Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986): Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 17 n° 1, pp. 31-48.

Traducción por Mª Luisa Luna (E.U. de Magisterio. Universidad de Cádiz); revisada por Angel Gutiérrez (Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia).

Este estudio contiene una descripción de los niveles de Van Hiele de razonamiento geométrico de acuerdo con las respuestas a una entrevista clínica concerniente a trabajos con triángulos y cuadriláteros. Los sujetos eran 13 estudiantes de los grados 1 hasta 12 más un estudiante de matemáticas de la Universidad. Los trabajos incluyen dibujos de formas, identificación y definición de formas, ordenación de formas, determinación de una forma misteriosa, establecer propiedades de paralelogramos y comparar componentes de un sistema matemático. Las conductas de los estudiantes en las actividades fueron consistentes con la descripción original general de los Van Hiele de los niveles, aunque no se confirmó la discretitud de los niveles, particularmente los de análisis y abstracción. El uso de deducción formal entre estudiantes que estaban cursando o habían cursado geometría en la escuela secundaria era escaso, coincidiendo con anteriores observaciones de Usiskin (1982).

Muchos educadores americanos de matemáticas comenzaron estudiando el modelo de Van Hiele de desarrollo en Geometría a partir de los esfuerzos de Wirszup (1976) en el principio de los 70. En este estudio, los cinco niveles de Van Hiele se formularon inicialmente del siguiente modo, usando las descripciones de Dina Van Hiele (Van Hiele-Geldof, 1957) modificadas por Hoffer (1981):

Nivel 0 (visualización). El estudiante razona sobre conceptos básicos geométricos, tales como formas simples, principalmente por medio de consideraciones visuales del concepto como un todo sin consideración explícita de las propiedades de sus componentes.

Nivel 1 (Análisis). El estudiante razona sobre conceptos geométricos por medio de un análisis informal de las partes componentes y atributos. Se establecen las propiedades necesarias del concepto.

Nivel 2 (Abstracción). El estudiante ordena lógicamente las propiedades de los conceptos, construye definiciones abstractas y puede distinguir entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al determinar un concepto.

Nivel 3 (Deducción). El estudiante razona formalmente dentro del contexto de un sistema matemático, completo, con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas.

Nivel 4 (Rigor). El estudiante puede comparar sistemas basados en diferentes axiomas y puede estudiar varias geometrías en ausencia de modelos concretos.

Este estudio fue emprendido para investigar las siguientes cuestiones:

1. ¿Son útiles los niveles de Van Hiele para describir los procesos de pensamiento de los estudiantes en actividades de geometría?
2. ¿Pueden caracterizarse los niveles operativamente por la conducta del estudiante?
3. ¿Puede desarrollarse un procedimiento de entrevistas para revelar niveles de razonamiento predominantes en actividades específicas de geometría?

Otros estudios han buscado información concerniente a la naturaleza jerárquica de los niveles y la asignación de estudiantes a niveles (Mayberry, 1983). Algunos han medido las habilidades geométricas de estudiantes como una función del nivel de Van Hiele (Usiskin, 1982) y algunos han investigado los efectos de la instrucción en un nivel de Van Hiele predominante del estudiante (Fuys, Geddes y Tischler, 1985).

METODO

Desarrollo y fases experimentales

El estudio aquí descrito es la fase final experimental de un proyecto de 3 años para investigar los niveles de Van Hiele en geometría escolar. El primer año del estudio fue una fase de desarrollo en la que se escribieron y revisaron tres veces las actividades experimentales, un guión de entrevista y un paquete de codificación para el análisis del protocolo. Cada revisión tenía lugar después de sucesivas entrevistas piloto que eran conducidas por los cuatro investigadores del proyecto. Los investigadores se reunieron para sugerir y elaborar revisiones de las tareas, guión y paquete que podrían facilitar tanto la administración de las entrevistas como el esquema de codificación para su análisis. El objetivo era obtener un guión de entrevista acompañado de un paquete de análisis que pudiera ser administrado fácilmente por profesores e investigadores. El guión entrevista y el paquete de análisis se incluyen en el informe final del proyecto (Burger, 1986) y se pueden obtener solicitándolos a los autores.

Muestra

Los sujetos para las entrevistas finales del experimento fueron 45 estudiantes de 5 distritos escolares en 3 estados: Corvallis, Oregon; Central Linn, Oregon; Eugene, Oregon; East Lansing, Michigan y New Albany, Ohio. Primero intentamos entrevistar a estudiantes de los grados 7-12, eligiendo estudiantes antes, durante y después de que hubieran hecho un curso de geometría en la escuela superior. Sin embargo, las respuestas de los estudiantes durante las entrevistas de la fase de desarrollo nos animaron a administrar las actividades a estudiantes mucho más jóvenes y a estudiantes de matemáticas de la universidad, con objeto de intentar caracterizar los extremos de los niveles de Van Hiele. De este modo, los 45 sujetos estaban distribuidos en 7 categorías de grados (0 a 6): antes de primaria (grados K-1), primaria (grados 2-3), media (grados 4-8), álgebra 1 (pregeometría), geometría, álgebra 2 (postgeometría) y especialistas en matemáticas de facultad. En la tabla 1 se ve un resumen de la muestra según las categorías de grados y los lugares de las entrevistas.

Tabla 1
Frecuencia de estudiantes en la muestra de entrevistas por categorías de grados y localidades

	Localidad					
Categoría	Corvallis	Central Linn	Eugene	East Lansing	New Albany	Total
0. Grados K-1				2		2
1. Grados 2-3				4		4
2. Grados 4-8				6	4	10
3. Algebra 1 (gr. 8-11; pregeom.)	5	3	4			12
4. Geometría (gr. 9-12)	7	1			1	9
5. Algebra 2 (gr. 10-12; postgeom.)	5				1	6
6. Facultad de matem.	2					2
Total	19	4	4	12	6	45

Con la excepción de los estudiantes de la facultad, que fueron invitados a participar por uno de los investigadores, los sujetos fueron seleccionados por sus profesores. Los investigadores describieron el estudio y su objetivo a los profesores cooperantes y luego les pidieron que seleccionaran algunos de sus estudiantes de habilidad media a alta para participar en las entrevistas. Los investigadores especificaron el número de estudiante de cada sexo para obtener aproximadamente el mismo número de chicos y chicas en cada categoría.

