Configuraciones epistémicas y cognitivas en tareas de visualización y razonamiento espacial[1]

José A. Cajaraville, Universidad de Santiago de Compostela

Teresa Fernández Blanco, Universidad de Santiago de Compostela

Juan D. Godino, Universidad de Granada

Resumen

En el marco de una investigación sobre evaluación y desarrollo de capacidades de visualización y razonamiento espacial con estudiantes de magisterio, en este trabajo presentamos el análisis a priori de una de las tareas incluidas en el cuestionario de evaluación utilizado. Aplicando herramientas conceptuales del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático identificamos las redes de objetos intervinientes y emergentes en la realización de la tarea, lo que permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales que pueden encontrar los sujetos. Algunas de estas hipótesis son comprobadas analizando las configuraciones cognitivas manifestadas por un estudiante en la realización de la tarea. Se concluye resaltando las posibilidades analíticas ofrecidas por las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico respecto de las nociones cognitivas usadas en las investigaciones sobre visualización y razonamiento espacial.

Nociones teóricas usadas en los estudios sobre visualización y razonamiento espacial

La visualización espacial ha recibido mucha atención como tema de investigación en Educación Matemática (Bishop, 1989; Clement y Battista, 1992; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Gutiérrez, 1996; ...). Se trata de evaluar los procesos y capacidades de los sujetos para realizar ciertas tareas que requieren "ver" o "imaginar" mentalmente los objetos geométricos espaciales, así como relacionar los objetos y realizar determinadas operaciones o transformaciones geométricas con los mismos.

La mayor parte de las investigaciones se orientan a describir estilos y estrategias cognitivas, así como la evolución de las capacidades mentales de los sujetos ante tareas

[1] Contribución al Grupo de Investigación, "Aprendizaje de la Geometría" de la SEIEM. Huesca, 7-9 Septiembre 2006.

que requieren visualización espacial; se trata, por tanto, de trabajos con una orientación básicamente cognitiva, usando nociones como imagen visual, imagen conceptual, representaciones internas y externas, etc.

La noción de *imagen* juega un papel central en el estudio de la habilidad espacial. Clements y Battista (1992, p. 446) definen las imágenes como “representaciones holísticas internas de objetos o escenas, que son isomorfas a sus referentes y pueden ser inspeccionadas y transformadas”. Bishop[2] sugiere considerar dos habilidades diferentes relacionadas con la visualización: ‘la habilidad de interpretar información figural’, y ‘la habilidad de procesamiento visual’, las cuales considera como “un asunto muy individual” (Bishop, 1989, p. 8).

Pressmeg (1986) define la noción de “imagen visual” como un esquema mental que representa (depicting) información visual o espacial (p. 42). Sostiene la posición de que tales imágenes visuales se pueden tener tanto en presencia del objeto perceptible o en su ausencia. Su definición también permite la posibilidad de que los símbolos matemáticos, verbales o numéricos se puedan disponer espacialmente (por ejemplo, los patrones numéricos).

La distinción entre las imágenes mentales de objetos perceptibles y las entidades geométricas, y el reconocimiento de las relaciones dialécticas entre las mismas es abordada con nitidez por Fischbein (1993) con la noción de *concepto figural*. La principal tesis del trabajo de Fischbein es que la geometría trata con entidades mentales (las así llamadas figuras geométricas) que poseen simultáneamente características conceptuales y figurales. “Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales – como idealidad, abstracción, generalidad, perfección.” (p. 143). Como afirma Fischbein, en las teorías cognitivas actuales, los conceptos y las imágenes se consideran básicamente como dos categorías distintas de entidades mentales.

Dentro de la línea de investigación en educación matemática conocida como "pensamiento matemático avanzado", Tall y Vinner (1981) introdujeron los constructos "imagen conceptual" (concept image) y "definición conceptual" (concept definition),

[2] Citado por Gorgorió (1998, p. 208).

para describir el estado de los conocimientos del sujeto individual con relación a un concepto matemático. Se trata de entidades mentales que se introducen para distinguir los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos por medio de los cuales se conciben. Con la expresión "imagen conceptual se describe la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados" (Tall y Vinner, 1981, p. 152).

