

TRABAJO DE INVESTIGACION

“Aportaciones a la investigación sobre la estructura cognitiva de los alumnos a través de Redes Pathfinder.
Un estudio exploratorio en Geometría.”

Presentado por:

D. Luis M. Casas García

Trabajo dirigido por el Profesor Tutor: Dr. D. Ricardo Luengo González, dentro del

Programa de Doctorado: “Formación del Profesorado”

Badajoz, Mayo de 2.001

INDICE

=====

CAPÍTULO 1.

INTRODUCCION.

CAPÍTULO 2

ESTADO DE LA CUESTION: EL CONOCIMIENTO Y SU REPRESENTACION

- 2.1. La organización del conocimiento.
- 2.2. La estructura cognitiva.
- 2.3. Técnicas para hacer explícita la estructura cognitiva.
 - 2.3.1.- Listas de palabras.
 - 2.3.2.- Puntuación de similaridad.
 - 2.3.3.- Establecimiento por el sujeto.
- 2.4. Técnicas para representar la estructura cognitiva.
 - 2.4.1.- Tests Verbales.
 - 2.4.2.- Técnica de Arboles Ordenados.
 - 2.4.3.- Mapas cognitivos.
 - 2.4.4.- Mapas conceptuales.
 - 2.4.5.- Redes Asociativas Pathfinder.

CAPÍTULO 3

LAS REDES ASOCIATIVAS PATHFINDER

- 3.1. Las Redes Asociativas Pathfinder.
- 3.2. Construcción de Redes Asociativas Pathfinder
- 3.3. El Programa KNOT.
 - 3.3.1. El trabajo con el programa Knot.
 - 3.3.2. Funciones avanzadas con el programa KNOT.
- 3.4. Aplicaciones de las Redes Asociativas Pathfinder.
 - 3.4.1. Aplicaciones en investigación básica.
 - 3.4.2. Investigación aplicada a la formación del profesorado
 - 3.4.3. Aplicaciones al diseño de productos hipermedia.

CAPÍTULO 4

EL ESTUDIO EXPLORATORIO

4.1. El Problema planteado. Pretensiones.

4.1.1. El objeto de investigación.

4.1.2. El problema metodológico.

4.2 El tema objeto de estudio: El concepto de ángulo.

4.2.1. El tratamiento del concepto de ángulo: definiciones, ejemplos y práctica educativa.

4.2.1.1. La definición del concepto de ángulo.

4.2.1.2. Los ejemplos.

4.2.1.3. La práctica educativa: los libros de texto.

4.2.2. Las dificultades de los alumnos.

4.2.3. Conclusión: el problema de enseñanza y el problema de investigación.

4.3 Diseño de la investigación.

4.3.1. Supuestos de Partida y condiciones de contorno.

4.3.2. Objetivos.

4.3.3. Hipótesis de trabajo.

4.3.4. Fases y Metodología

4.3.4.1. Selección de la muestra.

4.3.4.2. Instrumentos de obtención de datos. Pathfinder e Índice de Complejidad de Redes.

4.3.4.3. Selección de conceptos a estudiar en la prueba.

4.3.4.4. Estudio de accesibilidad.

4.3.4.5. Aplicación de la prueba.

4.3.4.6. Análisis de los resultados.

4.4. Proceso de la investigación.

4.4.1. Muestra elegida.

4.4.2. Instrumentos de obtencion de datos.

4.4.3. Conceptos seleccionados.

4.4.4. Realización de la prueba de accesibilidad.

4.4.5. Aplicación definitiva de los valores de proximidad.

- 4.5. Resultados obtenidos.
- 4.6. Análisis de los resultados.
 - 4.6.1.- Estructura jerárquica de las redes.
 - 4.6.2.- Complejidad de las redes.
- 4.7. Alcance de los resultados y limitaciones.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

- 5.1 Conclusiones y aportaciones más significativas.
- 5.2 Problemas abiertos y sugerencias para nuevas investigaciones.

REFERENCIAS

Referencias bibliográficas y direcciones web utilizadas y aludidas en el trabajo.

ANEXOS

Gráficas de los alumnos.

Capítulo 1

CAPITULO 1

INTRODUCCION

Este trabajo de investigación pretende ser una aportación al conocimiento del estado y evolución de la estructura cognitiva de los alumnos en lo que se refiere al concepto matemático de ángulo.

Para la recogida y presentación de los datos utiliza como técnica las Redes Asociativas Pathfinder, que ofrecen una presentación en forma de red de la organización de los conceptos en la mente del alumno. Nos ayudaremos, además, de un Índice de Complejidad que hemos creado y que permite un análisis de tipo cuantitativo de las representaciones obtenidas.

Planteamos un trabajo que se inscribe en el ámbito general de la representación del conocimiento, campo que, en nuestra opinión es de gran actualidad e interés científico. Así nos lo indica el creciente número de investigaciones que se están realizando, desgraciadamente no muy difundidas en nuestro ámbito cultural, y los prometedores resultados obtenidos, que tienen sus aplicaciones más inmediatas en campos que van desde la Inteligencia Artificial hasta el diseño de software.

Pero si resulta interesante en campos tales como los que mencionamos, y en otros relacionados con la investigación básica en Psicología, debemos señalar que, en nuestra opinión, se abre además una prometedora vía de trabajo para la investigación y la práctica educativa.

En efecto, si consideramos que el conocimiento de lo que un alumno previamente sabe es la base para todo el desarrollo posterior de su instrucción, disponer de métodos que permitan conocer la estructura cognitiva del alumno puede resultar de una innegable utilidad. Creemos que nuestro trabajo puede ser una aportación en esta línea.

Con respecto al tema concreto de investigación, la estructura cognitiva referente al concepto de ángulo, nos ha impulsado a su elección el hecho de que, aun siendo un tema en apariencia muy simple, hemos observado en nuestra práctica educativa que encierra en el fondo una gran complejidad.

Como expondremos más adelante, se trata, en efecto, de un concepto fundamental en Matemáticas, a cuya enseñanza, en nuestra opinión, no se le ha dado toda la importancia que merece.

Baste indicar que el alumno no llega a adquirir y dominar este concepto sino tras un proceso de distintas aproximaciones parciales y multiformes a lo largo de toda su escolaridad.

De las diferentes aproximaciones que pueden hacerse del concepto de ángulo puede darnos una cierta idea la propia dificultad que encierra dar una definición de dicho concepto: ángulo como figura plana, ángulo como par de líneas o ángulo como cantidad de giro, son distintas ideas implicadas en las varias definiciones que se dan de un concepto tan simple en apariencia.

De igual manera, las distintas aproximaciones a que hacemos referencia se hacen patentes en el distinto tratamiento que le dan los libros de texto, algunas veces poco congruentes, pues puede darse el caso de que hagan de definiciones de un determinado tipo, mientras utilizan ejemplos que no corresponden con las definiciones o ejercicios que no corresponden ni con los ejemplos ni con las definiciones.

El proceso de adquisición del concepto de ángulo no está, pues, exento de errores, que se siguen conservando en adultos incluso con una formación matemática superior, tal como nos apuntan los resultados de una investigación que actualmente mantenemos en curso.

Si, como hemos indicado, consideramos interesante el conocimiento de la estructura cognitiva referente al concepto de ángulo, el problema de investigación que se nos plantea en este área es que no se dispone de herramientas de fácil manejo que permitan acceder a dicho conocimiento.

Han sido empleadas diversas técnicas para estudiar la estructura cognitiva del alumno. Entre ellas podemos mencionar el uso de cuestionarios, protocolos de pensamiento en voz alta, entrevistas a profesores y alumnos, mapas conceptuales, y otras similares, algunas de las cuales describiremos más adelante. Pero el gran problema de estas técnicas es que son difíciles y exigen un elevado esfuerzo y consumo de tiempo por parte de profesores y alumnos.

Por esa razón nos hemos inclinado a utilizar la técnica de las Redes Asociativas Pathfinder. Como veremos a lo largo de este trabajo, permiten, con muy poco consumo de tiempo, y sin que el profesor influya al alumno en su elaboración, obtener una representación gráfica de la forma en que éste relaciona los conceptos de un determinado campo de conocimiento.

Esta técnica ha venido siendo utilizada en otros ámbitos, de los que daremos cuenta en este trabajo, pero creemos que tiene unas grandes posibilidades, que aún no han sido suficientemente aplicadas en el campo educativo.

Teniendo en cuenta, además, que muchas de las técnicas para estudiar la estructura cognitiva del alumno que hemos citado recurren al análisis de los datos en su mayoría en forma cualitativa, creemos que puede ser útil disponer de un indicador de tipo cuantitativo que nos permita analizar algunos aspectos de la complejidad de las representaciones gráficas que obtenemos mediante la técnica Pathfinder.

A pesar de que existen alguna aproximación de este tipo para medir, por ejemplo, la similitud entre ellas, no conocemos ninguna que nos permita evaluar su nivel de complejidad, por lo que hemos creado un Índice de Complejidad de Redes que permite evaluar de forma cuantitativa la evolución de este parámetro.

Se pretende, pues, con este trabajo, un doble objetivo:

1.- Estudiar en una primera aproximación el concepto del ángulo y su evolución en las distintas edades y/o cursos de la escolaridad .

2.- Iniciar el estudio de las posibilidades de la técnica de Redes Asociativas Pathfinder para representar la estructura cognitiva de los alumnos.

Ambos objetivos están interrelacionados, de modo que el desarrollo de uno de ellos implica necesariamente el del otro.

Se trata de enfocar nuestra atención en la manera en la que el concepto de ángulo va evolucionando con la edad y en la que el alumno va organizando su propio conocimiento, tratando de averiguar que estructuras crea y como las relaciona hasta llegar al concepto general de ángulo. Para ello trabajaremos con una técnica que consideramos puede ser muy útil para ayudarnos a conocer mejor las interrelaciones entre conceptos de los alumnos, manejando de una forma cómoda un número significativo de representaciones, obtenidas de una forma rápida, eficaz, y, dentro de lo posible, objetiva.

Estos serían, pues, los objetivos de nuestro trabajo de investigación, que abre expectativas para una línea de investigación en la que podría enmarcarse una futura Tesis Doctoral, extendiendo el uso de la técnica de Redes Asociativas Pathfinder a otras áreas de conocimiento, o combinándola con otras técnicas de análisis.

Además de la presente Introducción, que constituye el Capítulo 1, nuestro trabajo está dividido en otras cuatro partes principales, que van acompañadas por unas referencias Bibliográficas, en las que sólo hemos incluido aquellos textos que tienen relación directa con nuestro trabajo y unos Anexos en los que se recoge el material obtenido de la experimentación con alumnos.

En el Capítulo 2, se trata de lo relativo a la representación del conocimiento como área de investigación y se hace una revisión de las técnicas utilizados en este campo. Esta revisión incluye la de numerosa Bibliografía, mayoritariamente en Inglés y Alemán que no se encuentra traducida en nuestro país.

En el Capítulo 3 se trata detalladamente de la técnica empleada, las Redes Asociativas Pathfinder, así como del funcionamiento del programa KNOT, que permite su aplicación. Se incluye también una revisión bibliográfica de las investigaciones en que se ha empleado esta técnica en la última década.

El Capítulo 4 describe el estudio exploratorio llevado a cabo. En primer lugar, se analiza el concepto de ángulo, objeto de estudio. Tratamos de mostrar la complejidad del tema y las implicaciones que ello conlleva para su enseñanza. A continuación, se describe la metodología empleada para llevar a cabo la investigación y el proceso que se ha seguido, desde la selección de los conceptos principales a tratar, hasta la aplicación a los alumnos.

En el Capítulo 5, por último, se exponen las conclusiones de la investigación y los futuros desarrollos que, de acuerdo con los resultados obtenidos consideramos interesantes abordar.

Este trabajo supone la más completa aproximación del autor a lo que es un trabajo de investigación, y supone, como es natural, una experiencia importante en su proceso de formación.

Pero si resulta una experiencia importante en este ámbito, ha supuesto también una experiencia personal enriquecedora, pues le ha dado ocasión de ponerse en contacto con profesionales e investigadores que le han ayudado en su trabajo y le han mostrado lo que es una auténtica comunidad científica.

El primero de todos, naturalmente, el tutor en el proceso de doctorado, el Dr. D. Ricardo Luengo González, de la Universidad de Extremadura, quien le ha guiado y animado de forma continua en todo el proceso de investigación con sus sugerencias, comentarios y opiniones enriquecedoras.

Pero hay otros que le han proporcionado también documentación, opiniones y comentarios muy interesantes para nuestro trabajo. Y todo ello a distancia, sin conocerse personalmente, pero haciendo uso de la gran Red de comunicación que es Internet. Nuestro agradecimiento a los profesores:

- Mike Mitchelmore, de la Macquarie University, en Sidney, en Australia, que nos ha proporcionado abundante documentación sobre sus trabajos sobre el concepto de Ángulo, así como comentarios muy detallados y reflexiones muy acertadas sobre los nuestros.

- Roger Schvaneveldt, de la New Mexico State University, en Estados Unidos, director del equipo que ha desarrollado la técnica Pathfinder y el programa "KNOT", que en varios momentos nos ha prestado su colaboración sobre el uso de ambos.

- Andreas Eckert, de la Manheim Universität, en Alemania, que nos ha facilitado información sobre su programa "NET", así como bibliografía sobre técnicas de representación del conocimiento en el ámbito de la literatura científica alemana.

- Carl Berger, de la Michigan State University, en Estados Unidos, quien nos proporcionó amplia información sobre su trabajo realizado con el programa "Event Recorder" y nos indicó nuevas perspectivas de trabajo con la técnica Pathfinder.

- José Cañas, de la Universidad de Granada, quien muy amablemente nos remitió su trabajo y el de la profesora M^a Teresa Bajo, pionero en la utilización de la técnica Pathfinder en nuestro país.

A todos ellos nuestro reconocimiento.

Capítulo 2

CAPITULO 2

ESTADO DE LA CUESTION: EL CONOCIMIENTO Y SU REPRESENTACION

2.1.- La organización del conocimiento.

En psicología del conocimiento es común distinguir dos tipos de conocimiento: declarativo y procedimental. Pasaremos a describirlos brevemente.

2.1.1.- El conocimiento declarativo.

El conocimiento declarativo representa el conocimiento de los objetos, los sucesos o las ideas. Se puede decir que es el conocimiento de "saber que". En virtud de este tipo de conocimiento, una persona puede saber lo que es un polígono, lo que fue la Revolución Francesa o lo que significa el término Democracia.

Así, las personas, atribuimos a tales objetos, sucesos o ideas, unas determinadas propiedades o características que los distinguen de unos y los relacionan con otros.

Estas propiedades se organizan en la mente en forma de esquemas. La teoría de los esquemas (Rumelhart, 1.980) establece que el conocimiento está almacenado en paquetes de información o esquemas. Un esquema para un objeto, suceso o idea está formado por un conjunto de atributos y marcas que lo describen y nos ayudan a reconocer dicho objeto o suceso.

Tales atributos incluyen relaciones con otros esquemas y es precisamente la interrelación con ellos lo que los hace significativos. Por ejemplo, los alumnos tienen un esquema de lo que es un ángulo, que incluye atributos o marcas tales como lados, vértice, o amplitud. Este esquema es parte de otros, como por ejemplo el de triángulo, o el de polígono. Y hay esquemas específicos que diferencian el ángulo exterior, el ángulo interior, el ángulo determinado por una trayectoria o el ángulo de cruce entre dos líneas.

Cada individuo posee un único esquema para cada suceso u objeto que ha ido construyendo según sus experiencias. Mediante un proceso conocido como "acrecentamiento" (Rumelhart, 1.980), los esquemas van creciendo por adición de nuevas propiedades o por suma de nuevos esquemas que utilizan como modelo otros esquemas existentes. Cuando aparecen nuevas experiencias que no pueden ser descritas mediante esquemas existentes, se reestructuran.

2.1.2.- El conocimiento procedimental.

Las personas, pues, almacenamos esquemas más o menos complejos, de los conceptos, de tal manera que somos capaces de definirlos, describirlos y diferenciarlos de otros, pero no necesariamente quiere esto decir que sepamos utilizarlos. El conocimiento declarativo no implica necesariamente comprensión.

Frente al conocimiento declarativo, el conocimiento procedimental se refiere a cómo las personas utilizan o aplican su conocimiento declarativo. Es el conocimiento del "saber cómo".

El conocimiento declarativo proporciona la base conceptual para el conocimiento procedimental. Éste supone la interrelación de esquemas en patrones que representan acciones mentales y que a su vez se representan mentalmente mediante lo que se denominan esquemas de acción.

Si tomamos por ejemplo el caso de un alumno que tiene que resolver el problema de calcular el área de un triángulo, veremos que tiene que poner en relación conceptos parciales tales como triángulo, base y altura. Debe saber además, la fórmula del área. Y debe tener conocimiento de lo que significa multiplicar, o dividir. Pero lo más importante que debe saber es en qué casos puede aplicarse, en qué orden ha de hacerse todo y cómo han de interrelacionarse estos conocimientos. Esto es conocimiento procedimental.

Resolver problemas, planear actividades o desarrollar argumentos son ejemplos típicos de actividades que suponen también el mismo tipo de conocimiento.

El uso de los esquemas se aplica en las actividades de cada día. Así, por ejemplo, leer una historia requiere que se acceda a esquemas que corresponden al texto que estamos leyendo. Sin embargo, si estos esquemas no están disponibles mientras se lee la historia, el lector debe llenar en vacío en su memoria con un conocimiento estructural preestablecido de las historias.

2.2.- La estructura cognitiva.

En el estado actual de nuestros conocimientos sobre la forma en que la mente humana trabaja, está ampliamente asumido que la información se almacena en la memoria ajustándose a una cierta organización. En esto, coinciden básicamente todos los modelos sobre la memoria a largo plazo que son aceptados en la actualidad (Ruiz, 1.992).

En todos estos modelos se acepta que la relación entre conceptos depende, al menos en parte, de su similaridad semántica o proximidad.

La similaridad semántica es una función del número de propiedades que los conceptos tienen en común. Mientras más propiedades tengan en común, más enlazados están mediante esas propiedades, de modo que están más próximamente relacionados.

El soporte experimental de esta idea lo proporciona una gran cantidad de investigación sobre la memoria, que ha demostrado que las ideas con algún tipo de estructura, o las listas organizadas de acuerdo con algún tipo de proximidad semántica, se recuerdan mejor que las listas no estructuradas. Mientras más significativa semánticamente sea la relación entre ideas, mejor se recuerdan.

En este contexto, es de gran importancia la noción de estructura cognitiva. Por tal entendemos el patrón de relaciones entre los conceptos en la memoria. Más exactamente definido, sería el constructo hipotético que se refiere a la organización de las relaciones entre conceptos en la memoria semántica o a largo plazo (Shavelson, 1.972).

La representación de la estructura cognitiva suele hacerse en forma de redes. Estas redes son conocidas como redes semánticas.

Representan estructuras que están compuestas por nodos (el equivalente de los esquemas) con distintas relaciones (por ejemplo, subordinadas, disyuntivas) o enlaces entre ellos (Norman y otros, 1.976). Los nodos son conceptos o grupos de conceptos y los enlaces describen la relación proposicional entre ellos.

La estructura cognitiva no es rígida, sino que evoluciona individualmente mediante la adscripción de nuevos atributos (subjetivos y objetivos) a los objetos del mundo, que hacen posible la diferenciación entre unos y otros y la definición de nuevas relaciones estructurales entre ellos. De tal forma, las personas llegamos a almacenar un buen número de dimensiones significativas entre objetos en un dominio de conocimiento determinado, y de relaciones entre ellas.

El aprendizaje, entendido desde este punto de vista, se puede concebir como la reorganización de las redes en la memoria semántica. Consiste en edificar nuevas estructuras de conocimiento construyendo nuevos nodos e interrelacionándolos con nodos existentes. Si los enlaces se forman entre conocimiento existente y conocimiento nuevo, el nuevo conocimiento se integra y se comprende mejor. El aprendizaje es, en suma, la reorganización de la estructura cognitiva del alumno. Esta es la idea ampliamente difundida por Ausubel (1.978).

La idea que en este trabajo queremos destacar es que el mayor conocimiento del estado y evolución de la estructura cognitiva de un individuo puede servir para mediar en sus procesos de aprendizaje y mejorarlos.

De ahí que los intentos por conocer y representar la estructura cognitiva supongan una buena parte del esfuerzo de los investigadores del área. En esta línea han aparecido diversas técnicas que tratan de hacer explícita la estructura cognitiva de una persona, y en esa línea está nuestro trabajo.

2.3.- Técnicas para hacer explícita la estructura cognitiva.

Básicamente, las técnicas que se han utilizado para hacer explícita la estructura cognitiva suponen el empleo de tres tipos de técnicas que describiremos: las listas de palabras, la puntuación de similaridad entre conceptos y el establecimiento de la similaridad por parte del propio sujeto.

2.3.1.- Listas de palabras.

Uno de los primeros métodos que se ha utilizado para hacer explícita la estructura cognitiva de una persona es el de la asociación de listas de palabras libre o controlada. El método consiste en que se le pide que asocie libremente conceptos a cada uno de los que se le van presentando de un determinado campo de conocimiento.

La generación de listas de palabras asociadas está basada en la teoría de la memoria a largo plazo, que mantiene que las palabras están almacenadas en ella según su proximidad semántica. Por ello, las palabras más fuertemente relacionadas se emparejan más fácilmente. Por ejemplo, en tests de proximidad de colores, se ha obtenido que efectivamente, mediante esta técnica se obtiene cómo están efectivamente organizados los colores, lo que presta validez al constructo.

Cuando se trabaja con alumnos, se les pide que, para un concepto dado en un campo de conocimiento, generen una lista de palabras asociadas que inmediatamente le vengan a la mente cuando se le presenta cada concepto de un campo como estímulo.

Existen dos modalidades: asociación libre de palabras y asociación controlada.

En la primera modalidad, se le pide al alumno que, ante una palabra estímulo dada genere tantas palabras relacionadas como pueda en un tiempo dado.

En la segunda se le pide al alumno no sólo que genere las palabras, sino que las ordene. También se le puede limitar las palabras a relacionar a sólo aquellas en un campo específico.

En el caso de la asociación libre de palabras, tal como se describe en Jonassen y otros (1.993), primero se seleccionan cuáles son los principales conceptos del dominio de que se quiera tratar, lo cual se puede lograr mediante consenso de un grupo de expertos.

A continuación , se escribe cada palabra en la parte superior de la página, y se repite por lo menos diez veces.

Para terminar, se pide al alumno que, al lado de cada palabra de las repetidas, escriba una relacionada, por ejemplo en un minuto o minuto y medio por página.

En el caso de la asociación controlada, se comienza del mismo modo que anteriormente. A continuación, se escribe cada palabra de las seleccionadas arriba de la página y se escriben, por ejemplo, los números 1 a 5 debajo de ella, de manera que el alumno escriba, también en un tiempo dado como antes, palabras de más a menos relacionadas con la de arriba.

A continuación, las listas de palabras se comparan para evaluar la relación entre cada concepto. Si los conceptos se presentan en otras listas asociadas, están relacionados. La fuerza de la asociación está en función de su orden de aparición en la lista de asociadas. Mientras más altos aparezcan en la lista, más fuertemente relacionados están los conceptos. Mientras más palabras en común existan entre dos listas de palabras, más fuertemente relacionadas estarán las dos palabras. A partir de los datos obtenidos, se calcula un coeficiente que cuantifica el grado de relación entre dos conceptos.

El procedimiento para calcular este coeficiente consiste básicamente en lo siguiente:

Primero se puntúan las palabras asociadas a una dada de más a menos según su orden de aparición en la lista.

Se toman dos palabras - concepto, y se ve en las listas de palabras asociadas a ellas, cuántas coinciden. Se multiplica la puntuación que tienen las coincidentes en cada lista. Se suman todos los productos obtenidos de las palabras coincidentes. Después se divide este resultado entre el máximo que se pudiera haber obtenido, y que depende del número de conceptos relacionados que se han pedido al alumno que escriba. El cociente obtenido es el coeficiente de relación.

Esto se hace con todos los posibles pares de palabras - concepto y se obtiene una matriz de coeficientes de relación. La estructura que se obtiene a partir de estos coeficientes, usualmente se representa mediante la técnica de Escalamiento Multidimensional (en adelante MDS), que proporciona una representación gráfica, y de la que hablaremos con algún detalle en el apartado dedicado a la técnica de Mapas Cognitivos.

Existen otras técnicas, como la de Árboles Ordenados, que veremos más adelante, y que utiliza en un modo diferente la asociación de palabras, pues tiene en cuenta no sólo su orden de aparición, sino también cuáles son los grupos de ellas que usualmente aparecen juntas.

2.3.2.- Puntuación de la similaridad entre conceptos.

El método, a semejanza del anterior, asume que se puede utilizar una representación espacial entre los conceptos, que describe el patrón de relaciones entre ellos en la memoria. Si los conceptos están unos más próximamente relacionados que otros, esta distancia semántica se puede considerar como si fuera una distancia geométrica: los conceptos semánticamente más próximos se representarán más próximos en el espacio. En este método, la puntuación de la similaridad es más simple y más directa para identificar proximidades entre conceptos.

Unicamente se pide al alumno que, dados dos conceptos, asigne una puntuación a la similaridad o diferencia entre ellos. No sólo se pueden elegir conceptos simples, sino algunos más elaborados. Después se presentan todos los posibles pares en orden aleatorio. Las puntuaciones se resumen en una matriz de distancias que describe el grado de similaridad o diferencia.

En ambos casos, las matrices de datos de puntuación o coeficientes de relación obtenidos se tratan mediante técnicas estadísticas como la de análisis de componentes principales, análisis de cluster, Escalamiento Multidimensional o redes Pathfinder. Estos métodos estadísticos transforman los datos de interrelación entre conceptos en distancias entre puntos en un espacio de dimensiones mínimas, de tal manera que se obtiene una representación espacial o se determina la estructura subyacente de los datos. Muchos investigadores están de acuerdo en que estos procedimientos hacen posible definir operativamente la estructura cognitiva (Fenker, 1.975, Jonasen, 1.987, Preece 1.976, Shavelson 1.972, 1.985, Wainer y Kaye 1.974)

Como en la técnica anterior, a pesar de parecer ambas muy simples, las dificultades se centran básicamente en el comienzo, precisamente en la fase en que hay que seleccionar los conceptos que hemos de comparar. Decisiones tales como cuáles son los contenidos relevantes para el tema objeto de estudio que han de seleccionarse o quien debe hacer la selección requieren un estudio detallado antes de empezar

Otro de los aspectos de no menor importancia es el de poner en situación mental a los alumnos. Se les deben proporcionar instrucciones claras que le lleven a hacerse idea de la

relación que, en general, existe entre los conceptos se les debe dar algún ejemplo de cómo ha de realizarse la tarea.

Las dos técnicas, listas de palabras y puntuación de similaridad, han sido utilizadas en una amplia variedad de contenidos y con distintos alumnos. Los resultados de una y otra son similares, aunque la técnica de puntuación de la similaridad presenta la ventaja de que es un método más simple.

Ambas presentan una limitación, y es que son procedimientos largos, que pueden resultar aburridos, y por tanto se limita el número de conceptos a comparar o asociar. Este mismo inconveniente de la fatiga, hace que la similaridad, al tenerse que establecer normalmente entre un elevado número de pares, pueda ser variable, incluso para un mismo sujeto en diferentes ocasiones, pero para los mismos conceptos.

El principal problema sigue siendo, sin embargo, la vaga definición de lo que se entiende por similaridad, y la variabilidad que presente entre los mismos conceptos pero dispuestos en distintos contextos.

2.3.3.- Establecimiento por el sujeto.

Existe también un tercer tipo de técnicas como las que presentaremos más adelante al hablar de los Tests verbales o los Mapas Conceptuales, que exigen un alto grado de introspección y en algunos casos, un periodo de aprendizaje, para llegar a obtener resultados útiles.

El método en apariencia más simple para evaluar la comprensión del alumno de la naturaleza de las relaciones entre conceptos en un campo de conocimiento dado es pedirle que describa o clasifique la naturaleza conceptual de las relaciones entre conceptos importantes, que han sido presentados y trabajados durante el aprendizaje.

Básicamente todas las técnicas encuadradas en este tipo consisten en que sea el sujeto el que establezca directamente las relaciones entre los conceptos, y a la vez, explique qué tipo de relaciones son: de causa - efecto, de subordinación, de ejemplificación, y otras varias.

Incluso se le puede pedir que sea él quien seleccione cuáles son los conceptos principales de un campo de conocimiento, como ocurre en el caso de los Mapas Conceptuales.

Aunque se pueden utilizar muchos tipos de enlaces entre conceptos, lo más frecuente es relacionarlos utilizando alguno de alguno de los siguientes: forma parte de, es un tipo de,

causa, precede a, representa, es un ejemplo de, justifica, es característico de, es lo contrario de, es un modelo de, ...

Adviértase que estas categorías describen relaciones en dos direcciones. Son asimétricas. Esto quiere decir que la relación en una dirección entre conceptos puede ser diferente que en otra. Por ejemplo “los mamíferos son un tipo de animales vertebrados” es cierta, pero no lo es “los animales vertebrados son un tipo de mamíferos ”.

Dado que son técnicas difíciles, en algunos casos se recurre incluso para ayudar al alumno a programas informáticos del tipo de SemNet (Fisher, 1.990), NET (Eckert (1.997) o Inspiration (de Inspiration Software Inc., 1.998).

2.4.- Técnicas para representar la estructura cognitiva.

Existen básicamente dos categorías de técnicas empleadas para representar la estructura cognitiva.

En la primera de ellas no se utiliza ninguna representación gráfica, sino que los resultados obtenidos se dejan en forma de datos numéricos, que pueden ser analizados y comparados con otros, pero no recurren a la transformación de dichos datos para representar la estructura cognitiva en forma gráfica. Tal es el caso de los Tests de Relaciones Semánticas, la técnica de Juicios de relación o la técnica de Analogías.

En una segunda categoría podemos englobar métodos que emplean representaciones gráficas obtenidas a partir de los datos numéricos.

Su construcción supone según Fenker (1.975) admitir básicamente dos propiedades de la información en un determinado campo de conocimiento: que el conocimiento se puede organizar sobre la base de un conjunto de dimensiones que representan las características estructurales de un tema y que dichas dimensiones se pueden representar en un espacio geométrico n-dimensional.

Dentro de esta categoría podemos incluir y describiremos los Mapas Cognitivos, los Mapas Conceptuales o las Redes Asociativas Pathfinder.

2.4.1.- Tests Verbales

Estos tests se caracterizan porque recurren a simples preguntas que se analizan de forma descriptiva. Están dirigidos a que el alumno describa las relaciones entre conceptos

para que, de esta forma se pueda acceder a la comprensión de la relación estructural entre ellos.

Describiremos brevemente tres tipos de Tests Verbales: Tests de relaciones semánticas, Juicios de Relación y Analogías.

2.4.1.1.- Tests de Relaciones Semánticas.

La forma habitual de llevar a la práctica esta técnica es ofrecer una serie de elecciones múltiples para que el alumno escoja. Por ejemplo:

___ mamífero animal vertebrado

a.- es una característica de

b.- representa a

c.- es un tipo de

d.- es lo mismo que

También se puede llevar a la práctica mediante la presentación de una pregunta corta para completar:

mamífero animal vertebrado

Para evaluar los resultados, se procede a puntuar el número de respuestas correctas y se compara con las de un experto.

2.4.1.2.- Juicios de Relación.

En esta técnica no se presentan al alumno todos los posibles pares de conceptos, sino sólo algunos. Como en el caso de los Tests de Relaciones Semánticas se comparan las respuestas con las de los expertos, pero sin hacer ninguna transformación de la estructura de los datos para presentarlos.

La comparación entre pares de conceptos puede hacerse asignando una puntuación a su fuerza de relación, o bien contestando verdadero o falso según si tienen o no relación fuerte.

La puntuación se puede hacer preguntando a varios expertos sobre la puntuación de similaridad que ellos asignan, estableciendo una puntuación media y comparándola con la del alumno o bien calculando la correlación entre las puntuaciones de los expertos y las de los alumnos.

En el caso de que se opte por respuestas del tipo verdadero o falso, la comparación se hace de forma similar.

2.4.1.3.- Analogías.

El procedimiento consiste en que se presentan al alumno dos conceptos relacionados, de modo que tiene que averiguar cuál es su tipo de relación. A continuación se le presenta un tercer concepto. Entonces tiene que elegir de entre una lista que se le ofrece, uno que tenga con el tercero la misma relación que los dos primeros. Veamos un ejemplo

gallinácea : ave :: _____ : insecto

- a.- pez
- b.- lepidóptero
- c.- mosca
- d.- procariótico

Esta técnica se basa en la teoría de los esquemas (Rumelhart, 1.980). Cuando un alumno encuentra nueva información, intenta interpretarla en términos de esquemas existentes. El razonamiento analógico es un proceso de buscar esquemas existentes para integrar la nueva información (Rumelhart y Norman, 1.981). La esencia de las analogías es la transferencia de conocimiento de una situación a otra encontrando aspectos de correspondencia entre un conjunto de conceptos y otro (Gick y Holyoak, 1.983).

Con respecto a los tres procedimientos que hemos descrito, tienen en común la ventaja de que son más simples para evaluar la estructura cognitiva, ya que no se necesita recurrir a técnicas estadísticas. (Diekhoff, 1.983)

También son más fáciles de aplicar porque no precisan evaluar todos los posibles pares.

Como desventaja, por el contrario, no representan todas las relaciones entre todos los conceptos, sino entre dos de ellos a la vez, lo cual es una limitación.

2.4.2.- Técnica de Árboles Ordenados.

La técnica de árboles ordenados (Reitman y Rueter, 1.980) fué desarrollada para identificar la estructura subyacente de la información en la memoria a partir del análisis del orden en que apareciendo las palabras cuando se realizan tareas de recuerdo libre.

Parte de la premisa de que los conceptos están organizados en la mente en grupos y que los individuos recuerdan todos los conceptos de un mismo grupo antes de comenzar a buscar en los de otro. Estos grupos están organizados mentalmente en forma de un árbol cuyos nodos son los conceptos.

La premisa fundamental de la Técnica de Árboles Ordenados es que la información está organizada en la memoria de forma jerárquica. Es decir, que las personas organizamos la información en unidades que están subordinadas a conceptos más generales, que a su vez están agrupados en otros más generales aún, y así sucesivamente. La organización de las ideas en grupos en la memoria facilita el almacenamiento y la recuperación de la información.

Durante las tareas de recuerdo, esta jerarquía organiza la recuperación de las ideas y de este modo determina la secuencia y el orden de recuperación de las palabras, de tal modo que hay tendencia a que las mismas palabras aparezcan juntas en las tareas de recuerdo libre. Esto es, que la información se recupera de manera ordenada.

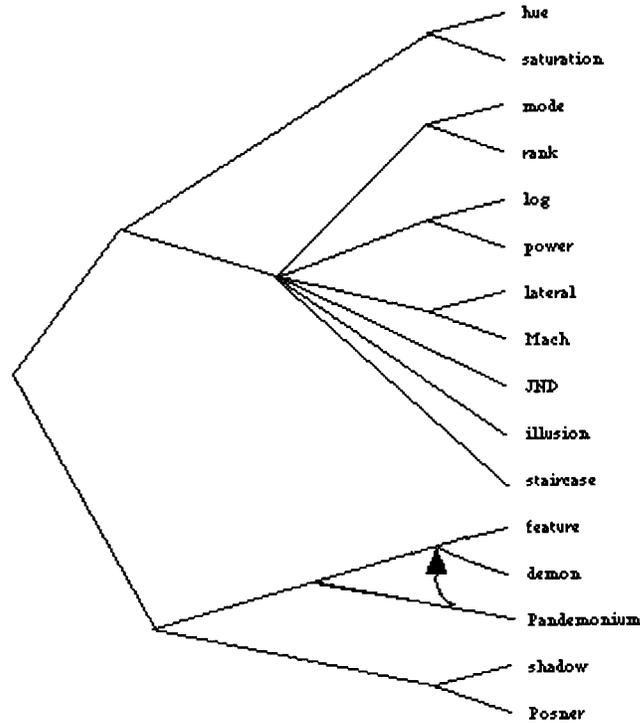
El método para elaborar los árboles ordenados, tal como aparece explicado en Jonassen (1.993) consiste en lo siguiente:

En primer lugar se selecciona un máximo de 25 - 30 palabras que representen conceptos importantes de un campo de conocimiento.

A continuación se reparten las palabras en una matriz (por ejemplo de 4 por 5 si son 20 palabras) y se repite la misma matriz cuatro veces en respectivas hojas.

Después, se pide a los alumnos que ordenen las palabras verticalmente según lo similares que, en su opinión, sean. Se hace lo mismo con las otras tres hojas, pero empezando ahora por una palabra determinada que se indica al alumno. No se le permite que vea la hoja anterior y entre una y otra hoja se hace una tarea distractora.

El árbol ordenado se genera utilizando un algoritmo desarrollado por Reitman y Rueter (1.980) para analizar cada uno de los órdenes de recuperación. El algoritmo examina de forma recursiva las cadenas de conceptos de arriba abajo para determinar los grupos. Identifica los grupos más largos de conceptos que no se superpongan, es decir, grupos en que los conceptos están siempre juntos, aunque no sea en el mismo orden. Después, el conjunto de grupos encontrado se organiza en forma de árbol, del modo del que presentamos s continuación, tomado de Jonassen, 1.993 y que hace referencia a términos clave en psicología.



