

EL TRABAJO CON SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA PARA EL ESTUDIO DE LA TRIGONOMETRÍA Y LA SEMEJANZA EN LA E.S.O.

Castro Vazquez., Consuelo; I.E.S.Terra de Trasancos. Narón
de la Torre Fernández, Enrique Facultade de Ciencias da Educación. Universidade da Coruña.;
Zacarías Maceiras, Fernando IES As Mariñas. Betanzos.

RESUMEN

Descripción y explicación de la construcción de figuras para abordar el estudio de la trigonometría y de la semejanza en 4º curso de E.S.O.. Discusión sobre la utilización del Cabri o de los applets de Java en el aula. Valoración de la experiencia.

INTRODUCCIÓN

El trabajo en las aulas de Educación Secundaria alrededor de los temas geométricos, se enfrenta a muchos problemas. Uno de ellos es la dificultad que se observa en los estudiantes, para que comprendan los enunciados de los teoremas y de las propiedades de los objetos geométricos, su significado y su justificación o demostración.

Fruto de esas preocupaciones, a inicios del curso 2005/2006, ha surgido dentro de la Asociación Gallega de Profesores de Educación Matemática (AGAPEMA) la idea de reunirnos periódicamente para idear materiales y modos de actuar en el aula de Educación Secundaria, con objeto de conseguir que los estudiantes adquieran una mejor y mayor comprensión de los contenidos geométricos. Necesitábamos un material que permitiera visualizar los contenidos relativos a trigonometría y semejanza y, siendo conscientes de que el mejor material es el 'real', es decir, el que se pueda 'manipular' en el espacio real, nos damos cuenta de las dificultades que ello acarrea para el desarrollo de las sesiones de aula, por lo que optamos por recurrir a los programas llamados de 'geometría dinámica', y entre ellos, el Cabri-Géomètre II Plus. Consideramos que no es mejor ni peor que otros conocidos (como Geometer's Sketchpad, Regla y Compás o Lugares). La última versión tiene una opción interesante, que consiste en poder grabar la sesión completa de lo que se hace para construir una figura, lo que permite al profesor poder analizar los intentos, los errores y las modificaciones que se hicieron durante todo el tiempo de trabajo. Aunque no experimentamos esta opción por falta de tiempo, la consideramos de mucho interés para introducir al alumnado en las herramientas de la geometría dinámica.

De este modo hemos mantenido reuniones quincenales, discutiendo y elaborando los materiales que luego se presentarían a los estudiantes en las aulas de 4º curso de E.S.O. Se buscó el modo de enfrentar a los estudiantes con las cuestiones geométricas que aparecen en el programa de la materia, de manera que lleguen a tener una visión más completa de cual es su significado y también que, visualizando distintas posiciones y movimientos de los objetos, se aproximen de alguna manera a su demostración.

Una posibilidad que utilizamos del Cabri es la opción de convertir las figuras Cabri en applets de Java, que se pueden insertar en una página web, y que permiten el movimiento de las figuras construidas. Esto tiene la ventaja de que el alumnado, al trabajar sobre estos applets, no tiene necesidad de conocer lo manejo del Cabri ni de construir por sí mismo las figuras que le permitirán comprender las propiedades geométricas con las que se pretende trabajar.

PLANTEAMIENTO DEL TRABAJO

Nuestro trabajo se desarrolló en las aulas de 4º A y 4º B de E.S.O. en el IES Las Marinas y de 4º A de E.S.O. en el I.E.S Tierra de Trasancos, y se centró en la manera de presentar algunos conceptos y procedimientos de semejanza y trigonometría y de apoyar otros presentados del ‘manera habitual’.

Para ello realizamos la construcción de varios archivos Cabri con los que pretendemos acercar a los objetivos propuestos y comunicar de la mejor manera a los estudiantes, los conceptos y las propiedades y teoremas correspondientes.