Vemos que los autores citados se apoyan básicamente en la dualidad representación interna y externa para describir los conocimientos y habilidades matemáticas de los sujetos enfrentados a tareas matemáticas.

Consideramos que estas nociones son insuficientes para el estudio de los problemas de enseñanza y aprendizaje de tareas que requieren visualización y razonamiento espacial, y de modo más general las cuestiones de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar, al centrar la atención básicamente en la faceta o dimensión cognitiva. Incluso el estudio de dicha faceta queda frecuentemente restringida a la dialéctica entre los ostensivos visuales y sus correspondientes representaciones internas o mentales[3].

Clement y Battista (1992) describen la geometría escolar como el “estudio de los objetos espaciales, relaciones, y transformaciones que han sido formalizadas (o matematizadas) y los sistemas axiomáticos matemáticos que se han construido para representarlos. En cambio, el razonamiento espacial consiste en el conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan representaciones, relaciones y transformaciones mentales de los objetos espaciales” (p. 420).

En esta descripción se mencionan objetos de naturaleza bien diferente como ingredientes que constituyen la geometría escolar. Por una parte están los objetos espaciales, que se deben entender como los cuerpos físicos que nos rodean, sus posiciones en el espacio físico; por otra, se mencionan las representaciones mentales de tales objetos, relaciones y transformaciones (entidades psicológicas); y finalmente, los sistemas axiomáticos matemáticos (entidades institucionales o culturales) que se han construido para representar los objetos físicos (y los mentales).

En este trabajo vamos a explorar la variedad de objetos y conocimientos que se ponen en juego ante tareas que requieren visualización y razonamiento espacial usando las

[3] El trabajo de Gorgorió (1998) centra la atención en identificar estrategias cognitivas, tanto visuales como no visuales, en tareas espaciales que requieren rotaciones de los cuerpos o figuras.

herramientas teóricas que Godino y colaboradores vienen desarrollando desde hace varios años, y que describen como "Enfoque Ontosemiótico" (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; 1998; Godino 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005; Godino, Batanero y Roa, 2005; Godino, Batanero y Font, 2006)[4].

Consideramos que esta aproximación puede complementar las aportaciones realizadas desde otras perspectivas teóricas. En el EOS se introducen categorías de objetos que ayudan a distinguir entre las entidades mentales (objetos personales), y las institucionales (sociales o culturales). Además la matemática se concibe desde tres puntos de vista complementarios: como actividad de solución de problemas (extra o intramatemáticos), lenguaje y sistema conceptual socialmente compartido.

El EOS puede aportar un punto de vista complementario para abordar cuestiones tales como:

- ¿Qué diversidad de conocimientos se ponen en juego en la realización de tareas de visualización y razonamiento espacial?
- ¿Porqué ciertas tareas que requieren visualización y razonamiento espacial presentan una dificultad elevada para determinados estudiantes?
- ¿Cómo diseñar procesos de estudio de tareas de visualización que ayuden al desarrollo del razonamiento espacial?

En las secciones 3 y 4 de este trabajo vamos a tratar de avanzar algunas respuestas a estas cuestiones usando datos experimentales de un proyecto de investigación en curso, completando el análisis realizado en trabajos previos (Fernández, 2005). Comenzamos presentando una síntesis de las principales nociones teóricas introducidas en el Enfoque Ontosemiótico.

El modelo epistémico – cognitivo del eos

Los postulados o supuestos básicos del EOS se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. La matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-

[4] Trabajos disponibles en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/

problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas; dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. De los sistemas de prácticas realizadas para resolver los problemas emergen dos categorías primarias de entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales); de esta manera se asume que la matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizado. Se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional sino también instrumental o constitutiva de los objetos matemáticos.