Aunque no existe mucha investigación sobre su uso, se admite que la Técnica de Árboles Ordenados proporciona representaciones de la estructura de conocimiento del sujeto que son fáciles de interpretar (Navhe-Benjamin y otros, 1.986). Su análisis se hace teniendo en cuenta el nivel de agrupamiento de ideas, la profundidad de la jerarquía y la similaridad entre las estructuras cognitivas de distintos individuos.

2.4.3.- Mapas cognitivos.

Los mapas cognitivos se construyen a partir de un conjunto de similitudes semánticas, que se obtienen por los procedimientos anteriormente descritos. Estos datos, primitivamente en forma de matriz, se representan en una disposición espacial, colocando cada concepto en un punto de coordenadas, de modo que se obtiene una representación espacial de la estructura cognitiva.

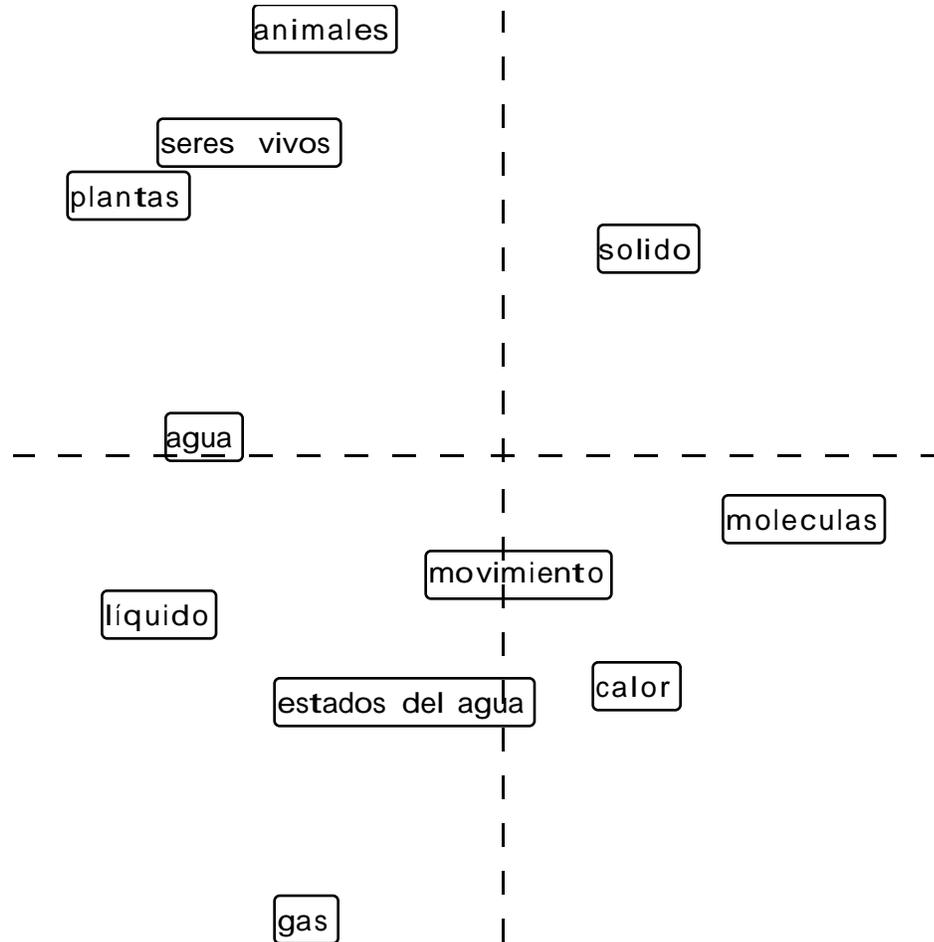
Habitualmente, los datos de proximidad se presentan transformados en una matriz de coeficientes de correlación, como la que mostramos seguidamente, obtenida de trabajos con nuestros propios alumnos:

	agua	s.vivos	animales	plantas	moleculas	movto.	calor	e.del agua	solido	liquido	gas
agua	1										
seres vivos	0.7567	1									
animales	0.6833	0.7833	1								
plantas	0.6767	0.7733	0.6900	1							
moleculas	0.2500	0.3333	0.2433	0.3167	1						
movimiento	0.3433	0.5733	0.3633	0.3167	0.4000	1					
calor	0.2800	0.2000	0.4067	0.3033	0.5967	0.7767	1				
estados del agua	0.7833	0.3300	0.1700	0.2700	0.6833	0.7100	0.7933	1			
solido	0.2667	0.2467	0.2833	0.2667	0.3467	0.2267	0.3333	0.7100	1		
liquido	0.8767	0.2500	0.3033	0.3200	0.1867	0.3267	0.3100	0.7833	0.6200	1	
gas	0.3167	0.1967	0.1767	0.1467	0.3267	0.3067	0.2633	0.7833	0.3800	0.6033	1

El procedimiento más usual de tratar los datos es mediante el Escalamiento Multidimensional (Kruskal, 1.964 y Shepard, 1.962), aunque también se puede utilizar análisis de cluster o análisis de componentes principales.

El objetivo en cualquier caso es similar: transformar los datos de la matriz de relación entre objetos en puntos que representan las distancias entre estos objetos en un número mínimo de dimensiones. Utilizando un criterio de tensión mínima se determinan cuántas dimensiones se adecuan mejor a los datos de la matriz. La solución óptima puede ser bidimensional, tridimensional, cuatridimensional o multidimensional. La mayor parte de los procedimientos de Escalamiento Multidimensional ofrecen representaciones bidimensionales, de modo que para generar una solución entre tres dimensiones A, B y C, deben generar 3 mapas bidimensionales (AB, AC y BC). Se identifican las relaciones bidimensionales en cada uno de estos mapas y se comparan las agrupaciones de conceptos en cada dimensión. Todo este proceso requiere el uso de programas estadísticos, pues su construcción "a mano" puede resultar sumamente difícil.

En el mapa que presentamos en la página siguiente, correspondiente a una representación según la técnica de Escalamiento Multidimensional obtenida a partir de los datos de la tabla anterior, podemos observar cómo los conceptos están agrupados en varias zonas, que corresponden, según nuestro análisis a las relaciones del agua con los seres vivos, a los estados en que se presenta el agua en la naturaleza y a las relaciones entre estos estados, el calor y el movimiento de las moléculas. Un análisis más detallado nos permitiría estudiar cómo hay conceptos que participan de varias zonas y cómo unos están más próximos que otros.



Como veremos que es común a la mayoría de las representaciones del conocimiento, los mapas cognitivos nos indican la relación entre conceptos, pero no nos dicen nada acerca de cual es el tipo de relación. Esto es algo que debe interpretar el investigador. El problema de la interpretación es el gran problema de todas estas técnicas.

Existe una serie de investigaciones que muestran cómo los mapas cognitivos indican diferencias entre los alumnos más o menos aventajados. Stanners y Brown (1.982) mostraron que las estructuras de unos eran más agrupadas, mientras que las de los otros son más difusas y menos estructuradas. También muestran, como hizo Shavelson (1.972) que a lo largo de un periodo de aprendizaje, la correspondencia entre la estructura cognitiva del alumno se va aproximando cada vez más a la del profesor.

Existe también (Fenker, 1.975) una correlación entre las notas obtenidas en exámenes y la similitud entre los mapas cognitivos del alumno y los del profesor.

Estos resultados indican que los mapas cognitivos se pueden utilizar para evaluar en que medida los alumnos han integrado los conocimientos adquiridos, por ejemplo comparando sus mapas con los de un experto. También pueden utilizarse para identificar áreas en las que se

Muy brevemente descrito, el procedimiento para elaborar mapas conceptuales consiste en seleccionar cuáles son las palabras que describen los conceptos más importantes, ordenarlas de arriba abajo por orden y establecer relaciones entre ellas incluyendo en la relación algunas breves palabras que indiquen de qué tipo es la relación.

Desde la época en que fueron propuestos por Novak y sus colaboradores, y hasta el momento actual, los mapas conceptuales han sido utilizados en muy diversas experiencias educativas, y en todas las áreas y niveles de la enseñanza , aunque mayoritariamente, quizá por ser donde trabajaron más directamente sus creadores, han sido utilizados en las áreas de Ciencias Experimentales.

Los mapas conceptuales, en resumen, y en palabras de Coll y Rochera en la obra de Coll, Palacios y Marchesi (1.995), tienen diversas utilidades:

“Por sus características, los mapas conceptuales pueden servir para poner de relieve los conceptos clave del contenido y las relaciones más importantes entre los mismos; para evaluar el conocimiento que tienen los alumnos del contenido de la enseñanza - al inicio, al final o en cualquier momento del proceso de aprendizaje- ; para extraer las ideas esenciales de un texto escrito; para sistematizar el aprendizaje realizado en un trabajo práctico; para preparar trabajos escritos o exposiciones orales; y, por supuesto, para establecer secuencias de aprendizaje.”

La utilidad última de los mapas conceptuales es enseñar a los alumnos cómo “aprender a aprender” sacando a la superficie sus estructuras cognitivas y su conocimiento autoconstruido. Son un instrumento que favorece el proceso metacognitivo.

Los mapas conceptuales y su utilización en la enseñanza son, hoy en día, un tema bien conocido y representado en la literatura educativa, por lo que no consideramos necesario profundizar más en este aspecto. Pero precisamente por lo extendido que está su uso, sí queremos profundizar en algunas de las críticas que pueden hacerseles. Como todas las técnicas, los mapas conceptuales presentan algunas limitaciones que pasaremos a considerar.

Los mapas conceptuales pretenden reflejar la estructura del conocimiento del alumno, pero debemos plantearnos la duda de si en realidad lo que reflejen muchas veces no será, simplemente la estructura de la materia de estudio. Bajo y Cañas (1.994) expresan claramente esta misma idea:

“Un problema de base en las primeras teorías de representación y su utilización en la creación de sistemas inteligentes artificiales es que los formalismos empleados eran de naturaleza lógica. De forma que la organización entre los conceptos de un determinado dominio de conocimiento se realizaba de

forma intuitiva basándose en los conocimientos que la persona que realizaba el sistema tenía sobre esa área de conocimiento. Sin embargo, existe gran cantidad de evidencia empírica que muestra que la organización del conocimiento no siempre es lógica y la utilización del mismo no siempre es lineal.”

Aunque esta cita se refiere al ámbito de la Inteligencia Artificial, creemos que se puede transponer perfectamente a nuestro objeto de estudio.

Ocurre a veces que el alumno, ayudado por el profesor, que le enseña a elaborar mapas conceptuales, o utilizando los mapas conceptuales del tema que se le ofrecen en el libro de texto, refleja y aprende la estructura lógica de la materia, pero no refleja la estructura de su propio pensamiento, y es esa estructura (la suya) la que luego utiliza en otras situaciones, como por ejemplo, a la hora de resolver problemas relacionados.

El resultado es que en el ámbito de la resolución de problemas es donde resultan más deficientes los mapas conceptuales, tal como reflejan las investigaciones sobre la enseñanza - aprendizaje de la física (López, 1.991), y sobre la resolución de problemas de química (Palacios y López, 1.992). Estos autores, cuyos resultados coinciden con otros en la misma línea, consideran que si bien los mapas conceptuales mejoran la organización del conocimiento conceptual, esta utilidad no queda confirmada para la solución de problemas, y quizá una de las causas esté en lo que apuntamos anteriormente.

Otra de las limitaciones de los mapas conceptuales, común a otras técnicas que asumen como premisa la organización jerárquica del conocimiento, es que esta organización no es, siempre, jerárquica. Bajo y Cañas (1.994) inciden en esta línea, con la que estamos de acuerdo:

Este tipo de estructura jerárquica fue muy utilizada en las primeras teorías de representación (Miller, 1.969; Quillian, 1.969), y aunque un gran número de experimentos han mostrado las debilidades de estos modelos (Rosch, 1.975), algunas de las técnicas de análisis de los datos de proximidad todavía ofrecen este tipo de representación. Es importante señalar, sin embargo, que aunque la mayoría de las teorías de este tipo son estrictamente jerárquicas, ya que un concepto determinado sólo puede estar conectado a un solo concepto de un nivel más alto de la jerarquía, existen modelos y técnicas asociados a los mismos que, aunque mantienen relaciones jerárquicas, no lo hacen en sentido estricto ya que permiten solapamiento entre las distintas clases o categorías de forma que un concepto puede estar conectado a más de un concepto representado a un nivel más alto de la jerarquía. Esta modificación de las teorías jerárquicas permite una mayor flexibilidad (Kintsch, 1.970).

Los mapas conceptuales se han utilizado para representar la estructura cognitiva de un alumno, pero si efectivamente y tal como planteamos, reflejan la estructura de algo externo (la

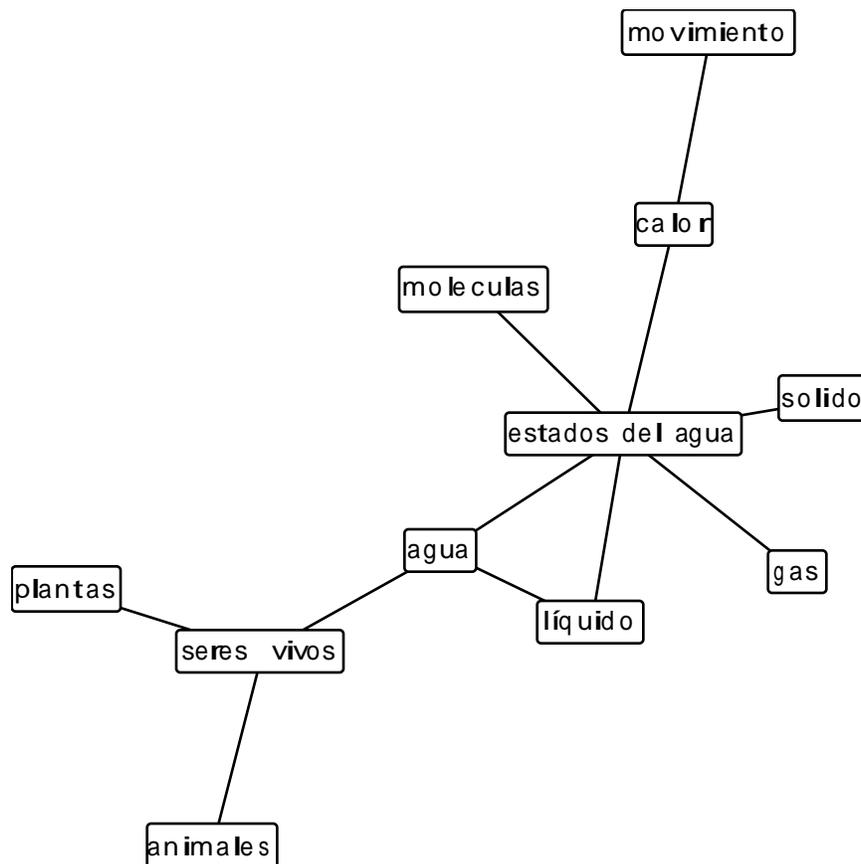
estructura de la materia), no de lo interno, no servirían para este propósito. Nos encontramos aquí con un posible campo de investigación a desarrollar que consideramos de gran interés.

Por último queremos reseñar algunas otras dificultades no menos importantes que los Mapas Conceptuales presentan como instrumento de investigación (que no como instrumento de autoaprendizaje para los alumnos): dificultad para su elaboración, que consume un elevado esfuerzo y tiempo, dificultad para tipificar y clasificar distintos mapas y dificultad para evaluar su calidad y por tanto comparar con los de otros alumnos o los del profesor.

2.4.5.- Redes Asociativas Pathfinder.

Las redes Asociativas Pathfinder son representaciones en las cuales los conceptos se representan como nodos y sus relaciones como enlaces que conectan los nodos (Schvaneveldt, Durso y Goldsmith, 1.985).

Las Redes Asociativas Pathfinder se obtienen a partir una matriz de datos de proximidad, mediante un algoritmo que la transforma en una estructura en red en la cual cada concepto de la matriz se representa como un nodo y las proximidades se representan con enlaces más o menos largos entre ellos. El algoritmo está implementado en un programa informático llamado KNOT, Knowledge Network Organizing Tool , desarrollado por Schvaneveldt y cols. (1.989) en la Universidad de Nuevo México.



La representación anterior es un ejemplo en el que se relacionan conceptos referidos a la relación entre el agua y los seres vivos.

El funcionamiento del algoritmo consiste en buscar entre los nodos para encontrar el camino indirecto más próximo entre ellos y conservar sólo los enlaces con un sendero de longitud mínima entre dos conceptos. El mecanismo básico para determinar qué enlaces se incorporan es: Un enlace sólo se incorpora a la red si no existe un camino indirecto a través de otros nodos cuya suma de pesos sea menor que la de dicho enlace directo. De este modo, en la red resultante no todos los conceptos están necesariamente relacionados a todos los demás, sino que sólo se representan aquellos enlazados por senderos de peso mínimo, de modo que viene a representar sólo las relaciones más fuertes.

Brevemente el proceso lo que hace es comenzar con una matriz de puntuaciones de similitudes semánticas, que el programa KNOT transforma en una matriz de coeficientes de correlación y analiza utilizando el algoritmo Pathfinder. Tomando como entradas los resultados del programa, y utilizando el algoritmo de Kamada y Kawai (1.989) se crea un diseño espacial con las condiciones que en el párrafo anterior hemos explicado.

El programa permite también hacer una red promedio entre todas las obtenidas de los alumnos. De esta manera permite combinar el conocimiento de varios alumnos y también el de varios expertos.

Permite además comparar de forma objetiva la similitud entre dos redes, mediante una función denominada precisamente Similitud.

También incorpora otra función llamada Coherencia que nos da indicaciones de en qué medida los datos de una red han sido cumplimentados con atención y conocimiento.

Las Redes Asociativas Pathfinder extraen la estructura latente en los datos en lugar de transformarlos como hace el Escalamiento Multidimensional (MDS) al desarrollar representaciones dimensionales. Así pues, es mejor para representar las comparaciones locales de parejas entre conceptos en un campo de conocimiento, pero no proporciona la información global (dimensional) que da el MDS. Pero identifican los enlaces significativos entre conceptos requiriendo menos fuerza de relación entre ellos.

Suponen una nueva modalidad de representación de la estructura cognitiva, pues si bien tienen en común con otras técnicas el uso de la forma de red, se diferencian de ellas en varios aspectos:

En primer lugar, a los enlaces se les asigna un valor o peso que, haciendo mayores o menores las distancias en los senderos que unen unos nodos con otros, representan de este modo la fuerza de la relación entre ellos.

En otros tipos de representaciones, o bien no se indica nada de cuál es la fuerza de la relación, como en el caso de los Mapas Cognitivos, o bien parece que la relación es la misma entre todos los conceptos, como en los Mapas Conceptuales o en los Arboles Ordenados.

En segundo lugar, los enlaces pueden ser simétricos (no dirigidos) o asimétricos (dirigidos), a diferencia de otras representaciones que asumen que la relación es siempre simétrica, algo que no en todas ocasiones ocurre en la realidad, y tal como hicimos notar al hablar de las técnicas que establecen por parte del sujeto la relación entre conceptos.

Por último las Redes Asociativas Pathfinder ofrecen representaciones de conceptos que no son jerárquicas. Como hemos indicado en párrafos anteriores, estamos de acuerdo con Bajo y Cañas (1.994), quienes señalan las limitaciones de este modelo.

En el siguiente apartado de este trabajo, trataremos en detalle los pormenores de esta técnica y el funcionamiento del programa KNOT y además presentaremos un resumen de las investigaciones que han sido realizadas utilizando esta técnica desde sus comienzos hasta los últimos años.

Capítulo 3

CAPITULO 3

LAS REDES ASOCIATIVAS PATHFINDER

Aunque en el capítulo anterior hemos tratado en general de las Redes Asociativas Pathfinder en el contexto de otras técnicas de representación de la estructura cognitiva, en este capítulo, y como avanzábamos anteriormente, nos centraremos en describir en detalle el algoritmo Pathfinder.

A continuación haremos una descripción del funcionamiento y las posibilidades (aunque no todas) del programa KNOT, con el que se trabaja esta técnica.

Por último veremos una perspectiva de los trabajos en los que se ha utilizado, pues consideramos que de esta forma se enmarca más adecuadamente el nuestro y puede servirnos para tener una idea de las posibilidades que ofrecen en la investigación las Redes Asociativas Pathfinder.

3.1.- Las Redes Asociativas Pathfinder.

La gran aportación que suponen las Redes Asociativas Pathfinder es que permiten crear representaciones en forma de redes de la estructura cognitiva de un sujeto a partir de datos empíricos, y pueden ser generadas de forma totalmente automática.

Los datos se obtienen a partir de la proximidad entre conceptos que pueden obtenerse de distintos modos. En esto, la técnica es similar a otras que hemos explicado en el capítulo anterior. Mas adelante veremos cómo se obtienen en nuestro caso.

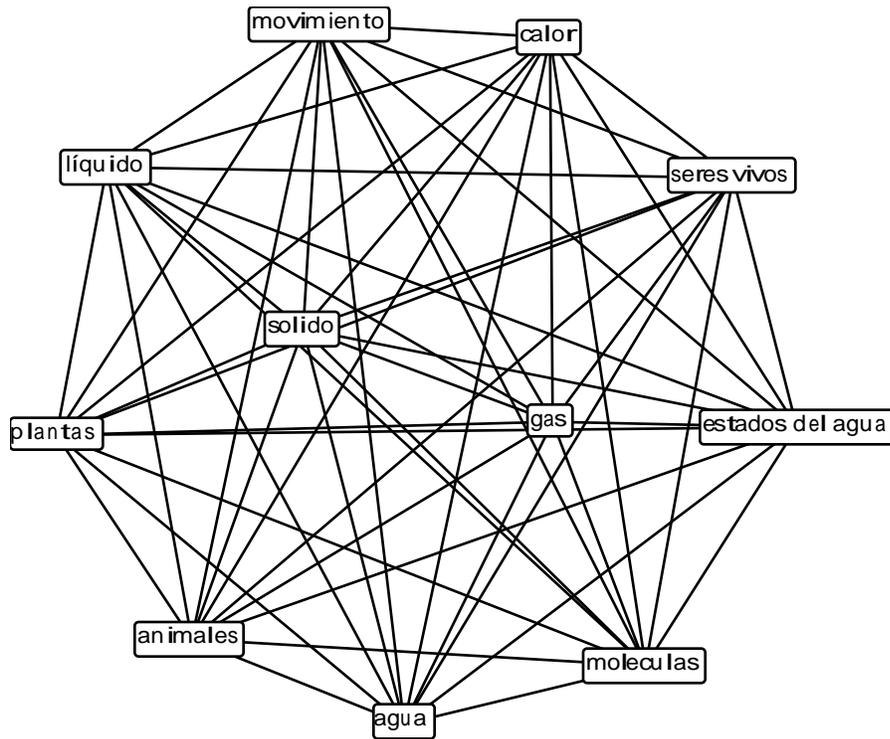
Tomemos, por ejemplo, una matriz de coeficientes de correlación similar a la que empleábamos en el apartado que 2.4.3 que dedicamos a los Mapas Cognitivos:

	Agua	Seres vivos	Animales	Plantas	Moléculas	Movto.	Calor	Est. agua	Sólido	Líquido	Gas
Agua											
Seres vivos	0.8000										
Animales	0.7500	0.8733									
Plantas	0.6400	0.7867	0.7533								
Moléculas	0.2400	0.2367	0.4667	0.2333							
Movimiento	0.3900	0.4067	0.3800	0.2267	0.3033						
Calor	0.2733	0.5533	0.2700	0.2600	0.3300	0.5067					
Estados del agua	0.7067	0.2800	0.2267	0.3100	0.2533	0.5167	0.6867				
Sólido	0.2367	0.2033	0.2933	0.2500	0.1667	0.2167	0.1633	0.7567			
Líquido	0.7767	0.2267	0.2633	0.2300	0.2167	0.4367	0.2267	0.7867	0.4933		
Gas	0.1600	0.2567	0.1900	0.2000	0.3000	0.2600	0.3000	0.7800	0.4667	0.4667	

La relación entre un concepto y él mismo no tiene ningún interés, por lo que no aparece representada en la matriz. El resto de la matriz no aparece escrito pues es simétrica.

En esta matriz podemos interpretar que hay algunos conceptos que se relacionan con más fuerza y otros que se relacionan con menos.

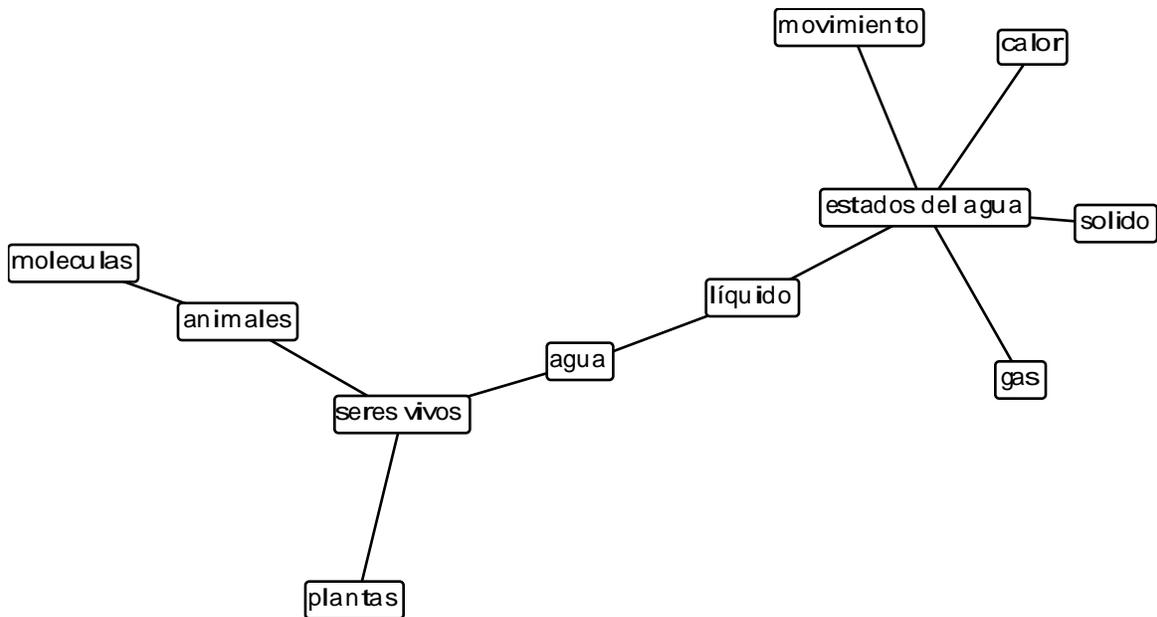
Si representamos en forma de red las relaciones entre ellos, utilizando los datos anteriores, obtendríamos una red con el siguiente aspecto:



En ella están representadas todas las conexiones entre conceptos, algo normal si consideramos que, de algún modo todos están relacionados, aunque sea muy superficialmente. Teniendo en cuenta la “fuerza” con la que el sujeto considera que son más o menos próximos, unos conceptos aparecen como más próximos que otros.

A pesar de que, según los datos de la matriz habría conceptos que, por estar menos relacionados nos parecería que deberían aparecer más lejanos, hay que considerar que, al alejarse de unos, se aproximan a otros, por lo que hay que conseguir una representación equilibrada que tenga en cuenta las distancias mutuas, tal como la anterior. Pero una red de este tipo no es muy útil, y ofrece poca información.

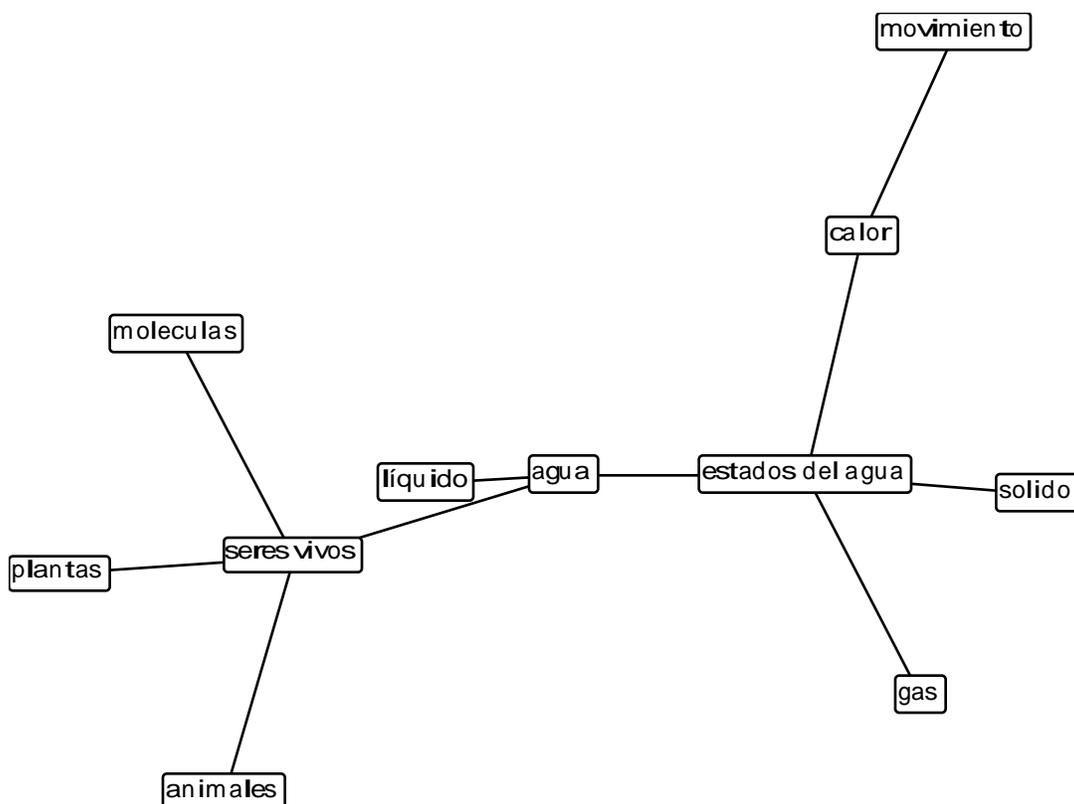
Evidentemente, unas conexiones son más fuertes que otras, y de alguna manera interesaría resaltar sólo las más importantes. Quizá algo de este modo:

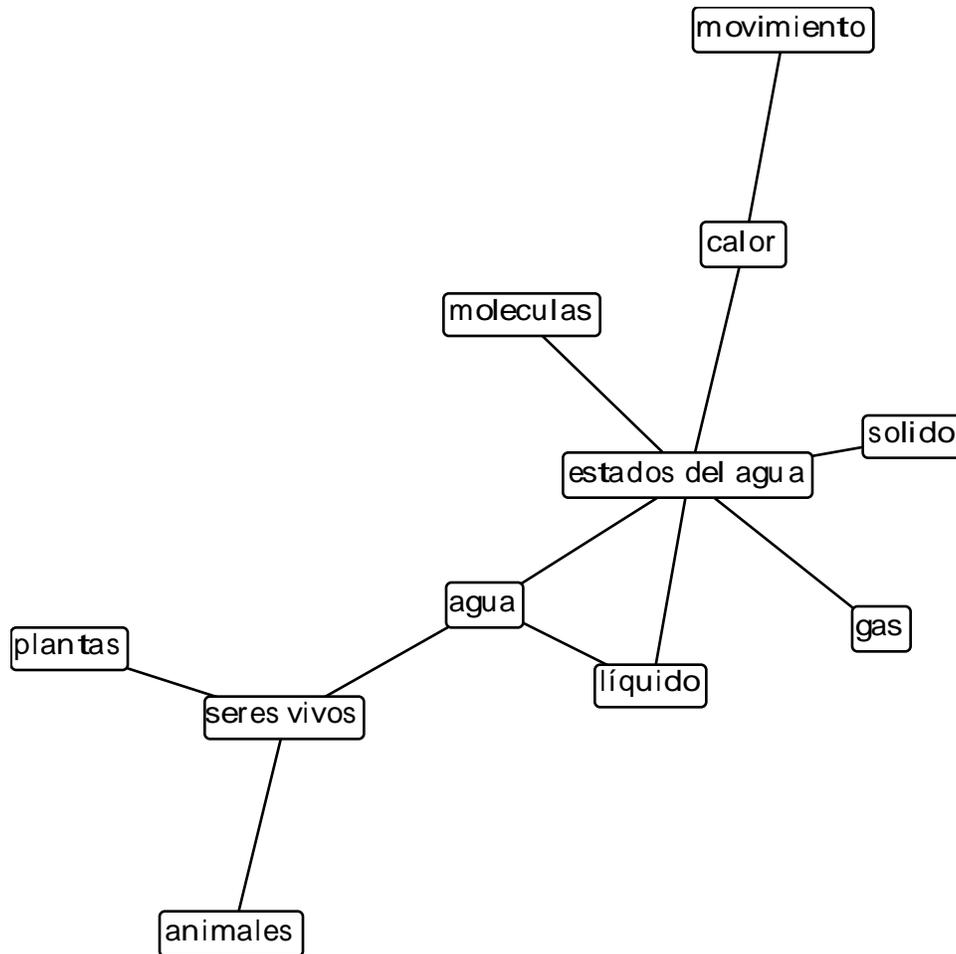


En esta nueva representación, podemos observar que la forma ha variado y que sólo aparecen algunas relaciones más significativas entre conceptos.

Esto es precisamente lo que hace el algoritmo Pahfinder: extraer las relaciones más significativas.

Evidentemente, la estructura de relaciones entre los mismos conceptos en diferentes sujetos varía, por distintas razones. A causa de ello, la matriz que representa la proximidad entre los datos es diferente. Utilizando los datos de otros alumnos, podríamos obtener representaciones como las siguientes:





Todas ellas han sido obtenidas en experimentación con nuestros alumnos y corresponden a representaciones de las relaciones entre los mismos conceptos, pero vistas desde puntos de vista diferentes. No podemos decir que ninguna sea incorrecta, puesto que todas tienen una estructura lógica. En todas aparecen algunos nodos, precisamente los de “seres vivos” y “estados del agua” que parecen ser los más importantes, pero hay diferencias de detalle con las relaciones entre los demás conceptos.

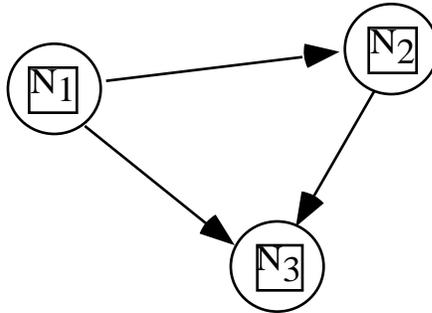
Una vez hemos visto aunque sólo para hacernos una idea superficial de lo que son las redes Pathfinder, trataremos detalladamente la construcción de estas redes. Para ello, en parte, seguiremos a Schvaneveldt (1.989).

3.2.- Construcción de Redes Asociativas Pathfinder

Una red asociativa consiste, básicamente, en un conjunto de conceptos N_i (los nodos de la red) relacionados por enlaces (llamados aristas) que pueden ser dirigidos o bidireccionales.

Los enlaces (aristas) tienen un “peso” asociado w_{ij} que indica la “fuerza” con que se relacionan dos conceptos o nodos N_i y N_j .

Si tenemos tres conceptos (o nodos) N_1 , N_2 y N_3 , relacionados entre ellos, y dispuestos en esta forma:



tendremos un “sendero” P , formado por la arista que va de N_1 a N_2 y la que va de N_2 a N_3

Para el caso de las Redes Asociativas Pathfinder, el peso de este sendero, y por tanto el peso de la arista que uniera directamente a N_1 con N_3 , se calcula según la fórmula

$$W(P) = (w_{12}^r + w_{23}^r)^{1/r}$$

donde r es un parámetro que puede ser variado y cuya utilidad veremos más adelante.

Observemos, por ahora, que cuando $r = 1$, la fórmula se reduce a:

$$W(P) = (w_{12} + w_{23})$$

o sea, la suma de los pesos de las dos aristas, y que cuando $r = 2$, se convierte en:

$$W(P) = (w_{12}^2 + w_{23}^2)^{1/2}$$

es decir, la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los pesos de las aristas.

En general, para Redes Asociativas Pathfinder, el peso de un sendero con pesos w_1, w_2, \dots, w_k en sus enlaces, es determinado por la métrica “ r ” de Minkowski :

$$W(P) = \left(\sum_{i=1}^k w_i^r \right)^{1/r}$$

donde $r \geq 1, w_i \geq 0$ para todo i

Para el caso particular de $r =$ infinito, el peso del sendero resulta ser el máximo peso asociado con cualquier enlace a lo largo del sendero, pues el límite cuando r tiende a infinito

de esta expresión que indica la distancia es igual al máximo de los pesos que se introducen en ella. La demostración matemática excede a los límites de este trabajo.