Procedimiento de la entrevista

Las actividades experimentales fueron administradas a cada estudiante por uno de los cuatro investigadores en una entrevista clínica grabada en audio. A los estudiantes se les dijo que les iban a hacer algunas preguntas sobre formas geométricas. Los materiales permitidos fueron lápices, papel, regla y compases. A los estudiantes se les animó a usar cualquiera de esos instrumentos en cualquier momento durante la entrevista. El entrevistador presentó las actividades a cada estudiante en el mismo orden, de acuerdo con en el guión. Después de haber completado cada actividad, el entrevistador era libre para probar de nuevo o desarrollar cualquier respuesta. Los datos para el estudio consistían en las grabaciones, los dibujos de los estudiantes y las notas de los entrevistadores.

Las entrevistas fueron hechas en una habitación separada durante la hora de clase de matemáticas. Solo estaban presentes el entrevistador y el estudiante. Cada entrevista duró de 40 a 90 minutos. A algunos de los niños más pequeños no se les propusieron las actividades que implicaban razonamiento geométrico formal. Como alguno de los estudiantes mayores llegaron a implicarse bastante en alguna de las actividades, algunas de las entrevistas se realizaron en dos sesiones, 2 ó 3 días después.

Actividades

Las entrevistas consistían en 8 actividades relacionadas con formas geométricas. Las actividades implican dibujo de formas, identificación y definición de formas, clasificación de formas y requieren los dos razonamientos informal y formal sobre formas geométricas. Las actividades fueron diseñados para reflejar las descripciones de los niveles de Van Hiele que estaban disponibles en la literatura (Van Hiele, 1973; Wirszup, 1976) y para incorporar algunas de las ideas de las actividades que Dina Van Hiele había realizado con sus propios estudiantes en su investigación (Fuys, Geddes y Tischler, 1984 ; Van Hiele-Geldof, 1957). Las actividades de dibujo, identificación y clasificación (6 en total) fueron ideadas para extraer de los protocolos caracterizaciones de los niveles 0 a 2 de Van Hiele. La primera actividad de razonamiento formal era un juego de inferencia en el que se revelaba un tipo particular de forma por sus propiedades. La segunda actividad de razonamiento formal consistía en una serie de preguntas acerca de teoremas, axiomas y demostración. Las actividades de razonamiento formal intentaban obtener datos sobre los niveles 2 y 3. No se intentó investigar con esos sujetos el nivel 4, un nivel que requiere la habilidad de comparar diferentes geometrías. Se administraron dos series de actividades de dibujo, identificación y clasificación de formas, una serie para triángulos y otra para cuadriláteros. Más adelante se describen ejemplos de las actividades para un tipo de formas. Las actividades para el otro tipo de formas son similares.

Dibujo. Al estudiante se le pedía que dibujara un triángulo, luego que dibujara otro que fuera diferente del primero, después que dibujara otro que fuera distinto de los dos primeros y así sucesivamente hasta que la pregunta diera resultado. Luego se le preguntaba al estudiante en qué se diferenciaban las figuras y cuántos triángulos diferentes podría dibujar. Esta actividad investigaba las propiedades que los estudiantes modificaban al hacer figuras "diferentes" y exploraba si pensaban que el número posible de triángulos diferentes era finito o infinito.

Identificación y definición. Dada una lámina de cuadriláteros (ver Figura 1), se le pedía al estudiante que pusiera una S en cada cuadrado, una R en cada rectángulo y, si estaba familiarizado con los términos, una P en cada paralelogramo y una B en cada rombo. Se le pedía al estudiante que justificase sus marcas y, si era necesario, por qué había omitido algunas de las figuras. En la parte de definición de esta actividad, al estudiante se le preguntaba "¿En qué le dirías a alguien que se fijara para localizar todos los rectángulos en una lámina de figuras? (se hacía la pregunta equivalente para las otras formas familiares). ¿Podrías hacer una lista más corta? ¿Es un rectángulo el nº 2? ¿Es un paralelogramo el nº 9?". Por lo tanto, esta actividad explora las definiciones del estudiante y la inclusión de clases.

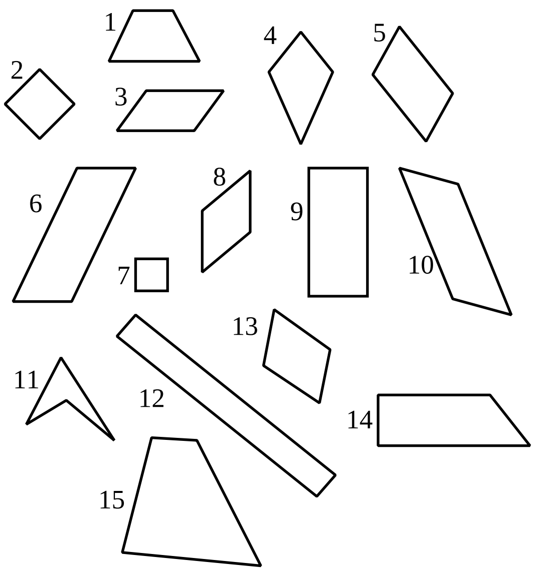

Figura 1. Cuadriláteros para ser identificados.

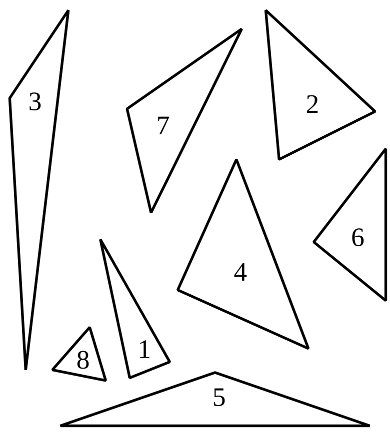

Figura 2. Triángulos para ser clasificados.