Para hacer operativos estos principios el EOS propone como herramientas analíticas el par de nociones, "sistema de prácticas operativas y discursivas" y "configuración onto-semiótica", ambas en la doble versión personal e institucional. A continuación describimos brevemente estas nociones, además de la noción de función semiótica y los atributos contextuales[5], los cuales usaremos en el análisis de una tarea geométrica espacial.

Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas

En los trabajos sobre "significado institucional y personal de los objetos matemáticos" Godino y Batanero (1994; 1998) han introducido las nociones de práctica personal, sistema de prácticas personales y objeto personal como las herramientas útiles para el estudio de cognición matemática individual. De manera dual, el sistema de prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución I, y los objetos institucionales emergentes de tales sistemas se proponen como nociones útiles para describir la cognición en sentido institucional o epistémico. De estas nociones se derivan las de "significado de un objeto personal" y "significado de un objeto institucional", que se identifican con los sistemas de prácticas personales o institucionales, respectivamente. Estas nociones se propusieron con la finalidad de precisar y operativizar las nociones de "relación personal e institucional al objeto" introducidas por Chevallard (1992).

Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

[5] Remitimos al lector al trabajo de Godino, Batanero y Font (2006) para una síntesis más completa del EOS y ejemplos de aplicación.

En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos (que evocamos en la actividad matemática matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, acciones, definiciones, propiedades, argumentaciones).

Relaciones entre objetos: Función semiótica

Se adopta de Hjemslev (1943) la noción de función de signo[6] como la dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se trata, por tanto, de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un *antecedente* (expresión, significante, representante) y un *consecuente* (contenido o significado, representado), establecidas por un *sujeto* (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o *código de correspondencia*. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.

Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo *representacional* (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), *instrumental* u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y *estructural* (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada, tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación. El papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce (1996), se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentos), pueden ser también signos de otras entidades.

Configuraciones de objetos

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias: situaciones, acciones,

[6] Descrita por Eco (1979), como *función semiótica.*

lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando "configuraciones", definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

Atributos contextuales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein 1953) ocupa un lugar importante, junto con la de institución, como elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal- institucional, elemental-sistémico, expresión-contenido, ostensivo-no ostensivo y extensivo-intensivo (Godino, 2002). Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos.

En Godino, Batanero y Roa (2005) se describen los seis tipos de entidades primarias y los cinco tipos de dualidades cognitivas mediante ejemplos relativos al razonamiento combinatorio.

Una de las expectativas de nuestra investigación es que las herramientas EOS permitirán describir e interpretar los hechos cognitivos ligados a la solución de tareas de visualización desde una nueva perspectiva y, por tanto, ayudará a identificar nuevos fenómenos de carácter ontosemiótico y antropológico.

La visualización y el razonamiento espacial (VRE) serán interpretadas como unas prácticas matemáticas específicas, operativas y discursivas, que se ponen en juego ante determinados tipos de tareas. En tales sistemas de prácticas intervienen y emergen unos objetos matemáticos específicos (lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos) que caracterizan este campo de actividad; las redes formadas por tales objetos y las relaciones entre los mismos constituyen "configuraciones" mediante las cuales se describen los sistemas de prácticas.

Consideramos que la epistemología y ontología que propone el EOS puede ayudar a superar una visión parcial y sesgada hacia el cognitivismo en las investigaciones didácticas, según la cual el conocimiento matemático se reduce básicamente a conceptos y procedimientos, entendidos como entidades mentales. No se distingue el papel específico de las proposiciones y argumentaciones y, sobre todo, no se explicita el papel clave de las situaciones – problemas, como origen y razón de ser de tales entidades, cuya construcción está, además, mediada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles.