Este último caso es particularmente interesante, pues al calcular el peso de un sendero utilizando sólo el máximo de los pesos de los enlaces incluidos en él, se recurre sólo un criterio de orden, con lo cual, pueden utilizarse medidas que no están en escala de razón, caso éste habitual en los conceptos que manejamos en Psicología o en Pedagogía. Así pues, para datos que sólo puedan expresarse en escalas ordinales, utilizaremos para los cálculos $r =$ infinito

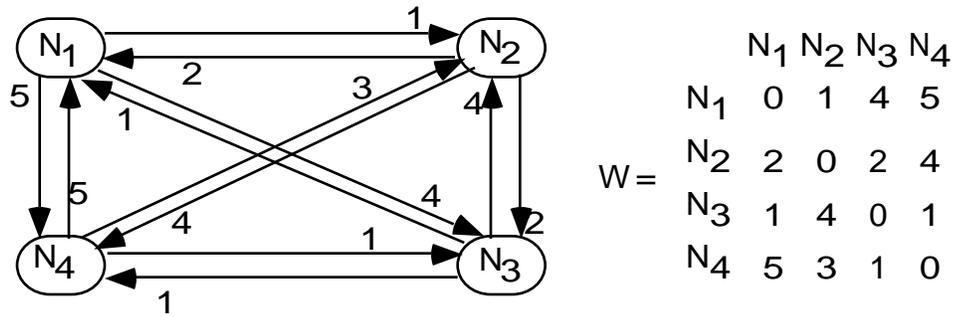
La regla para establecer cuáles son los enlaces que se mantienen y cuáles se eliminan es la siguiente:

1. Se define una red consistente en todos los nodos (conceptos) N_i , pero sin enlaces.
2. Se ordenan todos los elementos e_{ij} de la matriz de datos de proximidad en orden ascendente de su peso asociado w_{ij} .
3. Se considera cada e_{ij} y se incluye e_{ij} en la Red Asociativa Pathfinder con parámetros "r" y "q", que denominaremos de aquí en adelante PFNET (r,q), si y sólo si e_{ij} proporciona un sendero desde N_i a N_j que tiene un peso por lo menos tan pequeño como el peso de cualquier otro sendero que tenga no más de q enlaces, es decir que un enlace se quita si hay un sendero con un peso menor, siempre que ese sendero no tenga más de "q" enlaces, usando la métrica "r" para calcular los pesos de senderos de múltiples enlaces.

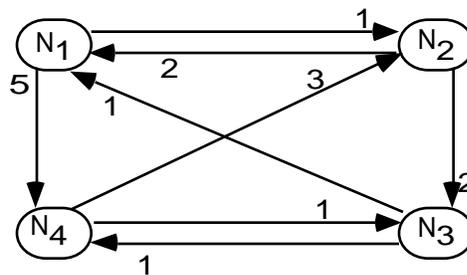
Como ejemplo, consideremos la siguiente matriz de pesos:

$$W = \begin{array}{c|cccc} & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ \hline N_1 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ N_2 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ N_3 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ N_4 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

para los nodos N_1, N_2, N_3 y N_4 , la red completa, con todos los enlaces, es la mostrada en la figura 1.



Sea $r = 1$ y $q = 2$. Aplicando la regla para establecer enlaces, se obtiene la figura siguiente, que sería la PFNET ($r = 1, q = 2$):



Visto en detalle, lo que el procedimiento hace es:

- 1.- Establece los 12 (16-4) enlaces posibles entre nodos distintos.
- 2.- Los ordena en orden creciente de pesos.
- 3.- Se calculan los distintos senderos que enlazan los distintos nodos y se eligen los enlaces que tengan menores pesos, y además respeten la desigualdad del triángulo, es decir, que un enlace directo de un nodo a otro ha de tener menos peso que un sendero indirecto.

A continuación lo que hace es:

- Enlaces de peso 1:

$e_{12}, e_{31}, e_{34}, e_{43}$ éstos se eligen todos, porque no hay senderos alternativos más cortos.

- Enlaces de peso 2:

e_{21}, e_{23} también se eligen todos por la misma razón.

- Enlaces de peso 3:

e_{42} también se elige porque no hay otro sendero más corto.

- Enlaces de peso 4:

e_{13} no se elige porque el sendero e_{123} es más corto.

e_{24} tampoco porque e_{234} es más corto.

e_{32} tampoco porque e_{312} es más corto.

- Enlaces de peso 5:

e_{41} no se elige porque e_{431} es más corto.

e_{14} no se elige ya que su peso empata el peso del sendero P_{124} , aunque el enlace e_{24} no está él mismo en la red; si estuviera en la red, se violaría la desigualdad del triángulo para el sendero alternativo P_{234} . Esto es claro, ya que el sendero P_{24} no puede ser más largo yendo directamente de N_2 a N_4 que haciéndolo a través de N_3 . En el primer caso la matriz da el valor 4 y en el segundo caso da como valor $2+1=3$. Por eso se elimina P_{24} y se deja P_{234} . En eso consiste no violar la desigualdad del triángulo. El sendero P_{1234} tiene menos peso, pero no se compara con e_{14} ya que tiene tres aristas y para este ejemplo asumimos que $q=2$.

Esta sería, pues, la Red Asociativa Pathfinder obtenida con los parámetros $r=1$ y $q=2$ PFNET ($r=1, q=2$).

Si los parámetros q y r varían se obtendría una red diferente. Este detalle es de importancia, y merece la pena detenerse un tanto en explicar su alcance.

Con respecto al parámetro “ r ”, como ya dijimos antes, y dada la métrica utilizada por el procedimiento Pathfinder, determina la forma de calcular los pesos de los senderos. Su importancia práctica radica en que, eligiendo $r=$ infinito, podemos utilizar datos que no estén medidos en escalas de razón. Evidentemente, la proximidad que un sujeto estima que existe entre dos conceptos, no se mide en una escala de razón, por lo que estamos en el caso adecuado para utilizar dicho valor de “ r ”. Si disponemos de datos en una escala de razón, podremos utilizar cualquier otro valor.

Por lo que respecta al parámetro “ q ”, su finalidad es limitar el número de enlaces que están presentes en la red, es decir, hacer las redes más o menos sencillas.

Si de nuevo observamos la explicación anterior acerca de la elección del enlace e_{14} para formar parte de la red, veremos que, con un valor del parámetro $q=2$ a la hora de garantizar que se conserva la desigualdad del triángulo, solamente tenemos en cuenta senderos formados por dos enlaces. De esta forma, es posible que se viole la desigualdad del triángulo con senderos de más de dos enlaces. Si aumentamos el valor de “ q ” obligamos a que las condiciones sean más restrictivas por lo que respecta a la conservación de la desigualdad del

triángulo: habrá menos senderos que la cumplan, y en general, habrá menos senderos en la red. El resultado será una red más sencilla.

Si se quiere que en una red con “n” nodos sólo aparezcan los enlaces más importantes, se utiliza $q = n - 1$, que es el número máximo de enlaces de un sendero no cerrado. Disminuyendo q , aumenta la complejidad de la red.

3.3.- El Programa KNOT

Existen varios algoritmos de cálculo, muchos de ellos implementados en ordenador, que permiten realizar todo el proceso anteriormente descrito, de forma automática. Uno de ellos es el empleado en el programa KNOT (Knowledge Network Organizing Tool), desarrollado en la Universidad de Nuevo México por Schvaneveldt y cols.(1.989). En nuestro estudio hemos utilizado la versión para Macintosh (KNOT Mac).

Para producir y presentar en pantalla estas redes, KNOT emplea dos algoritmos:

1.- El algoritmo Pathfinder, que, mediante un procedimiento iterativo lleva a cabo los pasos que hemos explicado en el apartado anterior, y que es el que permite seleccionar cuáles son los enlaces que van a formar parte de la red, en función de los parámetros “r” y “q”.

2.- El algoritmo “Spring Embedding” (enclavamiento elástico) de Kamada y Kawai (1.989).

Es un procedimiento de diseño gráfico que calcula las posiciones de los nodos y aristas de una red, de una forma automática y con arreglo a ciertos criterios estéticos, de los cuales los más importantes son la minimización de puntos de cruce y solapamiento de nodos, la presentación de simetrías y la cercanía de los nodos relacionados.

La idea del procedimiento es simular un proceso físico: los nodos de la red se consideran como cargas eléctricas del mismo signo, mientras que las aristas se consideran como muelles que las unen. Mientras las cargas eléctricas tienden a repelerse, los muelles tienden a unirlos. La fuerza de las cargas depende del número de enlaces que lleguen a ellas. La fuerza de los muelles también es diferente (y en nuestro caso depende del peso de las aristas, que reflejan, como sabemos, la proximidad de los conceptos). Los nodos se mueven de acuerdo con las fuerzas y llegan a posiciones estables cuando cada fuerza se compensa con las demás y el sistema está equilibrado si la suma de energías es mínima.

El algoritmo lo que hace es partir de una posición inicial arbitraria, simular los movimientos de los nodos y calcular la energía del sistema en dicha posición. A continuación va cambiando las posiciones de forma iterativa hasta que consigue una posición de energía mínima establecida de antemano. En ese momento, el procedimiento se detiene y los nodos quedan “enclavados” (de ahí el nombre del procedimiento) en la posición que tuvieron.

El algoritmo Pathfinder determina los enlaces que se forman en la red y el algoritmo Spring Embedding proporciona las coordenadas de los nodos.

3.3.1.- El trabajo con el programa Knot

Existe en este programa la posibilidad de hacer una utilización simple o, por supuesto, una más completa.

La opción más simple nos permite representar las Redes Asociativas Pathfinder a partir de datos de proximidad. También nos permite calcular características importantes de las redes, tales como su coherencia y la similaridad entre dos de ellas, tal como veremos más adelante.

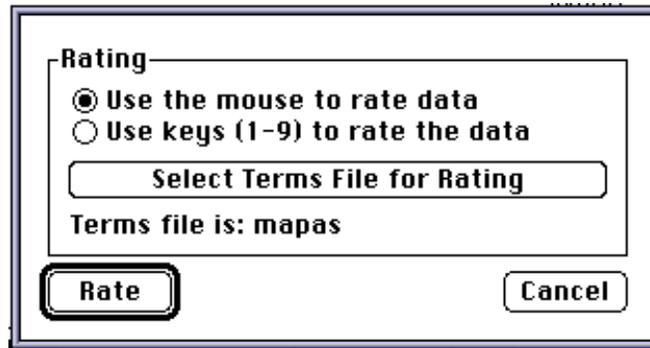
En la opción avanzada, permite no sólo crear representaciones en forma de Redes Pathfinder, sino también en la forma que utiliza la técnica de Escalamiento Mutidimensional. Permite también modificar ciertas características de las redes y de los datos de entrada.

Si solamente se desea utilizar la opción más simple, como es el caso que trataremos, el procedimiento de trabajo es muy sencillo. Los pasos a seguir son los siguientes:

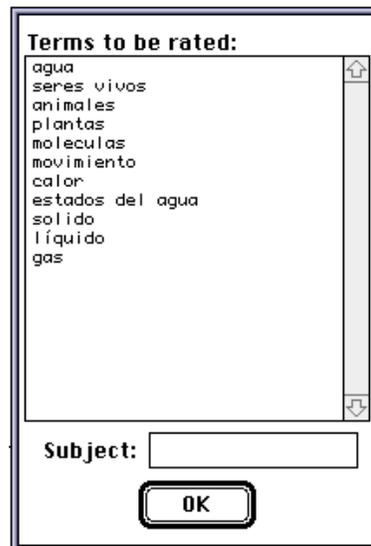
3.3.1.1.- Asignación de valores de proximidad entre conceptos.

En primer lugar, hay que crear, con cualquier procesador de texto, un fichero llamado fichero de términos donde se escriben, separados por retornos de carro, tan sólo los nombres de los nodos (los conceptos que queremos relacionar). Este fichero se guarda como sólo texto y se le da un nombre cualquiera que termine con la extensión “.trm”. Por ejemplo si trabajamos con conceptos relacionados con los mapas conceptuales, podemos dar por nombre al fichero “mapas.trm”.

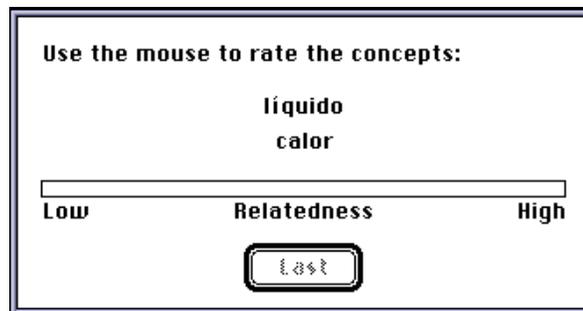
A continuación se abre el programa KNOT, y en el menú Data se elige la opción Rate.



Una vez que hemos seleccionado el fichero de términos que hemos creado, aparece una ventana en la que pide el nombre del sujeto que va a trabajar.



Después se van asignando los valores de proximidad entre conceptos, según el programa nos los va presentando de forma aleatoria.



El programa presenta todas las posibles parejas de conceptos y, mediante el ratón o utilizando las teclas numéricas, nos pide que asignemos un valor de proximidad que estimemos existe entre los conceptos presentados.

Cuando ha emparejado todos los conceptos, el programa se bloquea (para que el sujeto que está realizando la experiencia no pueda modificar datos y tenga que llamar al experimentador). Se desbloquea pulsando a la vez las teclas comando y punto.

El programa pide después si se quiere seguir con otro sujeto. Si es así, el proceso se repite. Cuando se ha terminado, al final se guardan los datos.

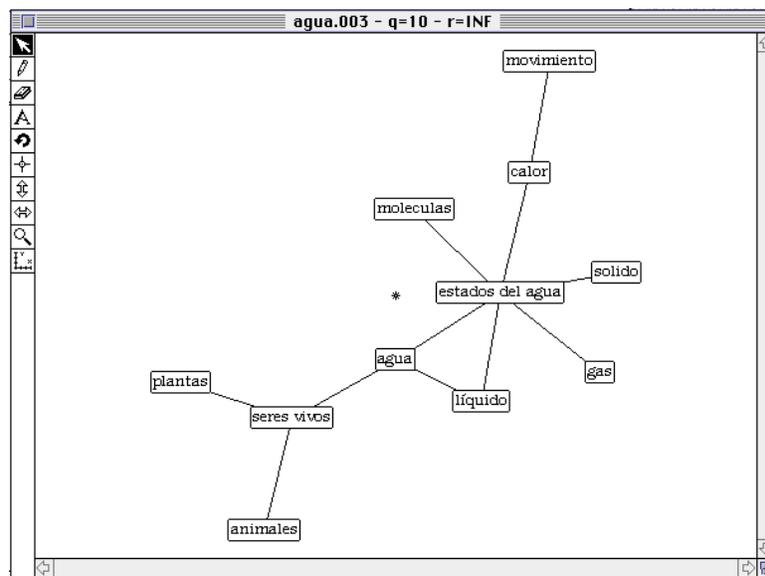
3.3.1.2.- Almacenamiento de los datos de proximidad.

El programa va asignando a cada fichero nuevo un número correlativo, tal que si, por ejemplo el fichero de términos se llama mapas.trm, el primer fichero que produce se llama "mapas.001", el segundo "mapas.002", y así sucesivamente.

Estos ficheros son en realidad ficheros de texto y pueden ser abiertos como tales. Contienen información acerca de los datos de proximidad.

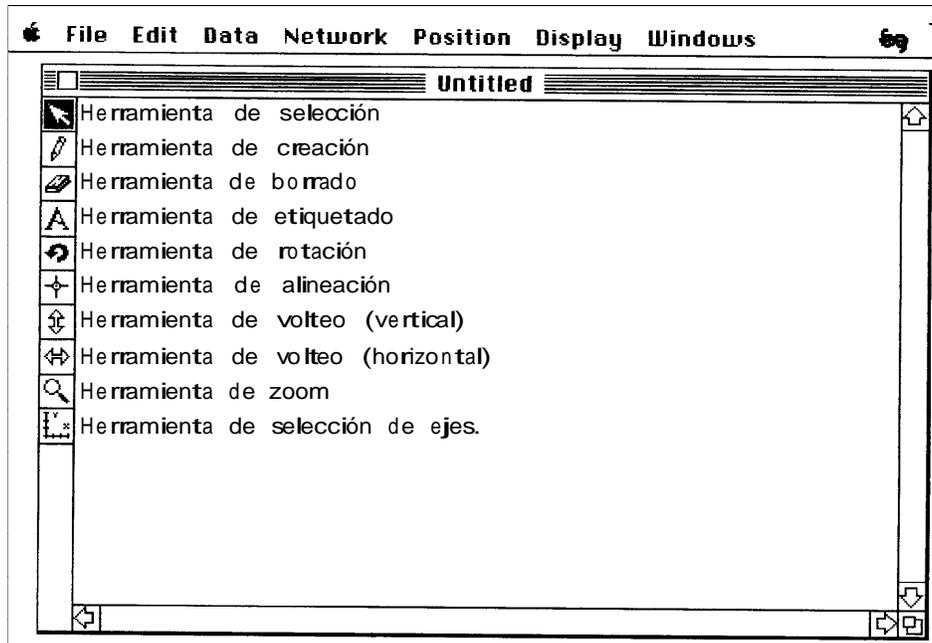
3.3.1.3.- Utilización de los datos de proximidad para crear Redes Pathfinder

Una vez hemos creado los anteriores ficheros, podemos abrirlos y el programa crea, tras un tiempo breve que emplea en calcular las posiciones de los nodos, la red Pathfinder y la presenta en pantalla.



Por defecto, el programa utiliza como valores $q = n-1$, donde “n” es el número de nodos (conceptos) y $r = \text{Infinito}$. Estos valores pueden cambiarse accediendo a las preferencias del programa, en el Menú “Edit”.

La Red obtenida puede retocarse utilizando las herramientas de que dispone el programa, y que son los que aparecen en la siguiente figura:



3.3.1.4.- Almacenamiento de la Red Pathfinder obtenida.

Cuando hemos terminado nuestro trabajo, cerramos la presentación de la Red, y tenemos entonces dos opciones: no guardar el trabajo, en cuyo caso la próxima vez que abramos el fichero de datos volverá a hacer todos los cálculos para representarla, o bien guardarlo.

Como en el caso anterior, KNOT guarda los datos en un fichero de texto, y le da un nombre, con la extensión “.lo”. Por ejemplo en este caso, puede ser “mapas.001.lo”.

Este fichero tiene información no sólo de los datos de proximidad, sino también de la posición de los nodos, de los enlaces que debe haber entre ellos, y, en general, todo lo necesario para representar la red completamente la próxima vez que abramos el fichero.

3.3.2.- Funciones avanzadas con el programa KNOT.

3.3.2.1- Obtención de una red media.

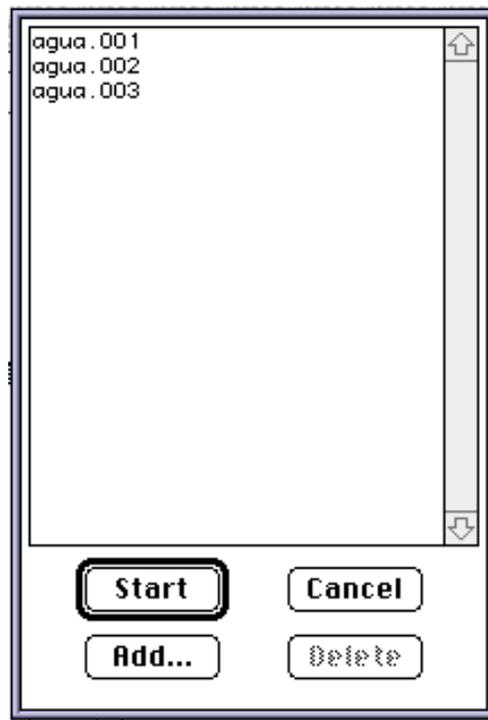
El programa KNOT permite, de una forma rápida calcular la red media de varios sujetos. Para ello utiliza las matrices de datos de proximidad de todos ellos y produce un

matriz única que puede ser representada y tratada como si se tratase de una red obtenida por el procedimiento normal.

Esto representa una interesante posibilidad para la investigación, pues nos permite trabajar con distintos grupos de redes y hacer comparaciones entre ellos. Un ejemplo típico es el de comparar las redes de los alumnos con las de los profesores.

La opción que en el programa permite hacer esto es "Average". Una vez seleccionada esta opción debemos seleccionar cuáles son las redes que queremos utilizar para hacer la media y tras ello se calcula una red media utilizando los datos de las seleccionadas.

Como ejemplo, podemos ver en la siguiente figura la pantalla que aparecería para el proceso de cálculo de la red media de tres redes que hemos denominado: agua.001, agua.002 y agua.003.



3.3.2.2- Cálculo de la coherencia de una Red Pathfinder.

La medida de coherencia de un conjunto de datos refleja la consistencia de éstos. Corresponde a menudo con el grado de experiencia (o grado de aprendizaje), e indica también si la utilización del programa se ha hecho de una manera atenta o bien se ha hecho al azar.

El cálculo de la coherencia se basa en que la relación entre un par de elementos puede determinarse a partir de las relaciones de esos elementos con otros del mismo conjunto.

Dados dos conceptos A y B, si ambos están relacionados en la misma forma con el resto de los conceptos de un conjunto, entonces, A y B deben ser conceptos muy similares.

Por ejemplo, sean los conceptos barco, nave, mar, pesca, agua, tierra, azufre y regadera.

- Barco está muy relacionado con mar, pesca y agua, y nada relacionado con tierra, azufre y regadera.

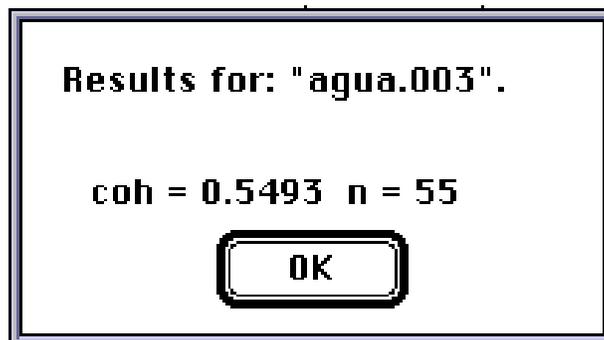
- Nave está muy relacionado con mar, pesca y agua, y nada relacionado con tierra, azufre y regadera.

De esto puede inferirse que barco y nave son dos conceptos muy próximos entre ellos, puesto que tienen exactamente el mismo tipo de relaciones con los demás conceptos del conjunto.

En la medida que comparamos el tipo de relaciones de dos conceptos dados A y B con los demás, podemos predecir si A y B son conceptos próximos. La forma de comparar el tipo de relaciones de A y B es calculando la correlación que existe entre las fuerzas de relación que hay entre A y todos los demás conceptos (menos él mismo y menos B) del conjunto y las fuerzas de relación de B y todos los demás conceptos (menos él mismo y A).

Así se obtiene una medida indirecta que se correlaciona de nuevo con los datos originales de proximidad. Mientras mayor sea el valor de esta correlación obtenida, más consistentes son las proximidades con las relaciones inferidas a partir de las relaciones indirectas entre los items. Mayor es, por tanto, la coherencia.

El proceso a seguir en el programa es sencillo. Solamente hay que escoger la opción "Coherence" en el menú "Data", seleccionar el fichero de datos del que deseamos calcular la coherencia y aceptar las opciones que presenta. Al final obtendremos una ventana como la que sigue, donde "coh" indica el valor de la coherencia, que al ser una correlación, puede oscilar entre -1 y +1, y "n" el número de enlaces en la red.



3.3.2.3.- Cálculo de la similaridad de dos Redes.

La similaridad entre dos redes se determina a partir de la correspondencia de los enlaces entre ellas. La similaridad es el número de enlaces en común dividido por el número de enlaces que hay en las dos redes. Dos redes idénticas proporcionarán una similaridad de 1 y

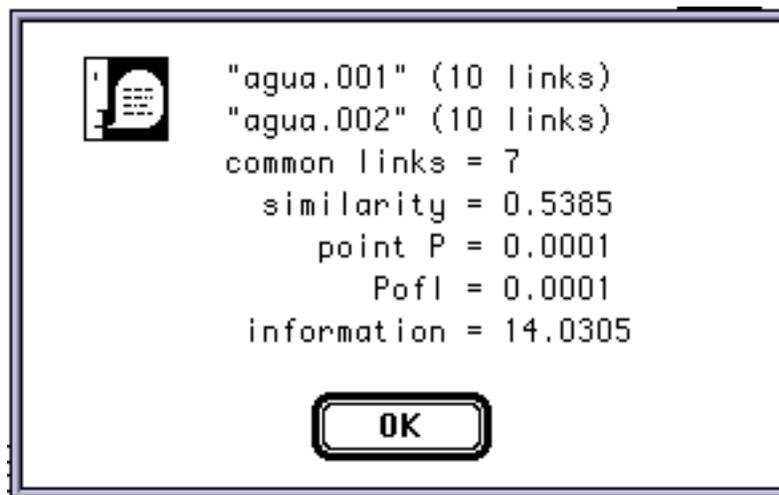
dos redes que no comparten enlaces proporcionarán una similaridad de 0. La medida es la proporción de todos los enlaces en cada red que están en las dos redes.

El programa también proporciona alguna información estadística acerca de la similaridad. La probabilidad punto (Point Prob) es la probabilidad de que dos redes puedan compartir un número dado de enlaces por azar. La probabilidad cola (Tail Prob) es la probabilidad de que dos redes puedan compartir un número dado de enlaces o más por azar. También ofrece otro dato, al que llama "información", y que es el logaritmo en base 2 del recíproco de la probabilidad cola.

La probabilidad cola puede usarse como un test estadístico de la similaridad de dos redes. Según el grado de significación con que estemos trabajando (99% o 95%), estos valores reflejan cuanta mucha (o poca) similaridad tienen dos redes y cuanta podría esperarse por azar.

La similaridad entre dos redes es un dato sumamente útil, pues permite no sólo comparar redes de alumnos entre sí, sino, y esto es lo más interesante, comparar las redes correspondientes a los alumnos con la correspondiente al profesor o a un grupo de expertos.

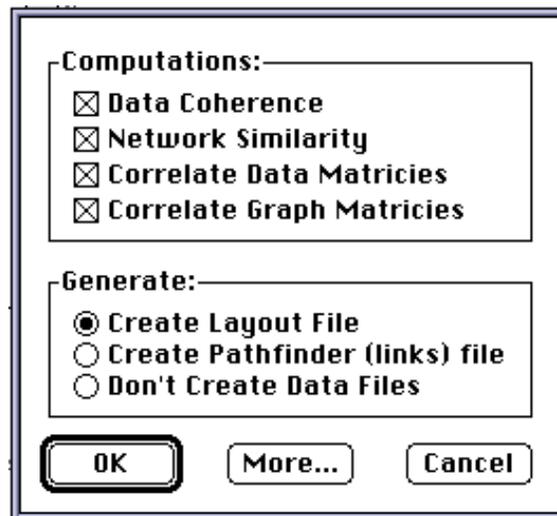
La forma de obtener la similaridad mediante el programa KNOT, es, como en el caso del cálculo de la coherencia, sencilla. Sólomente se trata de elegir la opción "Similarity" en el menú "Network". Después el programa nos pedirá que seleccionemos dos ficheros que contengan el diseño de dos redes (recordemos que son los ficheros que tienen en su nombre la extensión ".lo") y, tras aceptar las opciones que nos presenta, obtendremos una ventana tal como la que aparece a continuación, y que contiene los datos de los enlaces de cada red, el número de ellos que tienen en común, la similaridad y la información estadística que antes referíamos:



Existe otro procedimiento para calcular tanto la coherencia como la similaridad de varias redes entre sí. Utilizando la opción "Batch" en el menú "File", seleccionamos los ficheros de datos (los que van numerados pero sin ninguna extensión) de las redes de las que deseemos obtener información. Siguiendo las indicaciones del programa, obtendremos una pantalla como ésta:



Una vez obtenida, y seleccionando la opción "Start", obtendremos una ventana de información tal como la que sigue:

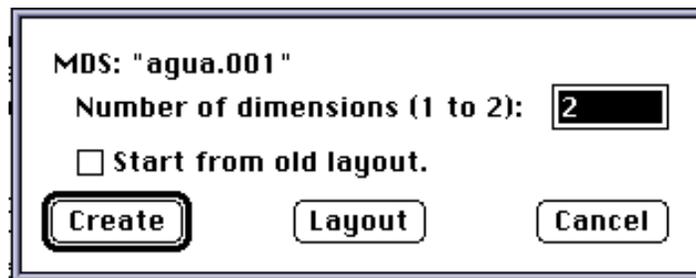


donde seleccionaremos las opciones que deseemos. Tras hacerlo, obtendremos un fichero con los datos deseados. Este fichero, como todos los que utiliza KNOT, es un fichero de texto al que, por defecto llamará "Knot.out" y que puede ser leído y manipulado.

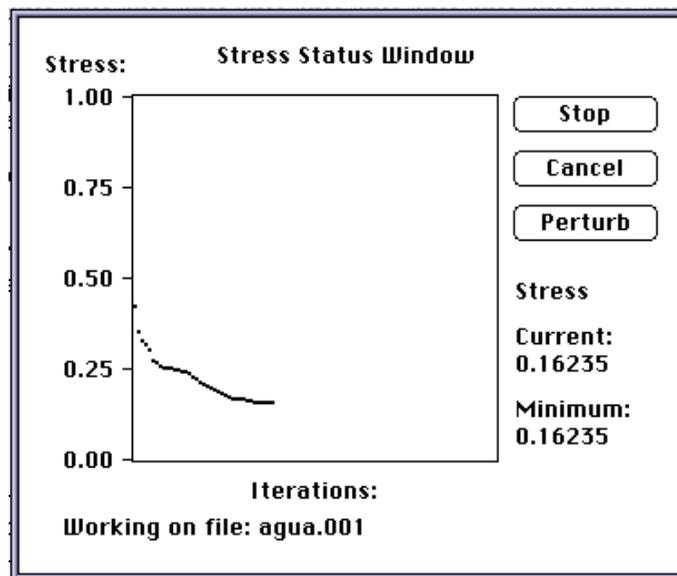
3.3.2.4.-Escalamiento Multidimensional (MDS).

La opción MDS en el menú "Position" calcula una solución de Escalamiento Multidimensional (MDS) para un conjunto de datos. El programa es una implementación del algoritmo de Kruskal (1.964).

Para funcionar, el programa pide que se seleccione un fichero de datos y requiere que especifique el número de dimensiones deseadas (por defecto dos). Se puede seleccionar o bien "Create" o bien "Layout". "Create" producirá un fichero con las coordenadas. "Layout" ofrece un dibujo de la solución MDS.



Aparece un gráfico de la tensión cuando el programa realiza las iteraciones. Cuando la tensión se estabiliza se puede hacer click en el botón "perturb" para permitir al programa seleccionar una mejor solución. Si se hace click en el botón de stop, se usará la solución que se haya calculado en ese punto.



El propio manual del programa KNOT advierte que esta versión de MDS no es muy fiable y que si se están haciendo trabajos serios con dicha técnica, se debe por lo menos comparar los resultados con otros algoritmos.

De todas formas, es útil comparar y complementar los resultados que, para unos mismos datos, obtenemos utilizando Pathfinder o utilizando MDS, pues cada uno tiene unas ventajas para determinados objetivos, tal como indicamos al hablar de ambos procedimientos.

3.4.- Aplicaciones de las Redes Asociativas Pathfinder.

En este apartado queremos hacer una revisión de los artículos e investigaciones que han aparecido en los que se emplean como herramienta las Redes Asociativas Pathfinder.

No haremos nueva mención de aquellos que, a lo largo de este trabajo ya hemos citado con anterioridad, por ser la Bibliografía que podemos considerar “básica”, y entre los que están nuestros propios artículos, tal como aparecen reflejados en el apartado correspondiente, sino que nuestra intención es mostrar una perspectiva de aquello que se está trabajando en los últimos años y que nos permiten hacernos una idea de la actualidad de la investigación en este campo. También permiten hacernos una idea de aquellos campos en que hay poca utilización de esta técnica, y entre los cuales, curiosamente, hemos de incluir la Investigación en Educación en particular.

Para esta revisión hemos efectuado varias búsquedas en las bases de datos más representativas de nuestro campo, encontrado los trabajos más interesantes en la base ERIC. En efecto, ERIC en la actualidad es la mejor y más actualizada base de datos en investigación educativa. Pero no sólo es de gran interés por contener trabajos publicados en revistas de reconocido prestigio de todo el mundo, sino que en los artículos seleccionados podemos encontrar referencias que nos permiten contactar con autores o con otros artículos similares, de los temas que nos interesen.

En la Base ERIC, hemos encontrado trabajos en los que se utiliza la técnica Pathfinder realizados entre los años 1.991 y 1.999, lo cual nos indica la actualidad del tema. A estos trabajos hemos de añadir, naturalmente los que mencionamos en la bibliografía general que adjuntamos.

Hemos utilizado también información obtenida a través de Internet, pues cada vez más se pueden obtener trabajos publicados por este medio. Ejemplo de esto son los artículos de Barab (1.997) y Fowler (1.992) que más adelante comentamos y referenciamos en Bibliografía.

Por último, hemos recurrido en algunos casos a artículos obtenidos directamente de sus autores, en ocasiones aún sin publicar, y que nos han sido cedidos muy amablemente, como corresponde a lo que es una auténtica comunidad científica en que se intercambian conocimientos.

En total, hemos recogido 21 artículos y trabajos de investigación relacionados con las Redes Asociativas Pathfinder, en los que podemos ver que esta técnica ha sido utilizada en diversos ámbitos de investigación, aunque podemos categorizarlos en tres:

- Aplicaciones en investigación básica.
- Aplicaciones a la formación del profesorado.
- Aplicaciones al diseño de productos hipermedia.

3.4.1.- Aplicaciones en investigación básica.

Podemos distinguir dos tipos de investigaciones. En primer lugar están las más antiguas, muy próximas en el tiempo a los primeros trabajos con Redes Asociativas Pathfinder, dedicados a aspectos generales tales como la representación o la similaridad entre estructuras del conocimiento y en segundo lugar aquellas que inciden en la validación de la técnica comparándola con otras al uso, tales como el Escalamiento Multidimensional.

El estudio más antiguo que aparece es de 1.991, de Koubek, R. y Mountjoy, D. "Toward a Model of Knowledge Structure and a Comparative Analysis of Knowledge Structure Measurement Techniques". En él se analiza el modelo propuesto de estructura del conocimiento humano y algunas técnicas disponibles para su estudio: ordenación de tarjetas, análisis de clusters, parrillas de repertorios, Escalamiento Multidimensional, Pathfinder y escalas de similaridad de parejas.

Se trataba de detectar diferencias de estructuras entre dos grupos según su nivel de experiencia en el dominio del trabajo de oficina. Los sujetos fueron 15 secretarias experimentadas y 15 secretarias con no más de un año de experiencia en secretariado.

Los resultados validaron la existencia de dimensiones de todos los modelos, aunque se halló que las capacidades de las técnicas de medida difieren. El análisis jerárquico de cluster fue la técnica más efectiva para detectar diferencias de estructura entre grupos de sujetos.

De la misma fecha (1.991) es el trabajo de Goldsmith, T. y otros "Assessing Structural Knowledge". En él se estudiaron nuevos métodos para representar las propiedades estructurales de un dominio específico del conocimiento. Utilizando el algoritmo Pathfinder se obtuvieron representaciones en redes a partir de los datos de escalas de relación entre

conceptos del dominio de 40 estudiantes, y se estudió la similaridad entre las redes de estudiantes e instructores.

Como vemos en estos dos artículos, la técnica estaba aún en sus comienzos y se trataba de obtener las primeras representaciones del conocimiento en diversos dominios, utilizando las técnicas al uso en la época y lo que entonces era una nueva técnica, Pathfinder.

Posteriormente, en la línea de validación de la técnica Pathfinder están artículos como el de Johnson, P. y otros. (1.994), "Locus of Predictive Advantage in Pathfinder-Based Representations of Classroom Knowledge", que analiza las posibilidades predictivas de la Técnica de Redes Asociativas Pathfinder. Para ello se analiza la relación obtenida entre las redes Pathfinder y los resultados obtenidos en exámenes.

Del mismo año es el único artículo que hemos encontrado realizado por profesores españoles, el de Gonzalvo, P. y otros, de la Facultad de Psicología de Granada, del año 1.994. Su título es "Structural Representations in Knowledge Acquisition. Journal of Educational Psychology". En él se utilizan y comparan las técnicas de Escalamiento Multidimensional (MDS) y Pathfinder para la evaluación de los cambios en la representación estructural de un dominio de conocimiento en 72 estudiantes españoles de Universidad. En él se comparan los resultados obtenidos utilizando las técnicas de Escalamiento Multidimensional (MDS) y Pathfinder. En ambos casos se comprobó que resultaban técnicas válidas utilizables con ciertas diferencias entre ellas.

Del año 1.997 tenemos el trabajo de Sheehan, J. y Tessmer, M. "A Construct Validation of the Mental Models Learning Outcome Using Exploratory Factor Analysis" en el que se estudia el constructo de modelos mentales como estructuras del conocimiento compuestas de conceptos y relaciones entre ellos. Este estudio describe una investigación inicial sobre la validez del constructo de los modelos mentales como indicación de distintos resultados de aprendizaje. El estudio considera la relación entre modelos mentales, conocimiento declarativo, aprendizaje de conceptos, resolución de problemas y rendimiento en resolución de conflictos. Se hizo con 21 estudiantes de primeros años de carrera de Dirección de Operaciones que fueron preguntados acerca de su conocimiento y uso de hojas de cálculo a través de concursos de preguntas de múltiple elección y de preguntas de emparejar, desarrolladas usando el método de recolección de datos de redes asociativas Pathfinder.

Más complejos (en cuanto que integran Pathfinder con otras técnicas de investigación) son los trabajos que se publican a partir de 1.996 y 1.997.

Por ejemplo en el de Cooke, J. y otros (1.996) "Procedural Network Representations of Sequential Data", se describe PRONET (Procedural Networks: redes procedimentales), una técnica integrada de exploración de datos secuenciales, que usa Pathfinder para ilustrar las

interacciones que ocurren entre el usuario, el sistema y los hechos del entorno. Muestra los éxitos y las limitaciones del método mediante dos casos de estudio.

