UNIDAD DE ENSEÑANZA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN AMBIENTE CABRI PARA EL DESARROLLO DE LAS HABILIDADES DE DEMOSTRACIÓN

Jorge Enrique Fiallo Leal - Universidad Industrial de Santander – Colombia
Ángel Gutiérrez Rodríguez – Universidad de Valencia - España

Resumen.
Presentamos algunos resultados del trabajo de investigación realizado con estudiantes de 10º grado de bachillerato[1] de tres instituciones de Santander (Colombia), cuyos objetivos apuntaban a: i) Diseñar, implementar y evaluar una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un entorno de geometría dinámica enfocándola además hacia el desarrollo de las habilidades de la demostración en los estudiantes de 10º grado. ii) Analizar los tipos de demostración que emergen con el uso de Cabri en el proceso de demostración de propiedades trigonométricas de los estudiantes que inician el grado 10º y iii) Analizar los procedimientos, las estrategias de razonamiento y los errores y dificultades detectados en el desarrollo de las actividades planteadas en la unidad de enseñanza. En general podemos decir que las actividades de la unidad de enseñanza lograron promover procedimientos, estrategias de razonamiento y demostraciones que fueron presentando un continuo progreso desde lo empírico hacia lo deductivo y que contribuyeron al logro de los objetivos de aprendizaje y de investigación propuestos.

Introducción.

El estudio de la trigonometría puede convertirse en un proceso memorístico, rutinario y mecánico, sin ningún sentido ni utilidad si no se brindan las condiciones suficientes para ello. Por esta razón, es importante brindarle al estudiante no sólo una serie de conceptos, si no las herramientas y estrategias necesarias para que explore, analice, relacione, conjeture, demuestre y aprenda con sentido los conceptos y propiedades trigonométricos, que aprenda a utilizar diferentes procedimientos y estrategias de razonamiento, a producir distintos tipos de demostración en la solución de problemas de conjetura y demostración de las propiedades trigonométricas y a relacionar las diferentes representaciones de los conceptos de tal manera que el aprendizaje sea más efectivo y duradero.

Es de amplio conocimiento en la comunidad de investigadores en educación matemática que el tema de la demostración en matemáticas es una de las agendas que reporta un gran número de investigaciones, agrupándose, como lo propone Mariotti (2006), en tres líneas de investigación caracterizadas por tres categorías de asuntos de investigación, a saber: la demostración en el currículo, diferentes aproximaciones a las concepciones de demostración de los estudiantes y propuestas para introducir a los estudiantes a la demostración.

[1] En Colombia el grado 10 corresponden a la educación media no obligatoria o pre-universitaria. La edad promedio de los estudiantes en éste grado es de 15 años.

Por otro lado las nuevas tecnologías nos ofrecen herramientas para la enseñanza que contribuyen a que los estudiantes, a través de ellas, pongan en juego sus ideas, exploren, analicen, tomen datos, etc., y pongan a prueba sus conjeturas. En geometría existe una variedad de software de geometría dinámica, como “Cabri Géomètre”, que pone a disposición del estudiante un micromundo geométrico en el cuál los objetos matemáticos pasan de ser simples dibujos a convertirse en “objetos geométricos” que pueden ser construidos a través de acciones de una manera muy similar a las construcciones en lápiz y papel, pero con la posibilidad de tener más de una representación del objeto construido y de la familia de figuras semejantes a la inicial, además de poder manipularlas a través de la opción de arrastre o animación que ofrece el programa.

Tomando como base las ideas anteriores, y siguiendo las líneas de investigación tendentes a obtener una mejor idea de los procesos de demostración y del planteamiento de propuestas para introducir a los estudiantes en el tema de la demostración, se planteó esta investigación basada en el diseño, experimentación y evaluación de una unidad de enseñanza que permitiera acercar a los estudiantes al estudio de la trigonometría y la demostración desde una metodología que sustenta que: (i) A partir de un enfoque geométrico en un ambiente de geometría dinámica se favorece la formación de objetos mentales[2] de los conceptos de las razones trigonométricas. (ii) El uso de Cabri favorece la visualización, generalización y conjetura de propiedades de las razones trigonométricas. (iii) El uso de Cabri contribuye al desarrollo de habilidades de demostraciones empíricas y deductivas en el estudio de las razones trigonométricas.

La concepción de la demostración en nuestra investigación.

Arzarello y otros (1998) consideran cruciales dos componentes para focalizar el significado de la demostración, a saber, el cognitivo y el histórico-epistemológico (Barbin, 1988; Balacheff, 1988; Harel, 1996; Mariotti et al., 1997). Por supuesto los dos componentes pueden ser separados solamente por razones de análisis teóricos, o por lo contrario pueden entrelazarse con profundidad en la realidad (Hanna, 1996) y ambos pueden considerarse para abordar apropiadamente lo didáctico de la demostración.

[2] Entendido como lo plantea Freudenthal (2001), quien afirma que la constitución de objetos mentales precede a la adquisición de conceptos, y puede ser altamente efectivo, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos. Siguiendo las ideas de Freudenthal acerca de la fenomenología didáctica, consideramos que desde los fenómenos geométricos se favorece la formación de objetos mentales de los conceptos de las razones trigonométricas, y en este caso, el uso de Cabri se constituye en una herramienta potente para favorecer y comprender las relaciones entre las objetos mentales de los conceptos de las razones trigonométricas.

Hanna (2000) manifiesta que cuando se intenta caracterizar el rol de la demostración en Educación Matemática se tiende a considerar el rol de ésta en la actividad matemática misma, pues se espera que el rol en las clases refleje todo lo que esperan de ella los matemáticos. Pero estas funciones no siempre son relevantes para el aprendizaje de las matemáticas en el mismo grado y no siempre deberían tener el mismo peso en la instrucción (de Villiers, 1990, Hersh, 1993). Para comenzar el largo trabajo de preparar a los estudiantes para la demostración deberíamos empezar por dos funciones fundamentales: verificación y explicación. En la clase, la pregunta fundamental que la demostración debe dirigir es: ¿Por qué? En el dominio educativo es natural entonces valorar las demostraciones que mejor ayuden a explicar.