Configuración epistémica asociada a una tarea de visualización y razonamiento espacial

El objetivo de nuestra investigación es la evaluación de las habilidades de visualización y razonamiento espacial de los estudiantes de magisterio y el diseño, en una segunda fase, de trayectorias didácticas idóneas que favorezcan su desarrollo. Esto requiere, por tanto, la selección de tareas apropiadas a fin de construir un instrumento de evaluación y la elaboración de un banco de tareas para posteriores procesos instruccionales.

En esta sección vamos a realizar, a título de ejemplo, el análisis de los conocimientos (tipos de objetos y relaciones entre los mismos) puestos en juego en la resolución de una tarea por una sujeto ideal (experto). En el marco del EOS esto equivale a elaborar la configuración epistémica asociada a la resolución de dicha tarea. Esta configuración se usará como referencia para estudiar las configuraciones cognitivas de los sujetos y formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales.

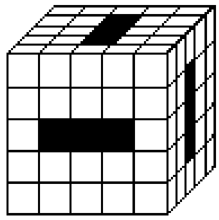
El análisis epistémico debe conducir a formular hipótesis sobre el comportamiento cognitivo de los sujetos, así como al diseño de trayectorias de estudio con alta idoneidad didáctica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

El análisis se realiza a dos niveles distintos y complementarios. En el primero se identifican los objetos y relaciones primarias (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos puestos en juego), lo que podemos describir como un análisis semántico. A continuación aplicamos los atributos contextuales (nivel pragmático).

Enunciado de la tarea: volumen de un cubo perforado

5. Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande como se indica en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?

a) 88 b) 80 c) 70 d) 96 e) 85



Solución experta

1) La forma de proceder será calcular el volumen total del cubo grande y restarle el volumen ocupado por los tres túneles.
2) Tomando el cubo pequeño como unidad, el volumen del cubo grande es 125 unidades (5 x 5 x 5 = 125)
3) El volumen de cada túnel (ortoedro) es 15 unidades (3 x 5 x 1 =15).
4) Sin embargo existen intersecciones entre los tres cubos, por lo que si restamos a 125 el volumen de los tres túneles, descontamos varias veces algunos cubos pequeños. Es necesario visualizar cuáles son esas intersecciones.
5) El primer túnel considerado requiere restar 15 unidades; el segundo 15 menos 3 que ya habían sido restados con el primer túnel, o sea, 15 – 3 =12.
6) El tercer túnel requiere restar 15 menos 3 que ya habían sido restados del primer túnel y otros 3 del segundo. Pero con este cálculo restamos dos veces el cubo intersección de los tres; luego para el tercer túnel hay que restar 15 – 3 – 3 + 1 = 10
7) Por tanto, el volumen de los tres túneles será, 15 + 12 + 10 = 37, y el volumen del cubo con los túneles será, 125 – 37 = 88.

Objetos y relaciones primarias

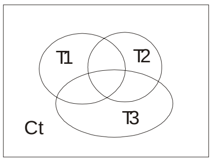
En la tabla 3.1 resumimos los objetos y relaciones primarias que intervienen en la solución de la tarea, tanto previos como emergentes.

Tabla 3.1: Objetos y relaciones primarias en el problema del cubo perforado

LENGUAJES:

Ordinario (Términos y expresiones):
túneles, atraviesan, cubos, "Se hacen túneles que atraviesan un cubo grande" , ortoedro, unidades, intersecciones

Gráfico (Icónico):
Dibujo de un cubo formado por 125 cubitos y tres túneles que lo atraviesan"



Simbólico (notaciones):
5 x 5 x 5 = 125
3 x 5 x 1 =15
15 – 3 =12
15 – 3 – 3 + 1 = 10
15 + 12 + 10 = 37
125 – 37 = 88

C = Ct ∪ (T1 ∪ T2 ∪ T3) – (T1∩T2) – (T1∩T3) – (T2∩T3) + (T1∩T2∩T3)