Clasificación. Se extendía sobre la mesa un conjunto de triángulos recortados (ver Figura 2). Al estudiante se le preguntaba "¿Puedes poner juntos algunos de estos que se parezcan en algo? ¿En qué se parecen? ¿Puedes poner juntos algunos que sean parecidos de otra forma? ¿En qué se parecen?". Esta línea de preguntas continuaba mientras el estudiante pudiese usar nuevas propiedades para clasificar.

La figura misteriosa. Esta actividad era un juego de inferencia titulado "¿Cual es mi figura?" que el entrevistador jugaba con el estudiante. El entrevistador decía, "Voy a mostrarte una lista de pistas de una figura. Voy a descubrir las pistas una a una. Cuando tengas suficientes pistas para saber seguro qué figura es, párame. Si no, pídeme otra pista. Eres libre para usar cualquiera de los instrumentos de dibujo disponibles". Cuando los estudiantes decían que tenían bastantes pistas para decidir la figura, se les preguntaba cómo lo sabían con certeza y si otra pista podría hacerles cambiar de opinión. Esta actividad producía inferencia formal y planteaba el papel de las condiciones necesarias frente a las suficientes para determinar una figura. La lista de pistas para una de las formas se da en la tabla 2.

Axiomas, teoremas y una demostración. Esta actividad se realizaba sólo con los estudiantes de la escuela secundaria y de la facultad. Se les preguntaba si conocían las palabras *axioma*, *postulado* o *teorema*. Se les pedía que diesen un ejemplo de cada término que les fuera familiar. Finalmente, se les pedía explorar la siguiente cuestión y explicar su razonamiento: "Supón que tienes un cuadrilátero con los dos pares de lados opuestos congruentes. ¿Deben ser paralelos los lados opuestos?". Se les preguntaba también sobre la cuestión inversa.

Tabla 2
Pistas para el paralelogramo en "¿Cuál es mi figura?"

1. Es una figura cerrada con 4 lados rectos.
2. Tiene 2 lados largos y 2 lados cortos.
3. Los 2 lados largos tienen la misma longitud.
4. Los 2 lados cortos tienen la misma longitud.
5. Uno de los ángulos es mayor que otro de los demás ángulos.
6. Dos de los ángulos tienen la misma amplitud.
7. Los otros dos ángulos tienen la misma amplitud.
8. Los 2 lados largos son paralelos.
9. Los 2 lados cortos son paralelos.

Banco de cintas. Para la investigación detallada se creó un "banco de cintas" de 14 de las 45 entrevistas grabadas. Las 14 cintas fueron elegidas aleatoriamente en cada categoría de grados. Se seleccionaron aleatoriamente dos cintas de cada categoría 1, 2 y 3; tres cintas de cada categoría 4 y 5; y una cinta de cada categoría 0 y 6. Se seleccionaron más cintas de las categorías superiores por la profundidad y variedad de las respuestas dadas a las actividades de las entrevistas por estos estudiantes. La tabla 3 muestra un resumen de las categorías, grado, sexo, y lugar de la entrevista de los sujetos en el banco de cintas.

Procedimientos de codificación y análisis

Tres investigadores revisaron cada una de las 14 cintas y completaron un análisis del protocolo para cada una. El orden de revisión de las 14 cintas fue aleatorio y diferente para cada investigador. Las categorías de respuestas a cada cuestión en cada actividad, que habían sido creadas durante la fase de desarrollo, fueron codificadas por los investigadores. Se transfirieron al formulario de análisis del protocolo extractos de las transcripciones de las cintas que eran particularmente útiles para revelar el nivel de razonamiento geométrico del estudiante. A cada investigador se le pidió que asignase un nivel de Van Hiele (0 a 3) a cada actividad de cada estudiante. El nivel asignado debía representar el nivel *predominante* de pensamiento exhibido por el estudiante en esa actividad, es decir, un nivel preferido de razonamiento. Ayudaron a guiar la codificación descripciones de los niveles en la literatura (Van Hiele, 1973; Wirszup, 1976).

Después de revisada toda la cinta, el investigador asignó un nivel global de razonamiento de Van Hiele a cada estudiante. Sumarios de respuestas y evidencias de anécdotas para apoyar el nivel asignado se registraban en el formulario de análisis del protocolo. También se incluía en el análisis un resumen de cualquier evidencia que parecía entrar en conflicto con el nivel global asignado. Así, por cada uno de los 14 sujetos se obtuvieron 3 vectores de dimensión 8 con los niveles de Van Hiele como entradas, un vector por cada investigador. Se testó el consenso de interrelación de los vectores de los niveles asignados con un esquema similar al usado por Mayberry (1983).

Tabla 3
Distribución de estudiantes en el banco de cintas por categorías de grados y localidades

	Localidad					
Categoría	Corvallis	Central Linn	Eugene	East Lansing	New Albany	Total
0. Grados K-1				1M		1
1. Grados 2-3				3M		
				3H		2
2. Grados 4-8				4M		
				5H		2
3. Algebra 1 (pregeom.)	8M		9H			2
4. Geometría	10H					
	9M				12M	3
5. Algebra 2 (postgeom.)	11H					
	10M					
	10H					3
6. Facultad de matem.	15H					1
Total	7	0	1	5	1	14

Nota. 1M significa mujer de primer grado.