Lo mismo ocurre con el trabajo de Rye, J. y Rubba, P. (1.996) "An Exploratory Study of the Concept Map as a Tool To Facilitate the Externalization of Students' Understandings about Global Atmospheric Change in the Interview Setting", en el que se investiga la efectividad de dos tipos diferentes de entrevistas de conceptos post-instrucción: uno que incluía y otro que no lo hacía un proceso de elaboración de un mapa conceptual como medio para hacer explícita la comprensión conceptual post-instrucción de estudiantes de octavo grado en la asignatura de Física. El estudio también intentaba determinar algún efecto de la adición de la variable independiente, el índice Pathfinder de similaridad de redes de estudiante frente a experto en la predicción de la medida del criterio de acuerdo (ACCORD) creada al efecto. Los descubrimientos indicaron que una entrevista que incluye un proceso de elaboración de mapa conceptual (comparado con una entrevista que no incluye este proceso) no afectaba significativamente a los cambios en la exteriorización de la comprensión conceptual de los estudiantes. Otro descubrimiento fue que el índice de similaridad de Redes Pathfinder tenía validez predictiva para el rendimiento en la entrevista de la medida ACCORD y proporcionaba una destacada medida confirmatoria del grado de qué estudiantes tenían una comprensión post-instruccional ideal.

También el trabajo de Wilson, J. (1998) "Differences in Knowledge Networks about Acids and Bases of Year-12, Undergraduate and Postgraduate Chemistry Students" trata de las diferencias de categorías encontradas en la significación de procesos abstractos, utilizando para ello la técnica Pathfinder y el Escalamiento Multidimensional.

Por último, y en la misma línea de integración con otras técnicas tenemos del año 1.999 el trabajo de Eckert, A. "The network elaboration technique - a computer -based tool for knowledge elicitation" que pudimos consultar en Internet en la Dirección: <http://www.uni-mannheim.de/fakul/erzieh/ls2/mitarbei/eckert/andreas.htm>. (en Diciembre de 1999 pudimos consultarlo, aunque en Mayo del 2.001 no está disponible). En él se presenta un programa (NET) que elabora una red a partir de los datos de proximidad introducidos manualmente por el usuario, a la vez que permite enlazar los nodos con proposiciones, en una manera similar a la que se utiliza al construir los Mapas Conceptuales de Novak (1.988). Aporta también un módulo de análisis de NET que analiza las redes obtenidas y permite evaluar sus características y las similitudes entre ellas.

3.4.2.- Investigación aplicada a la formación del profesorado

En esta línea encontraremos trabajos que tratan de identificar cómo se pueden analizar las estructuras de conocimiento de los alumnos y profesores, en qué manera van evolucionando y cómo se van haciendo más similares conforme avanza el proceso de instrucción. También es usual en este tipo de estudios observar cómo suele ocurrir que la mayor similitud entre estructuras conceptuales alumno - profesor correlaciona con mejores resultados en la evaluación.

Por ejemplo, en el trabajo "Pedagogical Knowledge Structures in Prospective Teachers", de Gómez, R y Housner, L. (1.992) se examina en un formador de profesores experimentado la estructura de su conocimiento de tipo declarativo acerca de la pedagogía y se busca determinar la influencia del formador de profesores en el desarrollo de las estructuras del conocimiento declarativo en los estudiantes incluidos en tres secciones de un curso de métodos de enseñanza de educación física. Se utilizó el algoritmo Pathfinder para hacer un mapa de las estructuras del conocimiento pedagógico del formador de profesores y los estudiantes antes y después de la participación en el curso. La comparación del conocimiento de los estudiantes sobre conceptos clave pedagógicos con los del instructor indicó que el conocimiento de los estudiantes era más coherente y correspondía más cercanamente a la del instructor después de los cursos; la medida final de la correspondencia y coherencia fueron asociados significativamente con el rendimiento del curso.

Del mismo modo, el trabajo "Pathfinder Analysis of Knowledge Structures: An Exploratory Investigation of Math and Science Teacher Educators" de Kokoski, T. y Housner, L. (1.994) fue un estudio exploratorio del contenido específico de las estructuras del conocimiento de tres formadores de profesores, dos de matemáticas y uno de ciencias, en el que se utilizó Pathfinder para describir las estructuras del conocimiento de los educadores de profesores y para determinar cambios en las estructuras del conocimiento de los estudiantes involucrados en una clase de metodología de enseñanza impartida por cada formador. Finalmente se correlacionó la medida de la correspondencia entre las estructuras del conocimiento de los estudiantes y las de los formadores de profesores con los rendimientos de los estudiantes en los cursos. Para dos formadores de profesores, las estructuras de los estudiantes se correspondieron más cercanamente con las de los educadores después del curso que antes. Para un formador de profesores, los estudiantes mostraron pequeños cambios en la correspondencia entre las estructuras del conocimiento. Así, los estudiantes que correspondían más a la estructura de los educadores, obtuvieron mejores notas. Los hallazgos apuntarían a la necesidad de posteriores estudios de la adquisición del conocimiento en estudiantes no

graduados y el proceso asociado con la transmisión de conocimiento en los programas de formación de profesorado en matemáticas y ciencias.

En el artículo de McGaghie, W. (1.996) "Comparison of Knowledge Structures with the Pathfinder Scaling Algorithm" se explora la estructura cognitiva de 13 conceptos de fisiología pulmonar en 112 estudiantes de primer año de medicina y 32 profesores de facultad en tres diferentes grupos de expertos. El propósito era calcular el grado de acuerdo entre los profesores de la facultad, las estructuras de los mapas conceptuales de los estudiantes y comparar la similitud de los conceptos de los estudiantes con los de sus instructores. La hipótesis era que como una consecuencia de la instrucción, las redes de conceptos de los estudiantes se aproximarían a las producidas por los expertos de la facultad. El algoritmo de escalamiento Pathfinder fue usado para trazar un mapa y comparar las estructuras conceptuales de los estudiantes y del personal docente. Los datos mostraron que las formas en que los expertos médicos organizaban sus conceptos no eran necesariamente consistentes. Las escalas de similitud entre tres grupos de expertos (internistas, anesestesiólogos y fisiólogos) era modesta y la comparación entre grupos era más débil que la comparación intragrupos. Los datos hacen mantener la hipótesis de que las redes obtenidas según Pathfinder de los estudiantes comenzarían a aproximarse a la estructura de las redes de conceptos producidas por el profesorado como una consecuencia de la instrucción, aunque la elección de qué red de profesor es la mejor.

Por último en el campo de la interacción de las actitudes y los contenidos educativos, el artículo de Ennis, C. y otros titulado "The Influence of Teachers' Educational Beliefs on Their Knowledge Organization", del año 1.997, informa de un estudio que investiga la influencia de las orientaciones de valor de los profesores sobre su organización del conocimiento para la enseñanza. En él se estudia cómo preparadores físicos en primaria y secundaria completaron un Inventario de Orientación de Valor y el programa de software Pathfinder y hallaron que las estructuras del conocimiento de los profesores fueron similares dentro de las respectivas orientaciones de valores.

3.4.3.- Aplicaciones al diseño de productos hipermedia.

En este ámbito, se pueden observar principalmente dos direcciones de investigación: una dirigida a registrar la utilización de los hipermedia por parte de los alumnos y otra encaminada a mejorar la efectividad de las interfaces de usuario, aprovechando en ambos casos las posibilidades de representación que ofrecen las Redes Asociativas Pathfinder.

En el artículo de Berger, C. y Dershimer, Ch. (1.993) "Using Technology to Measure Change in Students' Science Learning" se utiliza la técnica Pathfinder para construir redes asociativas que reflejan la utilización que un alumno hace de un hipermedia, haciendo uso de los datos de proximidad obtenidos de forma automática a medida que va "navegando" a través de las distintas pantallas del programa.

En la misma línea están otros dos artículos de Jones, T. y Berger, C. (1.995) y Berger, C. y Jones, T. (1.995).

Orey, M. y Nelson, W. (1.994) en su artículo "Visualization Techniques for Examining Learner Interactions with HyperMedia Environments" describen métodos para visualizar y caracterizar las interacciones del usuario con los sistemas hipermedia. Para ello utilizan el algoritmo Pathfinder. Una vez obtenidas las representaciones, se preguntó a seis estudiantes avanzados de escuela media, seis profesores y seis estudiantes de doctorado en Tecnología de la Instrucción sobre cómo clasificar las imágenes y cómo asociarlas con los cursos de los usuarios. Si bien los sujetos no podían generalmente asociar las imágenes con los cursos, fueron capaces de colocarlas en categorías identificables, lo que sugiere el potencial del método para trazar los itinerarios de los usuarios.

En la investigación de Koneman, Ph. y Jonassen, D. (1.994) "Hypertext Interface Design and Structural Knowledge Acquisition" se trata de conseguir un diseño de interfaz de hipertexto basado en el mapa estructural de conocimiento de un experto, con lo cual se pueden evitar problemas de navegación y proporcionar el máximo aprendizaje y ayudar a los nuevos aprendices a desarrollar una estructura de conocimiento más sofisticada, más aproximada a la del experto. Se utilizaron redes Pathfinder para diseñar dicha interfaz.

"Assessing Hypermedia Navigation through Pathfinder: Prospects and Limitations" de Barab, S. y otros (1.996), es un trabajo en el que se evalúa la validez de la técnica Pathfinder para representar y comparar navegaciones individuales a través de un entorno hipermedia basado en ordenador y para generar un itinerario derivado de manera empírica que representa un conjunto de senderos de navegación individual durante la instrucción asistida por ordenador.

El trabajo de Fowler, R. y otros (1.992) presenta un sistema visual para la búsqueda de información bibliográfica, mostrando el tesoro en forma de redes asociativas. Para crear dichas redes se basa en la concurrencia de palabras (que se repiten) en distintos documentos. Esto Lo hace de una forma automática mediante la evaluación de términos adyacentes, que están en la misma frase, que están en el mismo párrafo o que están en el mismo documento. Una vez evaluadas estas distancias entre términos se utiliza el algoritmo Pathfinder para crear el tesoro en forma de redes asociativas.

En la misma línea, el trabajo de Byrne, C. y McCracken, S. (1999) "An Adaptive Thesaurus Employing Semantic Distance, Relational Inheritance and Nominal Compound Interpretation for Linguistic Support of Information Retrieval" presenta un tesoro de un dominio específico que emplea una función de distancia semántica basada en las Redes Pathfinder.

Estos que hemos presentado son los principales enfoques en investigación que hemos encontrado en que se utilice la técnica Pathfinder. Como vemos, existe variedad de ellos, aunque en todos ellos, si observamos, podemos ver que aprovechan las características que, a nuestro juicio hacen sumamente interesante esta técnica:

- Su capacidad de representación gráfica.

En efecto, esta es una importante característica, pues, si bien es sabida la ventaja que la representación gráfica tiene sobre otros métodos de presentación de datos (claridad, sencillez, impacto, ...), tal como podemos ver a diario en ámbitos como el de la comunicación, alejados del tema de investigación que nos ocupa, observamos que existe hoy en día una clara tendencia en aumento dentro del campo de las ciencias sociales a dar preponderancia a este tipo de información . Sociología, psicología y ciencias relacionadas con la educación hacen hoy en día un uso cada vez mayor de las representaciones gráficas para presentar sus resultados, y creemos que esta tendencia irá en aumento en el futuro.

- La facilidad de obtención de datos.

Como en otros apartados hemos hecho notar, resaltamos de nuevo aquí que la forma de obtención de datos en las Redes Asociativas Pathfinder ofrece una ventaja frente a otras técnicas, pues permite la obtención de una gran cantidad de información, que puede ser analizada con diferentes técnicas, y para diferentes propósitos, sin que ello suponga, ni un gran esfuerzo para el investigador, ni por supuesto para el sujeto de investigación.

Capítulo 4

CAPITULO 4

ESTUDIO EXPLORATORIO

4.1.- El problema planteado. Pretensiones.

A la hora de plantear cuál va a ser nuestro tema de investigación, queremos hacer una distinción que consideramos importante aclarar desde el principio. Nuestro trabajo plantea un doble problema de investigación: el objeto de investigación en sí y el problema de abordaje metodológico.

1.- Nuestra primera pretensión es analizar un concepto, el de ángulo y su evolución a lo largo de la escolaridad. Creemos que conocer mejor este concepto puede ser un ejemplo paradigmático de la investigación que se puede hacer con otros temas en Didáctica de las Matemáticas. Este sería el objeto de investigación en sí.

2.- Nuestra segunda intención es además, experimentar una metodología completamente nueva, pues no hemos encontrado en la bibliografía ninguna investigación que se aproxime a este concepto en la forma en que lo hacemos. Este sería el problema de abordaje metodológico.

Nuestra intención es ofrecer no sólo datos e interpretaciones de ellos que permitan conocer mejor la evolución del concepto de ángulo en la mente de los alumnos, sino también aportar a la investigación un nuevo abordaje metodológico que puede ser aplicado no sólo a un posterior estudio en más profundidad de este concepto, sino también a otros similares.

4.1.1.- El objeto de investigación.

El problema que nos planteamos en esta investigación es acercarnos a la forma en que asocia en su mente los conceptos el alumno y de qué modo la complejidad de las asociaciones va evolucionando conforme avanza la escolaridad.

En el apartado 4.2, correspondiente al concepto de ángulo, mostraremos las diferentes aproximaciones teóricas y experimentales que la investigación actual ha llevado a cabo, y que confirman nuestra opinión acerca de la complejidad de este concepto. A lo expuesto en dicho capítulo nos remitimos.

Tal como apuntamos en la introducción de este trabajo, consideramos de gran interés llegar a conocer las estructuras cognitivas del alumno en un tema que, como el del ángulo, es de gran complejidad, y acerca del cual no existe suficiente investigación. Consideramos que podría resultar de gran interés la aplicación al diseño de Unidades Didácticas y en general libros de texto, las conclusiones a las que se llegue en el estudio de este tema.

4.1.2.- El problema metodológico.

La mayor parte de las investigaciones (muy recientes todas), que hemos tenido ocasión de analizar al preparar el Capítulo 3, tienen un abordaje metodológico parecido, pues utilizan como herramienta de investigación la resolución de problemas, el cuestionario o la entrevista.

A partir de cuestionarios o entrevistas más o menos estructuradas o mediante la resolución de una situación problemática, se trata de inferir cuál es la concepción que el alumno de una determinada edad tiene acerca de lo que es un ángulo.

Muchas de estas investigaciones tratan además, de ver cómo va evolucionando este concepto y cuáles son las dificultades que se van presentando a los alumnos en su camino para llegar a dominarlo.

Pero en nuestra opinión, reconociendo el mérito y validez de las mismas, estas investigaciones presentan algunos problemas que señalamos:

1.- Hay, una gran inferencia por parte del profesor para expresar lo que el alumno piensa. Por ejemplo, en los trabajos de Mitchelmore (1.990, 1.996, 1.998, 1.998b) se utiliza el análisis de las situaciones angulares presentadas al alumno para inferir qué relación hay entre los conceptos implicados en cada situación. Pero desde el momento en que el profesor infiere que determinada situación incluye a ciertos conceptos y no a ciertos otros, de forma distinta a como puede estarlo haciendo el alumno, puede haber una modificación de los datos originales que deforma la información y naturalmente, su posterior interpretación.

2.- En la mayoría de las investigaciones nos encontramos con trabajos muy laboriosos, que exigen gran esfuerzo en la recogida de los datos y quizá a causa de ello se hacen, en la mayoría de las ocasiones, con muestras muy pequeñas. Esta circunstancia, no permite ni pretende la generalización de los resultados, aunque sin duda nos aproxima a la comprensión del fenómeno.

3.- El análisis de los datos obtenidos es, casi siempre, de tipo cualitativo, y, de nuevo presenta el problema de la inferencia por parte del profesor para extraer conclusiones de ellos, lo que hace que la variable profesor intervenga con demasiada carga subjetiva a pesar de los procedimientos de triangulación que se utilizan.

En nuestro trabajo pretendemos acercarnos a la resolución de este problema desde una óptica sustancialmente diferente, y para ello necesitaríamos un instrumento que:

1.- Nos permitiera obtener una representación de las asociaciones entre conceptos tal como el alumno las percibe, con la mínima interferencia posible por parte del profesor, pues ésta supone un gran peligro de contaminación de los resultados.

2.- Nos proporcionara con cierta economía de esfuerzo y medios, una cantidad aceptable de datos, de modo que, con una muestra suficientemente representativa pudiéramos generalizar resultados.

3.- Dispusiera de un procedimiento para analizar los datos obtenidos de una manera que pudiera cuantificarlos, compararlos y representarlos de manera que la información obtenida fuera fácilmente interpretable.

La metodología que proponemos, las redes asociativas Pathfinder, junto con el Índice de Complejidad de Redes que hemos diseñado al efecto, y que más adelante describiremos, nos permiten razonablemente cumplir las expectativas planteadas.

En esto creemos que nuestro trabajo supone una aproximación totalmente diferente de las que hemos visto en otros autores, pues supone la utilización de una metodología y unos instrumentos distintos en cuanto a recogida e interpretación de datos.

4.2.- El tema objeto de estudio: El concepto de ángulo.

4.2.1.- El tratamiento del concepto de ángulo: definiciones, ejemplos y práctica educativa.

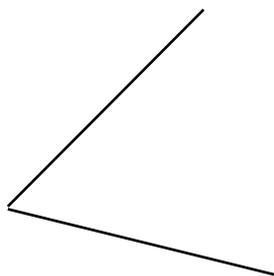
El concepto de ángulo está lleno de matices y dificultades; comprender cómo se origina, se interioriza y se relaciona con otros conceptos matemáticos no es tarea fácil y no se encuentran, al menos en nuestro ámbito, muchos trabajos de investigación que aborden este problema.

Creemos que su principal interés radica en que, siendo un concepto aparentemente tan simple, está en la base, primero de la percepción espacial del mundo que nos rodea, y después, de muchos conocimientos en Geometría. Como la mayor parte de los conceptos a los que llamamos "simples" resulta ser un concepto difícil de aprender y, por tanto, de enseñar. De tales cuestiones trataremos en este apartado.

En nuestra práctica educativa, con alumnos de Primaria, hemos encontrado que, efectivamente, este es un tema que se presta a numerosos errores, debidos en la mayoría de los casos, a una deficiente conceptualización. Errores relativamente frecuentes en estos alumnos son confundir medida del ángulo con medida de los lados que aparecen en su representación gráfica, no reconocer el ángulo recto cuando cambia de posición, no identificar el giro como ángulo, etc. Todos estos errores son posteriormente origen de las dificultades que los alumnos de Secundaria presentan cuando llegan al estudio de la trigonometría, donde es necesaria una comprensión profunda del tema.

Aún más llamativo llega a ser, como estamos detectando en un trabajo de investigación que, en estos momentos realizamos con alumnos de Universidad (incluso de la carrera de Matemáticas), que, a pesar de años de enseñanza sigan arraigados en ellos conceptos que son incompletos, y con numerosos errores e inconsistencias.

Un ejemplo sencillo puede bastarnos para introducirnos en la dificultad del concepto.
¿Cuánto mide este ángulo?



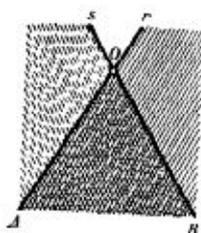
No hay una única respuesta. Este ángulo puede medir 60° . Pero también puede medir 300° , y lo mismo puede ser -60° o -300° . Pudiera ser que también midiera 420° . Pero, además, si lo miramos desde el punto de vista de la programación LOGO, un autómatata que lo recorriera debería girar en el vértice 120° o -120° . ¿Cuál es la medida correcta?

4.2.1.1.- La definición del concepto de ángulo.

Una primera visión de las distintas ideas englobadas en el concepto de ángulo nos la dará la propia dificultad que encierra su definición.

Existe un primer tipo de definiciones que considera a los ángulos como conjuntos de puntos o porciones del plano. Trataremos esta concepción más extensamente que las siguientes, pues es la más difundida y la que suele adoptarse en la mayoría de los libros de texto. Tomemos la definición de Severi (1.962), libro ya clásico que ha inspirado a otros muchos autores posteriores.

“... conjunto de los puntos comunes a dos semiplanos, de un mismo plano, cuyos contornos se encuentran en un punto”. Severi (1.962).



Esta definición, aunque parece tan simple, tiene algunas dificultades. En primer lugar, por sí sola no define a un único objeto, sino al menos cuatro objetos diferentes, cuatro ángulos, con lo que la única forma de saber a qué conjunto de puntos nos referimos es señalándolo de un modo especial en el dibujo, por ejemplo mediante la intersección de pequeños trazos paralelos, pues la definición, por sí sola, no lo aclara.

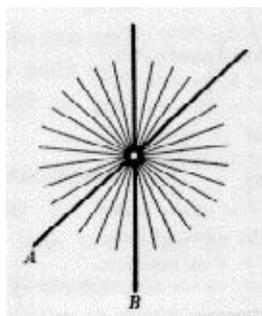
Otra dificultad es que esta definición no sirve para todos los tipos de ángulos que conocemos, sino sólo para unos pocos.

Según esta definición ¿cómo se entiende un ángulo de 0° ? ¿y un ángulo de 180° ? ¿y el de 360° ? ¿y los ángulos de más de 360° ?

Y en el caso de ángulos como el de -45° , esta definición no tiene sentido.

En el mismo libro de Severi (1.962), anteriormente citado, se propone una segunda definición: ángulo como conjunto de semirrectas. Refiriéndose a la definición anterior de ángulo como conjunto de puntos añade:

“Puesto que estos puntos se pueden distribuir en infinitas semirrectas de origen O, (el vértice) interiores al ángulo, el ángulo puede considerarse del mismo modo como conjunto de estas semirrectas”



En un sentido estricto, esta definición es una definición circular, pues según ella, ángulo sería el conjunto de semirrectas interiores al ángulo.

Sólo con profundizar algo más, podemos seguir viendo otras dificultades que encierra esta definición.

Por ejemplo, que no diferencia lo que es el ángulo cóncavo del ángulo convexo, sigue expresando Severi:

“Sea AOB un ángulo dado y (α) el plano que lo contiene. El conjunto de los puntos de (α) exteriores a AOB, y de los puntos de los lados OA y OB, se llama ángulo cóncavo, y se dice que OA y OB son sus lados y O el vértice.

Para distinguir el ángulo cóncavo AOB, del ángulo AOB primeramente definido, este último se llama ángulo convexo.”



De esta lectura se interpreta que hay dos ángulos con el mismo nombre: el AOB cóncavo y el AOB convexo. No podríamos hablar entonces del ángulo AOB, sino de “los ángulos AOB”. Y esto mismo resulta siempre que estamos hablando de un ángulo cualquiera: en realidad estamos hablando siempre de dos ángulos, el cóncavo y el convexo.

No solamente hay varias definiciones para la misma cosa (el ángulo), sino que la misma definición se refiere a dos objetos diferentes. La situación anteriormente expuesta siembra dudas en los alumnos, generando conceptos “borrosos”, y es un dato a tener en cuenta cuando tratemos de comprender sus errores y dificultades en el manejo de los ángulos.

Desde un punto de vista conjuntista, Roanes, E. (1.973) considera el ángulo, como un conjunto de puntos del plano, aunque recurriendo previamente a la noción de “región angular”. Este tipo de definición está muy extendida, y ha llegado hasta los libros de texto para escolares, que comienzan definiendo lo que es una región angular para, de una forma poco clara en la mayoría de los casos, pasar a hablar de ángulo, haciendo parecer tales nociones como sinónimas.

Mucho más preciso, como corresponde a un manual universitario, que como lo hacen los libros de texto, Roanes (y otros muchos autores) a partir de la definición de región angular, definirá más tarde lo que es “ángulo general” como las clases de equivalencia de las regiones angulares, por lo que todo lo se diga de las regiones angulares puede aplicarse a los ángulos:

“En resumen, se llaman regiones angulares a los siguientes subconjuntos del plano:

- a) las semirrectas (que llamaremos regiones angulares nulas).

b) a la intersección de dos semiplanos, cuyas rectas bordes se cortan (que llamaremos regiones angulares convexas).

c) a los semiplanos (que llamaremos regiones angulares llanas).

d) a la unión de dos semiplanos, cuyas rectas bordes se cortan (que llamaremos regiones angulares no convexas)

e) a todo el plano (que llamaremos región angular completa).”

Más adelante, como hemos dicho, define unas clases de equivalencia entre las regiones angulares, y a partir de ellas define el ángulo:

“Cada clase así formada, se llama una región angular general o, más brevemente un ángulo general, e incluso un ángulo.”

Como podemos ver, la definición de Roanes, trata de evitar varios de los inconvenientes de las definiciones anteriores. Como no servían para ángulos de 0° , define éstos como una semirrecta.

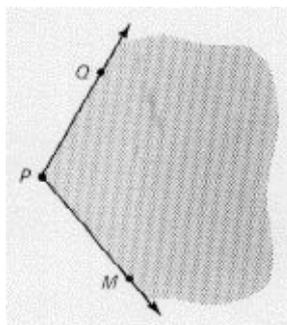
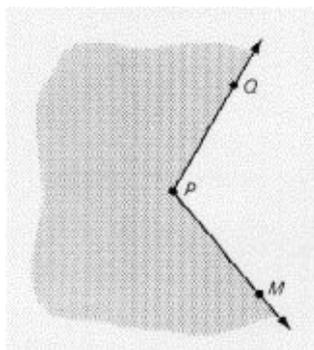
Sin embargo, decir que un ángulo de 0° es una semirrecta puede parecer a los alumnos una idea algo confusa. Y lo mismo ocurre cuando define como semiplanos a las regiones angulares llanas.

Parece más adecuada la definición que propone para diferenciar entre ángulos cóncavos y convexos, y para ángulos completos, aunque aquí, también la idea puede parecer confusa a los alumnos.

Hay otras limitaciones para ángulos de más de 360° y para ángulos negativos ¿Cómo se entiende un ángulo de más de 360° ? ¿Cómo se entiende un ángulo negativo?.

En la misma línea que las definiciones anteriores está la propuesta por Lang, S. y Murrow, G. (1.983):

“ Consideremos dos rayos R_{pq} y R_{pm} que parten del mismo punto P. Estos rayos separan el plano en dos regiones tal como se muestra en la figura:



Cada una de esas regiones se llamará ángulo determinado por los rayos”.

Tras este texto, Lang y Murrow incluyen una nota que consideramos de interés, pues nos introduce en la concepción de ángulo como par de rayos. Y de paso nos señala algunas de las limitaciones que también ésta tiene:

“Nota. Puede que usted esté más familiarizado con la definición de ángulo como “la unión de dos rayos que tienen un vértice en común”. Hemos elegido una notación diferente por dos razones.

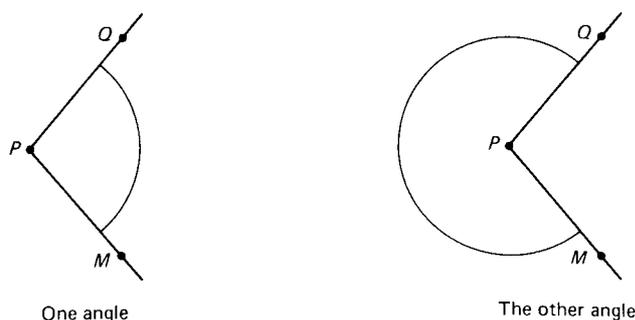
Primeramente, las personas tienden a pensar en uno u otro lado de los rayos cuando unen dos como hemos dibujado anteriormente; no piensan de una forma neutral. Segundo y más importante, cuando más tarde queremos medir ángulos y asignamos un número a un ángulo, como cuando queremos decir que un ángulo mide 30° o 270° , adoptando la definición de ángulo como un par de rayos quizá no proporcionemos la suficiente información para tal efecto y quizá necesitemos ofrecer información adicional para determinar la medida que corresponde.”

Efectivamente, hace referencia a la concepción de ángulo como “par de rayos que tienen un vértice en común”. Esta concepción es análoga a otras que podemos encontrar, y que consideran al ángulo como un par de semirrectas con origen común.

La diferencia en este caso es que no se centra en la región del plano comprendida entre las dos rectas que se cortan, sino en tales rectas.

Como hemos podido ver en la cita anterior, esta concepción tiene también sus limitaciones: las referidas a la identificación de a qué ángulo nos estamos refiriendo. Y esto es importante, porque puede dar lugar a confusiones, sobre todo en los alumnos que comienzan su aprendizaje.

Tiene una dificultad adicional y es que, si consideramos el ángulo como par de semirrectas que confluyen en un punto ¿cómo se define un ángulo cóncavo o un ángulo convexo? ¿y cómo se diferencian los dos ángulos que se forman en el vértice? ¿y un ángulo negativo? Para hacerlo hay que recurrir a ayudas en el dibujo, tales como los pequeños arcos que suelen añadirse, a veces con flechas en el extremo, y que podemos observar del gráfico tomado de Lang y Marrow (1.983).



Un tercer tipo de definiciones son las que a partir de dos líneas que se unen en un punto definen ángulo como “la cantidad de giro necesaria para trasladar una línea a la posición de otra”, o más simplemente “la cantidad de giro entre dos líneas alrededor de un punto común”. De este tipo son las mencionadas en Mitchelmore (1.996).

Este tipo de definiciones son menos frecuentes en los libros de texto utilizados en nuestro entorno, pero cuando se trabaja la Geometría con LOGO se utiliza ampliamente esta concepción del ángulo como giro, tal como podemos ver en Abelson (1.981) y Luengo (1.997) y es precisamente la que se emplea cuando los alumnos comienzan a estudiar trigonometría y se recurre a la circunferencia trigonométrica.

Las definiciones de este tipo no presentan los problemas que tienen las anteriores a la hora de considerar ángulos mayores que 360° , permitiendo además la expresión de ángulos positivos y negativos, aspecto este último que de ninguna manera quedaba contemplado en las definiciones que hemos visto antes.

Pero, frente a ellas, la concepción de ángulo como cantidad de giro presenta una diferencia sustancial, y es que no implica algo material, o representable visualmente al menos, como lo puede ser una porción del plano o un par de rectas, sino que es una abstracción que no se conceptualiza fácilmente en edades tempranas, y que tal como sugiere Mitchelmore (1.996) quizá no resulte adecuada para niños pequeños.

Aún podemos seguir con otras consideraciones del concepto de ángulo, tales como las que en su trabajo resume Contreras (1.993). Podemos añadir la de ángulo como inclinación, que toma de Kraimer (1.991) o la de ángulo como rumbo, en el contexto de la aeronáutica, de Magina y Hoyles (1.991). Ambas tienen mucho que ver con la noción de ángulo como par de rayos, por lo que no nos extenderemos más en ellas.

A modo de resumen, podemos decir, pues, que las definiciones de ángulo pueden incluirse en tres categorías principales: la porción de plano comprendida entre dos líneas que se cortan, la unión de dos rayos o semirrectas y la cantidad de giro entre dos líneas que se unen en un punto.

A su vez, éstas, pueden incluirse en dos concepciones más amplias: ángulo estático y ángulo dinámico. Tal como aparecen citadas por Contreras (1.993), Magina y Hoyles (1.991), dan las definiciones siguientes para ambas interpretaciones:

"Para la perspectiva estática, el ángulo es la porción de plano incluida dentro de dos semirrectas en el plano con un punto común. Para la perspectiva dinámica; el ángulo es la cantidad de rotación necesaria para llevar uno de los lados desde su propia posición hasta el otro lado sin salirse del plano que contiene a ambos lados."

Quizá la cuestión más importante, no sea encontrar una definición de ángulo que sea adecuada, sino, como en otros muchos casos, tratar de que sea el alumno el que construya su propio concepto de ángulo. Y que lo construya a partir de las situaciones angulares que se le presentan y va manipulando a lo largo de su escolaridad.

La definición del concepto de ángulo quizá sea un problema sin solución. En palabras de Mitchelmore, (1.998):

“(Los alumnos) Deben llegar a darse cuenta de que es un concepto de ángulo más amplio que la suma de las diferentes definiciones de ángulo. No es posible expresar este concepto en palabras -y si lo fuera no habría tal plétora de definiciones- pero ciertamente implica dos líneas unidas en un punto y alguna relación entre ellas. La relación se expresa de forma diferente en diferentes circunstancias; puede ser, por ejemplo, una cantidad de giro, la inclinación de dos rayos, o lo puntiagudo de una región angular.”

Creemos que es la misma idea expresada por Vasco (1.998):

“ La idea de base es que los conceptos básicos, como el de ángulo o el de número fraccionario, en realidad no tienen ni pueden tener definición verbal precisa, sino que más bien forman una red conceptual, una maraña de nudos y cuerdas que se extiende en el cerebro de manera todavía no dilucidada. “

En ambos casos, los subrayados son nuestros. Tratamos de destacar que, nos encontramos ante un concepto que, aunque fácil en apariencia tiene dificultades ya desde el principio, en su propia definición.

No se trata de dar una definición única y precisa, que quizá a ciertas edades no sea necesaria, sino como de nuevo expresa Mitchelmore (1.990):

“Si se debe dar una definición precisa, no debería ser formal. Debería responder a los tres aspectos (par de rayos, región angular y giro) y cumplir el objetivo de hacer explícitas las diferencias entre estos aspectos y mostrar la aplicabilidad de los conceptos abstractos. En ningún caso debiera ser una limitación del campo de validez o estar orientada a una sola parte de la definición.”

4.2.1.2.- Los ejemplos.

En la práctica de la enseñanza, las distintas concepciones sobre el ángulo se traducen no solamente en las definiciones que antes hemos presentado, sino, y esto es quizá más importante, en los ejemplos que se proponen al alumno, y en los ejercicios que como práctica se le sugieren.

Tal como hacemos en un trabajo anterior, antecedente de éste, Casas y Luengo (2.000) podemos clasificar los ejemplos del siguiente modo:

1.- Angulo considerado como rincón.

A esta representación corresponderían ejemplos del ángulo tales como la esquina de una habitación, el ángulo de un polígono, el ángulo que forman las dos caras de una cuña, un abanico, etc.

2.- Angulo considerado como par de rayos.

Estaríamos utilizando esta representación cuando al hablar de ángulos ponemos como ejemplos las agujas del reloj, los dedos de la mano, el rumbo de una embarcación, y otros similares.

3.- Angulo considerado como giro.

Estaríamos hablando de ángulo como giro cuando utilizamos ejemplos tales como una aguja que gira en una esfera de reloj, la luz giratoria de un faro, o una puerta que se abre. También estamos utilizando este concepto al trabajar en lenguaje LOGO, tal como aparece en Luengo (1992).

Esta es una representación de los ejemplos que más frecuentemente hemos utilizado todos los que nos dedicamos a la enseñanza, y que aparecen en los libros de texto. Posiblemente se nos ocurra algún otro, pero sin duda será muy similar a los anteriores.

Naturalmente, esta clasificación no es única, y muchos ejemplos se pueden solapar en varias categorías. Veamos lo que al respecto indica Mitchelmore (1.990):

“ Desde el punto de vista de un adulto, podríamos considerar que en todas las categorías, de lo que se trata es de dos rayos o de dos direcciones. En el caso del rincón, la zona entre los dos rayos (la región angular) está construida con un material sólido; en el caso de los pares de rayos, la región angular está vacía; y en los giros, los rayos se encuentran primero en una dirección y luego en la otra.

La clasificación, además no es única: en el caso del cruce, alguien puede observar, en lugar de las direcciones de las dos carreteras, la zona entre ellas, con lo que un cruce es un rincón. Puesto que la zona entre una carretera y la horizontal está siempre rellena de tierra, una cuesta también se puede considerar como un rincón.”

No parecen, pues, ejemplos tan claros como a primera vista pudiéramos creer. Y hemos de tener en cuenta que cuando estamos explicando lo que es ángulo a un alumno con uno de estos ejemplos, quizá él no esté captando exactamente los matices que deseamos transmitirle, sino otros distintos.

Cada uno de estos ejemplos, y por supuesto, cada una de las concepciones de ángulo que tratan de transmitir, tienen sus limitaciones, de las que en muchas ocasiones no somos plenamente conscientes.

Cada ejemplo transmite una concepción de ángulo, pero oculta algunos detalles que, de esta manera quizá no se hacen patentes al alumno.

Por ejemplo, si utilizamos como imagen de ángulo la de una puerta que se abre, no podremos hablar, de ángulos más que hasta 180° , a no ser que se trate de una puerta giratoria. Sin embargo, como la puerta puede tanto abrirse como cerrarse, este ejemplo nos serviría para ilustrar el sentido de giro, y por tanto, los ángulos de medida positiva o negativa.

Si en cambio utilizamos el recurso de una aguja del reloj que gira, podemos hablar de ángulos de 0 a 360° . Y también de ángulos de 0 a -360° . Podemos además transmitir la idea de ángulos mayores de 360° , pues el ángulo recorrido por la aguja de un reloj va aumentando conforme pasa el tiempo, sin ningún límite.

Pero si utilizamos el ejemplo de la luz de un faro que gira, podemos explicar lo que son ángulos de 0 a 360° o -360° , según el faro gire en un sentido o en otro, pero no tiene sentido hablar de ángulos mayores de 360° , pues por muchas vueltas que dé el haz de luz, no se amplía la zona iluminada.

Cuando ponemos como ejemplo de ángulo el rincón de una habitación, no tiene sentido hablar de orientación del ángulo, pues no existe diferencia entre el ángulo positivo y el negativo. Lo mismo ocurriría si utilizáramos el ejemplo de un cruce de carreteras, una navaja que se abre o cierra, u otros similares.

Todas estas consideraciones aparecen recogidas en la tabla que reproducimos en la página siguiente, adaptada de la de Mitchelmore (1.990).

Una tercera limitación de los ejemplos es si permiten construir adecuadamente la idea de suma de ángulos. Las siete categorías que aparecen en la tabla anterior permiten construir la suma de ángulos pero en distinta forma en unos y otros.