Teniendo en cuenta las ideas expuestas y las de otros investigadores (Godino y Recio, 2001; Battista y Clements, 1995), consideramos la ***demostración*** desde una perspectiva amplia, como un proceso que incluye todos los intentos hechos por los estudiantes para *explicar, verificar o justificar* con miras a convencerse a si mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática.

Análisis de conjeturas y demostraciones producidas por los estudiantes.

Marrades y Gutiérrez (2000), apoyados en los trabajos de otros investigadores como Balacheff (1988), Bell (1976) y Harel y Sowder (1998), proponen una estructura analítica para analizar, organizar y describir las respuestas de los estudiantes a problemas de demostración. A continuación presentamos de manera resumida las categorías propuestas y una breve descripción de cada una de ellas:

A) Demostraciones empíricas, caracterizadas por el uso de ejemplos como elementos de convicción. Los tipos de demostración empírica son:

- *Empirismo ingenuo:* Cuando en el planteamiento de una conjetura y en la demostración se usan solamente ejemplos escogidos sin ningún criterio y las argumentaciones se basan en elementos visuales o táctiles (**perceptivo**) o elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo (**inductivo**).
- *Experimento crucial:* Cuando la conjetura es demostrada usando un ejemplo que se escoge porque se presume que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se identifican los siguientes tipos de experimentos cruciales:
  - *Basado en ejemplo***:** Cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración.

- *Constructivo:* Cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo.
- *Analítico:* Cuando se usan ejemplos cuidadosamente seleccionados y las demostraciones de los estudiantes están basadas en propiedades y relaciones observadas en el ejemplo o en elementos auxiliares.
- *Intelectual:* Cuando las conjeturas o demostraciones de los estudiantes están basadas en observaciones empíricas del ejemplo, pero en la demostración usan propiedades matemáticas aceptadas o relaciones entre los ejemplos.

- *Ejemplo genérico:* Cuando en la demostración o la conjetura se usa un ejemplo específico que es representante de una clase, y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos.

Los cuatro tipos de demostración definidos en el párrafo anterior para el experimento crucial se presentan el los ejemplos genéricos.

B) Demostraciones deductivas, caracterizadas por la descontextualización de las discusiones usadas, se basan en aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas. Los tipos de demostraciones deductivas son:

- *Experimento mental:* Cuando se usa un ejemplo para ayudar a organizar la demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:
  - *Experimento mental transformativo:* Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. El papel de los ejemplos es ayudar a prever cuáles transformaciones son convenientes.
  - *Experimento mental estructural:* Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados, y, si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones.
- *Deducción formal:* Cuando la demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos.

Los dos tipos de demostración definidos para el experimento mental, pueden también ser encontrados en la demostración deductiva forma.

También plantean una clase llamada **fallida,** que incluye los casos de estudiante que no son capaces de seguir un camino de solución que los lleve al planteamiento de una conjetura o de una demostración, o aquellos que no hacen nada, no ven la conjetura, o no se puede inferir nada de sus respuestas.

Metodología.

En el siguiente diagrama (Fig. 2) se resume la metodología de investigación planteada por fases, en donde se llevaron a cabo acciones investigativas para dar cumplimiento a los objetivos de investigación planteados.

