

La semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje en la relación entre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria y su práctica

Isabel Escudero Pérez
Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Sevilla

1- Introducción

Una de las cuestiones que nos parece de gran interés después de la lectura de una tesis doctoral es la propia reflexión y discusión en seminarios y grupos de trabajo de todo lo relacionado con el proceso seguido en el desarrollo de la misma. Nuestra investigación se ha centrado en estudiar la relación existente entre el conocimiento profesional y la práctica del profesor de matemáticas de secundaria, vinculado al tópico específico de la semejanza como objeto de enseñanza-aprendizaje. En el estudio, el marco teórico para el análisis de dicha relación nos lo proporciona una caracterización del conocimiento profesional del profesor de matemáticas como una construcción personal en la que se integran dominios de conocimiento y que se ha generado en la acción profesional (García, 1997), mientras que la práctica la consideramos en un sentido amplio, como el conjunto de acciones del profesor en la enseñanza y su justificación y fundamentación Llinares (1999).

En particular, en el trabajo de investigación nos centramos en dos momentos claves de la práctica, la planificación y la acción, de la que dan cuenta la agenda y la gestión del contenido. En la agenda, constituida por el plan mental del profesor, se recogen el conjunto de objetivos y plan de acción, las concepciones y la forma de conocer del profesor un contenido específico. En la gestión del contenido en el aula, consideramos la arquitectura relacional del aula, entendida como las acciones e interacciones que se dan entre profesor, alumnos y un contenido específico, y el contenido matemático presente en ellas, incluyendo además las concepciones y forma de conocer que con ello se relacionan.

Metodológicamente, la investigación está enmarcada en la tradición interpretativa, adoptando la forma de estudio de casos. Los participantes en la investigación han sido dos profesores de educación secundaria con una gran experiencia profesional. Se utilizan datos procedentes de distintas fuentes que nos permiten apreciar la complejidad de aspectos que confluyen en las situaciones de enseñanza.

El que en esta investigación se haya estudiado la relación entre conocimiento y práctica en contextos específicos, concretamente la enseñanza de la semejanza a alumnos de segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (3º y 4º de la ESO), ha obligado a prestar una especial atención a la forma de conocer el profesor la semejanza como objeto de enseñanza/aprendizaje, entendida esta forma de conocer como la integración que se produce entre el *conocimiento de la materia* (organización del contenido y aproximación al concepto) y el *conocimiento de contenido pedagógico* (modos de representación y su uso, demanda cognitiva que se favorece en las tareas, etc). De todo el proceso seguido, considerando las características de nuestro grupo de trabajo, aquí nos vamos a centrar en lo que hicimos para buscar unos referentes que nos pudieran ayudar en el análisis de la forma de conocer la semejanza.

2- Buscando referentes para el análisis de la forma de conocer la semejanza como objeto de enseñanza/aprendizaje de los profesores

Como objeto matemático, la semejanza es una transformación geométrica que cumple una serie de propiedades, definidas y explicitadas en tratados de geometría o de matemáticas generales para universitarios, entre ellas las obras de autores como Doneddu (1978), Berger (1990) y Coxeter (1971). La definición actual que puede figurar en cualquiera de esos textos es un objeto muy elaborado como consecuencia de las numerosas generalizaciones realizadas a lo largo de los siglos. Ello nos llevó a estudiar la evolución histórica del concepto y de las transformaciones geométricas del plano, que están estrechamente vinculadas con él (Lemonidis, 1990, 1991), lo que ha permitido identificar una progresión en dicha evolución y determinados obstáculos epistemológicos con él relacionados.

Además, dado que nuestra investigación se sitúa en un contexto de enseñanza/aprendizaje, fue necesario tener en cuenta distintos trabajos que se centran en el análisis psicogenético de las estructuras geométricas (Piaget y García, 1982). Ahora bien, por un lado al estar implícito en el concepto de semejanza el razonamiento proporcional, era importante considerar aquellas investigaciones que han tratado de precisar los conceptos de razón y/o de proporción. En particular, en Lesh et al. (1988) se recogen y confrontan distintas visiones sobre la naturaleza de las razones, recogiendo los puntos de vista de autores como Vergnaud (1983, 1988); Schwartz (1983) y Kaput et al. (1986, citados en Lesh et al., 1988), entre otros. Junto a ello, han sido importantes las distinciones entre razón interna y externa mencionadas por Freudenthal (1983). Por otro lado, el papel de las representaciones en el proceso de enseñanza/ aprendizaje nos ha llevado a tener en cuenta distintos trabajos que se han ocupado de su estudio,

centrados en el campo geométrico (Duval, 1995, 1998; Mesquita, 1989; Cordier y Cordier, 1991; Duperret, 1996).

