

# CARACTERÍSTICAS Y FACTORES INCIDENTES EN LA ESTIMACIÓN MÉTRICA LONGITUDINAL

**Josep Callís i Franco (UdG) - M. Luisa Fiol Mora (UAB)**

## **Resumen**

*Tres son los objetivos de la investigación: a) detectar los procedimientos, recursos y estrategias que se aplican en la estimación métrica, su utilización y nivel de precisión, b) analizar cómo se organizan y se generan estas estructuras mentales estimativas y c) plantear un enfoque didáctico que mejore su aprendizaje. Los resultados evidencian la educabilidad de la estimación métrica; el poco dominio que se tiene de ella y la insignificante incidencia de la educación formal en este aprendizaje; la casi nula correlación de las variables analizadas respecto a este dominio y que la capacidad en la estimación longitudinal rectilínea no incide en la mejora de la curvilínea, la cual necesita de procedimientos, recursos y estrategias diferentes. Se destaca la importancia de la visualización, manipulación y transformación de imágenes mentales como base del poder estimativo y para los procedimientos de transformación geométrica como la rectificación, la cuadratura y la curvalización.*

## **Abstract**

This research has three objectives: a) to detect the procedures, resources and strategies that are applied on metric estimation ability, analysing how often they are utilised and how efficient or precise they are; b) to study how the mental structures about estimation are organised and generated; and c) to reflect on the teaching approaches that should be taken into account in order to improve learning in this area. The results demonstrated that metric estimation is teachable; and that the skills and abilities we have are rather small; the results show there is an insignificant amount of time spent on learning metric estimation in formal education and an almost zero correlation with the variables (sex, age, education, cultural environment) we analysed with respect to this skill. Skills in making estimates of longitudinal measurements do not imply an improvement in making estimates of curvilinear measurements which requires procedures, resources and different strategies. The most important of which are the need to be able to visualise, manipulate and transform mental images as a basis for being able to estimate. This, in its turn, enables one to acquire the procedures of geometric transformation such as rectification, quadrature and curvilinearity.

## **1. Introducción**

El presente trabajo es una síntesis de la investigación realizada en la UAB y la UdG sobre las características y factores incidentes en la estimación métrica longitudinal.

El interés existente por el aprendizaje de la medida se ha puesto de manifiesto tanto en los currículos de la mayoría de países como en la mayoría de investigaciones sobre las capacidades matemáticas de la sociedad (NCTM, 1980; Informe Cockcroft, 1982; COPIRELEM, 1982; National Science Board, 1983; ICMI, 1986) debido a que su adquisición posibilita a la persona a:

- Integrarse como ciudadano en el contexto específico en que vive
- Integrarse en las raíces culturales de su cultura específica y su historia
- Dominar y comprender una gran diversidad de ámbitos matemáticos
- Capacitarse en el dominio de estrategias mentales
- Integrarse en el mundo de la tecnología y del trabajo.