DESARROLLO

A continuación vamos exponer la serie de figuras construidas con Cabri y que proponemos para trabajar en las aulas, especificando para cada una de ellas los objetivos, las actividades propuestas, la manera de utilización y la valoración de lo realizado. Los tipos de archivos empleados son los de las versiones II e II plus de Cabri y los de páginas web:

*.fig (Cabri II plus). *.fig (Cabri II). *.htm (con applet CabriJava)

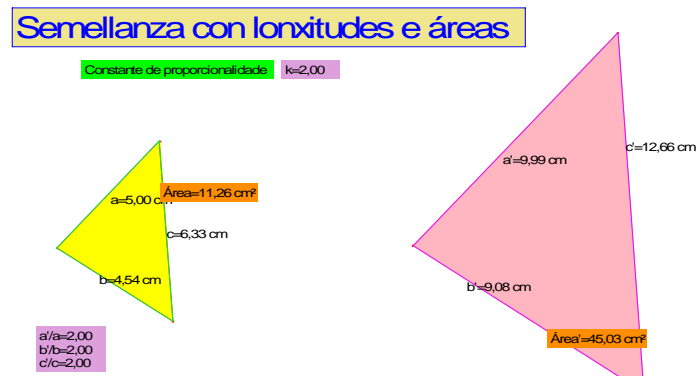
SEMEJANZA

1. Ficheros: TS_01_triangulos.* , TS_02_poligonos.*

a) Objetivos:

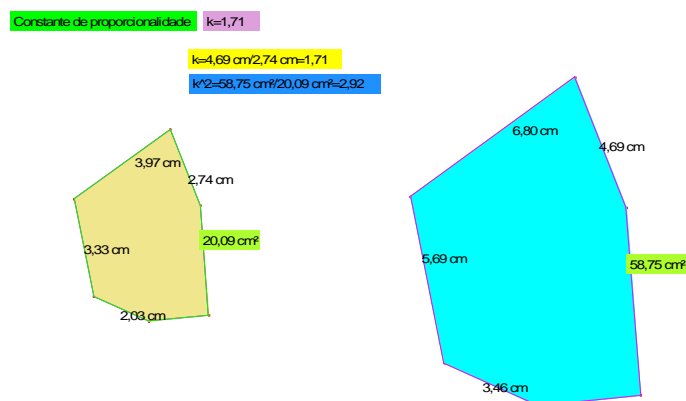
- i) Conseguido el objetivo intuitivo del concepto ‘ser semejante’, se pretende ver cómo evolucionan dos figuras al cambiar de forma manteniendo su semejanza.

- ii) Observar la proporcionalidad existente entre los lados y llegar al concepto de razón de semejanza. Inferir la razón existente entre las áreas. Observar la coincidencia angular.
- iii) Extender a un polígono de más de tres lados a evolución de dos figuras al cambiar de forma manteniendo su semejanza.
- iv) Observar la proporcionalidad existente entre los lados y afianzar el concepto de razón de semejanza.



b) Actividades.

- i) Mover los vértices del primero triángulo o polígono y ver la evolución del otro.
- ii) Comprobar que la proporción que mantienen los lados coincide con el valor de k y que variando k se varía esa proporción.
- iii) Efectuar la medición de los ángulos para comprobar que son iguales.



- iv) Comprobar como las áreas responden a la razón k^2 . Inferir la relación que tendrán volúmenes de cuerpos semejantes. Proponer algún ejercicio de aplicación.

c) Utilización y temporalización:

- i) Exposición del profesorado con proyector en el aula intercalado con las actividades de encerado y cuaderno. No incrementa el tiempo, hace de substitutivo.
- ii) Utilización por el alumnado en las aulas de informática.

d) Valoración de la experiencia:

- i) Atención intensa al comienzo de la actividad que decrece algo después y que se pierde si se alarga demasiado.
- ii) Se facilita la utilización de la razón de semejanza.

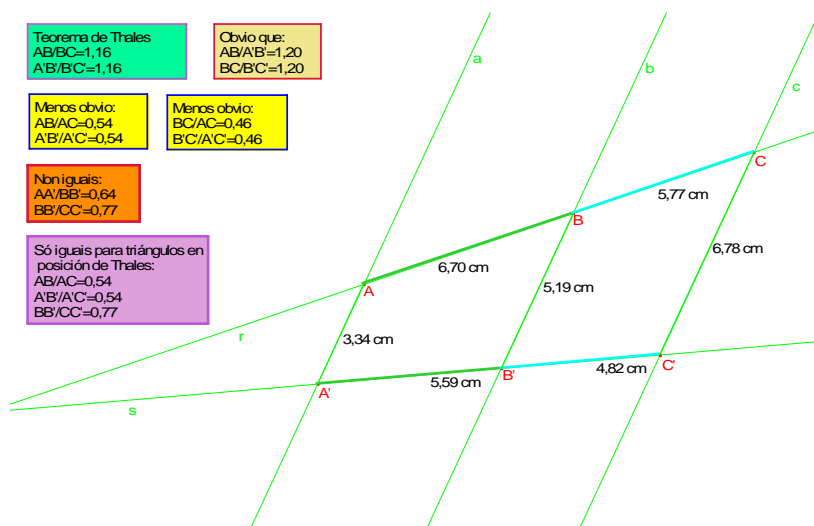
e) Desventajas, observaciones, problemas:

- i) Si hay que montar y desmontar el equipo de proyección, se pierde mucho tiempo.
- ii) La facilidad con la que el alumnado se adapta a las innovaciones requiere brevedad y oportunidad en la utilización de la figura.
- iii) Parece más eficaz a percepción de la semejanza mediante un hexágono que con triángulos.

2. Ficheros: TS_03_Thales.*

a) Objetivos:

- i) Visualizar el cumplimiento del teorema de Thales.
- ii) Captar el cumplimiento de otras proporcionalidades derivadas del teorema.
- iii) Ver el incumplimiento de alguna supuesta proporcionalidad que no es tal.
- iv) Entender lo que significa que dos triángulos estén en posición de Thales y ver sus consecuencias.



b) Actividades.

- i) Deducir las conclusiones que se aprecian al cambiar la inclinación de las rectas paralelas, al acercarlas y alejarlas.
- ii) Deducir lo que sucede cuando se cambia la inclinación de las rectas transversales.

iii) Conseguir triángulos en posición de Thales (moviendo A sobre A') y deducir las proporcionalidades obtenidas advirtiéndole que se cumple alguna que antes no se cumplía.

iv) Analizar si Les Luthiers hicieron su canción ajustada al teorema.

c) Utilización:

i) Exposición del profesor con proyector en el aula.

ii) Manipulación libre por el alumnado en las aulas de informática si se tiene licencia de Cabri.

iii) Manipulación guiada con preguntas previas.

d) Valoración de la experiencia:

i) Atención intensa al comienzo de la actividad que decrece y que se pierde si se alarga mucho.

ii) Especial impacto de los triángulos en posición de Thales.

iii) No consume tiempo extra si se trabajan los objetivos propuestos.

e) Desventajas, observaciones, problemas:

i) Por lo denso de los contenidos analizados, se hace larga para escucharla sin más, sobre todo si se demuestran en el encerado algunos resultados intermedios.

ii) No parece útil una utilización libre sin la explicación previa.

3. Ficheros: TS_04_espellos.*

a) Objetivos:

i) Transmitir la utilidad de la semejanza en la resolución de un problema de dificultad moderada ligado con un experimento real.

ii) Recrear la semejanza con herramientas sencillas como unos espejos y la altura de los ojos.

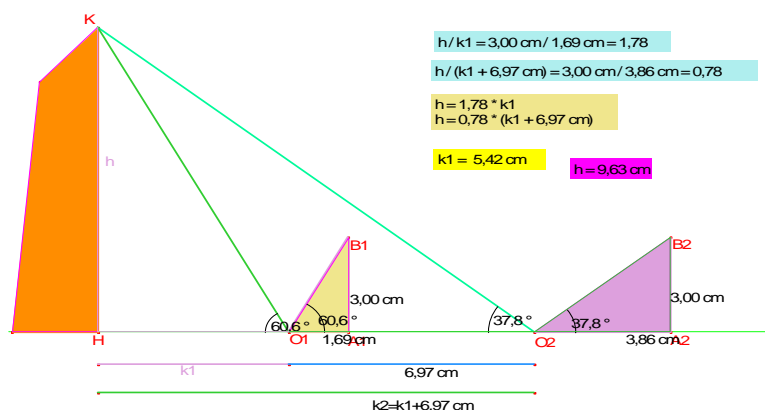
b) Actividades.

i) Realizar las actividades propuestas en la propia figura siguiendo las instrucciones del fichero htm asociado (resolver en un caso determinado, estudiar regularidades, comparar mediciones de personas de diferente altura, realizar la experiencia concreta y contrastar resultados)

c) Utilización y temporalización:

i) Indicado para ejercicio voluntario o de ampliación.

ii) Puede incluirse en un taller o en una página con acceso con un navegador cualquiera.



d) Valoración de la experiencia:

- i) Resultó complicado y costó entender el dibujo.
- ii) Experiencia apasionante para todos, pensando y sacando conclusiones toda una clase.
- iii) Acabada la clase, el alumnado deseaba continuarla abandonando el aula con la discusión del problema viva.

e) Desventajas, observaciones, problemas:

- i) El alumnado no logró resolver el problema que se le planteó.
- ii) Puede crear conflicto con el ejercicio clásico de trigonometría del cálculo de la altura con pie no accesible en el alumnado con dificultades.
- iii) Sin embargo, puede resultar muy entretenido para lo alumnado con capacidad relacional que interiorice las razones trigonométricas como razones de semejanza.