Junto a ello, hemos considerado imprescindible analizar el tipo de tareas sobre semejanza, en particular, y sobre razonamiento proporcional, en general, que aparecía en la literatura del campo de investigación (Pfaff, 1997-98; Tourniaire y Pulos, 1985; Lamon 1993). Precisamente estudios como el desarrollado por Fiol (1992) sobre la comprensión de alumnos del razonamiento proporcional apuntan la necesidad de incluir tareas geométricas para mejorar su comprensión.

Todo este estudio previo nos ha permitido fijar unos referentes para el análisis de la forma de conocer la semejanza, considerando los siguientes elementos para analizar los núcleos y relaciones que se establecen en la organización del contenido:

i) Aproximación al concepto de semejanza:

- a) Dentro de la *relación intrafigural*. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra. Distinguimos: i) Cuando las figuras forman parte de configuraciones de Thales, en la que se consideran los aspectos proyección y homotecia, con sus correspondientes razones. ii) Cuando las figuras no están formando parte de una configuración, distinguiéndose las razones interna y externa.
- b) Dentro de la *transformación geométrica*. Aparece la noción de transformar una figura en otra. Distinguimos: i) *vista como útil*, en la que ya se percibe la transformación geométrica como una aplicación de los puntos del plano en él mismo; ii) *vista como un objeto matemático*, caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.

ii) El tipo de actividad demandada en las tareas: *calcular*, distinguiendo los subtipos de *ausencia de un valor, comparación y mixto; construir y demostrar/justificar*.

iii) Los modos de representación y su uso, entendidos como posibilidades semióticas de representar el contenido. Se han considerado: *lenguaje natural, figurativo, numérico/simbólico, situación y material concreto*.

iv) En particular, dentro del modo figurativo hemos considerado la aprehensión que se favorece para describir cuál es la aportación intuitiva de la figura en un problema geométrico (Mesquita, 1989, Duval, 1995, 1998). Se han considerado los siguientes tipos: *perceptual, operativa, secuencial y discursiva*.

A continuación vamos a presentar cómo hemos caracterizado la forma de conocer de uno de los profesores participantes, atendiendo a estos referentes.

3- Aplicación de los referentes establecidos para el análisis de la forma de conocer

Como ya hemos mencionado, los resultados de los casos estudiados en nuestro trabajo de investigación se estructuraron en dos partes: la agenda y la gestión del contenido. Del análisis de los datos realizado a partir de la agenda, podemos inferir que este profesor organiza el contenido matemático de la unidad didáctica a través de dos núcleos principales de contenido, el teorema de Thales y la semejanza de figuras (triángulos semejantes y semejanza de polígonos), que se colocan a un mismo nivel de relevancia. El teorema de Thales enlaza con la semejanza de figuras a través de los criterios de semejanza de triángulos, presentando las tareas elegidas sobre semejanza de triángulos a éstos en posiciones de Thales. La forma de abordar la semejanza de figuras la planifica el profesor tratando de precisar el concepto intuitivo de “misma forma”, que se concretarán en figuras geométricas, primero en triángulos y, posteriormente, en polígonos en general. Por otro lado, la semejanza de triángulos se trata de enlazar con los teoremas en el triángulo rectángulo. Estos últimos, junto con las escalas, que se verían como el problema de la representación de terrenos, edificios y objetos en general a un tamaño no real, completarían su organización del contenido. Se sitúa así en una organización próxima a los planes de estudio de los años 50, que está muy influenciada por la geometría euclídea, aunque la presentación de la semejanza de figuras en general a partir de configuraciones homotéticas se sustituye por una aproximación más intuitiva, cercana a las orientaciones curriculares actuales y a los libros de texto correspondientes. Además, la profundización en cada uno de los núcleos en que se organiza el contenido nos permite ver que este profesor se aproxima al concepto dentro de la *relación intrafigural* que, en el caso de la semejanza de polígonos, se amplía a una consideración cercana a la *transformación geométrica vista como útil*.

Con respecto a los demás referentes que hemos considerado para el análisis de la forma de conocer, los aspectos más relevantes están recogidos de manera resumida en el cuadro 1.