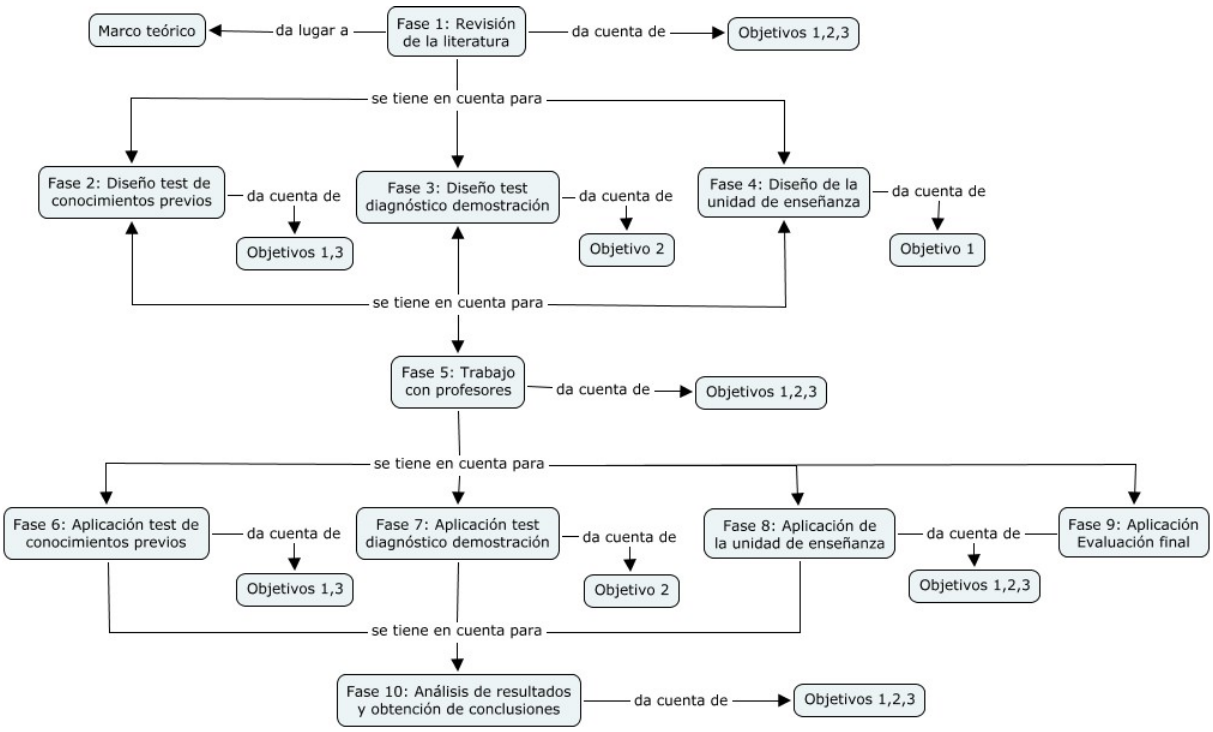


Figura 2: Secuencia y relación entre las fases y los objetivos de investigación

Los datos se recogieron a través de las hojas de trabajo de los estudiantes, los mapas conceptuales que debían completar o realizar al finalizar una actividad, las evaluaciones cortas y acumulativas aplicadas durante el desarrollo de la experimentación, los test diagnósticos de los preconceptos y de las habilidades de demostración, vídeos de las discusiones de clase con los compañeros y profesores y de una entrevista final realizada a algunos estudiantes y la profesora de una de las instituciones, registros de sesión de Cabri y cuadernos de apuntes del investigador y de los profesores. Para la determinación de conclusiones se utilizaron todos los análisis cualitativos y cuantitativos realizados sobre todas las actividades, teniendo en cuenta las categorías de análisis de Marrades y Gutiérrez (2000) y las categorías emergentes, así como los datos cuantitativos obtenidos.

Durante dos semanas previas a empezar las clases, el investigador trabajó con los profesores, haciendo énfasis en los objetivos de la investigación y de aprendizaje propuestos en la unidad de enseñanza, en la concepción de demostración de nuestra investigación, en el uso de Cabri y en la revisión y corrección de la unidad y de los test diagnósticos. Este trabajo continuó en el transcurso del desarrollo de la experimentación en donde los profesores eran los encargados de implementar las actividades y orientar la clase según lo planeado y descrito en cada una de las actividades para el logro de los objetivos de aprendizaje y de investigación.

El investigador fue el responsable del diseño de las actividades y los correspondientes archivos de Cabri, de participar en el desarrollo de las actividades en las instituciones, adoptando un papel de observador activo y colaborador del profesor en las tareas de asesoramiento y orientación a los estudiantes, preguntando y registrando las respuestas y conclusiones en el desarrollo de las tareas propuestas.

Descripción de la población.

La implementación de la unidad de enseñanza se llevó a cabo con 100 estudiantes del grado 10º de bachillerato (14-16 años) de tres instituciones de Santander (Colombia), tomando como único criterio para su elección la facilidad de poder establecer contactos con las directivas y profesores, y que fueran instituciones que contaran con una sala de computadores disponible tres horas semanales para trabajar en dos sesiones semanales de 90 minutos cada una durante el periodo de tiempo que se había planeado la experimentación.

Ninguno de los estudiantes había tenido experiencia previa en el uso de Cabri, por lo que las dos primeras semanas de febrero se dedicaron a su aprendizaje. Teniendo en cuenta que los estudiantes partícipes de la experiencia eran noveles en el uso de Cabri y el tiempo disponible para la capacitación en su uso fue de apenas dos semanas, en casi todas las actividades Cabri fue utilizado más como una herramienta para obtener construcciones sencillas y orientada a la visualización, exploración y análisis de relaciones y propiedades trigonométricas que como una herramienta para que ellos manipularan como expertos para la solución de un problema de demostración. Cuando la construcción era compleja se daba a los estudiantes el archivo correspondiente para que ellos la manipularan y exploraran las propiedades estudiadas. Solamente en los casos en que las construcciones eran sencillas se pidió a los estudiantes que intentaran hacerlas y que, de acuerdo a su resultado, plantearan, verificaran y demostraran las propiedades correspondientes.

De los profesores, solamente uno había usado Cabri en la calculadora TI 92 plus y Cabri II en el computador, por lo que se trabajó con ellos durante las dos últimas semanas de enero y las dos primeras semanas de febrero.

Para el análisis de los resultados se tomaron cuatro grupos conformados por dos o tres estudiantes de dos de las instituciones y tres grupos conformados por dos estudiantes de otra de las instituciones

Planificación de la experimentación.

La experimentación de la unidad de enseñanza se llevó a cabo durante el periodo comprendido desde la segunda semana de enero hasta la primera semana de mayo de 2006 en el transcurso normal del periodo de clases de las tres instituciones participantes. El siguiente esquema muestra la secuencia cronológica de las acciones de experimentación que ayudará a dar una visión global de lo realizado.

Acciones de la experimentación	FEB 2006				MAR 2006				ABR 2006				MAY 2006			
Aplicación del test de conocimientos previos																
Aplicación del test diagnóstico de los tipos de demostración																
Aplicación de la unidad de enseñanza																
Aplicación de las evaluaciones cortas																
Aplicación de la evaluación acumulativa																

Se aplicaron cinco actividades que abarcaron los siguientes temas de estudio de las razones trigonométricas[3]:

Actividad 1: Razones trigonométricas para triángulos rectángulos.

Actividad 2: Razones trigonométricas para ángulos en posición normal.

Actividad 3: Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas.

Actividad 4: Identidades Pitagóricas.

Actividad 5: Seno de la suma de dos ángulos.

Como uno de los objetivos fundamentales de la unidad era el desarrollo de las habilidades de demostración, desde la primera actividad se planteó el análisis y demostración de conjeturas que involucraban las identidades trigonométricas. De esta manera, cada actividad era mucho más extensa de lo que normalmente se plantea en los textos escolares, puesto que se requería de la realización y análisis de construcciones en Cabri, planteamientos

[3] Por razones de espacio, presentamos el anexo de una sola de las actividades que el lector se haga una idea del tipo y la forma de actividades propuestas a los estudiantes en la unidad de enseñanza, para mayor información consultar Fiallo (2006).

y discusión de las ideas en la hoja de trabajo con el grupo y finalmente en la discusión con la clase y el profesor.