TRIGONOMETRÍA

4. Ficheros: TS_05_seno.* TS_06_coseno.*

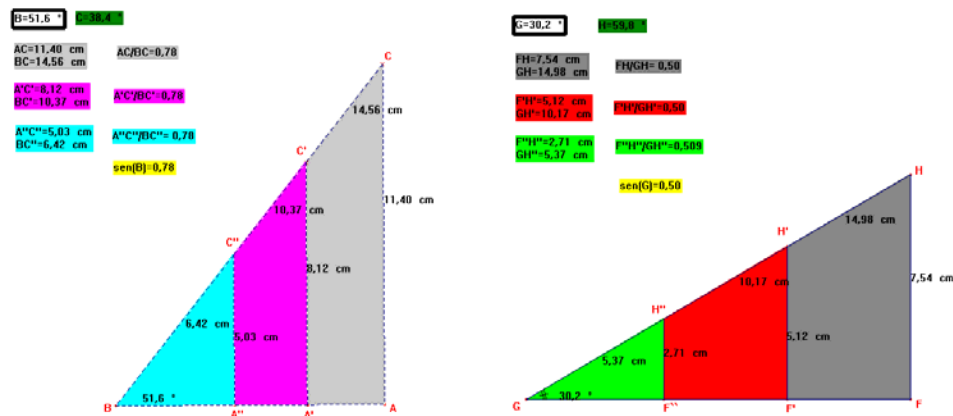
a) Objetivos:

- i) Obtener las razones trigonométricas seno y coseno a partir de la semejanza de triángulos.
- ii) Captar que las razones trigonométricas sólo dependen del ángulo elegido.
- iii) Ver como evolucionan sus valores entre 0° y 90° .
- iv) Tener contacto directo con la geometría dinámica y ver la evolución de las figuras con el movimiento.
- v) Impulsar la elaboración de conjeturas derivadas de la manipulación de la figuras.
- vi) Habituarse en el uso de páginas matemáticas interactivas en la red.

b) Actividades.

- i) Realizar las actividades propuestas en la propia figura según el fichero htm asociado.

- ii) Incidir en que en todos los triángulos que tengan un ángulo de 30° se obtiene el mismo valor para su seno (coseno).
- iii) Tipificar las actividades como ejercicios de cuaderno evaluables.



c) Utilización y temporalización:

- i) Exposición del profesor con proyector intercalando con las actividades de encerado y cuaderno.
- ii) Utilización interactiva del alumnado en el aula de informática con el uso de un navegador cualquiera. Se necesitan dos sesiones.
- iii) Posibilidad de incluirlo en cualquier página web para uso desde cualquier ordenador con conexión a la red.

d) Valoración de la experiencia:

- i) Participación y trabajo de la mayoría en el aula de informática (en el segundo intento).
- ii) Conclusión difusa sobre los objetivos conseguidos.
- iii) Muy importante el hecho de no tener que disponer más que de un navegador.

e) Desventajas, observaciones, problemas:

- i) Hay demasiadas variaciones en las velocidades de realización de los ejercicios por parte del alumnado. Debe buscarse algo alternativo para los que acaban pronto, como nombrar monitores entre los alumnos de manera que puedan ayudar a los que trabajan más lento.
- ii) La página htm debe estar separada de la figura y abierta simultáneamente con esta.
- iii) Fue útil la participación simultánea de dos profesores para atender las numerosas preguntas y guardar un orden mínimo.
- iv) El tiempo empleado fue significativamente mayor que el habitual en la exposición del concepto de seno y coseno.