En efecto, los ángulos considerados como rincones o como giros permiten ilustrar la suma tan sólo colocándolos uno a continuación del otro en el caso de los rincones o realizándolos uno tras otro en el caso de los giros. Pero en todos los sistemas existen ciertas limitaciones, restricciones y particularidades a la hora de realizar la suma, de tal manera que, en algunos casos ha de realizarse de una forma particular, y en otros, el resultado no puede pasar de algunos límites pues no tendría sentido.

Nº	Ambito de Validez	Orientación	Rincón	Par de rayos	Giros
1	$(-\infty, \infty)$	Orientado			1 aguja de reloj. Puerta giratoria
2	$(-360^\circ, 360^\circ)$	Orientado			Rayo de luz de un faro.
3	$(0^\circ, 360^\circ)$	No orientado	Rincón de habitación. Corte transversal.		
4	$(0^\circ, 360^\circ)$ ó $(-180^\circ, 180^\circ)$	Orientado		2 agujas de reloj. Rumbo.	Puerta pendular.
5	$(0^\circ, 180^\circ)$	No orientado	Escuadra	Navaja. Angulo de visión.	
6	$(0^\circ, 180^\circ)$ ó $(-90^\circ, 90^\circ)$	Orientado		Inclinación	Puerta normal
7	$(0^\circ, 90^\circ)$	No orientado	Cuña.	Cruce.	

Supongamos, por ejemplo, que ilustramos con el recurso de las dos agujas del reloj la suma de dos ángulos de 220° y 180° . La suma, 400° , no se puede ilustrar con el mismo ejemplo. ¿Qué hacemos en este caso?

Sin embargo, si hubiéramos utilizado como recurso la cantidad de giro de una sola aguja, pues el resultado sería sencillamente 400° , que sí puede ejemplificarse sin problemas.

Utilizando otro ejemplo habitual, el de una puerta normal que se abre, nos sería muy difícil ilustrar una suma de dos ángulos en que el resultado sea mayor de 180° . Físicamente, la puerta no abre más.

Del mismo modo, si tomamos como ejemplo de ángulo el rincón de una habitación no sería posible hacer la suma de dos ángulos que fueran obtusos, pues el resultado es imposible: un rincón de más de 180° .

Si utilizamos el ejemplo de la luz de un faro que gira, podremos sumar dos ángulos siempre que no sumen más de 360° , pues ese resultado no tendría sentido. Lo mismo pasa cuando trabajamos con ángulos en LOGO, pues un ángulo de, pongamos por caso, la instrucción "girar a la derecha 450° " produciría el mismo efecto que "girar a la derecha 90° ", como podemos ver en Luengo (1.984).

Estas que hemos visto antes son algunas de las limitaciones de los ejemplos que usualmente aparecen en los libros de texto. Como en el caso de las definiciones de ángulo, podemos observar que reflejan concepciones parciales de un mismo concepto, y tienen limitaciones que tratan de evitarse recurriendo a varios ejemplos a la vez, adecuando cada uno al momento o a la intención educativa.

Esto mismo es lo que tratan de hacer los libros de texto, tal como veremos en el apartado siguiente.

4.2.1.3.- La práctica educativa: los libros de texto.

El tratamiento que los libros de texto hacen del tema del ángulo, y de otros naturalmente, es el reflejo de las ideas pedagógicas y científicas de la época en que se escriben. Y son una muestra de lo que se transmite en las aulas, pues los libros son herramientas auxiliares en las que el profesor apoya en gran medida su trabajo.

Hay estudios sobre el tratamiento del concepto de ángulo en los libros de texto, tales como los de Strehl, R. (1983) que ponen de manifiesto las dificultades con que los alumnos se encuentran, particularmente debidas a que se presentan mezcladas de manera poco clara las distintas concepciones de ángulo de las que hemos hablado.

En este trabajo tan sólo queremos, de forma rápida, observar el tratamiento que se hace en dos libros en concreto, pues puede ilustrarnos de lo que es habitual en nuestras aulas. Hemos elegido un libro de 3º curso de Educación Primaria, pues es en ese curso donde suele empezarse el estudio del ángulo de una forma específica, y un libro de 4º pues es donde se comienza la sistematización de su estudio. En concreto son textos de la Editorial EDB (1.997), que consideramos buenos libros y utilizamos en nuestro Centro. A ellos nos referiremos en lo sucesivo.

Los contenidos que incluyen en estos cursos son:

<p>3º curso:</p> <ul style="list-style-type: none">- Región angular- Angulo.- Vértice.- Lado.- Comparación de ángulos.- Angulo recto- Angulo llano.- Angulo completo.- Angulo agudo.- Angulo obtuso.	<p>4º curso:</p> <ul style="list-style-type: none">- Angulo.- Vértice.- Lado.- Comparación de ángulos.- Angulo recto- Angulo llano.- Angulo completo.- Angulo agudo.- Angulo obtuso.- Angulos consecutivos.- Angulo suma.- Angulo diferencia.- Angulos complementarios.- Angulos suplementarios.
--	--

En ambos libros de texto analizaremos los siguientes aspectos:

1.- En primer lugar, las distintas concepciones de ángulo que se manejan (ángulo como región del plano, ángulo como par de rectas y ángulo como giro), que mezclan indistintamente, tanto en 3º como en 4º. y que aparecen en los enunciados y definiciones, en los ejemplos y en los ejercicios de aplicación.

2.- En segundo lugar, la multiplicidad de situaciones angulares que se presentan como ejemplos, sin centrarse en una sola, lo cual permite que el alumno conozca desde el principio distintas aproximaciones para el mismo concepto.

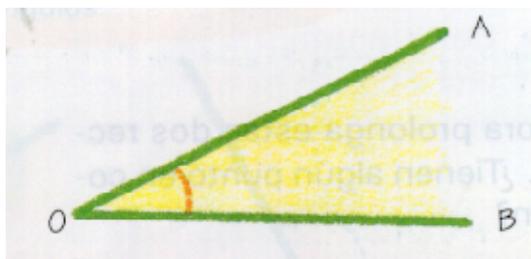
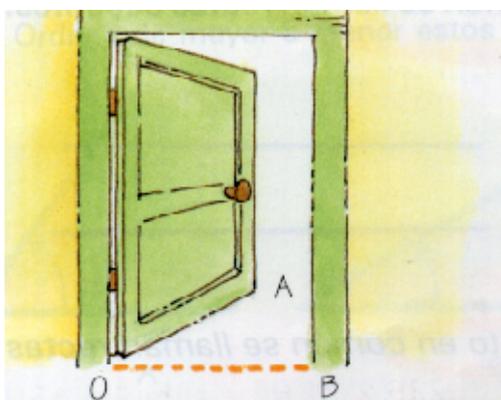
Esto es habitual, y sabemos que también en el aula los profesores utilizan ejemplos que son diferentes de las definiciones y las complementan, así como ejercicios que complementan a ambas.

3.- Por último, algunas pequeñas inconsistencias o ambigüedades en definiciones y ejercicios que, en nuestra opinión son inevitables dada la sencillez con que ha de abordarse el tema en los niveles educativos de que estamos hablando, y además, en algunos casos son deseables, pues provocan en el alumno un saludable conflicto cognitivo.

Con respecto a las distintas concepciones de ángulo, podemos observar que en el libro de 3º, en la Pág. 93 se introduce al alumno en el concepto con el ejemplo de la puerta que se abre y se cierra (ángulo como giro).

“Ángulos:

Carlos y Teresa observan cómo se abre y se cierra una puerta. Luego representan el giro de la puerta como muestra el dibujo: ”



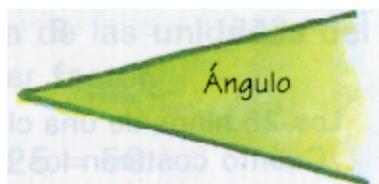
Pero a continuación, en el ejercicio que sigue, señala que hay dos semirrectas (ángulo como par de rayos).

“Fíjate en el dibujo de Carlos y Teresa. ¿Cuántas semirrectas tiene? ¿Tienen algún punto en común?”

Y en el siguiente pide al alumno que coloree la región angular, a la que hace sinónimo de ángulo (ángulo como región).

“Colorea la región interior que forman las dos semirrectas anteriores.

La parte que has coloreado se llama región angular o ángulo”



Muy frecuentemente, a lo largo del desarrollo del tema, y como vemos que hace en el ejercicio anterior, mezcla los conceptos de ángulo y región angular haciéndolas aparecer como sinónimos.

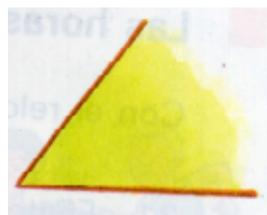
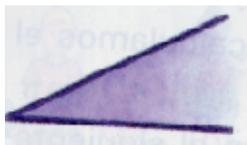
En el libro de 4º, sin embargo, parece como si la noción de región angular no fuera útil (¿lo es en realidad?) y no la emplea, sino que define ángulo directamente como “la parte del plano limitada por dos semirrectas”, introduciendo el concepto mediante líneas secantes que determinan cuatro regiones en un papel.

En cuanto a la multiplicidad de situaciones angulares que se presentan en ejemplos y ejercicios, corresponden a las diferentes concepciones de ángulo.

Por ejemplo, en la página 95 cuando procede a comparar ángulos, lo hace por superposición, algo que es propio de la concepción de ángulo como región del espacio, pero si nos fijamos, recurre a la expresión “más abierto” o “menos abierto”. El concepto “abierto” o “cerrado” es polisémico en matemáticas, y pensamos que al alumno puede confundirle, pues aquí no tiene nada que ver con líneas abiertas o líneas cerradas, algo que ya conoce el alumno de cursos anteriores.

“Comparación de ángulos.

Carlos y Teresa han dibujado estos ángulos:

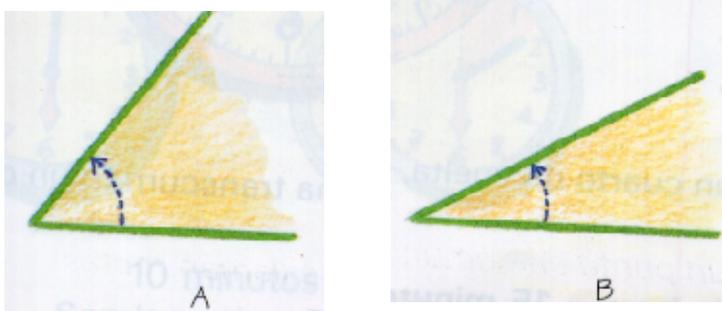


¿Cuál crees que es mayor?

Para averiguarlo, puedes seguir este proceso.

- Calca estos ángulos en una hoja de papel.
- Recórtalos y pon uno encima del otro, de modo que coincidan el vértice y uno de los lados."

De nuevo en la misma página podemos observar cómo los ejercicios "acuden en ayuda" de las definiciones, pues en el siguiente ejercicio, en que pide ordenar ángulos, recurre visualmente de nuevo al concepto de ángulo como giro para aclarar lo que es la abertura, pues el pequeño arco que se dibuja junto al vértice del ángulo lo dibuja como una flecha, con dirección, que parece que empuja a uno de los lados del ángulo, como cuando se empuja una puerta para abrirla.



De todas formas, en algunas situaciones se prima una concepción sobre las demás, como ocurre cuando en ningún momento se hable de los ángulos que forman las líneas de una figura poligonal abierta (o cerrada), sino sólo los que forman las líneas poligonales cerradas. En este caso aparece el concepto de ángulo ligado únicamente al de región del espacio.

En esta misma línea está el ejemplo de la página 111, que nos parece muy ilustrativo de la mezcla de concepciones que se van tratando: pues presenta como ejemplo de ángulo más o menos abierto el de un abanico. Del mismo modo, presenta algo que en ningún momento ha definido, como son los ángulos formados por superficies planas:

“ Descubre ángulos agudos, rectos y obtusos en estos dibujos.”



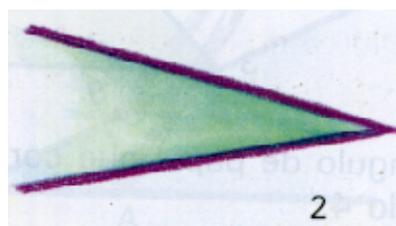
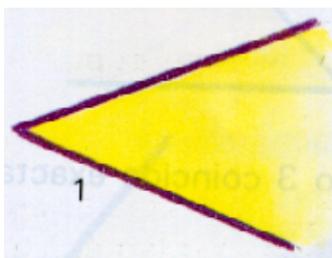


Resulta llamativo también que a partir de la página 96 del libro de 3º, el texto acaba de tratar por el momento el tema de los ángulos, y pasa a trabajar el de las horas del reloj. Pero no relaciona para nada este tema con el anterior. De todas formas es interesante que los dos temas vayan seguidos, y con el ejemplo de los relojes de agujas, en realidad está recurriendo al concepto de ángulo como giro. Pensamos que, sin duda, es intencionada esta secuenciación de los temas en el libro.

En el libro de 4º, mezcla estas dos concepciones de nuevo al trabajar la comparación de ángulos. Por ejemplo, en la Pág. 121 lo hace por superposición, utilizando un papel doblado, algo que implica considerar un ángulo como una región del plano.

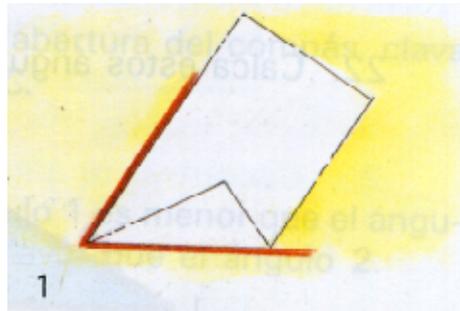
“Comparación de ángulos.

Iván y Pedro han dibujado un ángulo cada uno y se preguntan cuál de ellos es mayor. ¿Cuál crees tú que es mayor?

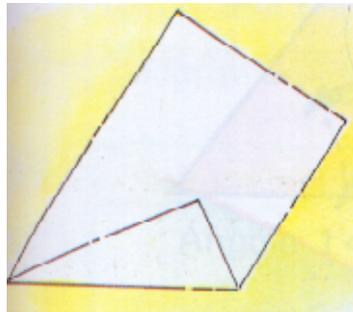


Para saberlo con certeza, coge una hoja de papel y haz lo siguiente:

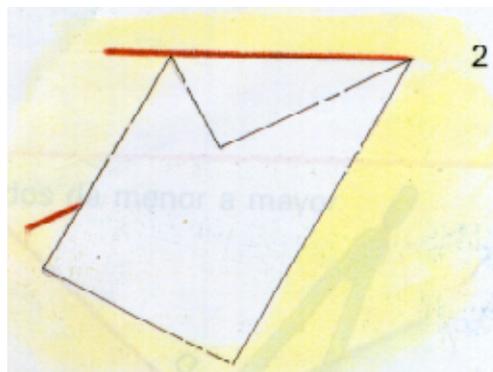
Haz coincidir un borde y una punta de la hoja con un lado y el vértice del ángulo 1.



Dobla la hoja hasta situar el pliegue sobre el otro lado. Tienes ya el ángulo 1 en el papel.



Coloca tu ángulo de papel sobre el ángulo 2., haciendo coincidir el vértice y un lado.



¿Sobrepasa tu ángulo de papel el ángulo 2?

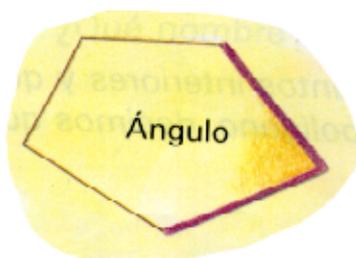
Con la actividad anterior has demostrado que el ángulo 1 es mayor que el ángulo 2, o bien, que el ángulo 2 es menor que el ángulo 1.”

Pero a continuación, en la pág. 122 hace la comparación de ángulos tomando la medida por medio del compás, lo cual nos parece que no encaja conceptualmente con lo anterior y puede provocar problemas al alumno.

También pueden provocar problemas en el alumno, aunque en algunos casos, estos problemas sean deseables, pues forman parte del proceso de creación del "conflicto cognitivo", los ejercicios en los que aparece alguna que otra entre definiciones y ejercicios, o alguna ambigüedad.

Por ejemplo, en el texto de 3º, define rectas secantes como aquellas que pueden formar ángulos. Esto no es del todo correcto, pues las rectas paralelas también forman un determinado ángulo que más adelante tendrá que aprender el alumno. Lo mismo ocurre cuando en el libro de 4º habla de los ángulos de un polígono y no cita más que los ángulos interiores.

También en el mismo libro, en la página 135 en un ejercicio, define ángulo de un polígono y omite el que hay ángulos interiores y ángulos exteriores.



Parece como si los ángulos interiores fueran los únicos de un polígono.

De todas formas, aunque como decíamos anteriormente nos parezcan razonables estas omisiones debidas a la edad de los alumnos a los que nos estamos dirigiendo, reflejan sólo una concepción parcial del ángulo, precisamente la del ángulo ligado al plano y al interior del polígono.

Muy diferente es, en este sentido la concepción del ángulo de un polígono que se trabaja mediante el recurso al lenguaje LOGO, pues cuando se trabaja en la programación LOGO, el ángulo que tiene más relevancia a la hora de diseñar un polígono es precisamente el ángulo exterior. De estos aspectos podemos ver una amplia exposición en Luengo (1.991) y Luengo (1.997)

Hay por último, tanto en el texto de 3º como en el de 4º ejercicios bastante más difíciles de lo que parecen, porque tienen soluciones abiertas, y múltiples. Por ejemplo, en el texto de 4º en la página 120, propone al alumno el siguiente ejercicio:

“Dibuja 3 rectas que se corten en un punto. ¿Cuántos ángulos determinan? Píntalos de distinto color.”

Razonablemente, parece que son muchos para que un alumno de cuarto de Primaria los determine. Pero nuestra experiencia con los libros de matemáticas de esta misma editorial nos indica que es muy frecuente que presenten actividades abiertas, con más de una solución, algo que nos parece muy recomendable y creemos que ha sido la intención en este caso.

También en esta línea de aspectos abiertos, no suficientemente tratados, nos ha llamado la atención es que se utilicen ejemplos donde los ángulos que aparecen no están formados por líneas, sino por superficies, algo que no está definido en el texto. En ningún sitio define ángulo entre planos, y esto supone que el alumno ha de dar un “salto conceptual” considerable.

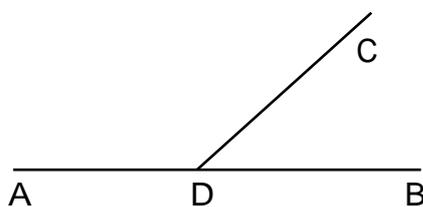
Esta panorámica breve que acabamos de presentar es, según nuestra experiencia docente con material de otras editoriales, la tónica general de los libros de texto que habitualmente manejamos en nuestras aulas. Los libros de la editorial EDB que hemos analizado nos sirven para ver cómo el tratamiento del concepto de ángulo es presentado de una manera multiforme, no centrándose especialmente en ninguna de las consideraciones de dicho concepto, y complementando con ejemplos y ejercicios los aspectos que se presentan en las definiciones.

Pero lo que realmente complementa la formación del alumno no es el libro de texto, sino lo que transmite el profesor. Y éste lo hace a lo largo de varios cursos, de manera que se llega a conocer el concepto a lo largo de varias aproximaciones sucesivas, en las que se le van presentando ligeras modificaciones sobre los conceptos anteriores. Parece que el de ángulo es un concepto que va creciendo y evolucionando. Recorrer este camino no está libre de dificultades.

4.2.2.- Las dificultades de los alumnos.

Quizá las primeras investigaciones sobre las dificultades de este concepto sean las de Piaget, y nos indican que es un concepto que en los niños se desarrolla lentamente.

En el trabajo de Piaget, J. y otros. (1948), referenciado por Contreras, A. (1.993) y que seguiremos en esta exposición, podemos ver cómo los autores presentaron un dibujo como el de la figura adjunta:



A los alumnos se les pidió que lo reprodujeran con exactitud; sin mirarlo cuando lo dibujaran, pero examinándolo y midiéndolo tantas veces como fuera necesario entre dibujo y dibujo. El niño disponía de reglas, compás, plantillas,...

En un primer nivel, hacia los 6 años como media, los niños rechazaban el tomar medidas y se contentaban con la reproducción. En el segundo nivel, de 7 años como media, el niño mide la longitud AB, o CD o las dos, pero no se trata más que de dos medidas unidimensionales (e incluso sin la partición indispensable de los segmentos AB y DB). La abertura de los ángulos no se mide nunca y no se tiene en modo perceptivo, la inclinación del lado CD. En el siguiente nivel, 8 años, de media, se dan dos progresos: la partición de los segmentos AD y DB y un esfuerzo para conservar la línea CD. En el nivel posterior, 9 años y medio por término medio, se miden las distancias AC y DB para asegurar la determinación del punto D y, en consecuencia, línea CD. Además, al final de este nivel y comienzos del último estadio, (sobre los 10,5 de media), aparece la medida de CK, perpendicular a AB desde C, permitiendo determinar C con una sola medida.

Estos estudios hicieron pensar que los ángulos no son propiedades relevantes de las figuras para los niños, éstos prefieren preservar las propiedades topológicas antes que copiar los ángulos.

Varios autores han analizado las dificultades que este concepto presenta para los alumnos. Contreras (1.993) indica al respecto:

“ La percepción de la idea de ángulo se desarrolla en los niños a partir de los cinco años. Estos han de vencer la influencia de la orientación, aislar esquinas para distinguir las características de las figuras y aprender a

representar rotaciones. No es hasta los doce años cuando se puede esperar que la mayoría de los alumnos hayan completado este proceso en grado satisfactorio.”

Quizá las primeras dificultades están ya en la percepción de las orientaciones vertical y horizontal, que juegan un papel fundamental en cuanto a la percepción del ángulo, ya que como indica Holloway (1.982), citado por Contreras (1.993):

"al principio las coordenadas del plano euclidiano no son más que una vasta red que abarca todos los objetos y consisten sencillamente en relaciones de orden que se aplican simultáneamente a cada objeto en las dos dimensiones: izquierda - derecha y arriba – abajo. La construcción espontánea de dicha red permite orientar las figuras y dirigir los movimientos en el plano, y su carencia determina que los niños no sean capaces de trazar una línea recta ni una serie de paralelas, ni de juzgar la inclinación de ángulos."

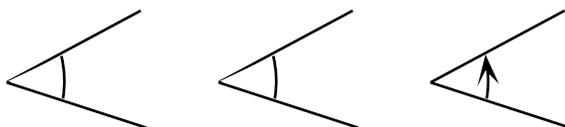
En este mismo sentido de dificultades debidas a la propia dificultad de percepción hay que añadir las señaladas por Noss (1.987) quien encontró que menos del 50% de alumnos de unos diez años, respondían que ángulos rectos con distinta posición eran iguales.

Quien en nuestra opinión ha estudiado las dificultades de este concepto con mayor detenimiento y sistematización ha sido el profesor Mitchelmore, algunos de cuyos trabajos hemos citado anteriormente.

En su opinión (Mitchelmore, 1.990), las dificultades de los alumnos pueden encuadrarse dentro de dos grupos: las debidas a la percepción del propio concepto y las condicionadas por la expresión matemática del mismo.

Por lo que respecta al primer grupo, añade a las citadas anteriormente las causadas por el concepto de giro y su medida, el significado de la representación gráfica del ángulo y por último, las relaciones entre las distintas partes del concepto.

En cuanto a las dificultades que se derivan de la propia enseñanza o de los libros escolares, Mitchelmore menciona que una dificultad común son las distintas representaciones del ángulo:

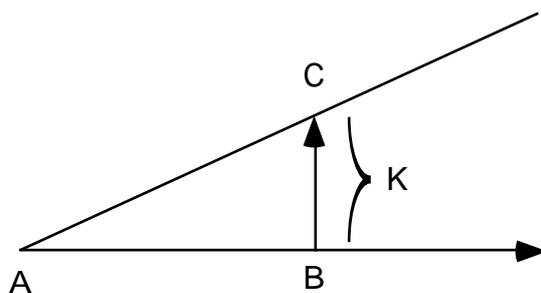


No sólo le cuesta al alumno aprender que el tamaño del ángulo no depende del tamaño con que se dibujen los lados, sino que una vez que resuelve esto (si lo resuelve) se encuentra con que tiene que acomodar a qué modelo de ángulo de los que está trabajando corresponde cada una de las representaciones gráficas: ángulo como región del espacio, como par de rayos o como giro ¿a cuál de ellas se refiere cada una de las representaciones? Y ya hemos indicado anteriormente que no es indiferente de cuál se trate.

A esto hemos de añadir las dificultades que señala Osborne (1.976) y que cita Contreras (1.993):

"La fuente de dificultad en la comprensión del ángulo es triple. Primeramente, no hay un modo simple de denominar la medida de ángulo y, en cambio, esto no ocurre con la longitud y el área. En el caso de la longitud, ese término "longitud" es el nombre que se da a un atributo de un segmento; y "área" es un símbolo específico para un atributo de una región. Sin embargo, no se dispone de un modelo para designar la medida angular comparable a los dos anteriores. Se da, además, una ambigüedad en el concepto de ángulo; cuando se dice "el ángulo es 45°", el alumno debe decidir si se trata del ángulo en si mismo o de la medida del ángulo. Este tipo de confusión no se da en los casos de longitud, área o volumen."

Otra razón de la dificultad de la medida de ángulo se puede observar en que, históricamente se han dado varias alternativas de significado del ángulo y su medida. El método de Ptolomeo para calcular la medida del ángulo ABC, aparece en los libros de texto con la figura:



con lo que no es de extrañar si los alumnos piensan que para medir el ángulo basta medir la longitud de k.

En cuanto a los instrumentos de medida de ángulos, Osborne (1976) afirma:

"Por último, los instrumentos para medir ángulos, el transportador por ejemplo, es mucho más complejo que la regla. El niño debe adquirir destrezas sobre la colocación del transportador de modo que el rayo del ángulo esté perfectamente alineado con la línea del transportador, para que se pueda efectuar la medida. Además, se da una complicación adicional cuando el ángulo supera los 180° , así como existen dificultades para ver que un ángulo de 30° es igual que uno de 390° ."

Tal como expresa Contreras (1.993), podemos resumir:

“ La medida del ángulo es difícil de aprender para los alumnos ya que requiere la habilidad para combinar unidades angulares y comparar el resultado con un ángulo dado -aparentemente usando regiones, pero a menudo se explica por el uso de rotaciones y más tarde aplicando el par de rayos o semirrectas-. Para la comprensión de la medida del ángulo, el niño debe no únicamente dominar los tres aspectos del concepto de ángulo, sino también lograr un alto grado de integración entre ellos.”

4.2.3.- El problema de enseñanza y el problema de investigación.

Podemos decir, resumiendo las dificultades que encierra el concepto de ángulo, y que hemos ido presentando a lo largo de todo este capítulo que el problema básico radica en que es un concepto multiforme. Parece razonable suponer, y así lo indican varios autores citados en párrafos precedentes, que el alumno va adquiriendo este concepto en aproximaciones parciales a lo largo de toda su escolaridad que ha de integrar hasta conseguir un único concepto: el concepto general de ángulo.

Tal como indica Mitchelmore (1.989):

"un avance importante para el alumno en la comprensión del ángulo es cuando es capaz de integrar las tres categorías: par de semirrectas, región angular y giro. Aunque esa integración es un paso desconocido, se puede especular que el par de semirrectas, como representación abstracta tanto de la región como del giro, juega un papel fundamental en todo el proceso."

El subrayado es nuestro, y lo hacemos para indicar cuál es el problema de investigación que a nuestro juicio, tiene gran interés: la identificación del modo en que se va produciendo la integración.

Es la misma idea que Vasco (1.998) expresa de una forma metafórica pero muy expresiva:

“ La idea es identificar en los sistemas concretos y familiares para los niños y jóvenes, aquellos núcleos prácticos y activos, táctiles y visuales, de los cuales pueda partirse para lograr la conceptualización. La hipótesis de trabajo es que esos núcleos, que llamo "islas", son múltiples y aislados, y que la tarea principal del maestro es apoyar al estudiante para irlos haciendo surgir cada vez más, como islotes volcánicos que van saliendo de las profundidades, y para irlos uniendo a través de viajes en barco en un primer momento, luego a través de la construcción de puentes, y tal vez al final a través de autopistas y viaductos que lleguen hasta hacer olvidar a quien se mueve con confianza por todo el archipiélago, que debajo de esas autopistas y viaductos hay una multitud de islas e islotes que antes estaban separados.”

Si la tarea de la escuela básica es hacer participar a los alumnos en experiencias prácticas con ángulos de todos tipos para favorecer la integración entre las distintas concepciones del ángulo, e ir estableciendo de este modo las bases de los “puentes” entre conceptos, la tarea de la investigación sería estudiar cómo se desarrolla el proceso de integración de todas las concepciones parciales de ángulo.

La falta de investigación sobre este tema es de nuevo puesta en evidencia por Mitchelmore (1.998):

“ ¿Cómo pueden reconocer los alumnos de diferentes edades que el mismo concepto está implicado en situaciones angulares que pueden parecer, a primera vista, muy diferentes? Ha habido muy poca investigación sobre esta cuestión.”

Nuestra investigación pretende ser, en sintonía con las ideas anteriormente expuestas, una aportación al estudio de cómo va evolucionando y estructurándose en la mente de los alumnos este concepto tan simple en apariencia pero tan complejo cuando se estudia en profundidad.

Esperamos también con esta aportación iniciar un nuevo enfoque en la investigación de este aspecto de las Matemáticas.

En el siguiente apartado presentaremos el desarrollo de nuestro trabajo.

4.3.- Diseño de la investigación

4.3.1.- Supuestos de partida y condiciones de contorno.

En los apartados anteriores, hemos tenido ocasión de observar una panorámica amplia acerca de cuál es el estado de la investigación actual en el tema que nos interesa.

Hemos podido observar, por una parte, que hay un interesante desarrollo de la aplicación de las técnicas de representación del conocimiento que, sin embargo, no está suficientemente implantado en nuestro ámbito cultural, tal como lo demuestra la escasez de trabajos de españoles.

Por otra parte, y por lo que se refiere a nuestro objeto de estudio, el concepto de ángulo, hemos podido comprobar, del mismo modo, que no está suficientemente desarrollado, pues, a pesar de que existen investigaciones muy interesantes, que hemos reseñado, su número es escaso.

Al hacer la exposición de los aspectos anteriores, hemos presentado lo que es la situación de partida en que nos encontramos.

Pero la mayor parte de las investigaciones que hemos tenido ocasión de analizar, (que son muchas de las actuales en el ámbito anglosajón y en el español), tienen todas un abordaje metodológico parecido, pues utilizan como herramientas de investigación la resolución de problemas y muchas veces asociados a ellos, el cuestionario o la entrevista.

A partir de cuestionarios o entrevistas más o menos estructuradas o mediante la resolución de una situación problemática, se trata de inferir cuál es la concepción que el alumno de una determinada edad tiene acerca de lo que es un ángulo.

Muchas de estas investigaciones tratan además, de ver cómo va evolucionando este concepto y cuáles son las dificultades que se van presentando a los alumnos en su camino para llegar a dominarlo.

Pero en nuestra opinión, estas investigaciones presentan algunos problemas que señalamos:

1.- Hay, una gran inferencia por parte del profesor para expresar lo que el alumno piensa. Por ejemplo, en los trabajos de Mitchelmore (véase Mitchelmore, 1.990, 1.996, 1.998, 1.998b) se utiliza el análisis de las situaciones angulares presentadas al alumno para inferir

qué relación hay entre los conceptos implicados en cada situación. Pero desde el momento en que el profesor infiere que determinada situación incluye a ciertos conceptos y no a ciertos otros, de forma distinta a como puede estarlo haciendo el alumno, puede haber una modificación de los datos originales que modifica la información y naturalmente, su posterior interpretación.

2.- En la mayoría de las investigaciones nos encontramos con trabajos muy laboriosos, que exigen gran esfuerzo en la recogida de los datos y quizá a causa de ello se hacen, en la mayoría de las ocasiones, con muestras muy pequeñas que, aunque ayudan a la comprensión del fenómeno, no permiten generalización de los resultados.

3.- El análisis de los datos obtenidos es, casi siempre, de tipo cualitativo, y, de nuevo presentan el problema de la posible inferencia por parte del profesor, muy grande a nuestro juicio en algunas ocasiones, para extraer conclusiones de ellos, aunque se haya tenido cuidado utilizando procedimientos de triangulación.

En nuestra opinión, para acercarnos a la resolución de este problema necesitaríamos un instrumento que:

1.- Nos permitiera obtener una representación de las asociaciones entre conceptos tal como el alumno las percibe, con la mínima interferencia por parte del profesor, para evitar en lo posible la contaminación de los resultados.

2.- También necesitaríamos un instrumento que nos permitiera obtener con cierta economía de esfuerzo y medios, los datos pertinentes, de modo que el estudio se pudiera hacer con una muestra suficientemente representativa como para generalizar resultados.

3.- Por último sería deseable contar con un método para analizar los datos obtenidos de una manera que pudiera cuantificarlos, compararlos y representarlos para que la información obtenida fuera fácilmente interpretable.

La metodología que proponemos, las redes asociativas Pathfinder, junto con el Índice de Complejidad de Redes, definido por nosotros, y que describiremos en el apartado 4.3.4.2, creemos que nos permiten hacer aportaciones significativas para la resolución del problema objeto de este trabajo.

4.3.2.- Objetivos.

En nuestro trabajo, pretendemos aproximarnos al objeto de estudio en una forma totalmente diferente de las que hemos visto en otros autores, pues supone la utilización de una metodología y unos instrumentos distintos en cuanto a recogida e interpretación de datos.

A la hora de plantear nuestro tema de investigación, es necesario hacer, pues, una distinción que consideramos importante aclarar desde el principio. Nuestro trabajo plantea un doble objetivo de investigación: el objeto de investigación en sí y el problema de abordaje metodológico como es la introducción de una nueva metodología para abordar este tipo de problemas didácticos.

1.- Como primer objetivo, tratamos de analizar el concepto de ángulo y su evolución a lo largo de la escolaridad. Creemos que conocer mejor este concepto puede ser un ejemplo paradigmático de la investigación que se puede hacer con otros temas en Didáctica de las Matemáticas.

El problema que nos planteamos en esta investigación es acercarnos a la forma en que el alumno asocia en su mente los conceptos y de qué modo la complejidad de las asociaciones va evolucionando conforme avanza la escolaridad.

Tal como apuntamos en la introducción de este trabajo, consideramos de gran interés llegar a conocer las estructuras cognitivas del alumno en un tema que, como el del ángulo, es de gran complejidad, y acerca del cual no existe suficiente investigación.

2.- Nuestro segundo objetivo es experimentar una metodología completamente nueva, pues no hemos encontrado en la bibliografía ninguna investigación que se aproxime a este concepto en la forma en que lo hacemos.

Nuestra intención es ofrecer no sólo datos e interpretaciones de ellos que permitan conocer mejor la evolución del concepto de ángulo en la mente de los alumnos, sino también aportar a la investigación un nuevo abordaje metodológico que puede ser aplicado no sólo a un posterior estudio en más profundidad de este concepto, sino también a otros similares.

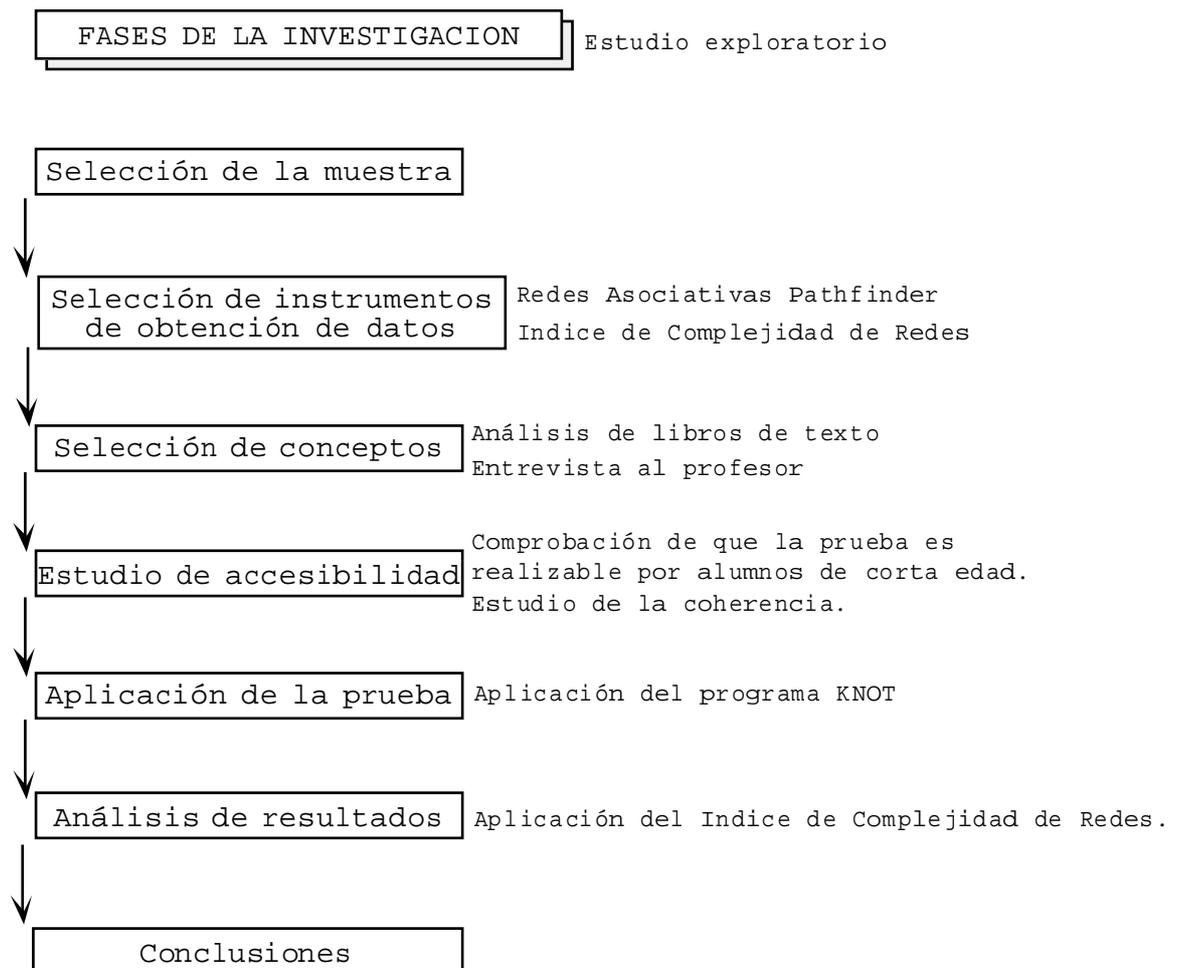
4.3.3.- Hipótesis de trabajo.