Algunos resultados

Las actividades planteadas permitieron el uso de diferentes procedimientos de resolución de actividades caracterizados cada uno de ellos por el tipo de actividad propuesta, viéndose una evolución desde el uso inicial de procedimientos numéricos basados generalmente en los datos observados en Cabri hacia el uso de procedimientos algebraicos, geométricos y analíticos que promovieron el uso de razonamientos más analíticos y deductivos para mejorar las habilidades de demostración en el tema de las razones trigonométricas. Por ejemplo, al realizar los movimientos que hacían variar el ángulo *A* en un solo sentido planteaban que algunas razones aumentaban y otras disminuían. Al solicitarles propiedades matemáticas para justificar se basaban en lo observado en Cabri y volvían a dar ejemplos. Este tipo de procedimiento se clasificaba como <u>Numérico basado en los datos de Cabri</u> (NDC); Para hallar las relaciones entre las razones de los ángulos *A* y *A – 90*, construyeron en Cabri el ángulo *A – 90* por rotación y justificaron que *cos (A - 90) = sen A* porque *"cuando el triángulo rota (A-90) pasa a ser el coseno de A por lo tanto cos (A-90) = sen A los triángulos son semejantes pero diferentes las posiciones de seno y coseno"*. Este tipo de procedimiento se clasificaba <u>Geométrico basado en propiedades geométricas</u> (GP).

Por la insistencia en el uso de propiedades matemáticas para las justificaciones, a medida que los estudiantes avanzaban en las actividades, empezaban a utilizar procedimientos más analíticos que tendían a ser más generales y no tan numéricos. En este caso Cabri les servía como una herramienta exploratoria para analizar los variantes e invariantes e ir deduciendo propiedades geométricas y analíticas.

Se detectaron cinco estrategias de razonamiento muy relacionadas con los procedimientos de resolución de actividades y con los tipos de demostración realizados por los estudiantes; estas estrategias también emergían de alguna manera por el tipo de actividad propuesta. Por ejemplo, la estrategia de razonamiento usada al principio se basó en el análisis empírico de los datos de Cabri al realizar el movimiento del punto P sobre la circunferencia; para hallar las relaciones de las razones entre los ángulos *A* y *–A* hicieron construcciones y analizaron los valores de las coordenadas de los puntos sobre el lado final de cada ángulo, no utilizaron argumentos geométricos para justificar las relaciones. Este tipo de razonamiento se clasificó como <u>Empírico inductivo apoyado en los datos de Cabri</u> (EIC-AD).

A medida que fueron explorando otras relaciones se fue dando una transición desde un razonamiento empírico inductivo hacia un razonamiento deductivo ayudado por una transición entre las representaciones numéricas hacia representaciones algebraicas apoyadas por un enfoque geométrico. Sustentaban sus afirmaciones en deducciones de los datos del problema o propiedades recordadas y utilizaban Cabri para su validación. Por ejemplo, para hallar el rango de variación de la tangente utilizan la identidad $\tan A = \frac{senA}{\cos A}$ y explican comparando los valores del cociente cuando seno y coseno varían "*Al acercarse a 90º aumenta más rápidamente, pues la proporción entre senA y el cosA son mayores y el cosA disminuye y el senA aumenta por lo que su división va a ser un número mayor*" Este tipo de razonamiento se clasificó como Deductivo apoyado en el uso de Cabri (D).

Los errores en su mayoría fueron surgiendo en el transcurso del desarrollo de determinada actividad y algunos de ellos muy propios de ésta por el tipo de actividad planteada. Sin embargo un error que fue constante en casi todas las primeras actividades fue el de considerar una variable positiva si no tenía ningún signo y negativa si tenía el signo menos. Por ejemplo, asumían que el ángulo $-\theta$ siempre es negativo y el ángulo θ siempre es positivo o que la variable real *x* siempre es positiva y la variable real *–x* siempre es negativa. Un error que fue característico y cometido por casi todos los grupos en la actividad 2 fue el de considerar el ángulo siempre positivo y en el primer cuadrante que los inducía al análisis de las conjeturas solamente en el primer cuadrante. Por ejemplo, "*sen A = - sen (-A) porque sen A es positivo, sen (-A) es negativo y al multiplicarlo por -1 queda positivo*".

Las mayores dificultades encontradas especialmente al inicio de la experimentación fueron las de establecer las relaciones que se daban entre los diferentes elementos o conceptos involucrados en el estudio de las razones trigonométricas y la incapacidad inicial de justificar matemáticamente, estando muy relacionada con éstas la dificultad de expresar las relaciones y propiedades en un lenguaje y notación adecuadas. Por ejemplo, quienes no escribieron en Cabri las razones en forma de fracción, indicando con los valores de los lados en el numerador y denominador, no veían la relación numérica de estos lados cuando varía el ángulo y no eran capaces de justificar con argumentos basados en las definiciones de las razones dadas, por qué al variar el ángulo varían las razones.

En cuanto a los tipos de demostración, vimos cómo a medida que se fueron desarrollando las actividades, se fue dando una transición de demostraciones de tipo inductivo hacia demostraciones de tipo deductivo (Tabla 1) y desaparecieron las demostraciones fallidas, empíricas fallidas o deductivas fallidas, aunque esto no se puede tomar como un indicador rotundo de éxito e interpretar que en las actividades finales todos los estudiantes tenían habilidades para producir demostraciones deductivas. También se evidenció que, de acuerdo a la actividad propuesta, se promovió determinado tipo de demostración.

ACT	F	EF	EIP	EII	ACB	ACC	ECA	ECI	EGB	EGC	EGA	EGI	DF	EMT	EME	DFT	DFE
1																	
2																	
3																	
4																	
5																	

Códigos: **F** = Fallido, **EF** = Empirismo fallido, **EIP** = Empirismo ingenuo perceptivo, **EII** = Empirismo ingenuo inductivo, **ECB** = Experimento crucial basado en ejemplo, **ECC** = Experimento crucial constructivo, **ECA** = Experimento crucial analítico, **ECI** = Experimento crucial intelectual, **EGB** = Ejemplo genérico basado, **EGC** = Ejemplo genérico constructivo, **EGA** = Ejemplo genérico analítico, **EGI** = Ejemplo genérico intelectual, **EMT** = Experimento mental transformativo, **EME** = Experimento mental estructural, **DFT** = Deductivo formal transformativo, **DFE** = Deductivo formal estructural. **DF** = Deductivo fallido.