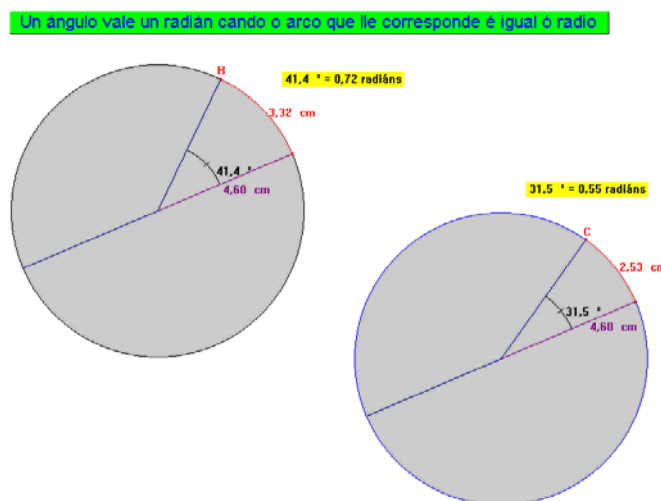
5. Ficheros: TS_07_radian.*, TS_08_formulas_basicas.*

a) Objetivos:

- i) Entender que el radián es una medida de ángulos íntimamente relacionada con el radio.
- ii) Aproximar el valor de un radián en grados sexagesimales a partir de su definición.
- iii) Relacionar 180° con π radianes. Pasar de radianes a grados y de grados a radianes.
- iv) Entender que una fórmula es una expresión general ‘válida para muchos casos’.
- v) Conseguir la asimilación significativa de las primeras fórmulas de la trigonometría.

b) Actividades:

- i) Realizar las actividades propuestas en la propia figura.
- ii) Proponer migraciones de una medida a otra permitiendo la comprobación posterior.
- iii) Mediante la variación del valor del ángulo, observar lo que le sucede a cada miembro de cada fórmula.



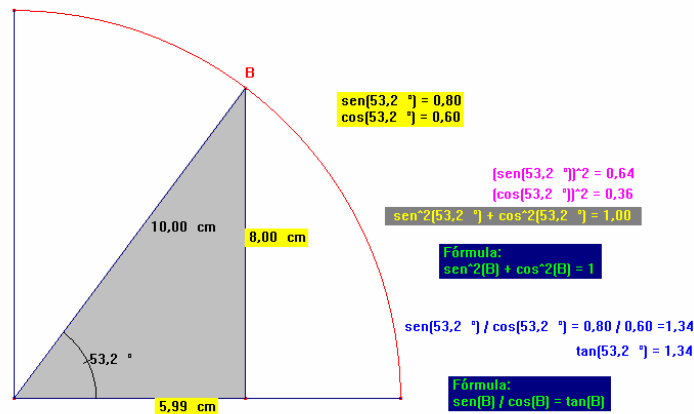
- iv) Inferir el cumplimiento de las fórmulas por su verificación en innumerables casos.

c) Utilización y temporalización:

- i) Utilización del profesor con proyector en el aula para inferir el concepto y realizar los ejercicios que se deseen. El segundo círculo puede servir para efectuar comparaciones.
- ii) Utilización por el alumnado en las aulas de informática con un navegador.
- iii) Puede reducir el tiempo necesario para asimilar el concepto.
- iv) Utilización del profesor con proyector en el aula para convencer del cumplimiento de las fórmulas una vez demostradas analíticamente.

d) Valoración de la experiencia:

- i) Muy positiva en cuanto a los efectos de la incidencia visual del movimiento en la consecución del concepto y al impacto producido por la colocación de los valores para la verificación.



e) Desventajas , observaciones, problemas:

i) Utilizando el aula de informática deben coincidir las dos actividades.

6. Ficheros: TS_09_Aplicacion_basica.*

a) Objetivos:

i) Resolver ejercicios básicos de triángulos rectángulos que abarquen las tres razones trigonométricas fundamentales.

ii) Conseguir el automatismo necesario en la elección adecuada de la razón trigonométrica utilizable en cada caso.

Aplicación básica das razóns trigonométricas

1.- Calcula a altura dunha antena que está suxeita cun cable de 12 m a 10 m do seu punto máis alto, cando o cable forma un ángulo de 28º co horizontal do chan.

$B = 28^\circ$ $\text{sen}(B) = b' / a'$
 $a' = 15 \text{ m}$ $\text{sen}(37,7^\circ) = b' / 11,37 \text{ cm}$
 $b' ?$ $b' = 6,95 \text{ cm}$
 $b' + 10 = 16,95 \text{ cm}$

2.- As ladeiras dun monte cónico que está atravesado por un tunel recto de 2,4 km, teñen unha inclinación de 31º. ¿Que lonxitude ten a ladeira?