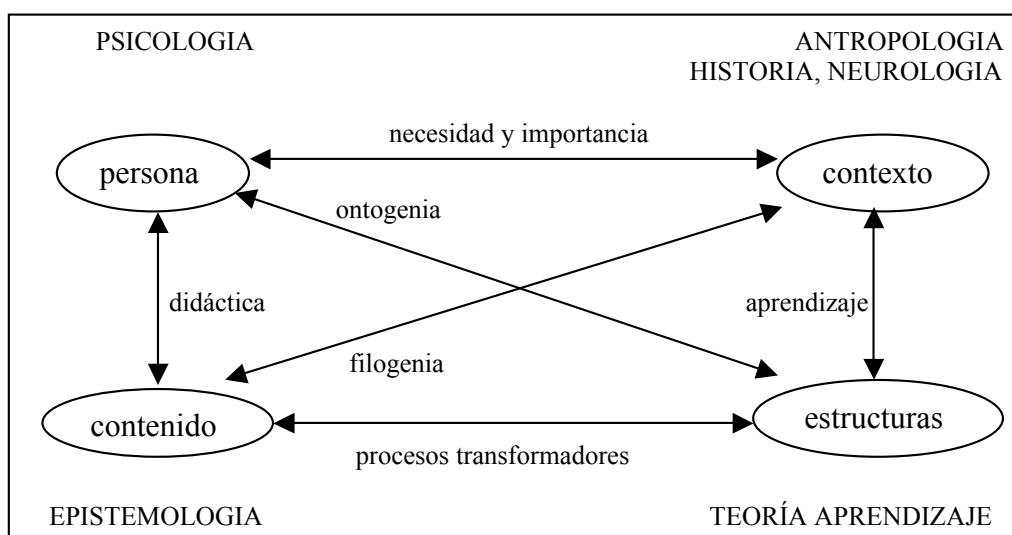
## 2. Objetivos

Los objetivos sobre la investigación de la capacidad estimativa métrica son :

- detectar los procedimientos, recursos y estrategias que se utilizan en la estimación métrica longitudinal.
- valorar su incidencia o grado de utilización y su eficacia o nivel de precisión.
- analizar cómo se organizan y generan las estructuras mentales estimativas.
- determinar la incidencia de determinadas variables en dicho dominio.
- proponer un enfoque didáctico que permita mejorar su aprendizaje.

## 3. Fundamentación teórica

Partiendo del hecho de que el aprendizaje es un proceso de interiorización multifactorial en el que confluyen una dinámica de cambio que actúa sobre cuatro elementos: persona, contexto, contenido y estructura mental, puede entenderse que en él se generan una serie de interrelaciones biunívocas que actúan como los factores dinámicos determinantes del aprendizaje de la estimación métrica.



Las interdependencias entre causas o acciones y efectos o cambios producidos, han sido el fundamento del marco teórico, el cual se centra en:

a.- *Importancia y necesidad de la medida.* Justifica la importancia del dominio y aprendizaje de la medida a partir de las investigaciones del National Council of Teachers of Mathematics, del National Science Board, el Informe Cockcroft y el ICMI 86.

b.- *Epistemología de la medida.* Enfoca los diferentes conceptos implicados en la medida, desde Heron, pasando por N. Campbell, D'Hombres, H. Lebesgue, L. Felix, A. Kolmogorov, B. Ellis, y por J. Mosterin, I. Lakatos y K. Wartofsky .

c.- *El dominio de la medida.* Analiza los niveles que configuran su capacidad y su relación con el dominio del espacio (J. Piaget, C. Chamorro, C. Alsina, J.M. Fortuny ).

d.- *Adquisición y estructuración del aprendizaje.* Analiza cómo se efectúa la adquisición del conocimiento y en especial la de los procesos intuitivos con atención especial en la intuición métrica (Platón, Aristóteles, Descartes, Kant, Piaget, Lovel, Diennes, Brunner, Vigostki, Chomsky, Cassirer, D. Ausubel ).

e.- *La adquisición de la capacidad estimativa.* Acerca a los procesos implícitos del aprendizaje de la estimación y su interrelación con la inteligencia, memoria, percepción y neurología (H. Gardner, Stemberg, E. Resnick; M. Johnson, P. Golman, S. Zeki, Kunnapas, R. Arnheim, P. Rainer; W. Zimmermann; R. Guski, U. Neisser ).

f.- *Estimación y educación matemática*: Analiza la importancia de la estimación como capacitación matemática y en especial en el caso de la estimación métrica (L. Rico, I. Segovia, B. Reys ).

g.- *La evolución antropológica de la medida*. Analiza la evolución filogénica de la medida hasta nuestros días (Euclides, R. Corant y H. Robbins, C. Boyer, G.; C. Alsina )

h.- *Génesis y adquisición de la medida*. Trata del proceso genético de su adquisición y de los factores lógico-matemáticos implícitos en su dominio (Piaget, Lovel, Diennes, J. Rogalsky, F. Vecino ).

i.- *Espirales y sinoidales*: Valora la importancia de la línea recta y de las curvas y la necesidad de su dominio y estudio (P. Stevens, I. Assimov, M. Ghyka )

j.- *Procedimientos transformadores*. Aproximación histórica a la filogenia de la medida prestando atención a los procesos de rectificación, cuadratura, curvalización y cubicaje (Euclides, Corant&Robbins, Boyer, Gherverghese, J. Pla i Carrera ).