RESULTADOS

Respuestas ilustrativas

Del banco de 14 estudiantes ha sido seleccionado un grupo de 6 para narrarlos aquí. Se ha elegido este grupo por la variedad de respuestas que los estudiantes mostraron durante las entrevistas, una variedad que es representativa del banco. Los estudiantes son Helen, una chica de 3^{er} grado de la categoría 1; Bud, un chico de 5º grado de la categoría 2; Amy, una chica de 8º grado de la categoría 3; Don, un chico de 10º de la categoría 4; Karen, una chica de 10º de la categoría 5; y Tom, un chico de 1^{er} curso de la facultad de matemáticas, de la categoría 6. (Estos no son los nombres reales). Se describen los resultados para cinco actividades: dibujo de triángulos, identificación de cuadriláteros, clasificación de triángulos, la figura misteriosa y axiomas, teoremas y una demostración.

En la actividad de dibujo de triángulos, los dibujos de los niños más pequeños ofrecen a menudo atributos irrelevantes, tales como la orientación en la página. Bud, por ejemplo, contrastó sus triángulos de este modo (ver Figura 3): El triángulo 1 estaba "boca arriba"; el triángulo 2 estaba "boca abajo" ; y el triángulo 3 estaba "apuntando hacia allí [abajo]"; y triángulo 4 estaba "apuntando hacia allí [a la izquierda]". A menudo se ignoraban atributos relevantes, como en el triángulo 5, que tiene "lados ondulados". Al principio Bud piensa que hay alrededor de 12 triángulos diferentes, pero después dice que hay más de 1000.

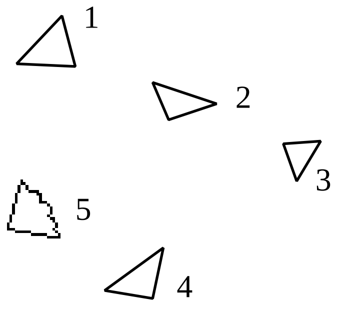

Figura 3. Los dibujos de triángulos de Bud.

Amy dibujaba sus triángulos cuidadosamente con una regla y los comprobaba de acuerdo con las propiedades de sus componentes (ver Figura 4). Decía que el triángulo 2 "tiene un ángulo menor que el nº 1. El triángulo nº 1 tiene un ángulo de 45°. El triángulo n° 2 tiene un ángulo de 15°". El triángulo 3 "tiene un ángulo mayor que el nº 1 y el nº 2". El triángulo 4 "tiene un ángulo de 90° y un ángulo realmente pequeño". Amy decía que había tres tipos de triángulos pero muchos tamaños y ángulos diferentes. Los tipos eran (a) tres lados iguales, (b) dos lados iguales y (c) todos los lados diferentes.

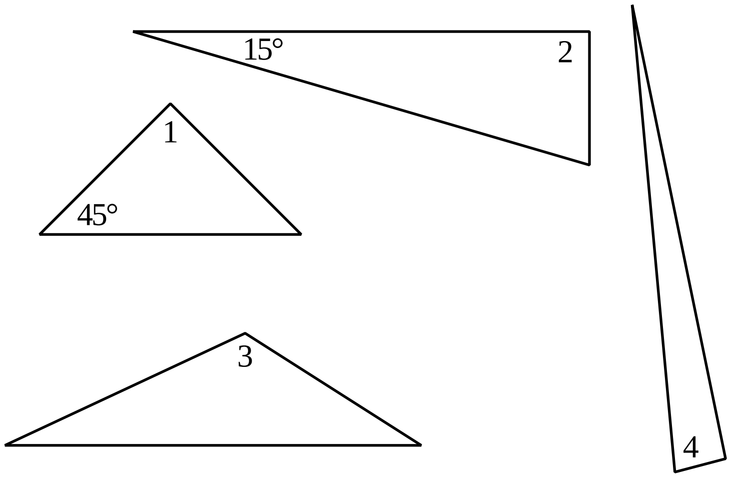

Figura 4. Los dibujos de triángulos de Amy.

Algunos estudiantes de geometría, como Don, comprobaban los triángulos según los tipos generales (ver Figura 5). En sus dibujos, el triángulo 1 es equilátero, el triángulo 2 es escaleno, el triángulo 3 es rectángulo, y el triángulo 4 es isósceles. Don dice que hay al menos cinco tipos de triángulos: rectángulo, isósceles, equilátero, escaleno, equiángulo y algunas combinaciones de estos. Por ejemplo, el triángulo 3 es rectángulo escaleno.

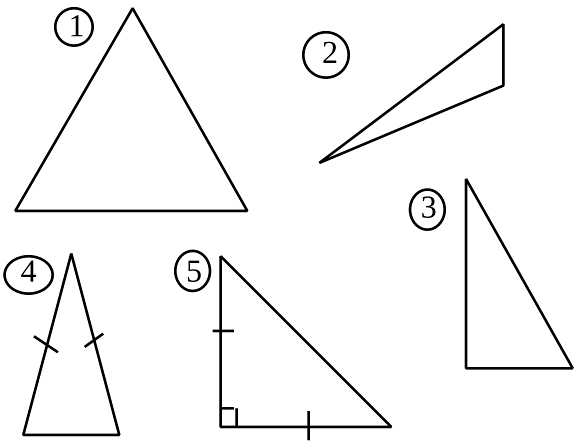

Figura 5. Los dibujos de triángulos de Don.

En la actividad de identificación y definición, los niños más pequeños incluían muchas formas adicionales entre los cuadrados y los rectángulos. Para los polígonos de la Figura 1, Helen señaló las figuras 2, 6, 7, 9 y 12 como cuadrados. Bud señaló las 2, 4, 5, 7, 8 y 13 como cuadrados. Señaló las 3, 6, 9, 10 y 12 como rectángulos. Ambos estudiantes consideraron la orientación de las figuras en la página como un atributo relevante. Por ejemplo, la figura 2, como se ha visto, no era un cuadrado para Helen o Bud. Girándola 45°, sí lo era. Algunos estudiantes, como Amy, identificaron los tipos de cuadriláteros de forma que impedían las inclusiones de clases. Para ella, los cuadrados de la Figura 1 eran las figuras 2 y 7; los rectángulos eran las 9 y 12; los paralelogramos eran las 3, 5, 6 y 10; y los rombos eran las 8 y 13. Al describir las figuras, excluyó explícitamente los cuadrados de los rectángulos, diciendo que los rectángulos tienen "dos lados iguales y paralelos entre sí. Dos lados más largos son iguales y paralelos entre sí, y se conectan a 90°". Al definir los paralelogramos, excluyó los rectángulos y rombos diciendo que "dos lineas paralelas con la misma longitud se unen con dos lineas inclinadas de la misma longitud. Las lineas inclinadas son [de] diferente longitud que las lineas paralelas".