Expresa

Ayuda

SITUACIONES/ PROBLEMAS:
- Enunciado del problema y sus generalizaciones

Motivan

Resuelven

CONCEPTOS/ DEFINICIONES:
Previos:
- cubo; volumen; unidad de volumen; medida

Emergentes:
- volumen de un sólido perforado

PROPIEDADES/ PROPOSICIONES:
Previos:
- el volumen de un cubo se determina elevando al cubo la longitud de su arista.
- el volumen de cada túnel se calcula multiplicando su anchura por su profundidad.
- aditividad de la medida
-Número de elementos de la unión de conjuntos no disjuntos

Emergentes:

- En las condiciones del enunciado el volumen del sólido es 88

PROCEDIMIENTOS:
Operaciones aritméticas elementales (suma, resta y multiplicación)

Justifican

ARGUMENTOS:
El cubo grande está formado por 125 cubitos
Hay tres túneles, cada túnel ocupa 15 cubitos
Se producen intersecciones de los túneles dos a dos y entre los tres

Deductivo: Teniendo en cuenta el volumen de un cubo y el de un ortoedro, y las intersecciones de los túneles se deduce que el volumen del cubo perforado es de 88 unidades.

Objetos y relaciones secundarias

Realizamos a continuación un segundo nivel de análisis de la solución del problema aplicando los atributos contextuales.

Extensivo – Intensivo (particular – general):

La tarea se puede generalizar de diversas maneras. Se puede suponer que el cubo tiene una arista de longitud L unidades, dejando los túneles de igual ancho, o cambiándolos a una longitud de A unidades. Se puede pedir encontrar una fórmula general en función de L, conectando esta tarea geométrica con el álgebra. También podemos considerar túneles de anchura variable y no iguales entre sí.

Ostensivo – no ostensivo:

El enunciado de la tarea pone en juego un icono del cuerpo geométrico cuyo volumen se pide calcular. El cubo perforado es una entidad mental (si se considera desde el punto de vista de un sujeto individual) e ideal (si se considera desde el punto de vista institucional matemático); en ambos casos es una entidad no ostensiva.

¿Reconoce el sujeto los objetos no ostensivos implicados en la situación (cubo, ortoedros, intersecciones, volúmenes, medida, ...)?

La regla general que da la solución es una propiedad característica de ese cuerpo que, en sí misma, no es ostensiva, aunque se expresa de manera ostensiva con la escritura simbólica, 125 – 15 – 12 – 10 = 88.

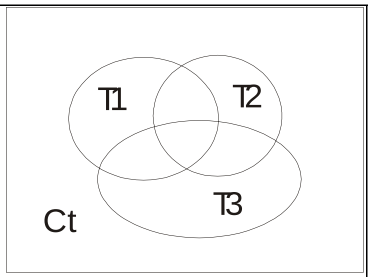
La visualización de las intersecciones de los túneles se puede favorecer mediante representaciones pictográficas. ¿Qué objetos ostensivos movilizan los sujetos enfrentados a esta tarea?

Unitario – sistémico:

Las nociones de cubo, ortoedro (túneles), y las fórmulas de cálculo de los volúmenes tienen un carácter unitario; son nociones previas que deben estar disponibles para el sujeto. En cambio el cubo perforado debe ser descompuesto en partes (forman un sistema). Si simbolizamos por Ct (cubo tunelado), C (cubo), T1, T2, T3 los tres túneles, el nuevo objeto emergente de esta situación se puede expresar con la siguiente operación conjuntista:

$$C = Ct \cup (T1 \cup T2 \cup T3) - (T1 \cap T2) - (T1 \cap T3) - (T2 \cap T3) + (T1 \cap T2 \cap T3)$$

Expresión – contenido (significante – significado)

El uso de representaciones conjuntistas y algebraicas puede ayudar a *visualizar* el problema y a generalizarlo. C = Ct ∪ (T1 ∪ T2 ∪ T3) – (T1∩T2) – (T1∩T3) – (T2∩T3) + (T1∩T2∩T3) La representación conjuntista refiere metafóricamente a los conjuntos de puntos interiores al cubo y a los túneles, así como a las operaciones realizadas.	