Tabla 1: Tipos de demostración producidas por los estudiantes

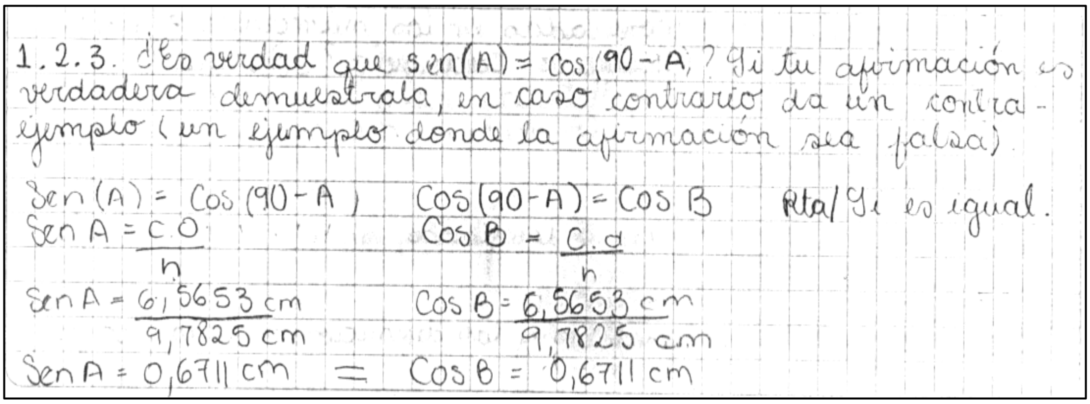
En la primera actividad prevalecieron las demostraciones empíricas, especialmente las cruciales, sobresaliendo el tipo experimento crucial intelectual. No se produjeron demostraciones genéricas porque el tipo de actividades y de problemas de demostración propuestos no lo permitieron. Las demostraciones deductivas fueron producidas por estudiantes que desde un inicio mostraron un tipo de razonamiento deductivo y un buen dominio de conceptos previos. En la segunda actividad se presentó mayor variedad de demostraciones porque, además de la actividad, se aplicó una evaluación individual de cinco problemas de demostración. Destacó la presencia de todos los tipos de demostración a excepción del experimento crucial basado, el experimento crucial constructivo y el ejemplo genérico constructivo, predominando los tipos fallido, experimento crucial intelectual y el empirismo ingenuo inductivo, con una buena cantidad de demostraciones deductivas. En la actividad 3 se destacó de manera considerable las demostraciones tipo deductivo formal transformativo debido al tipo de problema y a la gran ayuda de visualización que se ofreció y que los estudiantes supieron aplicar inclusive en la evaluación de lápiz y papel que se hizo. Las demostraciones empíricas corresponden a uno de los grupos que menos avances alcanzó hacia el logro de habilidades de demostración de tipo deductivo. Las actividades 4 y 5 muestran un avance hacia las demostraciones deductivas basadas en propiedades geométricas y algebraicas generales con la ayuda de las demostraciones visuales propuestas en Cabri.

A continuación presentaremos ejemplos de algunos de los tipos de demostración más frecuentes analizadas en las actuaciones de los estudiantes de los siete grupos, incluyendo las evaluaciones cortas y acumulativas que se practicaron en el periodo transcurrido en el desarrollo de la unidad.

Ejemplo 1:

Actividad 1.2.3: Se pregunta sobre la verdad de la relación *sen(A) = cos (90 - A)*.

Respuesta de G27:



1.2.3. ¿Es verdad que sen(A) = cos (90 - A ? Si tu afirmación es verdadera demuéstrala, en caso contrario da un contra-ejemplo (un ejemplo donde la afirmación sea falsa)

Sen (A) = Cos (90 - A) Cos (90 - A) = Cos B Rta/ Si es igual.

Sen A = $\frac{C.O}{h}$ Cos B = $\frac{C.a}{h}$

Sen A = $\frac{6,5653 \text{ cm}}{9,7825 \text{ cm}}$ Cos B = $\frac{6,5653 \text{ cm}}{9,7825 \text{ cm}}$

Sen A = 0,6711 cm = Cos B = 0,6711 cm

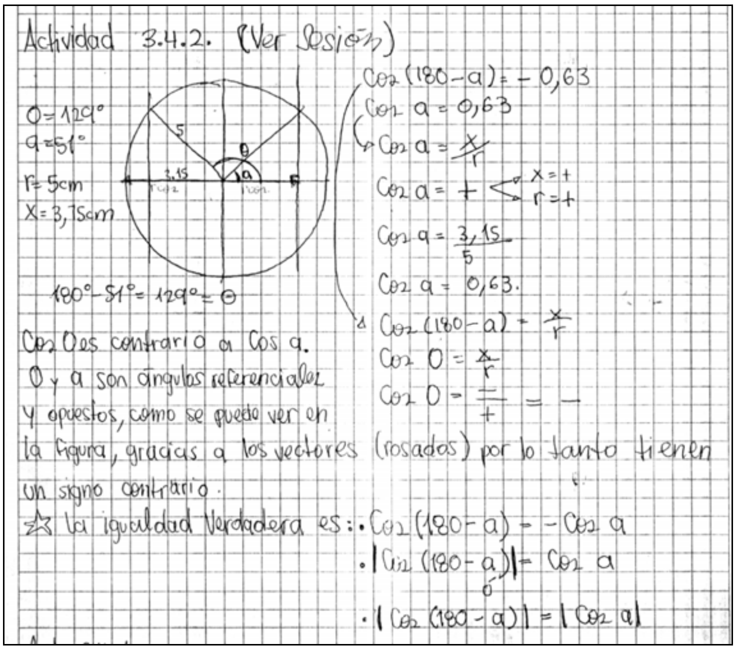
Usa las definiciones de seno y coseno estudiadas para reemplazar por los valores de los catetos e hipotenusa del triángulo rectángulo que en esos momentos tenía en la pantalla del computador y se basa en este único ejemplo, escogido sin ningún criterio, para justificar que la conjetura es verdadera. Por el uso exclusivo de un ejemplo escogido sin ningún criterio y basándose en esta percepción (los cocientes son iguales), y su afirmación de que la conjetura es verdadera porque éste es igual, decimos que este tipo de demostración corresponde a un Empirismo ingenuo inductivo (EII).