$B = 31^\circ$ $\text{cos}(B) = c' / a'$
 $c' = 1,2 \text{ km}$ $\text{cos}(37,7^\circ) = 9,00 \text{ cm} / a'$
 $a' ?$ $a' = 11,37 \text{ cm}$

3.- ¿Que ángulo forman os raios do sol coa horizontal do chan cando un edificio de 12 m proxecta unha sombra de 16 m?

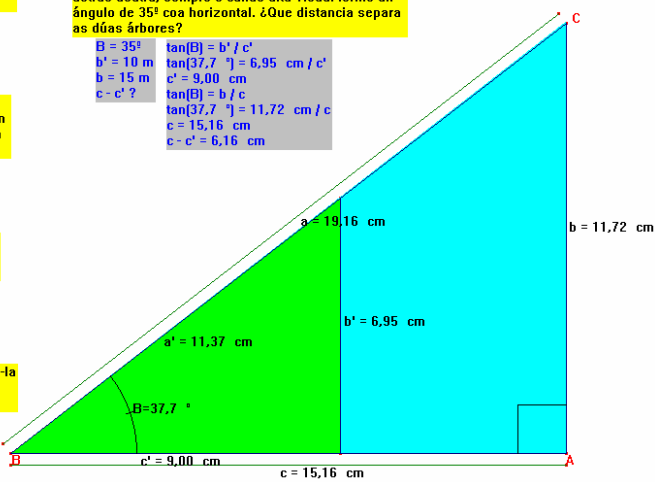
$b = 12 \text{ m}$ $\text{tan}(B) = b / c$
 $c = 16 \text{ m}$ $\text{tan}(B) = 11,72 \text{ cm} / 15,16 \text{ cm}$
 $B ?$ $B = 37,7^\circ$

4.- Estamos a 80 m do pé dun edificio e vemo-la súa azotea cun ángulo de 39º sobre a horizontal. ¿Cal é a súa altura aproximada?

$B = 39^\circ$ $\text{tan}(B) = b' / c'$
 $c' = 80 \text{ m}$ $\text{tan}(37,7^\circ) = b' / 9,00 \text{ cm}$
 $b' ?$ $b' = 6,95 \text{ cm}$

5.- Dende onde me atopo podo facer que a miña visual pase xustamente polos puntos máis altos de dúas árbores de 8 m e 12 m, que se atopan unha detrás doutra, sempre e cando dita visual forme un ángulo de 35º coa horizontal. ¿Que distancia separa as dúas árbores?

$B = 35^\circ$ $\text{tan}(B) = b' / c'$
 $b' = 10 \text{ m}$ $\text{tan}(37,7^\circ) = 6,95 \text{ cm} / c'$
 $b = 15 \text{ m}$ $c' = 9,00 \text{ cm}$
 $c - c' ?$ $\text{tan}(B) = b / c$
 $\text{tan}(37,7^\circ) = 11,72 \text{ cm} / c$
 $c = 15,16 \text{ cm}$
 $c - c' = 6,16 \text{ cm}$



iii) Tener un contacto directo con la geometría dinámica y ver la evolución de las figuras con el movimiento.

iv) Impulsar la elaboración de conjeturas derivadas de la manipulación de la figuras.

v) Habituarse en el uso de páginas matemáticas interactivas en la red.

b) Actividades:

- i) Resolver las actividades propuestas en la propia figura siguiendo las instrucciones del fichero htm asociado.
- ii) Proponer la resolución de problemas similares que sean comprobables mediante el movimiento de la propia figura.

c) Utilización:

- i) Exposición del profesor con proyector en el aula, intercalando con las actividades de encerado y cuaderno o uso del alumnado del aula de informática.
- ii) Posibilidad de incluirlo en cualquier página web.

d) Valoración de la experiencia:

- i) Participación y trabajo mayoritario del alumnado en el aula de informática.
- ii) Conclusión difusa sobre los objetivos conseguidos.
- iii) Muy importante el hecho de no tener que disponer más que de un navegador.

e) Desventajas, observaciones, problemas:

- i) Por momentos se pierde la atención en el problema trigonométrico ante la abundancia de estímulos geométricos visuales y la utilización conjunta de papel, lápiz y ordenador.
- ii) Fue útil la participación simultánea de dos profesores para atender las numerosas preguntas y guardar un orden mínimo.
- iii) El tiempo empleado fue significativamente mayor que el habitual en la resolución de estos problemas básicos.
- iv) La inclusión de las instrucciones dentro de una misma página en la que sea necesario hacer desplazamiento vertical no es operativa. Resulta más adecuado un enlace con otra página donde estén las instrucciones y que pueda estar abierta simultáneamente con la figura.