Configuración cognitiva: estudio de un caso

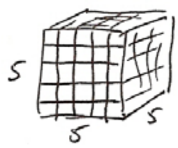
Solución de un estudiante a la tarea del cubo perforado

3- Empiezo contando el nº total de cubos: 5 × 5 = 25 × 5 = 125 cubos

De la cara frontal hay que restar 3 × 5 = 15

" lateral " 3 × 5 = 15

" superior " 3 × 5 = 15



En total = 125 – 45 = 80 cubos

La respuesta es la c)

Objetos y relaciones primarias

En la tabla 4.2 resumimos los objetos y relaciones primarias que ha puesto en juego SS en la solución de la tarea, tanto previos como emergentes.

Tabla 4.2: Configuración cognitiva de SS sobre el problema del cubo perforado

LENGUAJES:		SITUACIONES/ PROBLEMAS:
Ordinario (Términos y expresiones): Contar; número total de cubos, cara lateral, cara	Expresa	Problema del cubo perforado Motivan Resuelven

frontal, cara superior, túnel Gráfico (Icónico): Dibujo de un cubo formado por 125 cubitos		CONCEPTOS/ DEFINICIONES: Previos: - cubo; volumen, unidad de medida de volumen Emergentes: - Volumen de un sólido perforado
Simbólico (notaciones): Números y operaciones aritméticas 5x5=25x5 = 125 3x5 = 15 125 – 45= 80 c)	Ayuda	PROPIEDADES/ PROPOSICIONES: Previos: Propiedad asociativa de la multiplicación El volumen de cada túnel se calcula multiplicando su anchura por su profundidad. Aditividad de la medida Conservación del volumen Emergentes: - En las condiciones del enunciado el volumen del sólido es 80
		PROCEDIMIENTO: Operaciones aritméticas elementales Cálculo mental (15+15+15=45)
		Justifican
		ARGUMENTOS: El lado del cubo grande está formado por 5 cubitos. El número total de cubos es 125 El número de cubos de cada túnel es 15 El número de cubos de los tres túneles es 45 El número de cubos que queda es el total menos la suma de los tres túneles Quedan 80 cubos Deductivo (informal): El argumento es incorrecto al no tener en cuenta las condiciones del problema (intersecciones de los túneles)

Objetos y relaciones secundarias

Extensivo – Intensivo (particular – general):

La solución dada corresponde al caso en que los túneles no tuvieran intersecciones comunes, lo que podría ocurrir, pero no en el caso propuesto. No se perciben intentos de generalización en la respuesta de este estudiante, aunque tampoco se requieren.

El proceso seguido es deductivo (informal) sobre el caso particular, en este caso calculando el volumen del cubo y descontando los ortoedros sin tener en cuenta sus intersecciones. Por tanto, toda generalización que hipotéticamente pudiera hacer a un cubo de lado L y un túnel de arista A no le llevaría a una respuesta correcta.

El estudiante recuerda las reglas generales (definiciones) del volumen del cubo y los ortoedros y las aplica correctamente al caso particular dado.

La fórmula general para calcular el número total de cubos dada por la fórmula conjuntista que se propone en la configuración epistémica no forma parte de los conocimientos previos de los estudiantes.

Ostensivo – no ostensivo:

El estudiante utiliza un dibujo para señalar las dimensiones del cubo, no consiguiendo representar los túneles ni visualizar (lo que resulta esencial) las intersecciones. Su representación no ostensiva (mental) de la situación no tiene en cuenta que hay que descartar los cubos comunes a los tres túneles.