Algunos estudiantes de postgeometría, como Karen, identificaron las formas correctamente y definieron éstas por propiedades de sus componentes, quizá incluyendo algunas redundancias. Por ejemplo, Karen definía un rectángulo como una "figura cerrada cuadrilátera, con todos los ángulos de 90° y con lados opuestos congruentes". No obstante, Don definió los tipos de cuadriláteros usando relaciones entre los tipos. Para él un cuadrado era "un paralelogramo que tenía todas las propiedades del rombo y el rectángulo". Un rectángulo era "un paralelogramo con al menos un ángulo recto" Un paralelogramo era "un cuadrilátero con lados opuestos congruentes y paralelos". Finalmente, para Don un rombo era "un paralelogramo con dos lados adyacentes congruentes". Tom, el universitario estudiante de matemáticas, definió los diversos cuadriláteros unos independientemente de los otros, comprobando sus definiciones para asegurar que le permitieran la inclusión de clase que deseaba.

En la actividad de clasificación, los estudiantes jóvenes hacían pocas clasificaciones y muchas veces tenían dificultades diferenciándolas. Para los polígonos de la Figura 2, Helen colocó las figuras 4, 5, 6, 7 y 8 juntas, diciendo que todas eran triángulos. En su segunda clasificación colocó las figuras 5 y 7 juntas, diciendo que ambas eran triángulos. Bud hizo dos clasificaciones, una consistente en las figuras 4 y 8 diciendo que tenían tres lados iguales. Su otra clasificación consistió en las figuras 6 y 7, que decía que tenían tres lados diferentes.

Amy clasificó los triángulos de varias formas utilizando propiedades de los lados y ángulos. Formó varias particiones, usando todas las figuras, en vez de elegir un subconjunto con una propiedad común. Una de sus particiones consistía en las figuras 1 y 6, que "tienen ángulos de 90°", las figuras 2, 4 y 5 que "tienen dos lados iguales" y las figuras 3 y 7 que "tienen 3 longitudes distintas y ángulos que no son de 90°". (La figura 8 fue omitida por descuido durante la entrevista de Amy). Ella usó también algunas propiedades imprecisas, como "ángulo pequeño arriba, ángulos más amplios en la base". Don clasificó los triángulos estrictamente por los tipos generales, usando isósceles, escaleno y rectángulo. Tom formó una variedad de particiones basadas en propiedades precisas de los lados y ángulos.

Al determinar la figura misteriosa (un paralelogramo), los estudiantes hacen varios tipos de argumentos. Los estudiantes jóvenes, como Helen y Bud, trataron la actividad estrictamente como un juego de adivinanzas o emplearon argumentos visuales, basados en dibujos, con uso inconsistente de las propiedades dadas por las pistas. Otros estudiantes, como Amy y Karen, parecía que usaban las propiedades de forma analítica para confirmar una conjetura, usando a menudo muy pocas o muchas pistas. Parecían estar usando las propiedades como condiciones necesarias. Don usó las propiedades como parte de una estrategia de "exclusión", eliminando ciertos tipos generales de cuadriláteros como dictaban las pistas. Tom usó explícitamente una estrategia deductiva para determinar la figura, construyendo formalmente la figura a partir de las pistas.

En la última actividad, axioma, teoremas y una demostración, Karen contrastó el concepto de postulado y teorema diciendo que "un teorema es algo que puedes demostrar. No puedes demostrar postulados. Un postulado es algo que asumes". Cuando se le preguntó, ella afirmó que los postulados eran asumidos "porque si no, no podríamos tener teoremas. Los teoremas son importantes, pero no para mí". Durante una discusión con el entrevistador admitió "que ella no era demasiado lógica" y prefería el álgebra ("porque es de números") a la geometría, especialmente a las demostraciones, que dijo no entender. Don recordó que había leído que existía una diferencia entre teoremas y postulados, pero no podía acordarse de la distinción. Dijo que nunca entendió en realidad la diferencia. Tom se daba cuenta de que los teoremas se probaban a partir de los postulados y dijo que los postulados eran "tan básicos que se aceptaban sin prueba". Muchos estudiantes, como Amy, contestaron la cuestión sobre los paralelogramos haciendo cuidadosos dibujos y razonando sobre ellos. Esta estrategia era común entre los estudiantes de geometría y postgeometría, como Karen, que no se decidían a intentar probar el resultado formalmente. Don y Tom eligieron construir demostraciones de la proposición usando propiedades de cuadriláteros, que hicieron correctamente con alguna ayuda. Tom había olvidado una parte de geometría euclídea desde la enseñanza media y tuvo que idear y demostrar algunas condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea un paralelogramo. De hecho, formuló y comprobó lógicamente muchas conjeturas durante su entrevista.

Asignación de niveles

Investigaciones previas habían dado algunas conclusiones relevantes para este estudio. Fuys y otros (1985) y Mayberry (1983) descubrieron que los niveles de Van Hiele parecen ser de naturaleza jerárquica. Usiskin (1982) descubrió que a algunos estudiantes se les puede asignar un nivel de Van Hiele, pero que los estudiantes en transición de un nivel al siguiente son difíciles de clasificar fiablemente. Mayberry (1983) también descubrió que los estudiantes pueden estar en diferentes niveles para diferentes conceptos y que algunos estudiantes nunca alcanzan el nivel de deducción formal, una conclusión compartida por Usiskin (1982).