TIPO DE ACTIVIDAD DEMANDADA	APREHENSIÓN QUE SE FAVORECE	MODO DE REPRESENTACIÓN
- Calcular: De ausencia de un valor, comparación y mixto - Demostrar/ justificar - Construir	- Perceptual - Secuencial - Operativa - Discursiva	- Lenguaje natural - Situación - Figurativo - Numérico/ simbólico

Cuadro 1: Forma de conocer la semejanza

En la otra parte de la práctica considerada, la gestión del contenido en el aula, en la organización del contenido se mantienen los dos núcleos importantes identificados en la agenda (teorema de Thales y semejanza de figuras). Los cambios relevantes que se han detectado en dicha organización están relacionados con la inclusión y/o supresión de contenido y con el lugar que ocupan las demostraciones. Con respecto a los primeros se suprimen las escalas, se incluye un contenido no específico de la unidad didáctica (ángulos entre rectas paralelas), debido a que se pone el énfasis en el proceso de demostrar para algunas tareas, aunque esto contrasta con que se prescinde de los teoremas en el triángulo rectángulo, y por lo tanto de sus posibles demostraciones. Esto nos lleva a hablar de los cambios relevantes que se dan con el papel de las demostraciones en su práctica, que si bien se suprimen algunas, debido a que dicho contenido no es relevante en su forma de conocer, se refuerzan otras como la demostración del primer criterio de semejanza y la realización de tareas de demostrar aplicando el teorema de Thales. Además, en relación con la aproximación al concepto se sigue manteniendo dentro de la *relación intrafigural*, que se amplía a la *transformación geométrica vista como útil*. Los cambios tienen más que ver con dónde se coloca el énfasis que con un cambio de perspectiva. Destaca la consideración de los dos aspectos proyección y homotecia con sus correspondientes razones y la incorporación de la razón de semejanza como factor multiplicativo, así como la doble consideración de dicha razón, como factor y como cociente, entre las que se establecen conexiones.

Con respecto a los demás referentes considerados en la caracterización de la forma de conocer, los cambios más relevantes que se dan en el aula los hemos recogidos en forma resumida en el cuadro 2.

TIPO DE ACTIVIDAD	APREHENSIÓN	MODO DE REPRESENTACIÓN
<ul style="list-style-type: none"> - Se siguen abordando de los tres tipos. - Selección de tareas dentro de las que demandan una misma actividad. - Se mantiene el orden “cuasi-psicológico” de secuenciación de tareas. 	<ul style="list-style-type: none"> - Se presentan los tipos de aprehensión identificados. 	<ul style="list-style-type: none"> - Destacan las traslaciones dentro del modo figurativo y del modo numérico/simbólico. - El uso de la medida de segmentos no es relevante en la traslación entre los modos figurativo y numérico. - Modo situación para iniciar la unidad didáctica

Cuadro 2: Cambios en la forma de conocer la semejanza

¿A qué se deben los cambios identificados a través de nuestros referentes en los distintos momentos de la práctica? Dichos cambios están estrechamente relacionados con distintas características de las concepciones y dominios de conocimiento del profesor y con condiciones contextuales de la práctica. En el cuadro 3 hemos recogido las características más relevantes que se relacionan con los cambios habidos en los distintos apartados considerados para el análisis de la forma de conocer.

ORGANIZACIÓN DEL CONTENIDO	APROXIMACIÓN AL CONCEPTO	TIPO DE ACTIVIDAD	MODO DE REPRESENTACIÓN Y APREHENSIÓN
<ul style="list-style-type: none"> - Consideración de ideas erróneas, dificultades y aportaciones de los alumnos. - Concepciones sobre las matemáticas escolares y su papel en el desarrollo del razonamiento deductivo. Importancia de determinados contenidos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Condiciones contextuales: evitar dificultades. - Necesidad de incorporar las ideas previas y aportaciones de los alumnos. 	<ul style="list-style-type: none"> - Condiciones contextuales: evitar dificultades y presión del tiempo. 	<ul style="list-style-type: none"> - Importancia de favorecer la visualización de la proporcionalidad en un contexto geométrico. - Conocimiento de las dificultades e ideas erróneas.

Cuadro 3: Relación cambios/ dominios de conocimiento

Destaca especialmente la importancia que da el profesor a considerar las ideas erróneas que puedan tener los alumnos con determinados conceptos implicados en la semejanza de figuras, así como el tratar de incorporar las aportaciones en la realización de tareas y en la introducción del contenido. Junto a ello se pone de manifiesto un conocimiento de las dificultades específicas e ideas erróneas y la importancia que da a la visualización de la proporcionalidad en un contexto geométrico, que contribuyen a la caracterización de su forma de conocer.

4- Algunas consideraciones finales

Para terminar, podemos considerar lo que hemos apuntado al inicio de este trabajo, donde planteábamos como eje de reflexión qué hemos hecho en nuestra investigación y qué ha quedado por hacer. Considerado globalmente, nuestro estudio aporta información a la caracterización del conocimiento profesional del profesor de matemáticas de enseñanza secundaria, y nos ha informado de la complejidad de la práctica. Por otro lado, nos ha permitido sentar unos referentes con los que hemos abordado la forma de conocer la semejanza de unos profesores como objeto de enseñanza/aprendizaje.