Las intersecciones de los túneles no son directamente visibles; es un caso de un objeto empírico no ostensivo. Hay intersecciones comunes dos a dos y entre los tres; la medida del tamaño de las intersecciones tiene que hacerse de manera indirecta, mediante razonamientos que expresen las relaciones entre las posiciones en que se hacen los túneles y sus dimensiones respectivas. Una justificación ostensiva (con lenguaje ordinario) de este tipo ciertamente es compleja. También se puede hacer una descripción ostensiva de las intersecciones mediante secciones planas del cuerpo realizadas en distintas posiciones, procedimiento que hemos encontrado en algunos estudiantes.

Unitario – sistémico:

El estudiante reconoce el cubo y el ortoedro como entidades unitarias a las cuales es capaz de atribuir un volumen, y hallar su medida. También sabe lo que es medir y la noción de unidad de medida. Pero el objeto “cubo perforado” es un sistema que hay que descomponer en sus elementos. No es suficiente con imaginar mentalmente (visualizar) que hay unas intersecciones comunes; hay que cuantificar (medir) el tamaño de un objeto no ostensivo, para lo cual hay que descomponerlo, “verlo” como un sistema formado de partes relacionadas de manera específica. Esta descomposición se puede apoyar mediante las secciones planas o reconociendo las circunstancias de aplicación de un teorema algebraico conjuntista.

Expresión – contenido (significante – significado)

La solución de la tarea requiere expresar las intersecciones de los túneles (objetos empíricos que aquí no son visibles) mediante un lenguaje (gráfico, secciones planas), conjuntista (solución experta), o con lenguaje ordinario. Esto permitirá determinar las medidas de tales intersecciones.

En el enunciado de la tarea la expresión “que atraviesan un cubo” tiene que ser interpretada por el lector con el apoyo parcial del dibujo, donde no se han representado “las salidas” de los túneles por las caras opuestas. Algunos sujetos a los que se ha propuesto esta tarea han pedido aclaración sobre si los túneles perforaban todo el cuerpo.

A pesar de que la tarea no ha sido resuelta correctamente el estudiante ha sabido interpretar una buena parte de la misma, atribuyendo significados a expresiones tales como, “túneles que atraviesan el cubo grande”, a términos como “cubos pequeños” como unidades de medida, y a la pregunta, ¿Cuántos cubos pequeños quedan?, como indicación de hallar la medida del cubo perforado. El significado atribuido a unidad de medida y a medida por parte del estudiante se encuentra a nivel operatorio y no discursivo como puede observarse en su respuesta.

Personal-institucional

Esta tarea ha resultado difícil para este estudiante. La información que tenemos sobre el marco institucional en que realiza sus estudios nos permite afirmar que esta tarea es “atípica” entre las que habitualmente se proponen en las clases de geometría recibidas. Tampoco se han propuesto actividades que requieran hacer secciones planas de sólidos, o intersecciones entre conjuntos, por lo que estos procedimientos no forman parte de su práctica matemática habitual.

En cuanto al uso, a nivel operatorio y no discursivo, del significado de medida y unidad de medida se puede decir que la tarea no lo requiere explícitamente. Es posible que el estudio de la aritmética no se haya conectado de manera explícita con el tema de magnitudes, de manera que el significado personal puede tener limitaciones sobre la noción de volumen y unidad de volumen.

Reflexiones finales

En este trabajo hemos aplicado dos niveles de análisis a una tarea geométrica, tanto a la solución experta (epistémica o institucional de referencia) como a la solución personal de un estudiante. En el primer nivel, que podemos designar como semántico, se identifican y articulan las entidades primarias (tipo de situación-problema, lenguajes utilizados, procedimientos, definiciones, proposiciones y argumentaciones) y un segundo nivel, de tipo pragmático, donde ponemos en juego los atributos o dualidades contextuales (extensivo – intensivo; ostensivo – no ostensivo; unitario – sistémico; expresión – contenido; personal – institucional).