Ejemplo 2:

Actividad 3.4.2 Explorando y demostrando

¿Es verdad que $cos\ (180 - \alpha) = cos\ \alpha$? Si la igualdad es cierta demuéstrala, si es falsa refútala y encuentra una verdadera y demuéstrala.

Respuesta de C23:



Después de haber representado en Cabri los ángulos α y *180 -* α (teniendo en cuenta que α es agudo y por lo tanto sólo toma valores entre 0º y 90º), el estudiante toma el ejemplo que está en ese momento sobre la pantalla del computador y observa que los valores absolutos de las razones son iguales, pero los signos son diferentes, a partir de esto, utiliza la formula de seno y coseno para reemplazar por los valores de esas coordenadas y justificar el signo positivo del ángulo α, pero, para el ángulo θ (el estudiante lo representa con un símbolo parecido a un cero o a la vocal mayúscula o) simplemente se refiere a los signos en la razón determinando que es negativo; esto y lo que está viendo en el computador le permiten concluir que las razones son opuestas; luego se refiere a otra propiedad observada en la representación de los lados trigonométricos en la figura (los vectores rosados que dibujó en la hoja y nombró como *rcos*) para reafirmar que los signos son contrarios y decir cuales serían las conjeturas verdaderas, pero sin demostrarla como se había pedido en la actividad. Por el uso exclusivo de un ejemplo y las demostraciones basadas en propiedades observadas en el ejemplo se concluye que este tipo de demostración corresponde a un <u>Experimento crucial analítico</u>.

<u>Ejemplo 3:</u>

Actividad 2.3.1: Explorando, conjeturando y aprendiendo

Usa Cabri como ayuda para encontrar relaciones entre: *cos (A)* y *cos (-A)*

Respuesta del grupo G2C:

(1) I: *¿Cómo son coseno de A y coseno de –A?*

(2) G2C: *Iguales.*

(3) I: *Iguales, ¿cómo argumentaría matemáticamente eso?, ¿por qué?*

(4) G2C: *Porque el coseno de A es x sobre el radio, entonces, al depender de x, las dos tienen el mismo valor de x, y x siempre va a ser positivo, x positivo para este* [señala la coordenada *x* del ángulo *A* en el primer cuadrante], *como para este* [señala la coordenada *x* del ángulo -*A* en el cuarto cuadrante], *y como el radio siempre va ser positivo, tienen la misma distancia y el mismo ángulo* [señala los lados de los triángulos que forman los ángulo *A* y -*A*]

(5) I: *Sí, pero ahí está mirando un ángulo particular A en el primer cuadrante, ¿sucede lo mismo si el ángulo está en cualquier otro cuadrante?*

(6) G2C: *Sí* [mueve el punto *P* hacia el segundo cuadrante]

(7) I: *¿qué pasa ahí, por ejemplo?*

(8) G2C: *son negativos.*

(9) I: *¿y entonces?*

(10) G2C: *porque…es que están dependiendo de la misma x.*

(11) I: *ah*

(12) G2C: *Como dependen de la misma x, como dependen sólo de x y no de y, entonces las dos x, como el triángulo se pinta hacia x* [señala los triángulos congruentes que se forman entre las semirrectas de los ángulos *A* y –*A*, el eje *x* y la perpendicular por *P* al eje *x*], *siempre la x de A y –A va a ser la misma.*

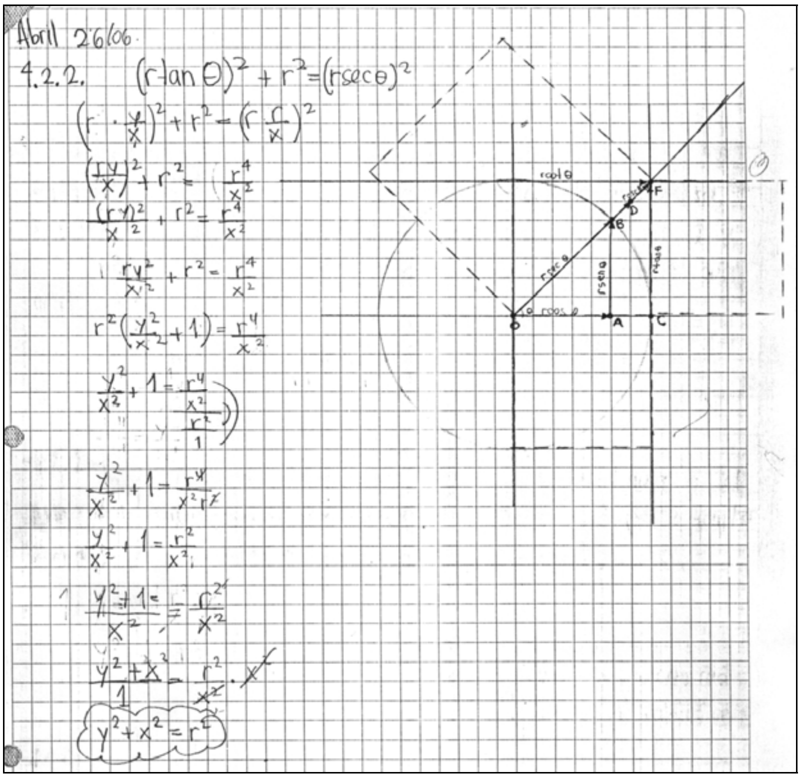
El grupo G2C utiliza un ejemplo de un ángulo *A* cualesquiera sin tener en cuenta el valor del ángulo si no las propiedades observadas en él, al ubicarlo inicialmente en el primer cuadrante. Con esta primera exploración del ejemplo aseguran que *cos (A)* y *cos (-A)* son iguales porque en ese caso la *x* es positiva y el radio siempre es positivo (no utilizan el valor específico de *x*), por lo tanto las distancias son positivas. Posteriormente ante la intervención de investigador analizan la relación en otro cuadrante y verifican que la relación sigue siendo verdadera y utilizan propiedades generales para su justificación. Este ejemplo se diferencia de un experimento crucial porque no utilizan valores específicos si no se refieren a generalidades observadas en los ejemplos explorados en Cabri, por lo tanto se considera un <u>Ejemplo genérico analítico</u>.