#### **4. Planificación y Diseño de la Investigación**

##### **4.1. Las hipótesis**

La investigación nace de un doble supuesto previo:

- a.- El alumnado recibe una formación cíclica sobre la medida a lo largo de toda su escolarización y, a menudo, presenta muchas dificultades en su aplicación y uso cotidiano. Cabe suponer que la adquisición de la capacidad estimativa se adquiere más por la incidencia del entorno que por la formación académica.
- b.- probablemente la posesión de un cierto dominio estimativo métrico longitudinal rectilíneo posibilita la capacitación en la adquisición de la estimación curvilínea.

Los interrogantes nacidos de los supuestos anteriores se estructuran sobre la base de una hipótesis general y unas hipótesis parciales o derivadas.

##### a. Hipótesis general

- *El dominio de la estimación métrica de longitudes rectilíneas y curvilíneas supone un aprendizaje muy complejo del dominio de la medida, obligando a utilizar estrategias, recursos y procedimientos que de otra forma o bien no se desarrollan o lo hacen de manera muy poco significativa*

La estimación métrica curvilínea necesitará de procedimientos, recursos y estrategias diferentes de la estimación rectilínea. Su adquisición, dejada exclusivamente en manos de la necesidad del entorno, generará niveles muy diferenciados de conocimientos y por lo tanto el dominio será muy diferente e integrado en estadios evolutivos de dicho aprendizaje (Callís, 1992); evolución que reproducirá, en cierta forma el aprendizaje filogénico de la medida (Kula, 1980).

##### b. Hipótesis parciales o derivadas

b.1- La capacidad estimativa métrica dependerá del estadio evolutivo de la medida en el que se encuentre la persona; dominio que vendrá determinado, probablemente, por unas fases ontogénicas semejantes a las existentes en la evolución filogénica de la medida y también por la tipología de la estimación (rectilínea, curvilínea, longitudinal, superficial, etc.)

b.2 - Los aprendizajes formales sobre la medida no capacitan, generalmente, para la estimación y, al contrario, sí lo hacen los aprendizajes no formales producto de la necesidad. Las diferencias de tipo académico no tendrán, probablemente, incidencia en la capacidad estimativa pero sí producirán diferencias significativas las de tipo etnomatemático (cultura, profesión, vivencias personales, actividades lúdicas, juego...).

b.3 - La rectificación debido a que necesita de una capacidad de representación mental mucho más compleja que la sobreposición dado que implica manipular y transformar las imágenes visualizadas, proceso innecesario en la sobreposición, tendrá un uso más reducido y un dominio con menor precisión.

b.4 - El dominio estimativo de longitudes rectilíneas aunque necesite de procedimientos, recursos y estrategias distintas a la curvilínea, probablemente, capacita y mejora la estimación métrica de las longitudes curvilíneas.

b.5 - El dominio estimativo de longitudes curvilíneas necesita de una estrategia de aprendizaje y una ingeniería didáctica específica y distinta del aprendizaje de la capacidad métrica rectilínea.