En este estudio, los tres investigadores les asignaron a los estudiantes los niveles de Van Hiele de razonamiento predominante en cada una de las actividades experimentales. La naturaleza jerárquica de los niveles, observada por Fuys y otros y por Mayberry, se confirmó, así como la dificultad, observada por Usiskin, de asignación a algunos estudiantes que parecen estar en transición entre niveles. Es decir, surgieron algunas discrepancias entre los investigadores. Datos confusos, citados por los investigadores como responsables de su dificultad para asignar un nivel, sirvieron muchas veces para aproximar sus posturas. Un investigador podía asignar el nivel 1, por ejemplo, citando datos confusos indicativos del nivel 0, mientras que otro podría asignar nivel 0, citando datos confusos indicativos del nivel 1.

Al asignar niveles a los estudiantes, cada investigador suministró datos basando su asignación. En las actividades de dibujo, estudiantes como Helen y Bud que modificaron cualidades visuales tales como la orientación de la figura en la hoja o la "estrechez" de la figura y que pensaron que había sólo un número finito de triángulos y cuadriláteros, fueron asignados al nivel 0. Estudiantes como Amy que parecían fijarse en los componentes de las figuras y que comprendían que las componentes pueden variarse de infinitas maneras, fueron asignados al nivel 1. A estudiantes como Don que dibujó figuras como representantes de tipos generales y que podían interrelacionar figuras se le asignó generalmente el nivel 2. Los investigadores decidieron que las actividades de dibujo no podían distinguir razonamiento más allá del nivel 2.

En las actividades de identificación y definición, los investigadores observaron un número de cualidades visuales imprecisas que algunos estudiantes usaron para describir las figuras. Además, atributos irrelevantes, tales como orientación, eran incluidos en la descripción de las figuras y algunos atributos relevantes eran omitidos. Estas respuestas eran consideradas indicadoras del nivel 0 de razonamiento. Entre los estudiantes asignados al nivel 0 en las actividades de identificación, eran comunes referencias a los prototipos visuales ("un rectángulo se parece a una puerta"). Los estudiantes que contrastaron figuras y las identificaron explícitamente por medio de sus propiedades, como hizo Amy, eran generalmente asignados al nivel 1 en las actividades de identificación. Era común en tales estudiantes prohibir explícitamente la inclusión de clases al describir las figuras y recitar una letanía de sus propiedades definiéndolas, muchos más que un conjunto mínimo de propiedades al definirlas. Estudiantes como Don que dieron una caracterización minimal de las figuras usando otros tipos eran asignados al nivel 2 en estas actividades. Las frecuentes conjeturas de Tom y el intento de verificar sus conjeturas por medio de pruebas formales indicaron una preferencia por el razonamiento de nivel 3.

Al analizar las actividades de clasificación, los investigadores detectaron de nuevo una sustancial cantidad de razonamiento que usaba cualidades imprecisas y visuales de las figuras. Clasificaciones que eran incompletas, como en el caso de Bud, eran consideradas indicativas del nivel 0 de razonamiento porque el estudiante no parecía usar las propiedades de las formas *explícitamente* al hacer las clasificaciones. Clasificaciones como las de Amy, hechas explícitamente usando las propiedades de las figuras, eran consideradas indicativas del nivel 1 de razonamiento, aún si las propiedades eran imprecisas. Clasificaciones como las de Don y Tom, que relacionaron explícitamente una variedad de tipos, eran consideradas indicativas del nivel 2 de razonamiento. De nuevo, los investigadores decidieron que las actividades de clasificación no ponían de relieve razonamiento más allá del nivel 2.

En la actividad de la figura misteriosa se asignó el nivel 0 a los estudiantes que trataron el trabajo como un juego de adivinanza cuando se les pedía que justificaran su decisión por una figura y que no hicieron uso de las propiedades incluso como condiciones necesarias (por ejemplo, ignorando las propiedades si contradecían su conjetura). Estudiantes como Amy y Karen, que parecían usar las pistas como propiedades necesarias para confirmar una conjetura, eran generalmente asignados al nivel 1. Estudiantes como Don, que buscaban un conjunto mínimo de pistas y determinaban la figura con una estrategia de "exclusión", eliminando tipos de formas cuando lo indicaban las pistas, eran generalmente asignados al nivel 2. Estudiantes como Tom, que usaron explícitamente la deducción en la determinación de la forma, eran asignados al nivel 3.

En la parte de demostración de la última actividad, los estudiantes que intentaron contestar la cuestión por medio sólo de dibujos y que solamente podían reexpresar la cuestión como una afirmación eran asignados generalmente al nivel 0. Estudiantes que trataron el problema como un problema "físico" e hicieron una variedad de dibujos para probar la validez de la proposición inductivamente eran asignados al nivel 1. En esta actividad, un número de estudiantes que habían completado con éxito un curso de geometría optaron por este procedimiento inductivo como su método preferido para resolver el problema. Estudiantes como Don, que desearon un argumento deductivo pero fueron capaces de producir uno solo con tanteos persistentes, eran asignados por el entrevistador al nivel 2. Tom produjo un argumento deductivo por sí mismos, ideando y demostrando condiciones suficientes para que un cuadrilátero sea un paralelogramo. Fue el único estudiante al que se le asignó el nivel 3.

Hay que notar que las asignaciones de niveles hechas no parecen estar estrictamente relacionadas con la edad o con las categorías de grados. Por ejemplo, a muchos estudiantes que habían cursado geometría formalmente se les asignó en actividades el nivel 0 ó 1, no el nivel 2 ó 3 como cabría esperar. Karen era una de tales estudiantes. Relatos detallados de los resultados de las 14 entrevistas del banco de cintas pueden encontrarse en el informe de Burger (1986).