<u>Ejemplo 4:</u>

Actividad 4.2.2 Demostrando

Utiliza lo que acabas de aprender para demostrar, visualmente (en Cabri), geométricamente (con propiedades geométricas) y analíticamente (utilizando las definiciones de las razones para un ángulo en posición normal, las propiedades encontradas en esta actividad y en las anteriores) que: $(r\tan\theta)^2 + r^2 = (r\sec\theta)^2$.

Respuesta de C23:



C23 representa el “lado tangente” y el “lado secante” de un ángulo cualquiera. Esto le recuerda el Teorema de Pitágoras, según lo visto en la actividad 4.1.1 y le da confianza para ver que la conjetura es válida, luego reemplaza en la identidad planteada por las definiciones de tangente y secante en la circunferencia de radio *r*, utiliza las propiedades de las operaciones de los números reales (producto, cociente, potenciación, simplificación, factor común) y propiedades de una igualdad para llegar a otra igualdad conocida y aceptada en el punto 4.1.1 que identificaban con el Teorema de Pitágoras (los estudiantes cuando llegaban a esta igualdad manifestaban que la igualdad $x^2 + y^2 = r^2$ era válida porque ése esa el Teorema de Pitágoras). Vale la pena aclarar que se está aceptando esta respuesta como una <u>Demostración deductiva estructural formal</u>, de acuerdo al tema y a la secuencia de actividades que se desarrollaron y al tiempo que duró la experiencia, en donde fue bastante notorio el paso que se dio de un tratamiento geométrico con la ayuda de Cabri a un tratamiento analítico y algebraico que de una u otra manera son indispensables en la demostraciones trigonométricas.

Algunas conclusiones.

El análisis hecho a los procedimientos de resolución de las actividades, de las estrategias de razonamiento, de los errores y dificultades y de los tipos de demostraciones producidas por los grupos de estudiantes desde el inicio de la experimentación nos permiten afirmar que la unidad de enseñanza contribuyó a mejorar el nivel de las habilidades de demostración de los estudiantes, destacándose una tendencia de transición hacia la producción de demostraciones de un mejor nivel al que se habían ubicado en la evaluación diagnóstica: Los que menos progreso alcanzaron pasaron del empirismo ingenuo a la consideración del experimento crucial intelectual, recurriendo al uso de propiedades generales de las razones trigonométricas estudiadas y aprendidas en el transcurro de la experimentación. Los que mayores avances alcanzaron llegaron a la producción de demostraciones deductivas.

El análisis cualitativo de las producciones de los estudiantes, producto del desarrollo de las actividades propuestas, permitió el planteamiento de categorías emergentes de análisis que nos permitieron detectar doce procedimientos de resolución de actividades, observándose una transición de los procedimientos numéricos hacia los procedimientos analíticos. También se detectaron cinco estrategias de razonamiento, notándose en la mayoría de los grupos analizados, una transición desde un razonamiento empírico inductivo basado en el análisis de los datos de Cabri, hacia el uso de un razonamiento más deductivo apoyado fuertemente en la visualización de propiedades geométricas y analíticas.

Los errores y dificultades en su mayoría fueron surgiendo en el transcurso del desarrollo de determinada actividad y algunos de ellos muy propios de ésta por el tipo de actividad planteada.

Los estudiantes comprendieron la importancia de la demostración en matemáticas y fueron conscientes de sus capacidades y habilidades para la demostración. Igualmente se dieron cuenta de que mediante la exploración y el análisis de variantes e invariantes en Cabri podían producir sus propias conjeturas y demostrarlas. En este sentido, vimos que nuestra experimentación logró conectar la exploración con la demostración como lo expresa Hanna (2000), quien reconoce que lo que debemos hacer no es reemplazar la exploración por la demostración, sino hacer uso de ambas, pues son dos actividades independientes que se complementan y refuerzan la una con la otra: *La exploración conduce al descubrimiento, mientras que la demostración lleva a su confirmación.*

Dentro del diseño e implementación de nuestra unidad de enseñanza se tuvo el propósito de incluir la demostración en la clase de matemáticas para la promoción de la comprensión matemática (Hanna, 2000), por lo que las actividades apuntaban también a unos objetivos de aprendizaje que fueron tenidos en cuenta a la hora de su implementación, de las discusiones y de las evaluaciones realizadas (allí se indagaba acerca de los conceptos y propiedades estudiados, además de los problemas de demostración en donde también los conceptos debían estar aprendidos a la hora de la producción de una demostración correcta). Al revisar la evaluación acumulativa aplicada al final de la segunda actividad se evidenció que la mayoría de estudiantes resolvió bien los problemas de aplicación de los conceptos de las razones trigonométricas.

También se procuró que, en las discusiones con el profesor, los conceptos y propiedades quedaran bien definidos a partir de los descubrimientos que habían realizado los estudiantes en las diferentes exploraciones y análisis de variantes e invariantes en Cabri. Los errores y dificultades detectados se retomaron y se insistió en la necesidad de su corrección. Esto ayudó bastante para la formación de diferentes objetos mentales de los conceptos de las razones trigonométricas estudiadas y de su necesidad de comprensión para la demostración.

También se aprovecharon los momentos de discusión para insistir en las diferentes funciones de la demostración y en la necesidad de la comprensión de los conceptos y propiedades para la producción de demostraciones más deductivas. En este sentido como lo afirman varios investigadores como Arzarello, Olivero, Paola, y Robutti (2002), Laborde (2000) y Marrades y Gutiérrez (2000), el profesor jugó un papel muy importante en la insistencia de conectar las diferentes interacciones y relaciones que se dieron entre los procesos de construcción y demostración, entre las actuaciones con el computador y las justificaciones por medio de argumentos teóricos.

En cuanto al uso de Cabri, nuestra experimentación ratificó lo que ya varias investigaciones han comprobado en cuanto a que los ambientes de geometría dinámica favorecen la interacción entre construir y demostrar, entre actuar con el ordenador y justificar por medio de argumentos teóricos (Laborde, 2000). Vimos que las construcciones en Cabri permitieron conectar las representaciones aritméticas, geométricas, algebraicas y analíticas de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas, en donde se vio una transición de lo numérico hacia lo algebraico y de lo empírico a lo deductivo apoyados en la visualización y análisis de propiedades geométricas y analíticas producto de la exploración.