#### **4.2. Las técnicas de análisis y las muestras**

La investigación se llevó a cabo aplicando análisis cuantitativos y cualitativos de manera conjunta y complementaria. La detección de efectos se efectuó a partir del test EM (Estimación Métrica) constituido por cuatro ítems que enfocan, respectivamente, la estimación en un contexto rectilíneo, en onduladas, en circunferencias y en espirales. En cada caso, los sujetos de la muestra deben estimar la longitud de las cuatro o cinco formas que se le presentan en cada ítem y en donde, a excepción de las circunferencias, dos de las formas que se presentan tienen la misma longitud aunque se presentan con modificaciones perceptuales (posición en el espacio: horizontal-vertical o bien diferenciación de su concentración o amplitud diametral sobre el plano)

El desarrollo de la investigación se efectuó atendiendo a tres niveles de incidencia:

- *Investigación Piloto.* A partir de la aplicación de un test de estimación métrica pasado a un grupo de 25 alumnos de primaria, se pretendía detectar algunos de los factores determinantes de la estimación. Entre ellos aparece la problemática de la estimación curvilínea.
- *Investigación Base.* Centra la investigación en la estimación métrica de longitudes rectilíneas y curvilíneas. Se trabaja a partir de un análisis cuantitativo, efectuado a 181 personas, con el objetivo de determinar la eficacia y precisión estimativa y cómo inciden en ella determinadas variables (género, edad, formación y contexto ambiental o cultural). Los resultados permiten ver el perfil normalizado de la capacidad de estimación métrica de la mayoría de población adulta al finalizar sus estudios académicos y la incidencia de la variedad de formación previa (letras, letras mixtas, ciencias mixtas, ciencias, formación profesional, mayores de 25 años) y con habilidades diferenciadas. El alumnado de Magisterio era el grupo universitario que mejor se adecuaba a las premisas ya que cumple la variedad formativa a la vez que diversificación por intereses o por habilidades (musical, educación física, lenguas, primaria,...); de manera que dicho grupo será el grupo control (GC) materializado en 108 estudiantes de Girona. A la vez se necesitaba, para detectar la influencia de otras variables que se quería analizar (edad, formación y contexto cultural) de muestras complementarias o experimentales para poder contrastar sus resultados respecto a la muestra control. De ahí la existencia de un grupo experimental de primaria (GEP) integrada por 36 alumnos pertenecientes a dos escuelas distintas y a la vez, también de niveles distintos (cuarto y sexto); y, además una muestra GES, formada por 37 educadores populares de la comunidad Segundo Montes de El Salvador.

Para determinar los procesos mentales que efectuaban y los factores que incidían en ello se efectuó un análisis cualitativo de sus comentarios.

- *Investigación Selectiva*. Integrada por 17 personas con una buena capacidad estimativa, seleccionadas de entre los diferentes grupos de la muestra base. El estudio de casos junto con el análisis cuantitativo, permite contrastar sus resultados respecto a los valores de la investigación base y a la vez profundizar en las estructuras mentales implícitas que se aplican en el acto estimativo.

## 5. Síntesis de conclusiones

Los resultados de la investigación ponen en evidencia entre otros aspectos:

- la casi nula correlación de las variables analizadas respecto a la capacitación en la estimación métrica. La capacidad de estimación métrica viene determinada por la vivencia efectuada y la necesidad vital que se deriva de ello y no por pertenecer a un grupo social determinado.
- la estimación métrica curvilínea sigue un proceso de adquisición diferenciado del rectilíneo de manera que se necesitan procedimientos, recursos y estrategias diferentes a la rectilínea.
- la necesidad de la visualización y la manipulación o transformación de imágenes mentales como base del poder estimativo que capacita, a la vez, para la adquisición de procedimientos de transformación geométrica (rectificación, curvalización cuadratura ...)
- la importancia de la intuición matemática, en este caso, de la intuición métrica, como estadio de máximo nivel de evolución y de dominio matemático. Aprendizaje que se sitúa por encima de los procesos inductivos y deductivos, dominio que debe ser potenciado como objetivo último del desarrollo de la educación matemática.