La combinación de estos dos niveles de análisis aporta una herramienta potente para el estudio de los conocimientos matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas y su secuenciación en los procesos de instrucción matemática. La tradicional distinción curricular entre conocimientos conceptuales y procedimentales queda ampliada con la introducción explícita de las entidades proposicionales y argumentativas, así como con los elementos lingüísticos y situacionales. Todas estas entidades quedan articuladas mediante la noción de configuración (epistémica y cognitiva) en la que se tiene en cuenta los diferentes roles o relaciones entre las mismas.

Desde el punto de vista cognitivo, la tradicional distinción entre representaciones internas (imágenes conceptuales, concepciones, etc.) y representaciones externas (gráficos, notaciones, símbolos, modelos concretos, etc.) se amplía con las dualidades contextuales. Lo interno y externo es sustituido por dos dualidades: ostensivo – no ostensivo y personal – institucional. Esto quiere decir que el pensamiento no queda constreñido al ámbito de lo mental, sino que las instituciones también "piensan" (faceta no ostensiva de los objetos institucionales); de este modo los conceptos tienen una realidad mental (subjetiva) y también una realidad institucional (objetividad relativa). Tales entidades están apoyadas, de manera constitutiva, en las entidades lingüísticas, que vienen a ser su faceta ostensiva.

La introducción de la dualidad extensivo – intensivo, aplicada a la formulación de una tarea, nos lleva a pensar en sus potenciales generalizaciones y a explorar sus posibilidades generativas de nuevos conocimientos y conexiones matemáticas. Este análisis es de gran interés para el diseño de procesos de instrucción ya que permite tener en cuenta el progresivo crecimiento y articulación de las matemáticas. Desde el punto de vista de los significados personales la distinción entre lo particular y lo general (extensivo – intensivo), aplicado no sólo a las tareas, sino también a las restantes entidades ayuda a explicar los conflictos semióticos que potencialmente surgen con el uso de elementos genéricos en el trabajo matemático.

La dialéctica antiguo – nuevo (Duady, 1986), los procesos de reificación (Sfard, 1991), la disponibilidad de los conocimientos previos necesarios para afrontar una tarea, en definitiva el carácter sistémico y recursivo del conocimiento matemático pueden ser descrito mediante la dualidad contextual que el EOS designa como *unitario – sistémico*, así mismo aplicable a los distintos tipos de entidades primarias.

El EOS asume una semiótica Peirceana de tipo triádico (expresión, contenido, criterio de correspondencia) donde los tipos de objetos que pueden ocupar cada una de las tres posiciones en el signo triádico pueden ser no sólo las entidades lingüísticas ostensivas, sino cualquiera de las restantes. Además, el tipo de relación entre expresión y contenido no se reduce al representacional (semiótico en un sentido estricto), sino el objeto antecedente tiene además una valencia instrumental. Con los gráficos, los modelos concretos no sólo se evocan las entidades conceptuales correspondientes, sino que también permiten la exploración y obtención de nuevos conocimientos.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualisation in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1): 7-16.

Clements, D. H. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 161- 2004). NCTM, Macmillan, P. C.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1): 73-112.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151–186.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Fernández, T (2005). Incidencia de los conocimientos geométricos en la mejora de la percepción espacial. En B. Gómez, M. J. González, M. Moreno, P. Bolea, P. Flores y M. Camacho (eds.) *IX Simposio de la SEIEM*. Servicio de Publicaciones de Cantabria. Universidad de Cantabria.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En, A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1): 3-36.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font. V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1): 39-88.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems, *Educational Studies in Mathematics* 35, pp. 207-231

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (1, pp. 3-19), Valencia.

Hershkowithz, R., Parzysz, B. y Dormolen, J. Van (1996). Space and shape. En, A. J. Bishop et al. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 161-201). Kluwer A. P.

Lean, G. A., Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery and mathematical Performance. *Educational Studies in Mathematics* 12 (1), 1–33.

Peirce, C. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987

Presmeg, N. C. (1998). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3): 42-46.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22: 1-36.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2): 151-169.