A la hora de realizar este trabajo, nos plantamos las siguientes hipótesis:

- 1.- Se pueden obtener mediante el uso de Redes Asociativas Pathfinder, representaciones de las redes conceptuales de los alumnos que pueden corresponder a sus representaciones mentales, en lo referente al concepto de ángulo.
- 2.- Se puede medir la complejidad de las redes conceptuales obtenidas, y ello nos aportará información sobre la complejidad de las representaciones mentales de los alumnos.
- 3.- La complejidad de las redes obtenidas variará en función de la edad, y ello nos proporcionará datos relevantes acerca de la evolución del concepto en las distintas edades de los alumnos.

4.3.4.- Fases y Metodología.

Esta investigación se diseñó con arreglo a las siguientes fases:



A continuación pasaremos a describir cuál fue el proceso de diseño de cada una de ellas.

4.3.4.1.- Selección de la muestra.

Al tratarse de un estudio exploratorio, nuestra intención era contar con una muestra que, reflejase el tratamiento del concepto a lo largo de los cursos de la enseñanza obligatoria.

Por ello, se decidió elegir los cursos 3º, 4º, 5º de Primaria y 1º de Secundaria Obligatoria.

En efecto, es en el curso 3º cuando se inicia el estudio del concepto de ángulo y se define como tal, puesto que, con anterioridad se trabaja, como es lógico, pero como parte de otros conceptos, particularmente el de giro, que es tratado desde el primer curso de Primaria.

En el curso 4º se incide de nuevo en el concepto de ángulo y se profundiza más en la formalización de las definiciones y la ampliación de situaciones en que aparece, como por ejemplo cuando se trata de los ángulos de un polígono.

Prácticamente, si vemos los programas escolares, en los sucesivos cursos de Enseñanza obligatoria el estudio de este concepto se amplía tan sólo a tres grandes capítulos: las operaciones con ángulos, su medida, y la caracterizaciones de algunos tipos de ángulos según su posición.

Los fundamentos de la enseñanza de este concepto, quedan, en nuestra opinión, establecidos en los cursos 3º y 4º de Primaria. Aún así estimamos conveniente prolongar un año más, como de afianzamiento, el tiempo dedicado a la enseñanza inicial de este concepto y por eso hemos seleccionado una muestra de este curso.

La elección, por último, de una muestra del curso 1º de Enseñanza Secundaria Obligatoria, consideramos que es adecuada pues, por la edad de los alumnos y por sus características psicológicas, puede darnos información acerca de la evolución de la estructura de conocimiento en un momento en que se está dando los primeros pasos en el acceso al pensamiento formal.

4.3.4.2.- Instrumentos de obtención de datos. Redes Asociativas Pathfinder e Índice de Complejidad de Redes.

Para obtener instrumentos para recoger datos, consideramos necesario distinguir entre los instrumentos utilizados en momentos diferentes de la investigación: la recogida y presentación de datos y el análisis de resultados.

Tanto para la recogida como para la presentación de datos se optó por las Redes Asociativas Pathfinder.

La obtención de dichas redes se lleva a cabo de forma automática mediante el programa informático KNOT (Knowledge Network Organizing Tool), tal como describimos en el Capítulo 3 de este trabajo.

Las razones de la elección de este instrumento fueron:

1.- En primer lugar, la investigación previa realizada con Redes Asociativas Pathfinder en otros campos, y los estudios de validación acerca de su utilización, tal como aparecen descritos en el Capítulo 3 de esta investigación, nos permitían afirmar que se trataba de un instrumento fiable y que podía servir para nuestros propósitos.

2.- Este instrumento nos permitía acceder a los datos con una mínima intervención por parte del profesor. Esto reducía uno de los riesgos de contaminación de la investigación, que sería la intervención del observador en la producción de los datos. En nuestra opinión este era un riesgo difícil de controlar cuando se utilizan como instrumentos de recogida de datos cuestionarios o entrevistas poco estructurados, pues dejan abierto un amplio terreno a la interpretación por parte del observador. Nosotros tratábamos de asegurarnos la imparcialidad en la recogida de datos de nuestra investigación.

2.- Con el programa KNOT se podía efectuar la recogida de gran cantidad de datos en un tiempo razonable.

La cantidad de datos que se podía obtener era bastante elevada, y nos permitía abordar, con ciertas garantías, un estudio tanto de tipo cualitativo como de tipo cuantitativo.

Para el análisis de resultados creamos un instrumento que denominamos Índice de Complejidad de Redes.

Partimos para nuestro objeto, de las recomendaciones, ampliamente aceptadas en el ámbito educativo, que hace Novak para evaluar sus mapas conceptuales, y que por estar lo bastante difundidas, no entramos a analizar más en detalle.

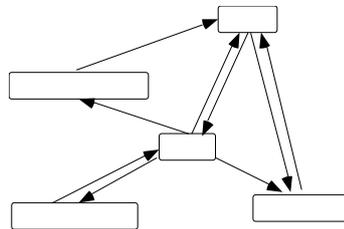
- Las relaciones.

Según Novak (1.988), se entienden del siguiente modo:

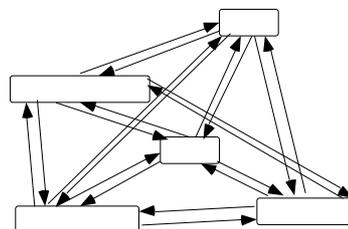
“¿Se indica la relación de significado entre dos conceptos mediante la línea que los une y mediante las palabras de enlace correspondientes? ¿Es válida esta relación?”

En nuestro caso, las relaciones vienen indicadas por los enlaces entre los nodos de la red. Dado que las redes son grafos, en el sentido matemático del término, la cantidad de relaciones se puede representar en forma numérica por la densidad del grafo, definido como el número de enlaces totales partido por el de enlaces posibles, donde éste último valor se calcula mediante la fórmula $n \times (n-1)$ siendo n el número de nodos. En el caso de que los enlaces fueran unidireccionales, la fórmula sería $n \times (n-1) / 2$. Como veremos no será el caso del presente trabajo, puesto que en todo momento emplearemos enlaces bidireccionales.

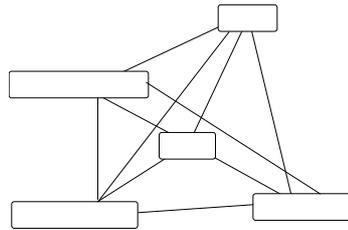
Veamos por ejemplo, un gráfico como el siguiente:



En él podemos ver que hay 5 nodos y 9 enlaces entre ellos. El número máximo posible de enlaces sería el correspondiente a este gráfico:



que podemos dibujar más simplificado en esta forma, donde las líneas representan flechas en dos direcciones, es decir, enlaces bidireccionales:



El número total de enlaces posibles sería 20, que corresponde a $n \times (n-1)$ nodos, es decir, 5×4 . Como en el gráfico que estamos tratando, el número de enlaces es 9, la densidad de este gráfico será $9/20 = 0,45$

La densidad nos indicará la cantidad de relaciones que se establecen frente a todas las posibles. A mayor densidad, mayor cantidad de relaciones.

- Las jerarquías.

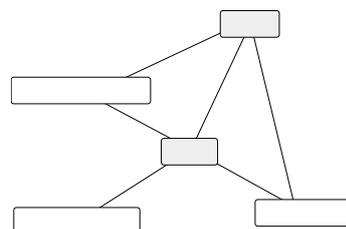
De nuevo Novak (1.988) las presenta:

“¿Presenta el mapa una estructura jerárquica? ¿Es cada uno de los conceptos subordinados más específico y menos general que el concepto que hay dibujado sobre él (en el contexto del material para el que se construye el mapa conceptual)?”

Consideramos que la representación de las jerarquías serían los nodos que llamaremos “múltiples”, entendiendo por tales aquellos a los que llegan más de dos enlaces bidireccionales.

En el caso de trabajar con redes que tuvieran enlaces unidireccionales, que no es el caso del presente trabajo, tendríamos que modificar la definición añadiendo que, además de dos enlaces bidireccionales llegara o saliera, además, al menos uno unidireccional. Estos nodos, que tienen más relaciones con los demás, serían, en alguna manera más importantes, y podríamos establecer con ellos una “jerarquía” superior, en el sentido de Novak. Tendríamos pues, en cuenta, para evaluar las jerarquías, el número de este tipo de nodos en cada red.

Continuemos con un ejemplo, en el que todos los enlaces son bidireccionales, como haremos en todo el resto del presente trabajo



Habría dos nodos múltiples, los que hemos sombreado. Pero además habría que considerar la fuerza de relación con los demás nodos, que vendría indicada por el “grado de los nodos múltiples”, entendiendo por grado el número de enlaces que tiene cada nodo. En el ejemplo anterior, el grado de los nodos múltiples sería 3 y 4, respectivamente.

- Las conexiones cruzadas.

Continuando con la concepción de Novak serían

“¿Muestra el mapa conexiones significativas entre los distintos segmentos de la jerarquía conceptual? ¿Es significativa y válida la relación que se muestra?”

En realidad ese aspecto también es, de nuevo, medido por la densidad del grafo, dado que, a mayor número de enlaces, hay más enlaces cruzados entre nodos. La razón es que, al aumentar los enlaces, dado que en este tipo de representaciones todos los nodos están enlazados, tienen que aparecer otros enlaces por caminos indirectos: en definitiva, enlaces cruzados.

Basándonos en estos criterios, creamos el Índice de Complejidad de Redes que combinaría estos tres aspectos. Su valor se calcularía:

Índice de Complejidad de Redes = D x N x S

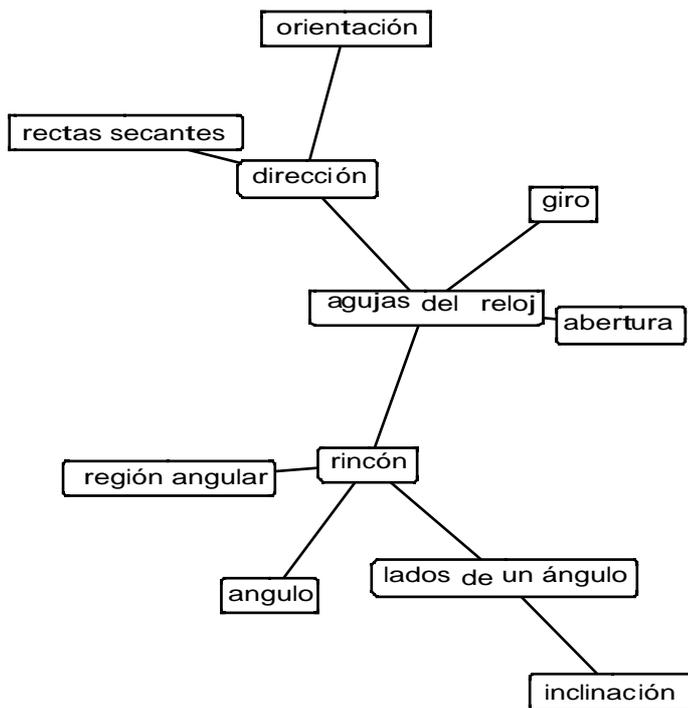
donde:

D = Densidad del grafo

N = Número de nodos múltiples

S = Suma de los grados de los nodos múltiples

Veamos cuál sería el Índice de Complejidad de la siguiente red:



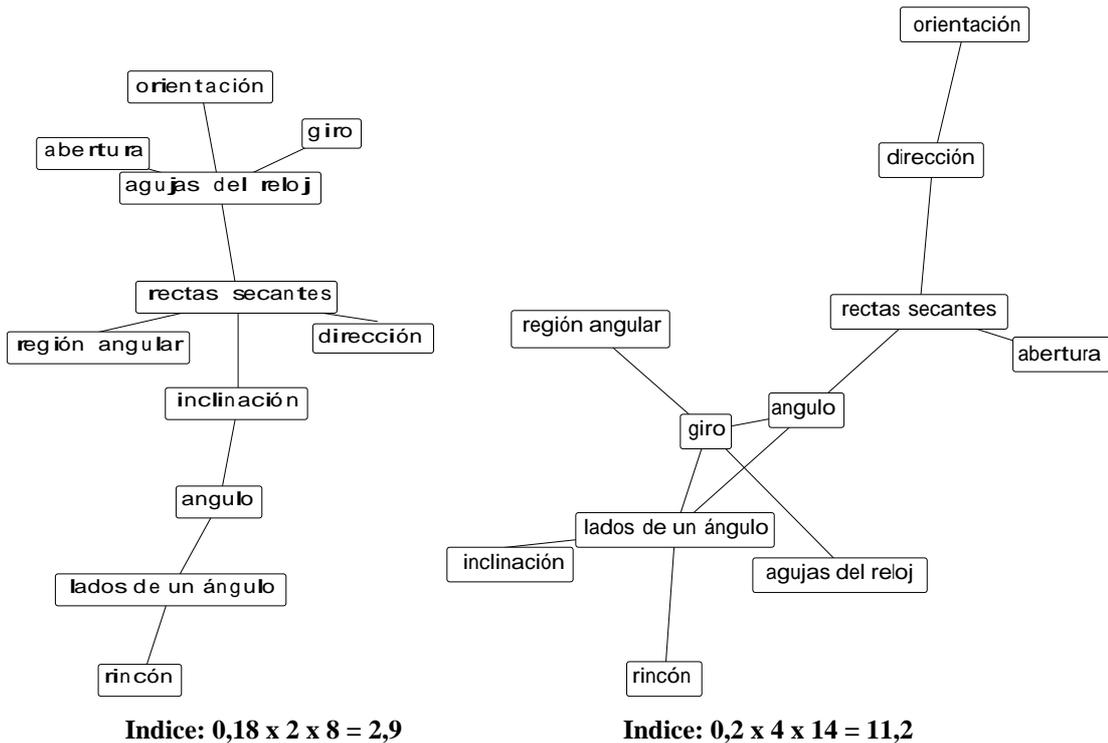
- La densidad del grafo sería 0.18, que corresponde al resultado de dividir el número de enlaces presentes (20) entre el número máximo de enlaces posibles (en este caso, 110). El número de enlaces presente es de 20, pues al ser bidireccionales, debemos contar dos en cada uno de los que se representan gráficamente. Este mismo número corresponde a la suma de los grados de todos los nodos.

- El número de nodos múltiples sería 3: “dirección”, “agujas del reloj” y “rincón”.

- La suma de los grados de los nodos múltiples sería 11 (3 + 4 + 4).

- Multiplicando estos tres factores, obtenemos un Índice de Complejidad de 5.94 (0,18 x 3 x 11).

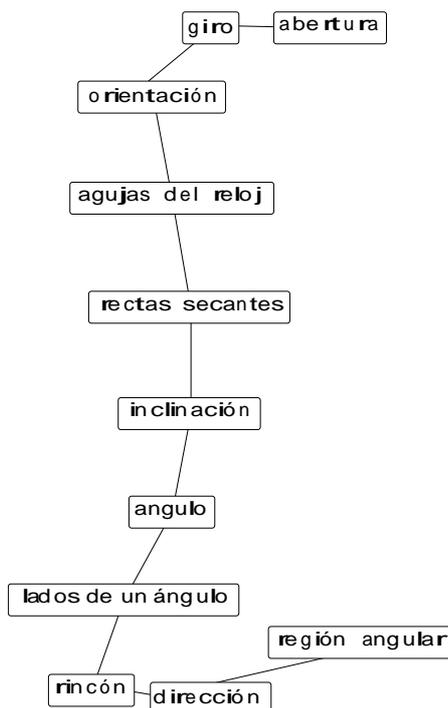
Como ejemplo, veamos los Indices de Complejidad de algunas otras redes:



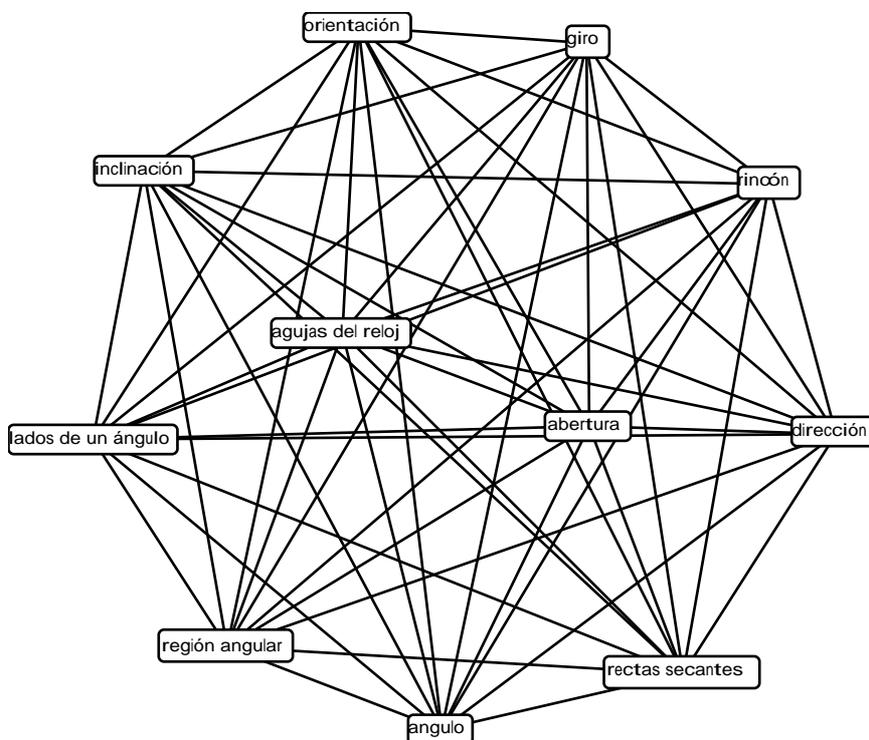
Una primera inspección visual ya nos indica, que la primera de las anteriores redes es más sencilla que la segunda. En efecto, en ella aparecen menos nodos múltiples, y menos conexiones cruzadas entre dichos nodos. El Índice de Complejidad de Redes lo que hace es cuantificar lo que la inspección visual ya nos avanza.

El Índice de Complejidad de Redes teóricamente variará según el número de nodos presentes en la Red que estemos estudiando. Para el caso de una Red como la presente, con 11 nodos, la red más simple tendría una complejidad cero, pues corresponderá a una red completamente lineal, sin ningún nodo múltiple, tal como proponemos en el siguiente ejemplo:

Indice: $0,2 \times 0 \times 0 = 0$



La red más compleja teóricamente, sería una en la que todos los nodos estuvieran interrelacionados sería la siguiente:



Indice: $1 \times 11 \times 110 = 1210$

Redes de este tipo no se dan en la práctica, pues como explicamos anteriormente, el algoritmo Pathfinder, por su propia estructura, selecciona, en función de los parámetros “q” y “r”, cuáles son los enlaces más significativos.

La experiencia obtenida en el presente estudio nos indica que el Índice de Complejidad de redes suele oscilar entre un mínimo de 0,7 y un máximo de 13,1.

Estudios posteriores con un mayor número de casos nos permitirán establecer estadísticamente cuáles son los mínimos y máximos entre los que varía para la mayoría de los casos el Índice de Complejidad de Redes.

4.3.4.3.- Selección de los conceptos a estudiar en la prueba.

En esta fase se trataría de seleccionar cuáles eran los “conceptos parciales” que considerábamos eran más importantes relacionados con el de ángulo, y que formarían parte de la red conceptual del alumno.

Estos serían los conceptos que, posteriormente serían presentados al alumno para que estableciera las relaciones existentes entre ellos, mediante el programa KNOT.

Para obtener cuáles eran estos conceptos, consideramos que era importante analizar:

1.- La bibliografía científica respecto al tema. En ella se podría recoger no sólo cuáles eran los conceptos asociados al de ángulo que se trataban con más frecuencia en la literatura relacionada con el tema, sino también las relaciones entre conceptos y su posible agrupación en categorías.

2.- La práctica docente. En nuestra opinión era clave obtener información de los propios profesores, pues son, en definitiva los que transmiten los conocimientos, y de ellos podríamos conocer cuáles eran los ejemplos, ejercicios y recursos utilizados, con los conceptos parciales asociados a ellos.

3.- Los libros de texto. Al ser éstos un instrumento importante en la enseñanza, considerábamos que en ellos aparecerían reflejados, al igual que en la práctica de los profesores, cuáles eran los conceptos parciales más frecuentemente utilizados.

4.3.4.4.- Estudio de accesibilidad.

Se consideró necesario un estudio que hemos llamado “de accesibilidad” previo a la aplicación de la prueba, pues pensamos que quizá hubiera algún problema referente a la dificultad de la utilización de los ordenadores y del propio programa KNOT, sobre todo por los alumnos de menor edad.

Para ello, se diseñó una prueba de accesibilidad con 6 conceptos pertenecientes a un campo de conocimiento con el que suponíamos que cualquier niño de tales edades estaría familiarizado:

Conceptos prueba de accesibilidad:

Perro Gato Animal Planta Rosal Pino

El objetivo sería determinar si los alumnos eran capaces de comprender la mecánica del trabajo con el programa KNOT, sino también el tipo de relaciones que se podían establecer entre dichos conceptos.

4.3.4.5.- Aplicación de la prueba.

Para la aplicación de la prueba se contaría con la colaboración de los profesores participantes.

En primer lugar, se les informaría del alcance y finalidad de la misma, de modo que tuvieran conocimiento del trabajo que se iba a realizar y de las condiciones para su puesta en práctica.

La siguiente fase sería proporcionar ordenadores en el aula a los profesores participantes, donde pasar la prueba, así como instruirles en la utilización del programa KNOT.

Por último, pero no menos importante, sería importante elegir el momento de aplicación, dependiendo del estado de desarrollo de los programas escolares, sobre todo en el caso del curso 3º, de manera que la prueba fuera posterior, aunque no muy lejana a la exposición en clase del tema del ángulo.

4.3.4.6.- Análisis de resultados.

Para el análisis de los resultados, y en consonancia con los objetivos e hipótesis que nos habíamos planteado, nos propusimos que, con la menor interferencia posible por parte del profesor, pudiéramos obtener información acerca del estado y evolución de las redes conceptuales de los alumnos.

Nuestra pretensión básica en cuanto a análisis de resultados era probar la adecuación de las Redes Asociativas Pathfinder y el Índice de Complejidad de Redes con esta finalidad.

4.4.- Proceso de la investigación.

En la descripción del proceso de investigación y con el objeto de reflejar con la mayor exactitud el proceso seguido, utilizaremos el mismo esquema que anteriormente empleamos al presentar las fases del diseño y las pretensiones de cada una de ellas.

4.4.1.- Muestra elegida.

La muestra final seleccionada se tomó de dos Centros de Enseñanza: el Colegio Público “San José”, de Guadajira (Badajoz) y el Colegio Público “Juventud” de Badajoz.

Por lo que se refiere al primero, se trata de un pequeño centro rural de 5 unidades, en el que los alumnos estudian hasta 6º curso de Educación Primaria. Participaron 16 alumnos correspondiente a los cursos 3º (6 alumnos con una media de edad de 9 años) y 4º (10 alumnos con una media de edad de 10 años).

En cuanto al segundo, se trata de un centro urbano, con 24 unidades. En este centro participaron 35 alumnos de los cursos 5º (19 alumnos con una media de edad de 11 años) y 1º de la ESO (16 alumnos con una media de edad de 13 años).

Muestra	
Alumnos 3º	6
Alumnos 4º	10
Alumnos 5º	19
Alumnos 1º ESO	16
Total Alumnos	51

La elección de esta muestra se hizo basándose en los criterios de representatividad que expusimos en el apartado 4.3.4.1.

4.4.2.- Instrumentos de obtención de datos.

Tal como estaba previsto inicialmente en la fase de diseño, la obtención de datos se hizo mediante las Redes Asociativas Pathfinder, mientras que el análisis de la complejidad de las redes se llevó a cabo mediante el Índice expresamente diseñado al efecto y que presentamos en el apartado 4.3.4.2.

Para obtener nuestros datos representados como Redes Asociativas Pathfinder, a partir de la aplicación del programa Knot, necesitábamos por una parte, seleccionar los conceptos “claves” que queríamos representar relacionados con el concepto de ángulo mediante las redes Pathfinder, y por otra parte debíamos estudiar cuidadosamente los valores de proximidad de los mismos. Describiremos a continuación ambos aspectos de nuestro trabajo.

4.4.3.- Conceptos seleccionados.

Se procedió a seleccionar cuáles eran los principales conceptos que se manejan cuando se está enseñando el concepto de ángulo. Para ello, hemos utilizado dos métodos: la entrevista al profesor y el análisis de contenidos de los libros de texto. El análisis de la Bibliografía científica referente al tema nos sirvió para reorganizar los conceptos obtenidos y agruparlos de modo que manejáramos los más significativos de entre los obtenidos.

Primeramente, se entrevistó a la profesora que impartía los cursos 3º y 4º de Primaria. La razón de la elección de este curso es debida a que es en ellos donde se inicia, por primera vez durante la escolaridad, el aprendizaje de este concepto.

Se comenzó con una entrevista no dirigida en la cual se plantearon cuestiones generales sobre la enseñanza del concepto de ángulo. La entrevista estuvo centrada en la forma en la cual se inicia por primera vez su abordaje, y cuáles eran los recursos que se utilizaban.

En síntesis, y a partir de la información suministrada por la profesora, los conceptos que la profesora asociaba al de ángulo y usaba para explicarlo eran principalmente dos: cruce y abertura.

La secuencia de enseñanza que seguía era partir de dos rectas que se cortaban, y que formaban regiones, que resaltaba dibujando un arco en la intersección de las líneas. Los ejercicios que realizaban los alumnos estarían encaminados a destacar por distintos medios la existencia de estas regiones: coloreándolas, señalándolas, o recortándolas.

En una siguiente etapa, continuaba usando el concepto de ángulo, pero incluido en el de polígono, cuando trabajaba este concepto, de modo que el ángulo era una propiedad de una figura, en realidad la esquina de un polígono.

La magnitud de los ángulos se trabajaba partiendo del ángulo recto y, a partir de él, los ángulos con más o menos abertura. Partiendo del ángulo recto, se trabajaban el llano, el agudo y el obtuso.

Los ejemplos que más frecuentemente se utilizaba eran la abertura de un compás, el giro de una puerta y, sobre todo, el de las agujas de un reloj. En todos estos casos podemos ver que se trataba de ejemplos de la vida diaria y que el alumno asociaba con algo que se movía e iba cambiando.

Con respecto a las dificultades que encontraba en el aprendizaje del concepto, la principal era que los alumnos consideraban el trabajo con ángulos como trabajo de “dibujo”, sin un contenido matemático claro. Quizá fuera debido a que en esos cursos no se trabaja con la medida del ángulo, que tiene expresión numérica y por tanto está más cerca de lo que entienden como “matemáticas”.

Otra dificultad que resaltaba es que en los alumnos no identifican el concepto de ángulo con los de dirección o inclinación, sino tan sólo con una figura dibujada.

En una segunda sesión se plantearon los distintos abordajes que del tema se hacían, sobre todo a partir del libro de texto de los alumnos. Se analizaron, junto con la profesora cuáles eran los puntos clave de la exposición, cuáles eran aquellos en que más se insistía, cuáles eran los ejemplos y cuáles los ejercicios de aplicación que se utilizaban. Por el contrario, también se analizaron junto con la profesora cuáles eran los aspectos que, por ser considerados menos interesantes o menos adecuados, para los alumnos, se soslayaban.

En esta entrevista, se pudo observar, además, que la profesora utilizaba frecuentemente recursos que no utilizaba el libro de texto, tales como los ejemplos de la vida diaria. También se observó que se daba más importancia en la enseñanza a los ejemplos y ejercicios del libro de texto que a las definiciones y en general textos expositivos.

Tras la entrevista a la profesora se procedió al análisis de los libros de texto de los cursos 3º y 4º. Para ello se comenzó seleccionando los conceptos más significativos, con el criterio de ser aquellos en los que:

- aparecían resaltados en los textos expositivos (subrayados, coloreados, ...)
- eran repetidos con mayor frecuencia en dichos textos.
- aparecían en los ejemplos y ejercicios con mayor frecuencia.

Basándose en la información recogida tanto de la entrevista a la profesora como de los libros de texto, se procedió a elegir una primera lista de conceptos que, posteriormente, se utilizarían para elaborar la red asociativa Pathfinder. En un principio se obtuvieron, por este procedimiento 18 conceptos.

Tras esta primera selección, se procedió a una segunda, para la que se utilizaron dos criterios:

1.- En primer lugar, un criterio de orden práctico relacionado con el programa Knot y con su utilización por parte de los alumnos. A la hora de utilización de este programa, el

tiempo que el alumno emplea es determinante, pues hay un límite máximo de tiempo en que puede mantener atención, antes de perder interés por la tarea que está realizando. Este aspecto es crucial en alumnos como los de Primaria con los que realizamos esta experiencia.

Así pues, por nuestro conocimiento anterior en la utilización de este programa, determinamos que el número máximo de conceptos debería estar entre 10 y 12 .

2.- Un segundo criterio lo obtuvimos a partir de la literatura científica relacionada con el tema. En esta literatura, tal como hemos expuesto en un capítulo anterior de este trabajo, los conceptos relacionados con los ángulos aparecen agrupados de acuerdo con dos tipos de representaciones, que podemos denominar “dinámica” y “estática”, del ángulo.

De acuerdo con los criterios enunciados, seleccionamos 11 conceptos asociados al de ángulo agrupados de la forma que sigue:

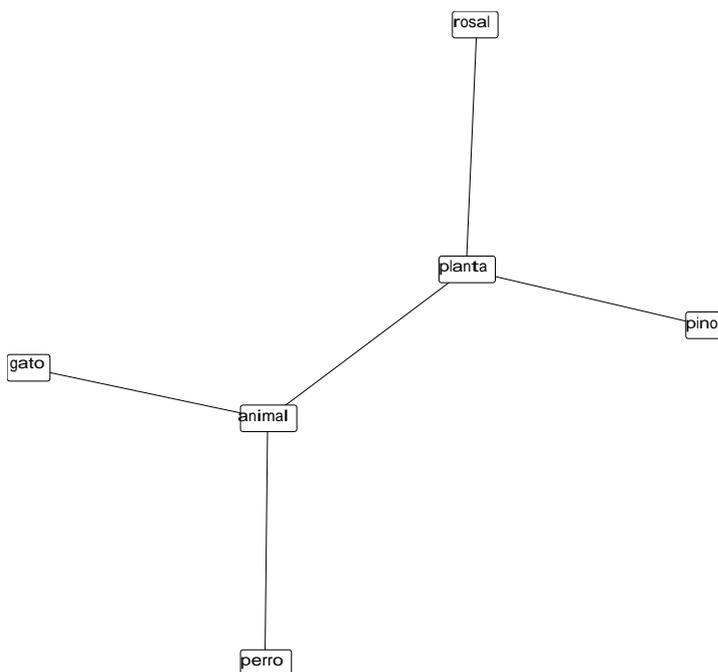
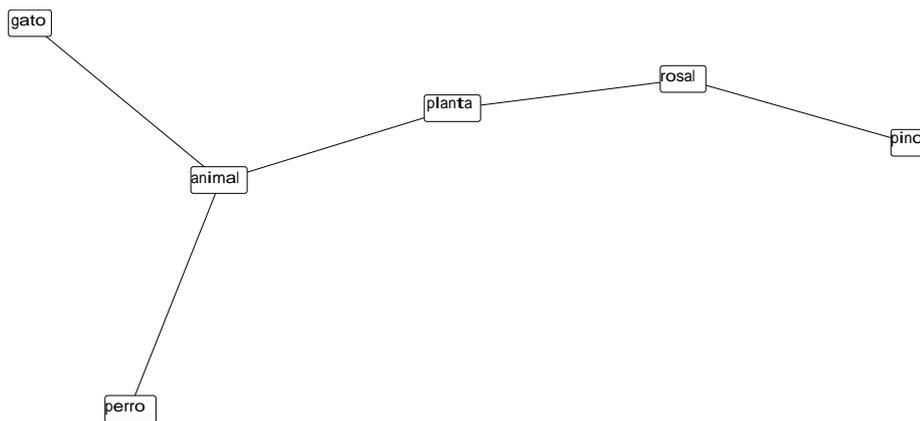
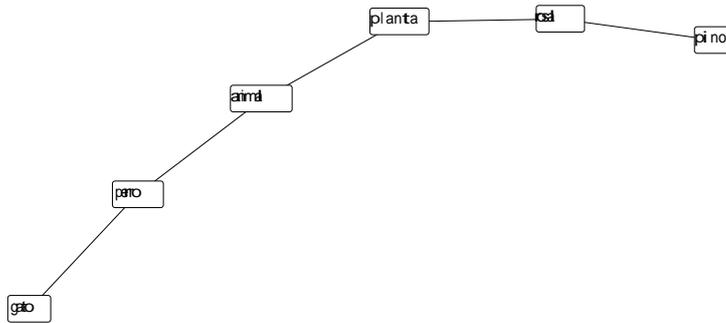
<p>- Concepción "estática" de ángulo. Rincón Región angular Lados de un ángulo Rectas secantes.</p>
<p>- Concepción "dinámica" de ángulo. Orientación Giro Dirección Agujas del reloj.</p>
<p>- Conceptos que participan de las dos concepciones. Angulo Abertura Inclinación</p>

4.4.4.- Realización de la prueba de accesibilidad.

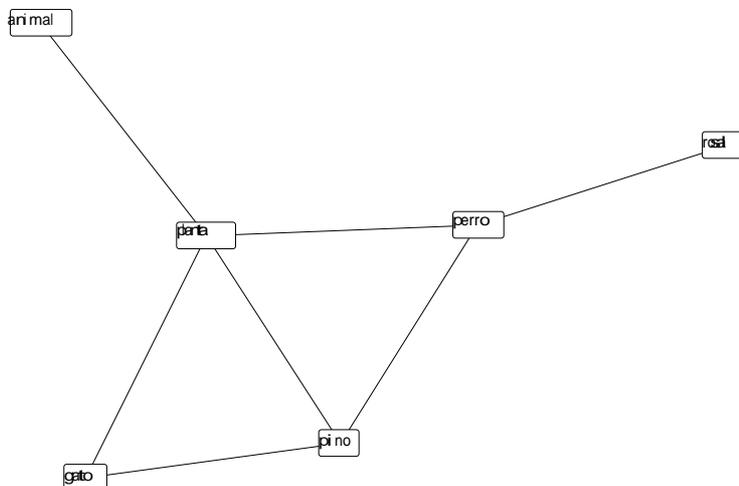
Paso previo a la asignación de valores de proximidad de los conceptos seleccionados fue efectuar una pequeña prueba que denominamos “de accesibilidad”, cuyo objetivo, como indicábamos en el diseño, fue determinar si con los alumnos entre 9 y 11 años era posible utilizar el programa KNOT, pues teníamos algunas dudas de si los alumnos tenían capacidad de manejar dicho programa.

Denominamos a esta prueba "Servivo" y empleamos los conceptos que indicábamos en el apartado 4.3.4.4.

Los alumnos de 3º, 4º y 5º de Primaria realizaron esta prueba piloto en un ordenador Macintosh, del que se disponía en la clase, y fueron accediendo por turnos a lo largo de dos días. Se obtuvieron Redes Asociativas del tipo de las siguientes:



Un primer examen visual de las redes obtenidas nos permitió observar que había algunas, como la que presentamos a continuación, con incongruencias y graves errores. Esto nos indicó que algunas de ellas debían descartarse.



Una vez establecidas todas las redes asociativas de los alumnos, se calculó el valor de la Coherencia (ver apartado 3.3.3.2 de este trabajo) de dichas redes y la media y desviación típica de todos los valores.