Indicadores de nivel

Los datos que apoyan las asignaciones de niveles en las actividades pueden ser resumidos en los siguientes indicadores de nivel:

Nivel 0

1. Uso de propiedades imprecisas (cualidades) para comparar dibujos e identificar, caracterizar y clasificar figuras.
2. Referencias a prototipos visuales para caracterizar figuras.
3. Inclusión de atributos irrelevantes al identificar y describir figuras, tales como la orientación de la figura en la hoja.
4. Incapacidad para concebir una variedad infinita de tipos de figuras.
5. Clasificaciones inconsistentes; es decir, clasificaciones por propiedades que no poseen todas las figuras seleccionadas.
6. Incapacidad para usar propiedades como condiciones necesarias para determinar una figura; por ejemplo, adivinar la figura en la actividad de la figura misteriosa después de pocas pistas, como si las pistas provocaran una imagen visual.

Nivel 1

1. Comparar figuras explícitamente por medio de propiedades de sus componentes.
2. Prohibir inclusiones de clases entre los tipos generales de figuras, tales como cuadriláteros.
3. Clasificar por atributos simples, tales como propiedades de los lados, mientras descuidan ángulos, simetrías, etc.
4. Aplicar una letanía de propiedades necesarias en lugar de determinar propiedades suficientes cuando identifican figuras, explican identificaciones y se deciden por una figura misteriosa.
5. Descripciones de tipos de figuras mediante uso explícito de sus propiedades más que por los nombres de los tipos, incluso si los conocen. Por ejemplo, en lugar de rectángulo, se puede mencionar la figura como cuadrilátero con todos los ángulos rectos.
6. Rechazo explícito de las definiciones de figuras de los libros de texto en favor de la caracterización personal.
7. Tratamiento de la geometría como física cuando se comprueba la validez de una proposición; por ejemplo, contando con una variedad de dibujos y haciendo observaciones sobre ellos.
8. Carencia explícita de comprensión de la prueba matemática.

Nivel 2

1. Formación de definiciones completas de tipos de figuras.
2. Habilidad para modificar definiciones y aceptar y usar inmediatamente definiciones de nuevos conceptos.

3. Referencias explícitas a las definiciones.
4. Habilidad para aceptar formas equivalentes de definiciones.
5. Aceptación de la ordenación parcial lógica entre tipos de figuras, incluyendo inclusiones de clases.
6. Habilidad para clasificar figuras conforme a una variedad de atributos matemáticamente precisos.
7. Uso explícito de enunciados "si, entonces".
8. Habilidad para formar correctamente argumentos deductivos informales, usando implícitamente formas lógicas como la regla de la cadena (si p implica q y q implica r, entonces p implica r) y la ley de separación (modus ponens).
9. Confusión entre los papeles de axioma y teorema.

Nivel 3
1. Clasificación de cuestiones ambiguas y reformulación de problemas en un lenguaje preciso.
2. Conjeturas frecuentes e intentos de verificar conjeturas deductivamente.
3. Confianza en la demostración como autoridad *final* para decidir la verdad de una proposición matemática.
4. Comprensión de los papeles de las componentes en un discurso matemático, tales como axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones.
5. Aceptación implícita de los postulados de la geometría euclídea.

Interpretación de niveles

Durante el curso del estudio, surgieron varias características de los niveles que no habíamos considerado inicialmente. Primero, los niveles parecían ser unas estructuras complejas que implicaban tanto el desarrollo de los conceptos como el de los procesos de razonamiento aplicables a muchos contextos de actividades. Kieren y Olson (1983) habían usado la estructura de niveles para analizar la adquisición por los estudiantes de conceptos y habilidades de razonamiento en el ambiente Logo, por ejemplo. Un desarrollo tal parece muy dependiente de la instrucción y mucho menos dependiente, si lo es de algún modo, de la edad. Segundo, aunque los Van Hiele habían teorizado que los niveles eran estructuras discretas, este estudio no detectó esa característica. Las dificultades ocasionales que los investigadores tuvieron para decidir entre niveles cuando hacían asignaciones de nivel pueden considerarse como evidencias que cuestionan la naturaleza discreta de los niveles de Van Hiele. Por último, varios estudiantes de postgeometría parecían haber retrocedido un nivel en alguna de las actividades desde su estudio de geometría. Algunos estudiantes mostraron preferir distintos niveles de razonamiento de Van Hiele en diferentes actividades. Algunos incluso oscilaron de un nivel a otro en la misma actividad bajo el sondeo del entrevistador. Esta oscilación era particularmente evidente entre algunos de los estudiantes de la categoría 5, como Karen, que parecía regresar del nivel 2 al 1 como su nivel predominante de razonamiento en las actividades. Aparecían destellos del nivel 2 de razonamiento pero generalmente sólo como resultado de sondeos. Tales estudiantes, dejados a su aire, parecían preferir la relativa seguridad del nivel 1 de razonamiento y tendían a evitar deducir, aún cuando sabían que les era asequible.

Así los niveles parecían ser algo más dinámico que estático y de una naturaleza más continua de lo que sus descripciones discretas nos llevarían a creer. Los estudiantes pueden ir atrás y adelante entre niveles no pocas veces mientras están en transición de un nivel al siguiente. Nuestros datos apoyan particularmente este fenómeno entre los niveles 1 y 2. Suponemos que un fenómeno similar puede existir cuando los estudiantes están en transición del nivel 2 al 3, aunque serían necesarios más datos de los estudiantes de la facultad de matemáticas para presentar tal argumento.

IMPLICACIONES

Con referencia a las tres cuestiones investigadas en este estudio, se tiene que los niveles de Van Hiele son útiles para describir los procesos de pensamiento de los estudiantes en actividades de polígonos. Los investigadores fueron capaces de hacer asignaciones de nivel en las actividades, igual que lo hizo Mayberry, con pocos datos equívocos. Consecuentemente, parecería apropiado investigar las respuestas de estudiantes en actividades que implicaran otros conceptos geométricos, tales como medida, transformaciones, congruencia y semejanza. Los indicadores de nivel derivados de este estudio proporcionaron una primera caracterización de los niveles de Van Hiele en términos de la conducta del estudiante. Hubo acuerdo entre los tres investigadores en que estos indicadores eran correctos, pero tal vez caracterizaciones iniciales minimales. Puede ser posible obtener caracterizaciones de los niveles por conductas especiales del estudiante, tales como las dadas por los indicadores de nivel anteriores, utilizando otras actividades geométricas. Además, el modelo de Van Hiele de desarrollo en geometría puede servir como base para realizar experimentos de enseñanza constructivista en geometría, como los descritos por Coob y Steffe (1983).

