisis geométrico que, siendo elemental, permite incorporar elementos de análisis y síntesis geométrica.

5.- Los casos particulares del problema, cuando el punto P se halla en alguno de los vértices del triángulo MBC permiten realizar una comprobación de tipo inductivo para ir consolidando y reforzando la tesis planteada por el problema acerca de la relación de áreas.

ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL

El curso 2001-02 se recogió información revisando la literatura, a partir de dos tesis doctorales (Gomes, (1999) y Kortenkamp, 1.999) y una tesis de maestría (Iglesias (2000)). Se preparó tanto la fundamentación teórica como la metodología de investigación.

El curso 2002-03 se ha efectuado lo que se puede considerar una Prueba Piloto, con la intención de obtener información acerca de las dificultades, cuestiones a reconsiderar, posibles cambios en la metodología, primeros análisis inductivos a partir de documentos escritos que recogen las producciones sobre las resoluciones de los alumnos implicados, análisis de los ficheros de Cabri entregados, entrevistas con alguno de los participantes, etc.

Bibliografía:

Davis, J.P.(1977): *Proof, cmpleteness, transcedentals, and sampling.* Journal of the Association for the computing Machinery, 24, pp 298-310.

Gomes, A. S. (1999): *Developpement conceptuel consecutif a l’activite instrumentee*. (L’utilisation d’un système informatique de geometrie dynamique au college) Tesis para obtener el grado de Doctor de la Universidad Paris V en Ciencias de la Educación. Dirigida por Gerard Vergnaud (http://www.cin.ufpe.br/~asg/bibliografia.htm).

Gómez, R. y Balbuena, R. (1998): *Matemáticas 5º* Curso Primaria. SM. Madrid

Gravina, M. (1996): *Geometría dinámica: una nova abordagem para o aprendizado da geometría*. (Http://www.niee.ufrgs.br/cursos/topicos-ie/malice/artigo.htm)

De Guzmán, M. (1995): *Para pensar mejor*. (*Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*.) Pirámide. Madrid.

Finney, R. L. (1970): *Dynamic proofs of euclidean theorems*. En Mathematics Magazine, (Sep-Oct. pp177-185)

Fischbein, E. (1993): *Figural Concepts*. Educational Studies in Mathematics. 24, pp. 139-162

Iglesias, M. (2000): *Curso de resolución de problemas geométricos asistido por ordenador*. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico. República Bolivariana de Venezuela. Tesis de Maestría en Educación, dirigida por Miriam Mireles.

Keyton, M.(1997): Students Discovering Geometry using Dynamic Geometric Software. En (King, J. y Schattschneider,Eds),Geometry Turned On. MAA Notes, 41. Washington. (pp. 63-67)

King, J (1997): Quadrilaterals Formed by Perpendiculars Bisectors. En (King, J. y Schattschneider,Eds),Geometry Turned On. MAA Notes, 41. Washington.(pp. 29-32)

Kortenkamp, U. (1999): *Foundations of Dynamics Geometry*. A dissertation submitted to the Swiss Federal Institute of Technology Zurich for the degrre of Doctor of Technical Sciences,
(http://www.inf.fu-berlin.de/~kortenka/Papers/diss.pdf)

Laborde C. et Capponi B. (1994): *Cabri Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 14, n 1.2, p. 165-210, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Pereira-Mendoza, L. (1993): What is a Quadrilateral? The Mathematics Teacher (Diciembre 1993, pp 774-776)

Piaget, J. y García, R. (1982): Psicogénesis e Historia de la Ciencia. Siglo XXI. México.

Polya, G. (1962): Mathematical Discovery, John Willey & Sons.

Russel, B. (1957): "*The Study of Mathematics*". Mysticim and Logic. Doubleday & Co., Inc. (Citado por Keyton, 1997)

van Hiele, P.M. (1957): *La comprensión*. Tesis Doctoral. Traducción al español de Ángel Gutiérrez.

Velasco, G. (1983): *Tratado de Geometría*. Limusa. México.