Sin embargo, debemos hacer algunas puntualizaciones en el uso de algunos de los referentes utilizados para caracterizar la forma de conocer. Así por ejemplo, en la aproximación al concepto, ambos profesores lo hacen fundamentalmente dentro de la *relación intrafigural*, dado el nivel escolar en que se realiza la investigación. Esto nos condujo a tener que profundizar en los elementos que consideraba esta relación. Además, el análisis de determinados conceptos ligados a la semejanza y el papel de los modos de representación nos llevó a la consideración de las relaciones entre aspectos figurativos y

simbólicos, que nos permitieron precisar, dentro de la *relación intrafigural*, los aspectos proyección y homotecia con las razones correspondientes y la diferenciación entre razón interna y externa. No obstante pensamos que se puede avanzar en la profundización en los elementos significativos que intervienen en la noción considerada.

También, con relación a los modos de representación se puede señalar que debido a las características del contenido geométrico, una gran cantidad de tareas vienen dadas en el modo figurativo y demandan traslaciones de dicho modo al numérico/simbólico y viceversa. Por lo que para poder profundizar en las características del uso de los modos de representación ha sido indispensable centrarse en cómo se produce la traslación dentro de un mismo modo de representación y entre modos de representación distintos, así como la necesidad de describir cuál es la aportación de la figura en la resolución de las tareas (Mesquita, 1989). Creemos necesario profundizar en trabajos que estudian el problema de las representaciones semióticas y en cómo se pueden coordinar distintos “registros” de representación en geometría (Duval, 1995, 1998).

Como conclusión final consideramos importante generar marcos teóricos para el análisis de la forma de conocer de un profesor un determinado contenido matemático, que contemplen perspectivas:

- genéticas: que consideran características sobre la comprensión y las dificultades que pueden tener los alumnos con relación al concepto,
- epistemológicas: que tengan en cuenta la evolución histórica de los conceptos y permitan hacer explícitos los posibles obstáculos epistemológicos y las distintas aproximaciones,
- didácticas: que sitúen el contenido en un contexto de enseñanza/aprendizaje.

Referencias

- Berger, M. 1990. *Géométrie*, Nathan (ED): Paris.
- Cordier, F. y J. 1991. L’application du théorème de Thales. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(1), 45-64.
- Coxeter, H.S.H. 1971. *Fundamentos de geometría*. Limusa-Wiley S.A., Mexico.
- Doneddu, A. 1978. *Curso de Matemáticas. Álgebra y Geometría*. Aguilar: Madrid.
- Duperret, J.C. 1996. Por un Thales dinámico. En E. Barbin y R. Douady (Coord). *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica*. Pub. del IREM.
- Duval, R. 1995. Geometrical pictures: kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason. *exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Springer- Verlag Berlin Heidelberg New York, 142-157.

- Duval, R. 1998. Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century: an ICMI Study*.
- Fiol, M.L. 1992. *Marco de desarrollo del razonamiento proporcional en alumnos de 12 a 14 años: visualización y computación*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- García, M.M. 1997. *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje*. GIEM. Universidad de Sevilla (Ed). KRONOS S.A., Sevilla.
- Freudenthal, H. 1983. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Lamon, S.J. 1993. Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 24, nº 1, 41-61.
- Lemonidis, C. 1990. *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. Thèse de Doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.
- Lemonidis, C. 1991. Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(23), 295-324.
- Lesh, R., Post, T. y Behr, M. 1988. Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds), *Numbers concepts and operations in the middle grades*, 93-118. NCTM. Reston, VA: Erlbaum.
- Llinares, S. 1999. Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas: características de una agenda de investigación. *Zetetiké-Cempem- Fe/Unicamp*, 7(12), 9-36.
- Mesquita, A. 1989. *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: Elements pour une typologie*. Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg. U.L.P.
- Pfaff, N. 1997-98. Le rôle de l'analyse des tâches pour un enseignant. *Petit X*, 48, 23-35.
- Piaget, J. y García, R. 1982. *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI editores, S.A. Mexico DF.
- Tourniaire, F. y Pulos, S. 1985. Proportional reasoning: A review of the literature, *Educational Studies in Mathematics* 16, 181-204.
- Vergnaud, G. 1983. Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds), *Acquisitions of mathematics concepts and processes*, 127-174. New York: Academic Press.
- Vergnaud, G. 1988. Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds), *Numbers concepts and operations in the middle grades*, 141- 161, NCTM. Reston, VA: Erlbaum.