Servivo 3º

1	Carlos	0,9169
2	Loren	0,6543
3	Marcos	0,8045
4	Isabel	0,7658
5	Lourdes	0,5274
6	Mónica	0,9672

Media: 0,7727
Desviación típica: 0,1636

Servivo 4º

1	Belén	0,5004
2	Carmen	0,2228
3	Carmen2	0,2228
4	Elena	0,8050
5	Eugenio	0,6014
6	Jesús	0,1428
7	Pilar	0,9990
8	Soraya	-0,1533
9	Víctor	0,9594
10	Yanira	0,8971

Media: 0,5197
Desviación típica: 0,3979

Servivo 5º

1	Alberto	0,5430
2	MªAngeles	0,9990
3	Javier	0,3698
4	Víctor	0,4420
5	Matías	0,7733
6	Laura	-0,0641
7	María R.	0,9451
8	M.Enrique	0,1441
9	Rosalía	0,8658
10	Roberto	0,5231
11	Alejandro	0,4144
12	Amanda	0,3372
13	María T.	0,4368
14	Iván	-0,1863
15	Jose M.	0,9382
16	Rubén	0,7243
17	Jesús	0,8732
18	Cristina	0,0393
19	J. Luis	0,5641

Media: 0,5096
Desviación típica: 0,3518

Se decidió descartar para la experiencia definitiva a aquellos alumnos que, o bien habían obtenido coherencias negativas o bien su valor estaba una desviación típica por debajo de la media.

Tras esta nueva selección, se descartó a un alumno de 4º curso y 3 alumnos de 5º.

En ambos casos la causa de la exclusión de los alumnos era que, o bien no habían comprendido la mecánica del trabajo con el programa Knot, o bien no habían realizado la tarea con suficiente atención.

4.4.5.- Aplicación definitiva de los valores de proximidad.

La asignación de los valores de proximidad y el posterior cálculo de las redes asociativas Pathfinder se lleva a cabo de forma automática, como hemos indicado anteriormente, mediante el programa informático Knot. El algoritmo Pathfinder, incluido en dicho programa, y tal como también hemos explicado en un capítulo anterior, permite obtener varios tipos de representaciones más o menos complejas, según se varíen dos parámetros q y r .

Para esta experiencia establecimos en todos los casos los mismos parámetros: $q=10$, $r=$ infinito. La elección del valor de q se debe a que, al ser 11 el número de conceptos que manejamos, con $q=10$ se obtiene la red menos compleja posible, resaltándose sólo los enlaces más significativos entre conceptos. Por lo que respecta a r , la elección es debida a que los valores que asignan los alumnos a la proximidad de conceptos está medida en una escala ordinal, y dada la forma de construcción de las Redes Asociativas Pathfinder, este valor es el más adecuado cuando estamos manejando datos de este tipo.

La prueba definitiva, se llevó a cabo, como en el caso de la prueba piloto, en un ordenador Macintosh al que accedían durante la jornada escolar, a lo largo de dos días.

Las instrucciones que se les facilitaron fueron para todos las mismas y en los mismos términos. Se les indicó textualmente:

“En el ordenador van a aparecer una serie de palabras que tienen algo que ver unas con otras, que tienen cierta relación: poca, mucha o regular. Tú tienes que indicar cuánta. Si señalas con el ratón a la derecha es mucha, si señalas a la izquierda es poca, y hacia el centro es regular”.

El tiempo medio empleado por los alumnos en realizar la prueba fue de 20 minutos.

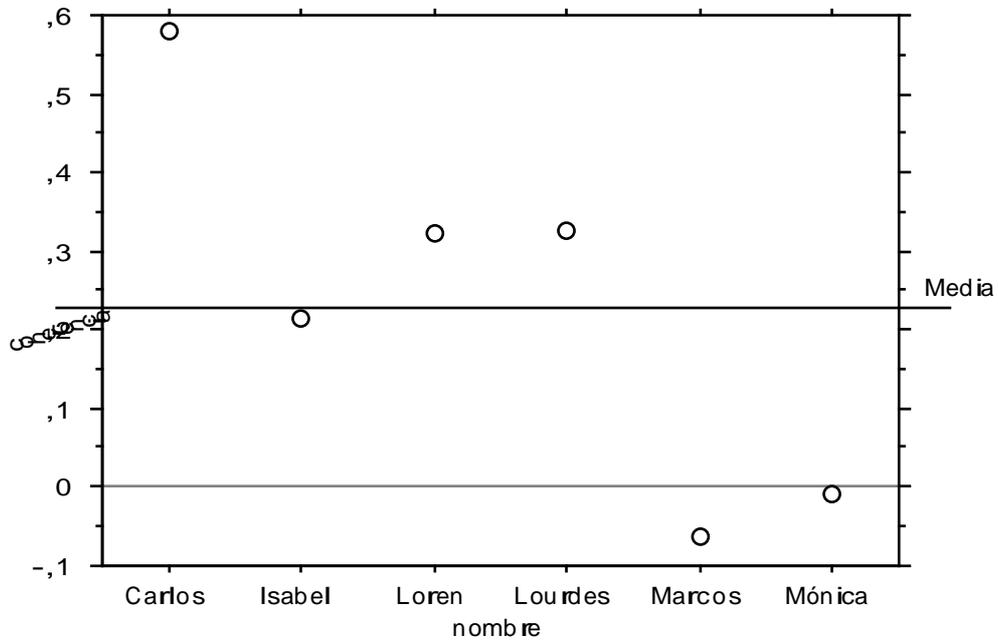
De nuevo se calculó la Coherencia para todas las redes obtenidas, así como la media y la desviación típica de dichos valores.

Coherencia Angulos 3º

1	Carlos	0,5803
2	Loren	0,3243
3	Marcos	-0,0632
4	Isabel	0,2134
5	Lourdes	0,3244
6	Mónica	-0,0098

Media: 0,2282

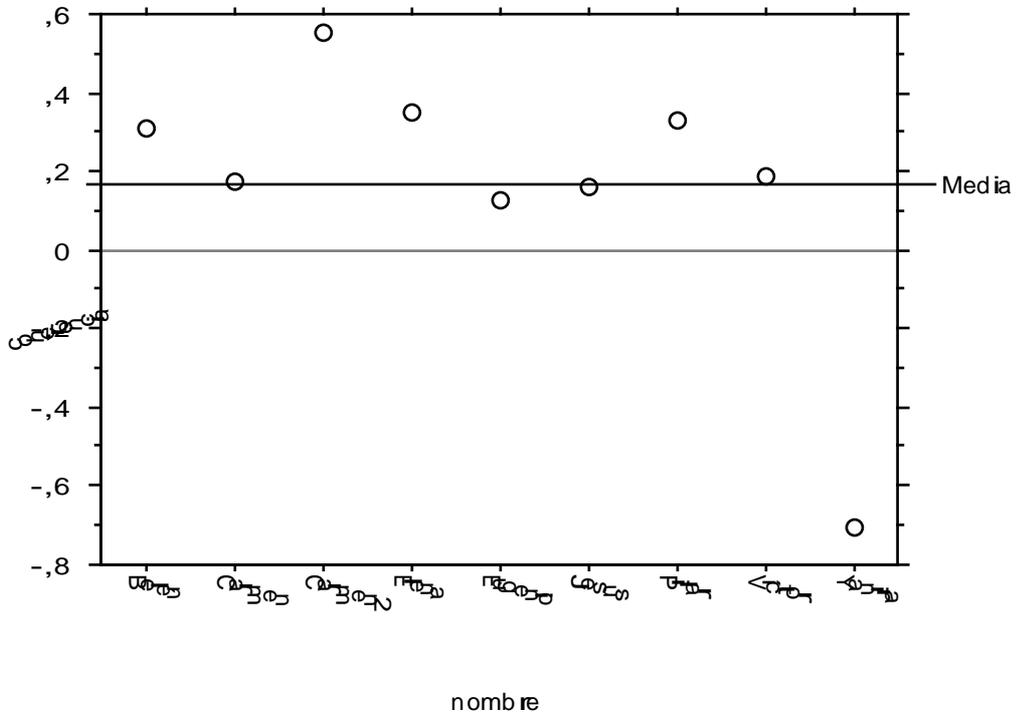
Desviación típica: 0,2384



Coherencia Angulos 4º

1	Belén	0,3098
2	Carmen	0,1766
3	Carmen2	0,5520
4	Elena	0,3485
5	Eugenio	0,1266
6	Jesús	0,1615
7	Pilar	0,3316
8	Víctor	0,1843
9	Yanira	-0,7044

Media: 0,1652
 Desviación típica: 0,3518

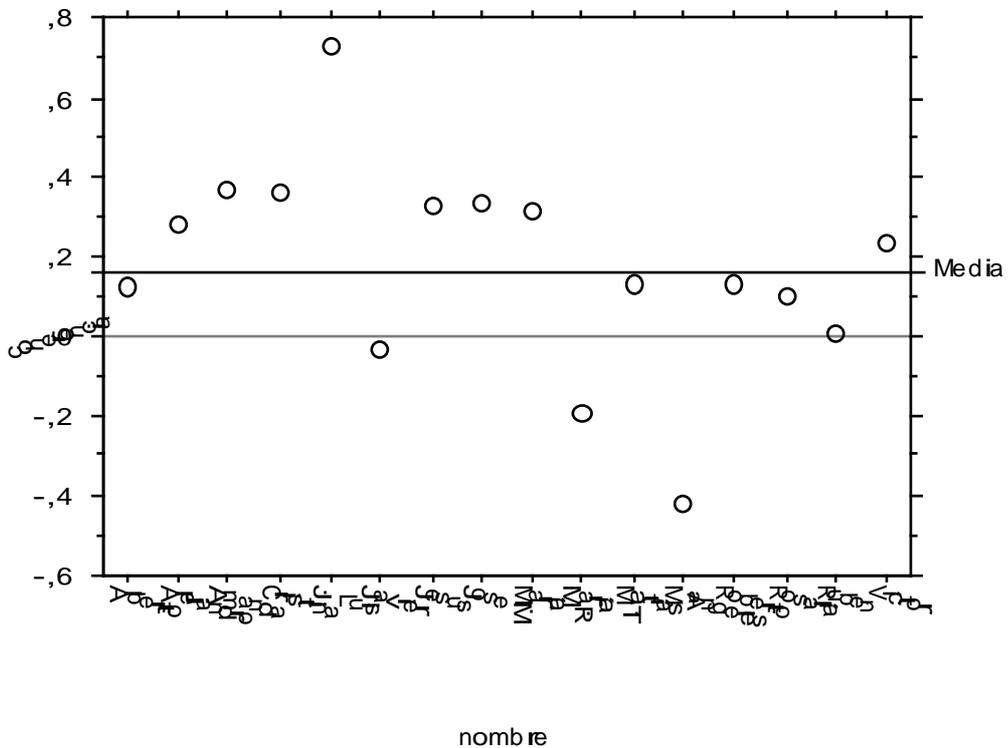


Coherencia Angulos 5º

1	Alberto	0,1207
2	MªAngeles	-0,4168
3	Javier	-0,0304
4	Víctor	0,2326
5	Matías	0,1318
6	María R.	0,3112
7	Rosalía	0,1052
8	Roberto	0,1322
9	Alejandro	0,2788
10	Amanda	0,3701
11	María T.	-0,1937
12	Jose M.	0,3325
13	Rubén	0,0055
14	Jesús	0,3286
15	Cristina	0,3601
16	J. Luis	0,7227

Media: 0,1744

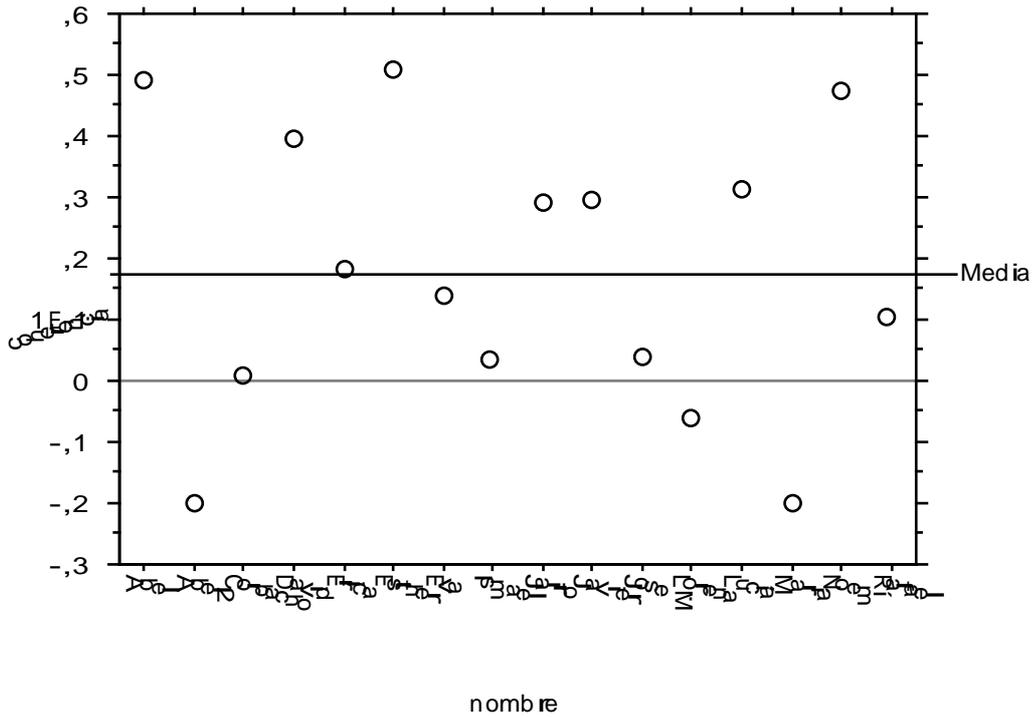
Desviación típica: 0,2610



Coherencia Angulos 1º ES

1	Abel	0,4932
2	Lucía	0,3134
3	Rafael	0,4630
4	David	0,3975
5	María	-0,1993
6	Corbacho	0,0069
7	Eva	0,1392
8	Esther	0,5103
9	Jairo	0,2927
10	Lorena	-0,0608
11	Noemí	0,4742
12	Javier	0,2952
13	Ismael	0,0571
14	Jose M.	0,0571
15	Abel2	-0,1979
16	Erica	0,1831

Media: 0,2016
 Desviación típica: 0,2400



Nuevamente en esta fase se descartó a los alumnos cuyas Redes presentaban un valor de la Coherencia negativa, muy próxima a cero o una desviación típica por debajo de la media. Los alumnos de los que, definitivamente, se tomaron los datos de este estudio, fueron:

Muestra definitiva

Alumnos 3º	4
Alumnos 4º	8
Alumnos 5º	12
Alumnos 1º ESO	10
Total Alumnos	34

4.5- Resultados obtenidos.

Se han analizado datos correspondientes a 51 alumnos, que nos han permitido obtener 51 redes conceptuales. Teniendo en cuenta que cada uno de ellos ha tenido que establecer 55 comparaciones entre conceptos, arroja un total de 2.805 comparaciones.

De estas comparaciones, se han descartado, como hemos explicado anteriormente, todas aquellas que, o bien en la prueba piloto, o bien en la prueba definitiva presentaban bajos valores de la coherencia, con lo que se obtuvieron para su posterior análisis un total de 34 redes conceptuales.

En Anexos presentamos las redes obtenidas, que son representaciones de la forma en que los alumnos relacionan los conceptos asociados al de ángulo. También adjuntamos datos acerca de la complejidad de dichas redes.

4.6.- Análisis de los resultados.

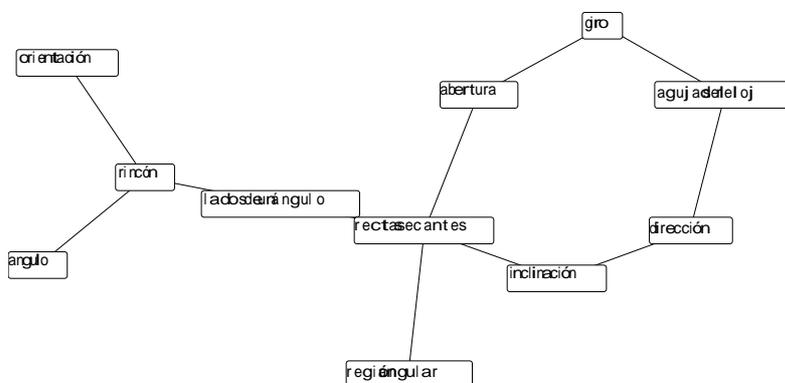
En las Redes Asociativas podemos observar en una primera inspección dos aspectos que, a nuestro juicio son muy interesantes: su forma de estructuración y su nivel de complejidad. Pasaremos a comentar dichos aspectos.

4.6.1.- Estructura jerárquica de las redes.

En primer lugar, podemos observar que las representaciones obtenidas no indican una estructura claramente jerárquica. Esto va en la línea expresada, entre otros, por Bajo, M.T. y Cañas, J.J. (1.994), quienes indican que el conocimiento no está necesariamente ordenado de forma jerárquica.

“ Este tipo de estructura jerárquica fue muy utilizada en las primeras teorías de representación ... y aunque un gran número de experimentos han mostrado las debilidades de estos modelos ... algunas de las técnicas de análisis de los datos de proximidad todavía ofrecen este tipo de representación. Es importante señalar, sin embargo, que aunque la mayoría de las teorías de este tipo son estrictamente jerárquicas, ya que un concepto determinado sólo puede estar conectado a un solo concepto de un nivel más alto de la jerarquía, existen modelos y técnicas asociados a los mismos que, aunque mantienen relaciones jerárquicas, no lo hacen en sentido estricto ya que permiten solapamiento entre las distintas clases o categorías de forma que un concepto puede estar conectado a más de un concepto representado a un nivel más alto de la jerarquía.”

Observemos, por ejemplo la Red correspondiente a uno de los alumnos, en la que podemos ver reflejada esta afirmación. Junto con las siguientes que presentamos en este trabajo, nos permiten hacernos una idea de este aspecto.



Efectivamente, las relaciones entre los conceptos, tal como aparecen en esta y otras representaciones que obtenemos en nuestro estudio y que iremos mostrando, no aparecen

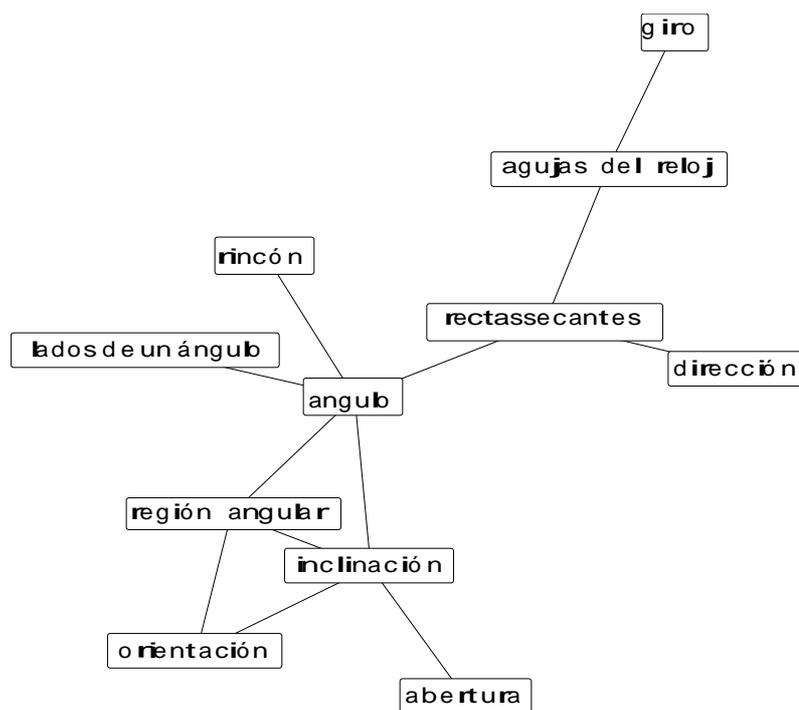
en forma claramente jerárquica, con unos conceptos “superiores” de los cuales dependan otros, sino que la persona que aprende va construyendo redes que enlazan conocimientos nuevos con otros anteriores, solapándose en determinados momentos distintas categorías de conceptos, y haciéndolo en torno a ciertos conceptos que podemos llamar “nucleares”.

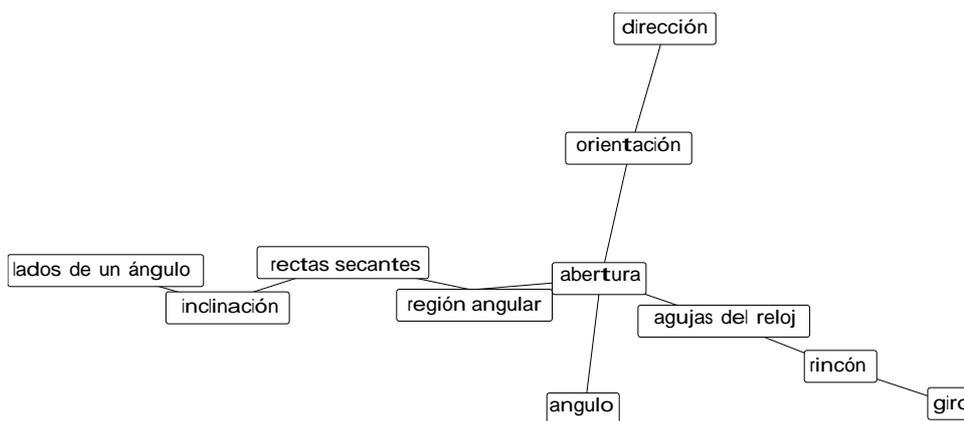
Sobre este aspecto, que juzgamos muy interesante, incidiremos más en detalle en el siguiente apartado. Baste ahora con añadir, y esto nos parece también de gran interés, que esta primera aproximación nos indica que existen temas dentro del campo de conocimiento de las matemáticas, que aparecen como más claramente estructurados que otros. En este sentido, volvemos a hacer referencia a nuestro anterior trabajo sobre los conceptos relacionados con los problemas de suma y resta (Casas y Luengo, 1.999) en que podíamos observar una más clara estructuración de dichos conceptos en contraposición con lo que obtenemos ahora.

Podemos suponer, entonces, que hay tópicos dentro de la enseñanza de las matemáticas que merecen un abordaje más estructurado que otro, puesto que, por su propia naturaleza y por la forma en que se organiza la estructura cognitiva del alumno son diferentes.

4.6.2.- Complejidad de las redes.

La segunda propiedad que podemos observar en las redes obtenidas es su diferente nivel de complejidad. Efectivamente, a simple vista, podemos observar que las redes de los alumnos son más complejas unas que otras. Veamos dos ejemplos extremos:





Como podemos ver, en la primera de las redes se ven muchas más conexiones entre conceptos que en la segunda, que a simple vista es mucho más lineal, por así decirlo, y con menos interrelaciones.

Evidentemente las redes pueden ser analizadas mediante un primer examen visual que de manera aproximada nos indica cuáles son más complejas y cuáles menos.

El problema para identificar la complejidad de las redes, que aparece a simple vista es cuantificarla de algún modo. Si bien en los ejemplos que hemos presentado en los que, a propósito, hemos elegido dos extremos opuestos, es relativamente fácil decir cuál es la red más compleja y cuál la menos compleja, no es lo habitual.

Para analizar la complejidad de las redes, creemos que es mejor, como decíamos anteriormente, tener algún criterio más objetivo para hacerlo, y con esta finalidad creamos el Índice de Complejidad de Redes, que describimos en el apartado 4.3.4.2 y que consideramos puede ser una útil aportación a la investigación en este campo.

Aplicando este índice obtenemos los siguientes valores:

Complejidad Alumnos 3º

Alumno 1	0,8
Alumno 2	2,2
Alumno 3	2,9
Alumno 4	2,5

Complejidad Alumnos 5º

Alumno 1	2,5
Alumno 2	4,9
Alumno 3	0,9
Alumno 4	5,4
Alumno 5	2,5
Alumno 6	5,4
Alumno 7	11,2
Alumno 8	5
Alumno 9	1,2
Alumno 10	2,5
Alumno 11	3,2
Alumno 12	2,2

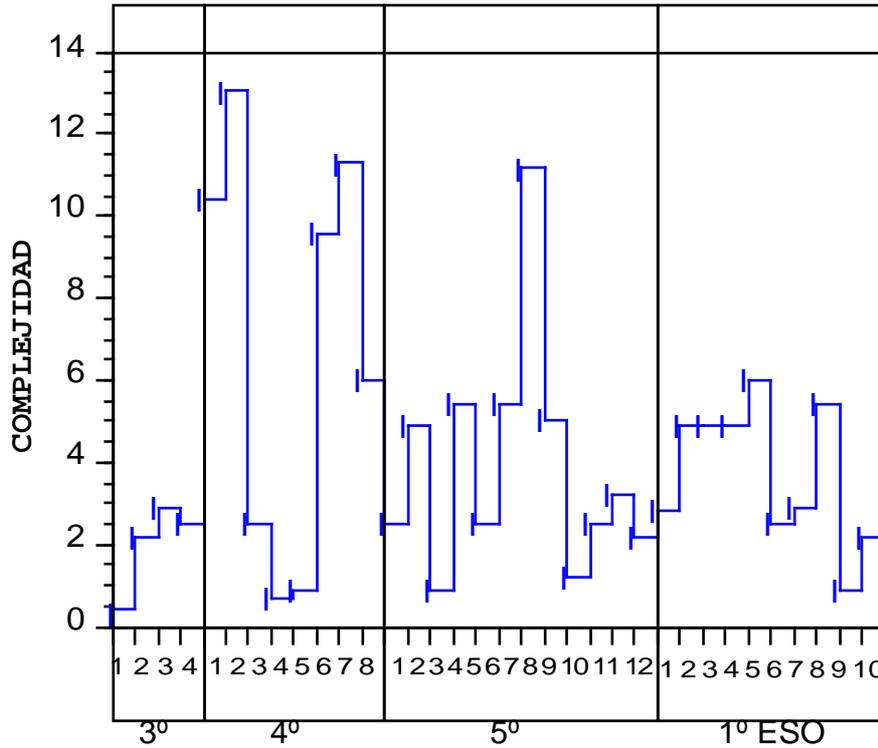
Complejidad Alumnos 4º

Alumno 1	10,4
Alumno 2	13,1
Alumno 3	2,5
Alumno 4	0,7
Alumno 5	0,9
Alumno 6	9,6
Alumno 7	11,3
Alumno 8	6

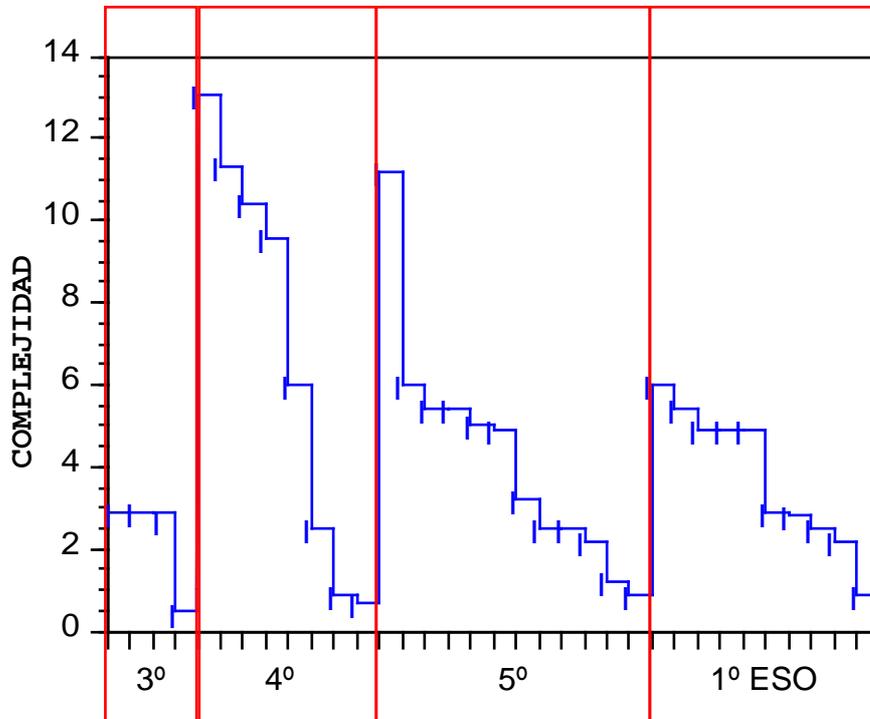
Complejidad Alumnos 1º ESO

Alumno 1	2,8
Alumno 2	4,9
Alumno 3	4,9
Alumno 4	4,9
Alumno 5	6
Alumno 6	2,5
Alumno 7	2,9
Alumno 8	5,4
Alumno 9	0,9
Alumno 10	2,2

Podemos representar gráficamente los valores de estos Índices de Complejidad:



Pero para hacernos una idea más exacta de la evolución de estos índices podemos representarlos de nuevo, pero ordenados dentro de cada curso, de mayor a menor complejidad:



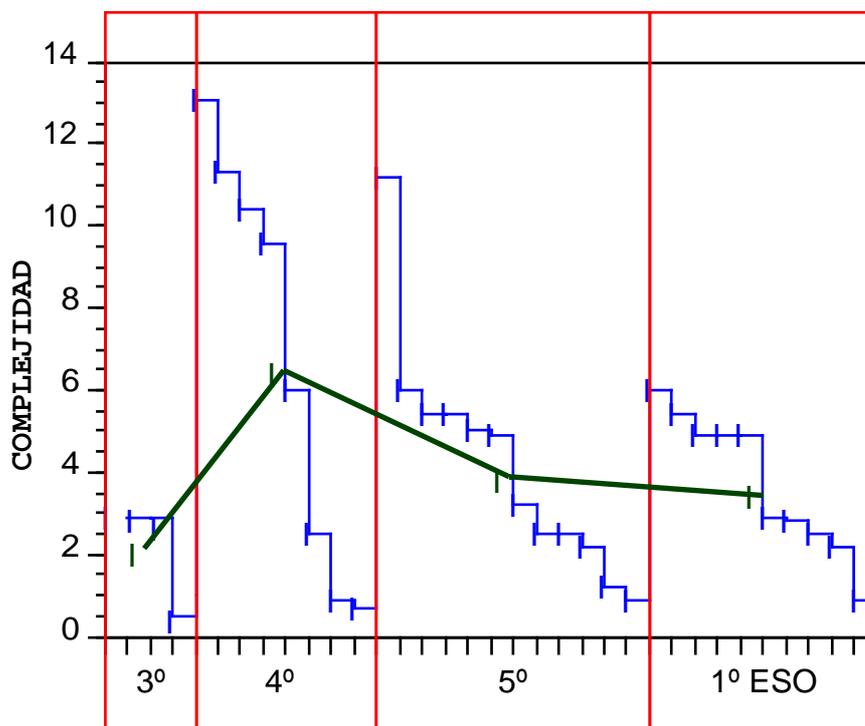
Como podemos ver, en este gráfico, se aprecia de forma visual que los valores del índice de complejidad van haciéndose más pequeños conforme avanza la escolaridad, y a la vez se van agrupando con un rango menor de variabilidad.

Si calculamos la media de los Índices de Complejidad, obtendremos los siguientes resultados:

Media de los Índices de Complejidad

Indice alumnos 3º:	2,1
Indice alumnos 4º:	6,8
Indice alumnos 5º:	3,9
Indice alumnos ESO:	3,7

Estos resultados nos indican que la complejidad de las Redes Asociativas de los alumnos, correspondientes a sus estructuras cognitivas del concepto de ángulo va cambiando conforme van avanzando en la escolaridad. De nuevo podemos observarlo en una representación gráfica, donde hemos incluido la evolución del valor medio del Índice de Complejidad:



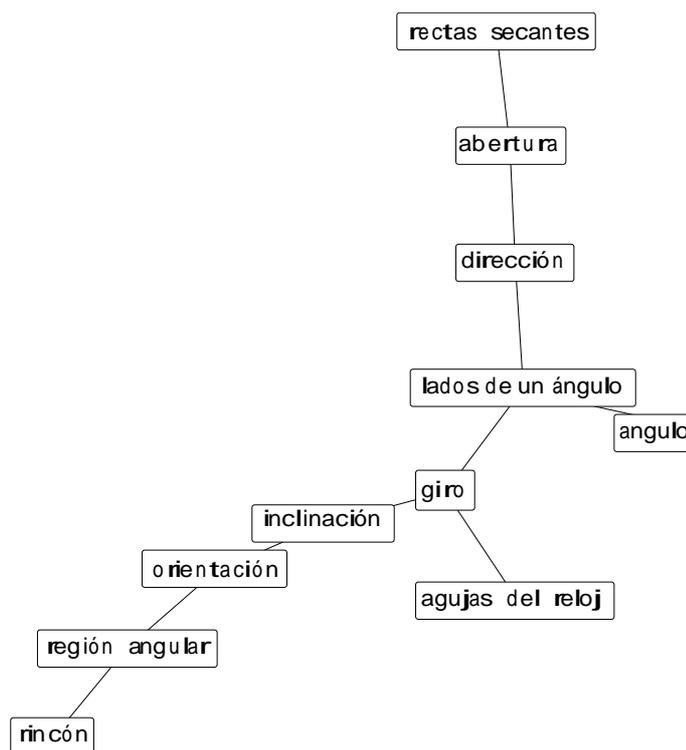
Estos datos coinciden, con la concepción del aprendizaje humano como un proceso que supone una mayor complejidad y estructuración de los conocimientos anteriores.

Pero podemos observar que, contrariamente a lo que sería esperable, la complejidad de las redes no va aumentando de forma continua, sino que, por el contrario, tiene un máximo a partir del cual va gradualmente disminuyendo.

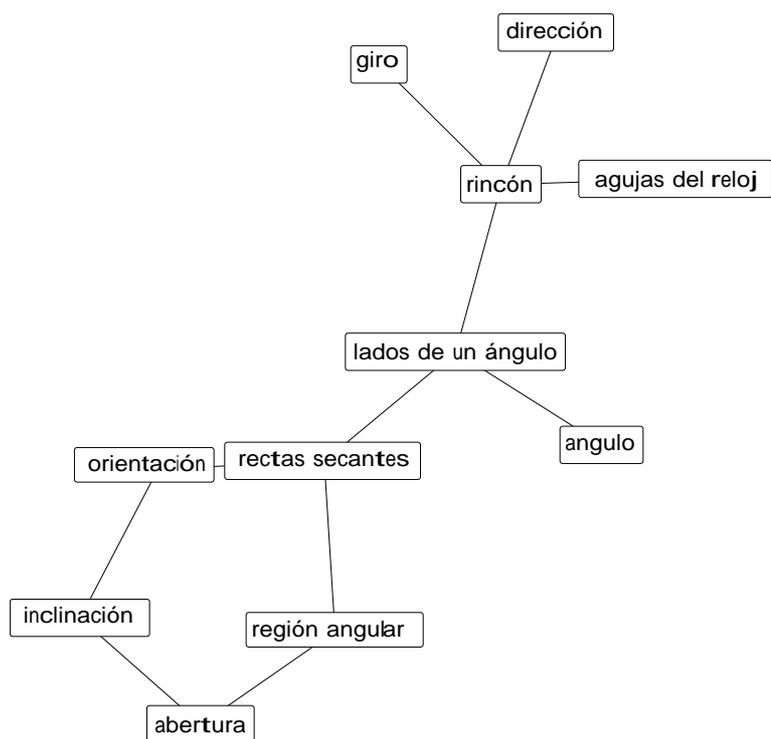
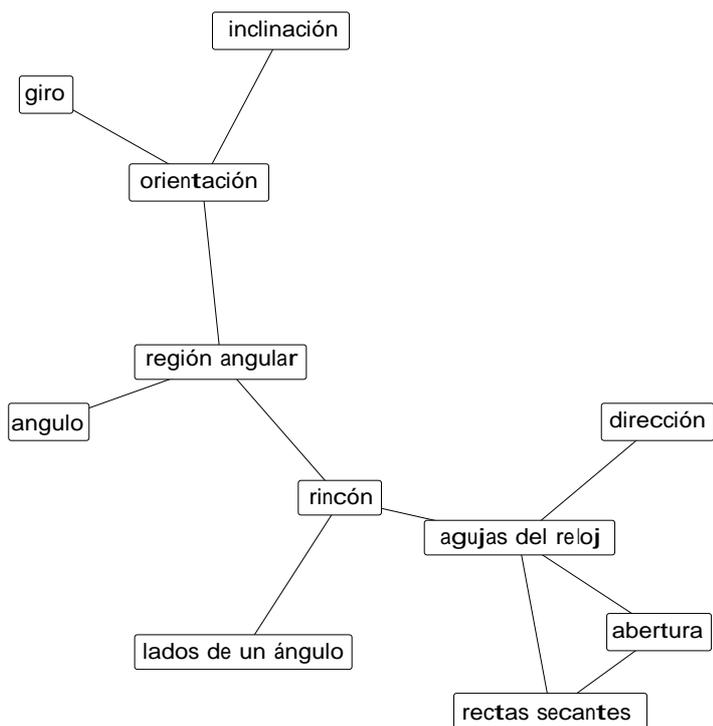
En efecto, podemos constatar que:

- En 3º las redes son muy simples.
- En 4º son más complejas.
- En 5º baja su complejidad.
- En los alumnos de ESO son aún menos complejas.