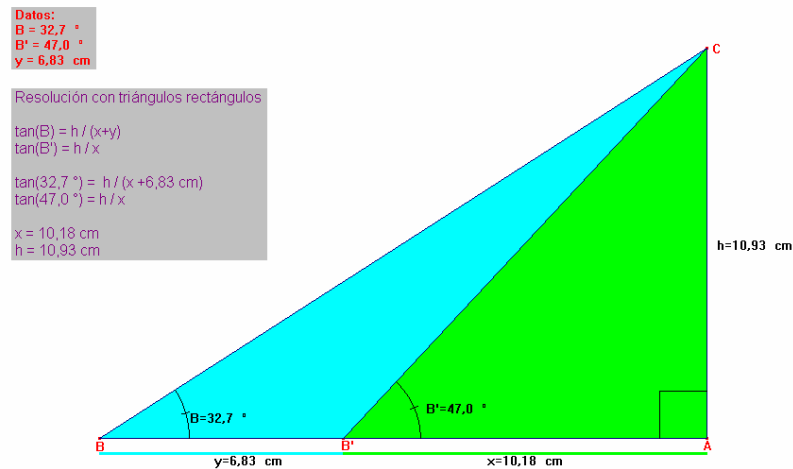
7. Ficheros: TS_10_Altura_1.* TS_11_Altura_2.*

a) Objetivos:

- i) Entender y realizar el procedimiento de cálculo de la altura de un objeto con pie no accesible, así como la distancia a dicho pie utilizando la estrategia de la altura.
- ii) Entender y realizar el procedimiento de cálculo de la altura de un triángulo no rectángulo utilizando la estrategia de la altura.

b) Actividades:

- i) Plantear y resolver el problema analíticamente, o sobre la figura ocultando y mostrando los resultados (solo en Cabri).



- ii) Comprobar la resolución realizada traspasando los datos a la figura.
 iii) Proponer otros similares que permitan que el alumnado vaya comprobando lo que obtiene.

c) Utilización y temporalización:

- i) Utilización del profesor con proyector en el aula para explicar el procedimiento y comprobar los resultados.
 ii) Utilización por el alumnado en las aulas de informática con un navegador.
 iii) No supone incremento de tiempo apreciable.

d) Valoración de la experiencia:

- i) Era muy deseable la interactividad del alumbrando que sólo pudo estar de espectador. Aun así hace de substitutivo eficaz del encerado.

e) Desventajas, observaciones, problemas:

- i) No fue posible el uso en el aula de informática.
 ii) El deseo del alumnado de comprobar gráficamente lo que va obteniendo con sus cuentas representa una fuerte motivación que acelera su ritmo de trabajo y lo anima a revisar errores.
 iii) La escala no es útil en los archivos *.htm

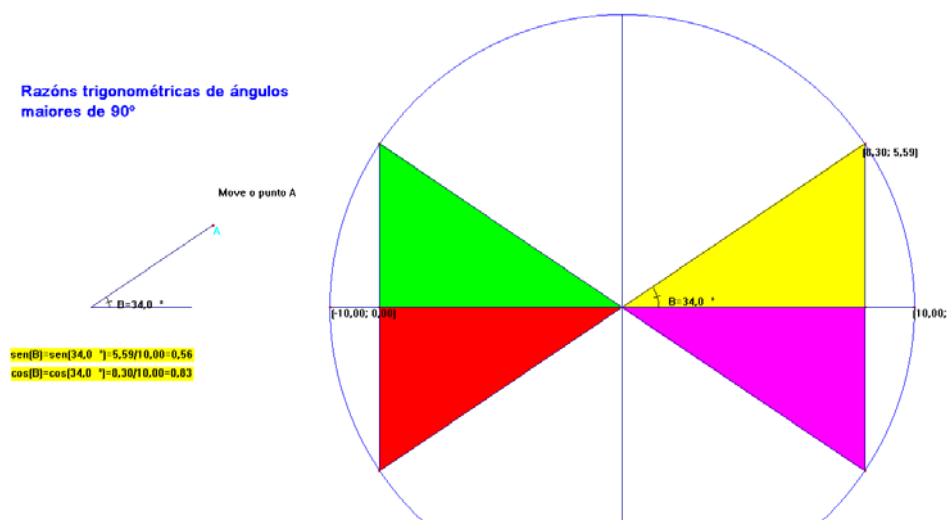
8. Ficheros: TS_13_Circunferencia_goniometrica.*

a) Objetivos:

- i) Extender la definición de las razones trigonométricas a los ángulos mayores que 90° .
 ii) Comprender el signo de las razones trigonométricas básicas en cada cuadrante.

iii) Identificar y establecer relaciones entre ángulos mayores de 90° con ángulos del primero cuadrante.

iv) Establecer relación entre las razones de ángulos complementarios.



b) Actividades:

i) Recordar que el valor del seno y del coseno coinciden con el del cateto contrario (vertical) y del cateto contiguo (horizontal) cuando trabajamos en una circunferencia de radio a unidad.

ii) Provocar la generalización la ordenada y abscisa mediante la variación del ángulo de la figura.

iii) Analizar los valores en ángulos relacionados (60° , 120° , 240° , 300°).

iv) Comparar con la calculadora, 'a ver que dice'.

v) Proponer el cálculo de valores de razones de ángulos mayores de 90° a partir de las de otros menores y comprobar lo obtenido.

vi) Ocultar y mostrar partes ocultas de la figura a medida que se va concluyendo (no en *.htm).

c) Utilización y temporalización:

i) Utilización del profesor con proyector en el aula planteando preguntas y comparando respuestas.

ii) Utilización por el alumnado en las aulas de informática con un navegador.

iii) No supone incremento de tiempo apreciable.

d) Valoración de la experiencia:

i) Superó claramente cualquier manera anterior utilizada para esta generalización. Hizo de substitutivo eficaz del encerado.

- ii) La curiosidad del alumnado jugó una baza importante.
- e) Desventajas, observaciones, problemas:
 - i) No fue posible utilizar una circunferencia más pequeña de radio la unidad.
 - ii) No tiene una versión *.htm suficientemente eficaz.

CONCLUSIONES

- Nuestro desafío era la introducción en el aula del Cabri y de las nuevas tecnologías con el objetivo de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la semejanza y de la trigonometría en 4º ESO. En sí mismo, esto no es nuevo, pues por ejemplo el IES Doña Jimena (Asturias) o el IES Valle de Cidacos (Calahorra), lo pusieron ya en práctica con grupos de 4º de ESO.
- Las clases se hacen más activas con mayor participación y atención del alumnado. Por eso consideramos que mejora substancialmente el proceso de enseñanza y aprendizaje y creemos que también mejora su rendimiento.
- En la parte negativa podemos señalar:
 - El incremento en el tiempo necesario para tratar cada tema y la consiguiente dificultad para completar el temario. Aun así, varias de las figuras representan un substitutivo que no dilata las exposiciones.
 - El montaje en el aula del material necesario (proyector, ordenador) hace deseable disponer de un aula específica.
 - Las dificultades derivadas de ser la primera vez también se advierten (cabos sueltos, prisas,...).
 - La disponibilidad de las aulas de informática no siempre es la deseable, y el montaje y mantenimiento del software necesario implican horas de trabajo extra.
 - Cierta adaptabilidad a la comodidad de algún alumnado ocasiona que lo que es novedad en un principio pueda convertirse en 'rutinario' y, por lo tanto, pierda interés.

REFERENCIAS

- Arranz, José Manuel (Sociedade Castellano Leonesa de Educación Matemática)
<http://roble.cnice.mecd.es/~jarran2/> (Página con numerosas aplicaciones de geometría dinámica con Cabri II)
- Cabri-Géomètre <http://www.cabri.net/> (página oficial de Cabri-Géomètre)
- Cabri Java Projects www.cabri.net/cabrijava/ (página en la que se encuentra el software necesario para convertir los archivos Cabri II en applets de Java)

Cabrilog <http://www.cabri.com> (página de la sociedad que elabora y comercializa el Cabri-Géomètre)

Carrillo de Albornoz, Agustín – Llamas, Inmaculada. (2005): *Cabri Géomètre II Plus. Una aventura en el mundo de la geometría*. Ed. Ra-Ma. Madrid.

Colera, J. - Gaztelu, I. (2003) *Matemáticas 4º ESO*. Anaya. Madrid.