Sintetizando otros factores, también hay que destacar:

- La precisión estimativa es independiente de la tipología de unidades utilizadas.
- El dominio y precisión en la estimación de circunferencias capacita para las estimaciones de otras formas curvas.
- Dominar procedimientos, recursos y estrategias diversas de medición, ayuda a la mejora estimativa.
- La formación cultural y la conciencia moral estimulan la estimación por defecto.
- La verticalidad y la concentración reducen la percepción de las medidas.
- La estimación por defecto mejora la aproximación en las rectilíneas y la efectuada por exceso en las formas curvas.
- El metro resulta la unidad nuclear más utilizada.
- El uso y la capacidad de poder fraccionar el metro mejora la precisión.
- El uso de unidades tradicionales produce una relativa mejora estimativa.

## 6. Direccionalidad didáctica para el aprendizaje de la capacidad estimativa

Toda investigación de ámbito didáctico se enfrenta con la dicotomía existente entre teoría y pragmatismo o el valor de la pura investigación y la teoría que se configura con ello y la repercusión o aplicación práctica que se deriva. Pensamos que el aspecto práctico de la incidencia a la realidad educativa no puede excluirse y consecuentemente a partir de las conclusiones reseñadas cabe estructurar un proceso de adquisición que debe tener su fundamento en el diseño de actividades y propuestas que permitan:

- a. Validar el significado e integración de la estimación métrica en la realidad.
- b. Planteamientos de resolución múltiple y abierta que posibilite el uso de recursos, procedimientos y estrategias diversas y diferentes.

- c. Presentaciones que contrasten diferenciaciones perceptuales (posición en el espacio, grado de concentración del diámetro, modificación de perfiles perimetrales, diversidad de grosores, inclusión de distorsionantes perceptuales, ilusiones ópticas ... ) y siempre con la posibilidad de la reversibilidad de acción.
- d. Adecuarse secuencialmente a la evolución ontogénica y filogénica de la medida para permitir evolucionar de la comparación a la adquisición de la unidad objetiva.
- e. Generar y crear sistemas métricos (antropométricos, objetales o de cualquier tipo).
- f. Conocer las medidas tradicionales del propio entorno y su utilidad, relacionándolo con el SIM.
- g. Potenciar la adquisición de la capacidad estimativa y aproximativa (situaciones en donde la resolución por estimación sea la mejor opción resolutoria; capacitar en el dominio del lenguaje implícito de la estimación; saber aplicar la estimación pertinente y el grado de precisión adecuado en situaciones diferenciales; trabajar sobreestimaciones y subestimaciones y aproximaciones por defecto y por exceso; saber ajustar y perfeccionar estimaciones y aproximaciones hechas en unos contextos determinados o bien valorar la razonabilidad de las estimaciones presentadas,...)
- h. Trabajar la estimación de las curvas.
- i. Potenciar la representación mental (establecer la máxima cantidad posible de relaciones perceptivas con actividades de revisualización enactiva, icónica y verbal; hacer conscientes los procedimientos, recursos y estrategias que cada uno utiliza; ampliar la relación del metro con las unidades antropométricas, objetales y magnitudinales; valoraciones comparativas de longitudes poco diferenciables; estimular el uso de la rectificación y de la cuadratura como objetivo básico en determinadas actividades).
- j. Desarrollar capacidades analíticas de composición y descomposición (actividades con formas que permitan descubrir en ella, elementos que actúen o puedan actuar de unidades estructurales o bien conceptuales; trabajar la igualdad comparativa tanto la aditiva como la substractiva; medir una magnitud a través de medidas indirectas o de relaciones intermagnitudinales (control de tiempo para la longitud manteniendo velocidad o ritmo,...); establecer criterios de interrelación y equivalencia métrica entre diferentes unidades y sistemas.