Hemos comprobado que el desarrollo de un guión de la entrevista y el protocolo de análisis facilitó mucho los procedimientos de entrevistas y ayudó a estructurar el resumen de gran cantidad de datos verbales. A aquéllos que consideren cualquier clase de investigación clínica que implique grabaciones de audio o video les recomendamos firmemente un procedimiento semejante. Las fases de desarrollo de las entrevistas piloto y el guión fueron esenciales en el desarrollo del guión final de las entrevistas y del procedimiento de análisis. Además de consideraciones para investigaciones posteriores, parece que en los resultados de este estudio hay implicaciones claras para los profesores (Shaughnessy y Burger, 1985). Para nosotros, la formación de conceptos en geometría puede ocurrir durante largos períodos de tiempo y requiere instrucción específica. Un número de estudiantes de secundaria entrevistados tenían nociones incompletas acerca de figuras geométricas básicas y de sus propiedades. Cómo pueden razonar estos estudiantes sobre figuras de un modo formal está muy poco claro. Esta observación puede explicar algunas de las frustraciones que tienen estudiantes y profesores con los cursos de geometría de secundaria: Los estudiantes no tienen base suficiente en conceptos geométricos básicos y sus relaciones como para "reinventar" la geometría euclídea. La memorización puede ser su único recurso. En esta misma vía, la noción de "encuentro" o confrontación de un nivel, que Van Hiele (1980) describió, es posible que sea un fenómeno real en la enseñanza de las matemáticas. En el estudio, los estudiantes parecen razonar en diferentes niveles usando diferentes lenguajes y diferentes procesos de resolución de problemas en las actividades. Este fenómeno podría ocurrir también entre un profesor y un estudiante que están operando en diferentes niveles. Como Van Hiele sugirió, ninguno puede comprender el razonamiento del otro, resultando frustración y desaliento.

LIMITACIONES

En el estudio clínico, fue entrevistada en profundidad sobre los conceptos de triángulo y cuadrilátero una muestra relativamente pequeña de estudiantes que presentaban un grupo muy amplio de edades. Se utilizaron cuatro entrevistadores y 3 investigadores para dirigir y analizar los datos de las entrevistas. Se produjeron algunos desacuerdos entre los investigadores, aunque muchos se mitigaron cuando se aclararon los datos confusos. Los resultados de este estudio son descriptivos, revelando aspectos de los procesos cognitivos de los estudiantes en las actividades, pero dicen poco sobre los esfuerzos específicos para perfeccionar los propios procesos.

CONCLUSIONES

Las tres cuestiones investigadas pueden ser contestadas afirmativamente. Una respuesta a la primera puede estar basada en el consenso entre los investigadores para asignar a los estudiantes niveles en las actividades de la entrevista. Los comportamientos consistentes entre estudiantes asignados al mismo nivel en actividades concretas pueden resumirse por medio de los indicadores de nivel. Estos, a su vez, ayudan a caracterizar operativamente los niveles. El éxito de la entrevista estructurada, usando un guión específico como base, permitió a los investigadores comparar muchas respuestas de los estudiantes a las mismas actividades. Actividades que implicaban una variedad de contextos en los que se representaban los conceptos (dibujos, identificación en dibujos, clasificaciones y resolución de problemas abstractos) revelaron modos de razonamiento sobre conceptos específicos que los investigadores pudieron identificar con confianza. Adaptar los procedimientos del estudio para investigar otros conceptos geométricos parece claramente apropiado.

REFERENCIAS

Burger, W.F. (1986): *Assessing children's intellectual growth in geometry* (memoria final del proyecto). (Dept. of Math., Oregon State Univ.: Corvallis).

Cobb, P.; Steffe, L.P. (1983): The constructivist researcher as teacher and model builder, *Journal for Research in*

Mathematics Education vol. 14, pp. 83—94.

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1984): *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele.* (School of Educ., Brooklyn College, City Univ. of N. York: Brooklyn, N. York).

Fuys, D.; Geddes, D.; Tischler, R. (1985): *An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents* (memoria final del proyecto). (School of Educ., Brooklyn College, City Univ. of N. York: Brooklyn, N. York).

Hoffer, A. (1981): Geometry is more than proof, *The Mathematics Teacher* vol. 74, pp. 11—18.

Kieren, T.; Olson, A. (1983, febrero): *Linking Logo with learning levels in mathematics.* Comunicación presentada en la Northwest Conf. on Computers in Education. Oregon State Univ., Corvallis.

Mayberry, J. (1983): The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate pre—service teachers, *Journal for Research in Mathematics Education* vol. 14, pp. 58—69.

Shaughnessy, J.M.; Burger, W.F. (1985): Spadework prior to deduction in geometry, *The Mathematics Teacher* vol. 78, pp. 419—428.

Usiskin, Z. (1982): *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry* (Memoria final del proyecto Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry). (Dep. of Education, Univ. of Chicago: Chicago). (ERIC Doc. Rep. Serv. No. ED220 288).

Van Hiele, P.M. (1973): *Begrip en inzicht.* (Muusses: Purmerend, Holanda).

Van Hiele, P.M. (1980, April): *Levels of thinking, how to meet them, how to avoid them.* Ponencia presentada en el Meeting of the N.C.T.M., Seattle.

Van Hiele-Geldof (1957): *De didaktik van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.* (Tesis doctoral no publicada, Univ. of Utrecht).

Wirszup, I. (1976): Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, en J.L. Martin & D.A. Bradbard (eds.), *Space and geometry: Papers from a research workshop.* (ERIC SMEAC: Columbus, USA), pp. 75—97.