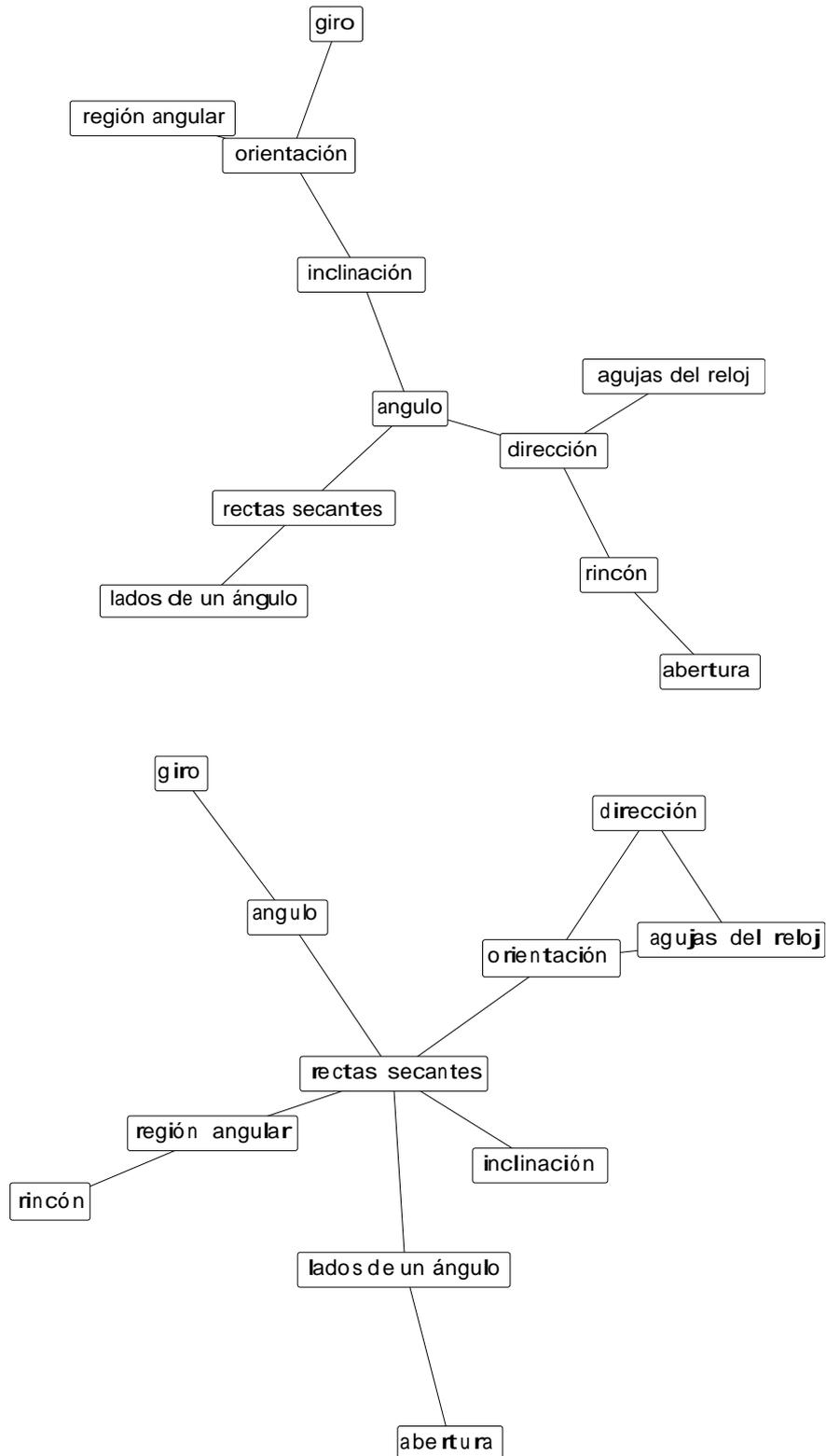
Nuestra interpretación de estos datos es que, para los alumnos de 3º curso los conceptos están muy poco organizados, y guardan poca relación unos con otros. Esto es lógico, pues es el curso donde sólo han ido empezando a estudiar el concepto de ángulo. Las Redes de los alumnos de 3º son del siguiente tipo:



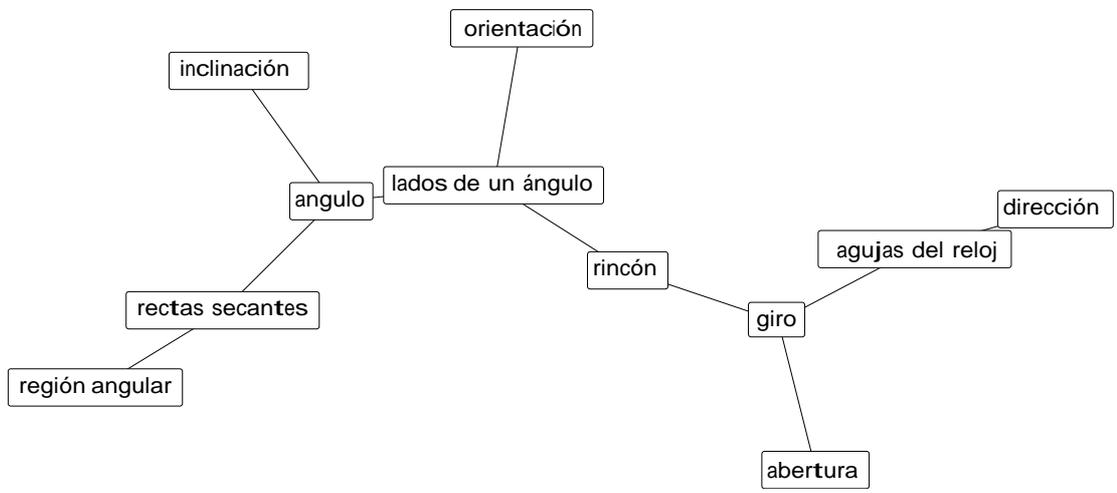
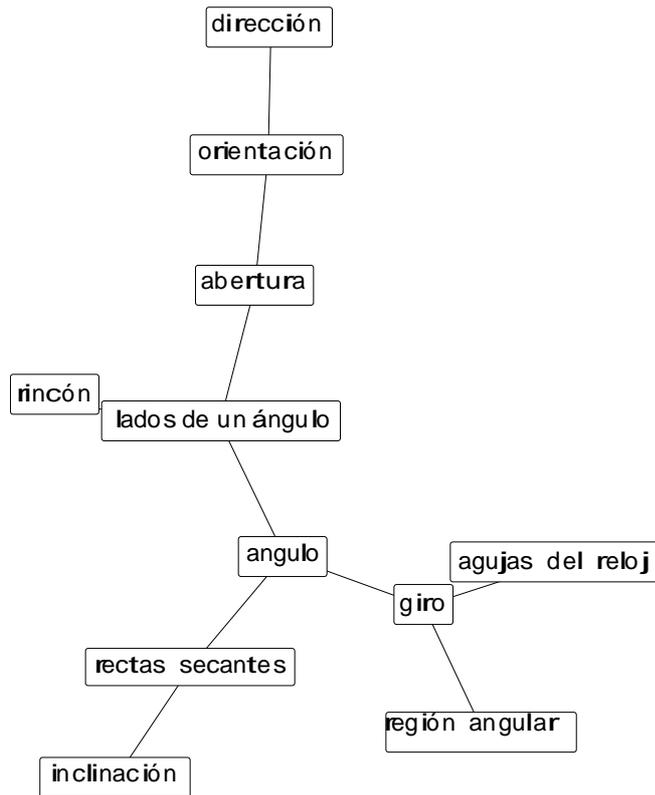
A partir de 4º empiezan a crearse más enlaces entre estos conceptos, aunque todavía están bastante desorganizados. Aumenta pues la complejidad media de las redes de los alumnos. Las que mostramos a continuación son de este tipo:



Pero a partir de 5º parece que los conceptos se van organizando y las redes cognitivas, en lugar de hacerse más complejas, tienden a simplificarse, nucleándose en torno a cada vez menos conceptos, relacionados todos con uno o dos de ellos. Estos conceptos “nucleares” serían los puntos clave a los que el alumno “ancla” su estructura cognitiva. Aparecen varias redes del tipo que mostramos, y que ilustran nuestra afirmación:



Definitivamente es en la ESO, donde estos conceptos clave aparecen como mejor establecidos y se van nucleando precisamente en torno a las dos concepciones “estática” y “dinámica” del concepto de ángulo. Aparece también en estas representaciones el concepto de ángulo como concepto central al que el alumno va “anclando” otros conceptos más concretos.



El siguiente paso, si se confirmara esta evolución sería que todos los conceptos se estructurarían en torno a unos pocos, relacionados todos precisamente con el concepto de “ángulo”.

Esta evolución de la complejidad de las redes cognitivas de los alumnos a lo largo de la escolaridad, corresponde plenamente con lo propuesto por Mitchelmore y que ya señalábamos en una cita anterior, en relación con que el alumno va descubriendo que el

mismo concepto, precisamente el de ángulo, está implicado en diferentes contextos a primera vista diferentes.

Nuestras primeras investigaciones actualmente en curso con redes cognitivas de adultos, parecen confirmarlo.

Estos resultados que aquí presentamos fueron comentados en comunicación personal con el profesor Mitchelmore, quien nos hizo notar que son, aparentemente paradójicos.

En nuestra opinión, y así se lo trasladamos a Mitchelmore, quien se mostró conforme con nuestra interpretación, creemos que estos datos no son, sin embargo, contradictorios, y pueden ser explicados si se tiene en cuenta que, en los cursos 3º y 4º (8 y 9 años de edad) se inicia en la escuela el estudio del concepto de ángulo. Un alumno de 3º de Primaria, tiene poco conocimiento de las relaciones entre los conceptos presentados. Por esa razón, las redes son muy simples. En el siguiente curso ya sabe que hay otras relaciones que antes no conocía, con lo que sus redes se hacen más complejas.

A medida que aumenta la edad, algunas relaciones entre conceptos se van haciendo cada vez más fuertes, mientras que otras pierden importancia. Y aparecen algunos conceptos muy fuertemente enlazados con otros. Estos conceptos son los más importantes. Nuestros estudios parecen indicar que, en adultos, los conceptos relevantes son pocos, y el más relevante es uno: el concepto de ángulo.

Utilizando la analogía de un mapa de carreteras, cuando llegamos a vivir a un nuevo país, tenemos un conocimiento pobre de su red de carreteras, aunque cuando pasan los años cada vez la conocemos mejor. Y cuando tenemos un buen conocimiento, utilizamos siempre las mejores carreteras para ir a nuestro trabajo. Pero a veces, por motivos turísticos, podemos ir por carreteras secundarias. Pero preferimos ciertos enlaces y dejamos de utilizar otros. Eso no quiere decir que nuestro conocimiento de la red de carreteras sea peor, sino precisamente lo contrario.

Efectivamente, con la edad, las redes cognitivas se hacen más complejas. Este es un razonable principio de la teoría del desarrollo intelectual, y el sentido común parece indicar que así debe ser, pero también es razonable pensar en los términos que hemos expuesto anteriormente. No son principios contradictorios, sino complementarios. Y pensamos que puede ser un interesante punto de partida para posteriores investigaciones.

Nuestros resultados creemos que confirman esta afirmación y ponen de manifiesto de forma gráfica algo que, hasta ahora, no estaba suficientemente investigado.

4.7.- Alcance de los resultados y limitaciones.

En este apartado queremos dejar constancia de las limitaciones de las que somos conscientes que puede presentar este trabajo de investigación.

En primer lugar, hemos de decir que el tamaño de la muestra empleada no permite generalizar resultados, aunque creemos de todas maneras que, tratándose de un estudio exploratorio, de una primera aproximación a un tema completamente nuevo, puede ser suficiente. El tamaño de muestra que hemos utilizado es comparable, e incluso mayor, que el de otros estudios de este mismo tipo, que hemos descrito en este trabajo y los resultados obtenidos nos permiten aproximarnos al conocimiento del concepto de ángulo y su evolución en el alumno, tal como era nuestra intención.

Por otra parte, y como todas las técnicas de investigación, también la que hemos utilizado tiene sus limitaciones, que también hemos procurado tener en cuenta a la hora de interpretar los resultados y valorar su alcance.

La primera duda que nos planteamos al emplear la técnica de las Redes Asociativas Pathfinder era si en realidad los alumnos, al establecer la similaridad de los conceptos no estarían juzgando la similaridad en base a otro aspecto que no fuese el que nos interesaba, es decir, la angularidad. En efecto, cuando el alumno juzga la similaridad entre dos conceptos cabe la posibilidad de que esté considerando que son similares en un aspecto que no sea la angularidad. Por poner un ejemplo, muy extremo, la similaridad entre los conceptos "dirección" e "inclinación" puede radicar solamente en que ambas palabras terminan en "ión". Análogamente, en algunos alumnos puede darse el caso de que dos conceptos sean similares para él por alguna otra razón que no tenga nada que ver con la noción de angularidad.

Efectivamente, esta fue nuestra primera preocupación al comenzar a utilizar esta técnica. Pero si observa detenidamente, la propia técnica ayuda a evitar ese peligro. Al utilizar 11 conceptos, se hacen 55 comparaciones. Es posible que, efectivamente, cuando el alumno establezca la primera comparación, se fije en una similaridad no angular. También es posible que haga lo mismo en la segunda comparación, incluso en la tercera, la cuarta o la quinta. Y puede ser que juzgue otras similaridades no angulares. Pero es razonable suponer (y además la evidencia empírica así parece indicarlo) que, a partir de un cierto punto, el alumno descubrirá que lo que hay en común en todos los conceptos que se le presentan, es, precisamente, la angularidad.

Si un alumno utiliza a lo largo de todo el proceso criterios cambiantes de similaridad, al final la coherencia será muy baja. Si, por el contrario, el alumnos utiliza un único criterio en la mayor parte de las comparaciones, la coherencia será aceptable. Y es muy difícil que este criterio no sea el de angularidad, pues todos los conceptos han sido seleccionados en base a ese criterio.

Esa ha sido la razón por la que hemos empleado la medida de la coherencia para descartar del estudio a determinados alumnos, como una forma de corregir este inconveniente.

Otra limitación achacable a la propia técnica es el establecimiento concreto de los parámetros "q" y "r". Efectivamente, se puede comprobar que las redes obtenidas varían, aún con los mismos datos de proximidad, simplemente al variar estos parámetros.

Cambiando los valores de "q" y "r" se obtienen varias redes, pero en la práctica, y debido al algoritmo matemático que utiliza KNOT, si, por ejemplo, trabajando con 11 conceptos, se cambia "q", desde 1 hasta 10, no aparecen 10 representaciones distintas, sino sólo suelen aparecer como máximo tres o cuatro, dependiendo de los datos. Esto indica que, efectivamente "q" influye en la forma de la representación, pero no tanto como pudiera esperarse. Además, entre todas las posibles representaciones, los enlaces principales siguen siendo los mismos, y sólo aumenta el número de los enlaces secundarios. Podemos llegar a una representación en que todos los posibles enlaces estén dibujados. Pero esta representación no es útil para el estudio, y no representa la realidad, ya que no indica que hay unos enlaces más importantes que otros.

¿Cuál de las posibles representaciones corresponde entonces a la estructura cognitiva del alumno?. Creemos que la respuesta es que la estructura cognitiva de un individuo puede ser representada de una forma simple o de una forma más compleja. Y sigue siendo la misma estructura. Del mismo modo, un mapa de carreteras puede ser muy simple si sólo se incluyen las carreteras principales y muy complejo si se incluyen los más pequeños caminos. Y los dos siguen siendo mapas de carreteras auténticos. ¿Cuál es el mapa de carreteras ideal? Depende de nuestros propósitos.

En nuestro caso, hemos optado por tomar los valores adecuados de "q" y "r" para que la red obtenida sea la más sencilla posible. De este modo, el tratamiento de los datos de todos los alumnos es siempre el mismo.

Como al variar "q" y "r" se pueden obtener redes más o menos complejas, se puede utilizar una red más compleja para estudiar más en detalle el caso de algún alumno concreto que nos interese por alguna característica especial.

La principal dificultad de esta técnica es, sin duda, interpretar las representaciones obtenidas. Esta dificultad no es sólo exclusiva de las Redes Pathfinder, sino la de otros métodos de los que hemos hablado (Escalamiento Multidimensional, mapas conceptuales, diagramas de árbol, ...) Todas las técnicas, en general, presentan esta misma dificultad.

Ante esta dificultad, que reconocemos no está totalmente resuelta, hemos optado por emplear un instrumento creado al efecto, el Índice de Complejidad de Redes, que permite, en una primera aproximación, comparar unas redes con otras, y estudiar su evolución a lo largo del tiempo. Trabajos posteriores nos permitirán refinar este instrumento y posiblemente encontrar otros que nos permitan un mejor análisis y estudio de las redes obtenidas.

Creemos que este trabajo es una primera aproximación que completaremos en otros, utilizando una muestra mas representativa que nos permita generalizar resultados y combinando la utilización de la técnica de Redes Asociativas Pathfinder con otras tales como puedan ser cuestionarios o entrevistas que permitan llevar a cabo un análisis más en profundidad de las redes conceptuales.

Capítulo 5

CAPITULO 5

CONCLUSIONES

En este capítulo exponemos las conclusiones de este trabajo de investigación y los futuros abordajes que, de acuerdo con los resultados obtenidos consideramos merecerían desarrollarse.

5.1 Conclusiones y aportaciones más significativas.

El trabajo de investigación planteaba un doble objetivo: Por un lado aproximarnos a la resolución de un problema en Didáctica de la Matemática y por otro la introducción de una nueva metodología para abordar este tipo de problemas didácticos. Podemos decir que razonablemente se han conseguido ambos objetivos y que se han cumplido lo que nos planteábamos como hipótesis de trabajo.

Creemos, pues, que este trabajo supone las siguientes aportaciones:

- Se ha estudiado la representación del conocimiento como área de investigación y se ha hecho una revisión de las técnicas habitualmente utilizadas en este campo a través de una abundante bibliografía en español, inglés y alemán para establecer el estado de la cuestión.
- Se han estudiado detalladamente las redes Pathfinder y sus aplicaciones analizando sus posibilidades teóricas y su aplicación práctica a través del programa Knot.
- Se ha analizado el objeto matemático objeto de estudio, el concepto de ángulo, habiéndose comprobado la complejidad del tema y el alcance e implicaciones que puede tener respecto a la mejora de la enseñanza de la Geometría.
- Se ha realizado un estudio exploratorio con una muestra que permite reflejar el tratamiento y evolución del concepto a lo largo de los distintos cursos de la enseñanza obligatoria (3º, 4º, 5º de Primaria y 1º de Secundaria Obligatoria).

- Se ha comprobado que el concepto de ángulo es muy complejo y que evoluciona lentamente en la mente del alumno, estructurándose en torno a conceptos cada vez más inclusivos.
- La técnica Pathfinder se ha revelado como un buen instrumento para la representación de los esquemas mentales de los alumnos, siempre que se ponga cuidado en su aplicación y se tengan en cuenta sus limitaciones.
- Durante la investigación hemos aportado un parámetro nuevo que definimos como "Índice de complejidad de Redes" que permite estudiar con un enfoque cuantitativo la complejidad de las redes Pathfinder, y que puede ser complementado por la observación e interpretación directa de las redes por parte del investigador y por otros estudios cualitativos.
- A través del estudio de las redes Pathfinder y con la ayuda del Índice de Complejidad se ha observado que existen conceptos que nosotros definimos como "conceptos nucleares" que son claves en el esquema mental de los alumnos en cuanto a que en torno a ellos se va organizando toda la red conceptual.
- Los "conceptos nucleares" que aparecen en nuestro estudio confirman los dos enfoques "estático" y "dinámico" del ángulo que en el mismo describimos.
- El esquema conceptual de los alumnos es sencillo en los cursos en los que se comienza a introducir el concepto de ángulo (3º de Primaria) y aumenta su complejidad en cursos sucesivos al introducir tópicos matemáticos relacionados con este concepto. Sin embargo en cursos sucesivos se va simplificando de nuevo el concepto hasta que ya parece que no varía más, estancamiento que comienza en cursos como 1º de ESO y siguientes, en los que coincide que el alumno inicia su pensamiento adulto.
- En los cursos intermedios en que el índice de complejidad es alto (en los que hemos encontrado redes complejas) la variabilidad de unos alumnos a otros es muy grande. Sin embargo en los cursos más bajos y más altos la variabilidad es

muy pequeña, coincidiendo los alumnos en “anclar” su estructura cognitiva en torno a los mismos “conceptos nucleares”.

5.2 Problemas abiertos y sugerencias para nuevas investigaciones.

1. Parece razonable seguir investigando en la complejidad de las redes y la concordancia de las representaciones con el esquema mental de los alumnos. El índice de complejidad habría que normalizarlo, ajustando los pesos de sus componentes (D, N, S) de forma que discriminara con más claridad y su interpretación fuera más diáfana.
2. Se puede seguir profundizando en la idea de los “conceptos nucleares”. Conocer los “conceptos nucleares” de los esquemas mentales de los alumnos asociados a un tema matemático sería muy importante para mejorar su enseñanza y diseñar adecuadas secuencias de aprendizaje.
3. Sería interesante averiguar la permanencia y estabilidad de los conceptos (como el de ángulo) a lo largo de los años, lo que podríamos llamar el “poso cultural”. Nos referimos a lo que queda cuando, debido a la lejanía en el tiempo de las experiencias de aprendizaje que motivaron la captación del concepto y la formación de los correspondientes esquemas mentales, se han olvidado los detalles y ya sólo queda ese residuo conceptual permanente que hemos llamado “poso cultural”, que es precisamente con la que se maneja el ciudadano para relacionarse con su entorno. En este sentido se abren posibilidades en cuanto a estudiar las redes Knot en:
 - Adultos que dejaron hace 10 años o más la enseñanza , para ver como se mantiene (o evoluciona) su red conceptual sin un “refresco” ni una introducción de ideas relacionadas con sus conceptos interiorizados.
 - Maestros recién titulados para ver si han influido (y de que manera) en su red conceptual los conocimientos adquiridos en las asignaturas de Didáctica (General y de las Matemáticas) cursadas durante la carrera de Maestro.
 - Licenciados en Matemáticas recién titulados para ver si han influido (y de que manera) en su red conceptual los conocimientos adquiridos en las asignaturas de la carrera de Matemáticas.

4. Los profesores parecen tener su red conceptual en una situación estable. Después de una explicación por parte del profesor, ¿se transmite la red conceptual de éste a sus alumnos?, ¿tendrán los mismos “conceptos nucleares”?, ¿cómo influirán en la red conceptual y en los propios “conceptos nucleares” los ejemplos asociados a la teoría?
5. Parece razonable suponer que los libros de texto escolares poseen una estructura conceptual reflejo de la que poseen sus autores (o por lo menos directamente relacionada). ¿Cómo extraer, a partir de un libro de texto la red conceptual en torno a la cual se han estructurado los conceptos que quiere transmitir?
6. ¿Qué influencia tendrá la red conceptual del libro de texto sobre la que va adquiriendo el alumno?
7. Sucede normalmente que el profesor de una clase no es el autor del libro de texto que se sigue en la misma. Parece razonable suponer que el profesor y el libro de texto tengan redes subyacentes distintas ¿Cuál de las dos influirá más en los alumnos?
8. Sería interesante contrastar los resultados obtenidos a partir del estudio de redes Pathfinder con los obtenidos a través de otras metodologías (sobre todo cualitativas).
9. Todo el trabajo está centrado en el concepto de ángulo. Quizá una de las aportaciones más interesantes del mismo sea que abre una línea de investigación polivalente que puede ser aplicada a cualquier otro concepto matemático.

* * * * *

Bibliografía

BIBLIOGRAFIA

Abelson, H. y Di Sessa, A. (1.986). Geometría de Tortuga.El ordenador como medio de exploración de las Matemáticas. Ed. Anaya Multimedia. Madrid.

Ausubel, D. (1976). Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. Ed.Trillas. México.

Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1.978) Educational Psychology: A Cognitive View. Holt, Rinehart & Winston. New York.

Bajo, M.T. y Cañas, J.J. (1.994). Métodos indirectos de adquisición del conocimiento. En Adarraga, P. y Zaccagnini, J.L. (eds.), Psicología e Inteligencia Artificial. Trotta. Madrid

Barab, S y otros. (1996). Assessing Hypermedia Navigation through Pathfinder: Prospects and Limitations. Journal of Educational Computing Research; v15 n3 p185-205.

Barab, S y otros. (1997). The Effects of Navigational and Generative Activities in Hypertext Learning on problem Solving an Comprehension. School of Education, Room 2232, 201N. Rose Ave, Bloomington, IN, 47405. E-mail para correspondencia sobre el artículo: Sbarab@Indiana-Edu

Berger, C. y otros. (1.995). Software Event Recorder 5. Office of Instruccional Technology. University of Michigan. Ann Arbor Michigan 48109-1259.

Berger, C. y Dershimer, Ch. (1993) Using Technology to Measure Change in Students' Science Learning. Presented at the National Association for Research in Science Teaching. Atlanta Georgia, Abril 1993.

Berger, C. y Jones, T. (1995) Analyzing Sequence Files of Instructional Events Using Multiple Representations. AERA, Session 54.02 Hilton Hotel, Imperial A. Ballroom Level, April 21, 1995.

Byrne, C. y McCracken, S. (1999) An Adaptive Thesaurus Employing Semantic Distance, Relational Inheritance and Nominal Compound Interpretation for Linguistic Support of Information Retrieval. *Journal of Information Science*; v25 n2 p113-31

Casas L. y Luengo, R. (1.999) La exploración de la estructura conceptual en los alumnos. Un método empírico: las Redes Asociativas Pathfinder. En "Campo Abierto", n ° 16. Pags. 13 a 33. *Revista de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Badajoz.*

Casas, L. y Luengo, R. (2.000) Aproximación al concepto de ángulo a través de redes asociativas Pathfinder en alumnos de educación primaria y secundaria obligatoria. En "Campo Abierto", n° 17. Pags. 39 a 60. *Revista de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Badajoz.*

Coll, C. y Rochera, M.J. (1995). Estructuración y organización de la enseñanza: las secuencias de aprendizaje. En Coll, C, Palacios, J. y Marchesi, A. (Comp.) *Desarrollo psicológico y educación, II*. Alianza Editorial. Madrid.

Contreras, A. (1.993) Evolución de concepciones sobre nociones geométricas elementales en entornos de programación con el lenguaje logo. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Cooke, N. y otros. (1996) Procedural Network Representations of Sequential Data. *Human-Computer Interaction*; v11 n1 p 29-68 1996.

Diekhoff, G. (1983) Relationship judgements in the evaluation of structural understanding. *Journal of Educational Psychology*, 71, 64-73.

Eckert, A. (1997) Die Netzwerk Elaborierungs Technik (NET) - Ein Instrument zur computerunterstützten Diagnose von Wissensstrukturen. En E. Witruk & G. Friedrich (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie - Streit um ein neues Selbstverständnis* (pags. 168-176). Landau: Verlag Empirische Pädagogik.

Eckert, A. (1997) The network elaboration technique - a computer -based tool for knowledge elicitation. University of Mannheim, Germany. Se puede consultar en <http://www.uni-mannheim.de/fakul/erzieh/ls2/mitarbei/eckert/andreas.htm>

Ennis, C. y otros.(1997) The Influence of Teachers' Educational Beliefs on Their Knowledge Organization. Journal of Research and Development in Education; v30 n2 p73-86.

Fisher, K. y Faletti, J. (1994). SemNet Software. SemNet Research Group. Suite 215 1043 University Ave. San Diego, CA 92103-3392.

Fenker, R. (1975) The organization of conceptual materials: A methodology for measuring ideal and actual cognitive structures. Instruccion Science 4, 33-57.

Fowler, R. y otros.(1992) Information Navigator: An information System using Associative networks for display and retrieval. Department of Computer Science. University of Texas - Pan American, Edinburg, TX 78539-2999. E-mail para correspondencia sobre esta investigación: fowler@panam.edu.

Geeslin, W. y Shavelson, R. (1975) An exploratory analysis of the representation of a mathematic structure in students' cognitive structure. American Educational Research Journal, 12, 21-39.

Glick, M. y Holyoak, K. (1983). Schema induction and analogical transfer. Cognitive Psychology, 15, 1-38.

Goldsmith, T. y otros. (1991) Assessing Structural Knowledge. Journal of Educational Psychology; v 83 n 1 p 88-96.

Gomez, R. y Housner, L (1992). Pedagogical Knowledge Structures in Prospective Teachers. Eric ED351307.

Gonzalvo, P. y otros. (1994) Structural Representations in Knowledge Acquisition. Journal of Educational Psychology; v86 n4 p601-16.

Holloway, G. (1982) Concepción del espacio en el niño según Piaget. Ed. Paidós. Barcelona.

Hutchinson, J.W. (1989) NETSCAL: A network scaling algorithm for nonsymmetric proximity data. *Psychometrica*, 54, 25-51.

Inspiration (1.998) Inspiration Software, Inc. 7412 SW Beaverton Hillsdale Hwy, Suite 102 Portland, OR 97225-2167 USA

Johnson, P. y otros (1994) Locus of Predictive Advantage in Pathfinder-Based Representations of Classroom Knowledge. *Journal of Educational Psychology*; v86 n4 p617-26.

Jonassen, D. (1985) Learning strategies: A new educational technology. *Programmed Learning and Educational Tehcnology*, 22 (1), 26-34.

Jonassen, D. (1987) Verifying a method for assessing cognitive structure using pattern notes. *Journal of Research and Development in Education*, 20(3), 1-14.

Jonassen, D. y otros (1993) *Structural Knowledge: Techniques for Representing, Conveying and Acquiring Structural Knowledge*. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Jones, T. y Berger, C. (1995) Students' use of Multimedia Science Instruction: Designing for the MTV Generation? *National Association for Research in Science Teaching*.

Kamada, T. y Kawai, S. (1989). An algorithm for drawing general undirected graphs. *Information Processing letters*, 31, 7-15.

Kintsch, W. (1.970). Models for free recall and recognition. En Norman, D.A. (ed.), *Models of human memory*. Wiley. New York.

KNOT Software. (1989) Interlink, Inc. P.O. Box 4086 UPB, Las Cruces, NM 88003-4086.

Koneman, Ph. y Jonassen, D. (1994) Hypertext Interface Design and Structural Knowledge Acquisition. ERIC ED373727

Kokoski, T. y Housner, L. (1994) Pathfinder Analysis of Knowledge Structures: An Exploratory Investigation of Math and Science Teacher Educators. ERIC ED376218.

Koubek, R. y Mountjoy, D. (1991). Toward a Model of Knowledge Structure and a Comparative Analysis of Knowledge Structure Measurement Techniques. ERIC ED339719.

Kraimer, K. (1991) Consequences of a allow of acting an reflecting in Geometry learning-finding of interviews on te concept of angle. Proceedings Fifteenth PME Conference., vol. 2, p. 254-261.

Kruscal, J. (1964) Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a non-metric hypothesis. Psychometrica, 29, 1-27.

Lang, S. y Murrow, G. (1983) Geometry. A High School Course. Springer - Verlag. New York.

López Rupérez, F. (1991). Los mapas conceptuales y la enseñanza-aprendizaje de la física. Revista de Educación, 295, 381-409.

Luengo, R. y cols. (1984): Aprendizaje sintónico de la Geometría con ayuda del ordenador: primeras proyecciones de los ejes de referencia. Actas IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de la Matemáticas. Pags. 275 a 284. Santa Cruz de Tenerife.

Luengo, R. (1991): Logo en el entorno Hypercard: Un intento de utilizar el ordenador en la enseñanza de una forma no convencional. Tesis Doctoral. ICE de la UNEX (Badajoz, Marzo de 1991).

Luengo, R.; Casas, L. y Márquez, L. (1991): Un ejemplo de exploración de la Geometría desde la Optica LOGO: Generación de polígonos regulares. En Campo Abierto N° 8. E.U. de Magisterio de Badajoz.

Luengo González, R. y Mendoza, M. (1992): La Informática y el uso del ordenador como motivación hacia el trabajo escolar. Ed. ICE de la Universidad de Extremadura, Badajoz.

Luengo, R. (1997) Geometría Diferencial Logo. El ejemplo de los Polígonos Nazaríes. Número monográfico de la revista Epsilon Nº 38. Pags. 81 a 100. Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales". Sevilla

Magina, S. y Hoyles, C. (1991) Developing a map of children's conceptions of angle. Proceedings Fifteenth PME Conference., p. 358-364.

McGaghie, W. (1996) Comparison of Knowledge Structures with the Pathfinder Scaling Algorithm. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research (New York, April 8-12, 1996)

Miller, G.A. (1969). A Psychological method to investigate verbal concepts. Journal of Mathematical Psychology, 6, 169-191.

Mitchelmore, M. C. (1990). Psychologische und mathematische Schwierigkeiten beim Lernen des Winkelbegriffs. Mathematica Didactica, 13(2), 19-37.

Mitchelmore, M. C., & White, P. (1996). Children's concepts of turning: Dynamic or static? In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 415-421). Valencia, Spain: University of Valencia.

Mitchelmore, M. C. (1998). Young students' concepts of turning and angle. Cognition and Instruction, 16, 265-284.

Mitchelmore, M. C. y White, P. (1998 b). Development of angle concepts: A framework for research. Mathematics Education Research Journal, 10(3), 4-27.

Navhe-Benjamin, M. y otros (1986) Inferring students' cognitive structures and their development using the ordered tree technique. *Journal of Educational Psychology*, 78, 130-140.

Norman, D.A. y otros (1976). Comments on learning schemata and memory representation. En Klahr, D. (Ed.) *Cognition and instruction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Noss, R. (1987) Children's learning of geometrical concepts through Logo. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 18, 5, 343 - 362.

Novak, J y Gowin, D. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Martínez Roca. Barcelona.

Orey, M. y Nelson, W. (1994) *Visualization Techniques for Examining Learner Interactions with HyperMedia Environments*. Eric ED373747.

Osborne, A. (1976). Mathematical distinctions in the teaching of measure. En : Nelson, D. y Reys, R. *Measurement in school Mathematics*. N.C.T.M. Reston: VA.

Palacios, C. y López Rupérez, F. (1992). Resolución de problemas de química, mapas conceptuales y estilo cognitivo. *Revista de Educación*, 297, 293-314.

Piaget, J.; Inhelder, B. y Szeminska, A. (1948). *La geometrie spontanee de l'enfant*. Presses Universitaires de France. Paris.

Preece, P. (1976). Mapping cognitive structure: A comparison of methods. *Journal of Educational Psychology*, 68, 1-8.

Puig, P. (1972) *Curso de Geometría Métrica*. Tomo I. Fundamentos. Biblioteca Matemática, S.L. Madrid.

Quillian, M.R. (1969). The teachable language comprehender. *Communications for Computing Machinery*, 12, 459-475.

Reitman, J. y Rueter, H. (1980). Organizacion revealed by recal orders and confirmed by pauses. *Cognitive Psychology*, 12, 554-581.

Roanes, E. (1.973) *Matemáticas para Profesores de E.G.B.* Ed. Anaya. Salamanca.

Rosch, E. (1.975). Cognitive representations of semantic categories. *Journal of Experimental Psychology: General*, 104, 192-233.

Ruiz, J.M. 1.992. "El estudio de la memoria". En Fernández Trespalacios, J.L. *Psicología General II*. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Madrid. Pags. 7-23.

Rumelhart, D.E. (1980) Schemata: The building blocks of cognition. En Spiro, R., Bruce, B. y Brewer, W. (Eds.): *Theoretical issues in reading comprehension: Perspectives from cognitive psychology, linguistics, artificial intelligence, and education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Rumelhart, D. y NBOorman, D. (1981). Aalogical processes in learning. En Anderson, J. (E.), *Cognitive skills and their acquisition*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlabaum Associates.

Rye, J. y Rubba, P. (1996) *An Exploratory Study of the Concept Map as a Tool To Facilitate the Externalization of Students' Understandings about Global Atmospheric Change in the Interview Setting*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching (69th) St. Louis, MO, March 31- April 3.

Schvaneveldt, R.W., Durso, F.T., y Dearholt, D.W. (1.985) *Pathfinder: Scaling with network structures (Memorandum in Copmputer and Cognitive Science, M CCS-85-9)*. Las Cruces, NM: Computing Resarch Laboratory, New Mexico State University.

Schvaneveldt, R.W.(Ed.) (1.989). *Pathfinder Associative Networks*. Studies in Knowledge Organization. Ablex. Norwood, N.J.

Severi, F. (1.962) *Elementos de Geometría, I*. Ed. Labor. Barcelona.

Shavelson, R. (1972). Some aspects of the correspondence between content structure and cognitive structure in physics instruction. *Journal of Educational Psychology*, 63, 225-234.

Shavelson, R. (1985). The measurement of cognitive structure. Paper presented at the annual convention of the American Educational Research Association, Chicago, April 3, 1985.

Sheehan, J. y Tessmer, M. (1997) A Construct Validation of the Mental Models Learning Outcome Using Exploratory Factor Analysis. Proceedings of Selected Research and Development Presentations at the 1997 National Convention of the Association for Educational Communications and Technology (19th, Albuquerque, NM, February 14-18)

Shepard, R. (1962) The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function. *Psychometrika*, 27, 125-140, 219-246.

Stanners, R. y Brown, L. (1982). Conceptual interrelationship on learning in introductory psychology. *Teaching of Psychology*, 9 (2), 74-77.

Strehl, R.S. (1983): Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff. *Mathematica didactica* 6, 129-146.

Vasco, C. El archipiélago angular. Memorias - III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Caracas, 26 al 31 de julio de 1998

VV.AA. (1997). Matemáticas 3º Educación Primaria. Editorial EDB Barcelona

VV.AA. (1997). Matemáticas 4º Educación Primaria. Editorial EDB Barcelona

Wainer, H y Kaye, K. (1974) Multidimensional scaling of concept learning in an introductory course. *Journal of Educational Psychology*, 66, 591-598.

Wilson, J. (1998) Differences in Knowledge Networks about Acids and Bases of Year-12, Undergraduate and Postgraduate Chemistry Students. *Research in Science Education*; v28 n4 p429-46

Anexos

ANEXOS

En este apartado se incluyen las gráficas de los alumnos sobre las que se han tomado los datos definitivos.

Se ordenan por cursos, y se incluye en cada una de ellas el valor del Índice de Complejidad de Redes.

Se adjuntan en documento aparte.