## **7. Líneas de investigación abiertas**

Entre los muchos y nuevos interrogantes abiertos pueden destacarse, entre otros:

- ¿Cuáles son los subprocesos mentales que estructuran la adquisición de los procedimientos, recursos y estrategias de la capacidad estimativa?
- ¿Hasta qué punto es necesaria y imprescindible la interiorización de las unidades antropométricas para poder evolucionar en la capacitación estimativa?
- ¿Qué relación existe o puede existir entre las primeras adquisiciones numéricas y las primeras adquisiciones estimativas?. ¿Cómo se interrelacionan y influyen?.
- ¿Existe alguna relación y interdependencia entre la capacidad expresiva y la intuición estimativa métrica?.
- ¿Cómo se estructura la adquisición de la rectificación y la curvalización y qué interdependencias se producen entre ellas?.
- ¿Qué incidencia tiene el dominio algorítmico sobre la capacidad estimativa y cómo se produce dicha relación?
- ¿Qué relación existe entre la capacidad de rectificación unidimensional con la cuadratura del plano o el cubicaje en el espacio?.

- ¿Existe relación entre la capacidad de estimación métrica longitudinal con la estimación superficial o la estimación espacial?.

## 8. Bibliografía

- **Callís, J.** (1997) – *Aprenentatge de la Mesura: la vivenciació com a procediment*. Perspectiva Escolar: Les Matemàtiques a Primària, 211(37-47). Rosa Sensat. Barcelona.
- **Callís, J.** (1998) – *Dominio y estrategias en la aplicación de medidas longitudinales que tienen y aplican los educadores populares de la comunidad de Segundo Montes (El Salvador)*. A Oliveras, M.L. y otros: Etnomatemáticas y Educación Matemática. Construyendo un futuro equitativo. 1er Congreso Mundial Etnomatemático. Sevilla.
- **Callís, J.** (2002) – Estimació de mesures longitudinals rectilínies y curvilínies. Procediments, recursos i estratègies. Tesis Doctoral. Dep. Didáctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals.UAB. Bellaterra. <http://www.tdx.cesca.es/TDCat-0224103-185956/>
- **Campbell, N.** (1974) – *La medición*. En: Newman, J.R.: La forma del pensamiento matemático. Grijalbo S.A. Barcelona.
- **Carpenter, T.P.; Osborne, A.R.** (1976) – *Needed Research on Teaching and Learning Measure*. RIC/SMEAC Center, Ohio State University. En: Lesch, R.A. (ed.): Number and Measurement. Papers for a Research Workshop. Ohio.
- **Chamorro, M.C.** (1995) – Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental. Tesis Doctoral. UNED. Madrid.
- **Dickson, L.; Brown, M. & Gibson, O.** (1984): Children Learning Mathematics. A *Teacher's Guide to Recent Research*. Holt, Rinehart and Winston. Oxford.
- **Fiol, M.L.** (1992) – Marco de desarrollo del razonamiento proporcional en alumnos de 12 a 14 años: visualización y computación. Tesis Doctoral. UAB. Barcelona.
- **Fiol, M.L.; Fortuny, J.M.** (1990) – Proporcionalidad directa. La forma y el número. Síntesis. Madrid.
- **Freudenthal, H.** (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht. D. Reidel.
- **Hiebert, J.** (1981) – *Cognitive development and linear measurement*. Journal for Research in Mathematics Education (197-211).
- **Kula, W.** (1980) – Las medidas y los hombres. Siglo XXI. Madrid.
- **Penalva, C., Torregrosa, G. y Valls, J.** (coord.) (2002) – Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a Diferentes Perfiles Profesionales. Universidad de Alicante. Alicante.
- **Piaget, J.; Inhelder, B.; Szeminska, A.** (1960) – The Child's Conception of Geometry. Routledge and Keagan Paul. Londres.
- **Reys, B.** (1984) – *Mental Computation Estimation: Past, Present and Future*. The Elementary School Journal (v.5)
- **Segovia, I; Castro, E.; Castro En; Rico, L.** (1989) – Estimación en cálculo y medida. Síntesis. Madrid.
- **Zeki, S.** (1992) – La imagen visual en la mente y el cerebro. Investigación y Ciencia. Barcelona.