Referencias bibliográficas.

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). *A model for analiysing the transition to formal proofs in geometry.* Proceedings of the 22th PME Conference 2, 24-31.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri enviroments. *Zentralblatt dur Didaktik der Mathematik, 34*(3), 66-72.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils´ practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children Hodder & Stoughton* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *The Mathematics Teacher, 88*(1), 48-54.

Bell, A.W. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics* 7(1), 23-40.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-29.

Fiallo, J. (2006). *Enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de demostración.*, Memoria de investigación, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia.

Freudenthal, H. (2001). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (Ed.), Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados) (2ª edición). México D.F.: Departamento de Matemática Educativa.

Godino, J. D., & Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 7 - 10.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mahtematics., 44*, 5-23.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Student's proof schemes: Results from exploratory studies. En Schoenfeld, A.H., Kaput, J., & Dubinsky, E. (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. III, pp. 234-283). Providence, EE.UU: American Mathematical Society.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 151-161.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mahtematics., 44*, 25-53.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Roterdam, Holanda: Sense Publishers.

Marrades, R., & Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Anexo 1

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Actividad 2.1

2.1.1 ***Construyendo***

- Muestra los ejes de coordenadas (último botón: Mostrar los ejes).
- Nombra como A al origen del plano cartesiano.
- Ubica un punto C sobre el eje positivo de las x.
- Traza una circunferencia de radio $r = AC$ y centro en el origen A del sistema de coordenadas.
- Traza una semirrecta desde el origen A **sobre un punto** de la circunferencia.
- "Nombra" como P al punto de intersección de la semirrecta y la circunferencia.
- Desde el punto P traza una perpendicular al eje x.
- Desde el punto P traza una perpendicular al eje y.
- Dale estilo punteado (último botón: Punteado…) a las dos perpendiculares.

- Halla las coordenadas del punto *P(x, y)* (antepenúltimo botón: Coord. o Ecuación), utiliza cuatro cifras decimales.

2.1.2 ***Midiendo***

- Mide la longitud del radio $r = AP$ de la circunferencia.
- Marca el ángulo *CAP* (de ahora en adelante nos referiremos a él como el ángulo *A*).
- Mide la amplitud del ángulo *A*.

2.1.3 ***Aprendiendo***

Observa que el ángulo *A* está determinado por el eje positivo de las *x* que llamaremos lado inicial del ángulo y la semirrecta *AP* que llamaremos lado terminal del ángulo. Estos ángulos los llamaremos ***ángulos en posición normal***. Por convenio, si la semirrecta que determina el lado terminal del ángulo *A* gira desde el lado inicial en sentido contrario a las manecillas del reloj, decimos que el ángulo es positivo y si gira desde el lado inicial en sentido de las manecillas del reloj, decimos que es negativo.

2.1.4 ***Calculando***

- Calcula las siguientes razones para el ángulo *A* (utiliza cuatro cifras decimales). Toma los valores *x* e *y* de las coordenadas del punto *P*:

$$sen\ A = \frac{y}{r}, \quad \cos A = \frac{x}{r}, \quad \tan A = \frac{y}{x}$$

$$\csc A = \frac{r}{y}, \quad \sec A = \frac{r}{x}, \quad \cot A = \frac{x}{y}$$

- Nombra cada razón con su respectivo nombre (*sen A, cos A, tan A, csc A, sec A, cot A*).

Actividad 2.2

2.2.1 ***Conjeturando y demostrando***

- Mueve la semirrecta *AP* de tal manera que el valor del ángulo *A* sea cercano a 0º.
- Mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj (sentido positivo) la semirrecta *AP* alrededor de la circunferencia, hasta completar una vuelta.

¿Qué sucede con los valores de las seis razones a medida que varía el ángulo *A*?**; Escribe una conjetura de lo encontrado.**
¿Esta conjetura es verdadera para cualquier ángulo *A*?, ¿Por qué?

2.2.2 ***Conjeturando y demostrando***

- Mueve la semirrecta *AP* de tal manera que el valor del ángulo *A* sea cercano a 0º.
- Mueve en sentido positivo la semirrecta *AP* alrededor de la circunferencia, hasta completar una vuelta.

Analiza los signos de las seis razones trigonométricas en cada uno de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. **Plantea un conjetura al respecto y explica *por qué* es verdadera**

2.2.3 ***Conjeturando y demostrando***

- Mueve el punto *C* y observa los valores de las razones.

¿Qué sucede con los valores de las seis razones a medida que varía el radio *r*?**; Escribe una conjetura de lo encontrado.**
¿Esta conjetura es verdadera para cualquier ángulo *A*?, ¿Por qué?

2.2.4 ***Conjeturando y demostrando***

- Mueve el punto *C* hasta el número 1 del eje *x*.

Compara las razones *sen A* y *cos A* con las coordenadas del punto *P*, escribe una conjetura y explica *por qué* **es verdadera.**

2.2.5 ***Conjeturando y demostrando***

- Mueve la semirrecta *AP* de tal manera que el valor del ángulo *A* sea cercano a 0º.
- Mueve en sentido positivo la semirrecta *AP* alrededor de la circunferencia, hasta completar una vuelta.

Plantea una conjetura que determine todos los posibles valores que toma cada una de las razones y justifícala matemáticamente teniendo en cuenta las propiedades de los números reales y de la división o cociente entre dos cantidades.

2.2.6 ***Conjeturando y demostrando***

¿Qué ocurre cuando el ángulo *A* es igual a 0º, 90º, 180º, 270º y 360º?, Explica lo que ocurre justificando con argumentos matemáticos.

2.2.7 ***Discutiendo y comunicando***

Discute lo encontrado en las actividades con tus compañeros(as) de clase y el (la) profesor(a).

Actividad 2.3

2.3.1 ***Explorando, conjeturando y aprendiendo***

- Usa Cabri como ayuda para encontrar relaciones entre:

a) *sen (A)* y *sen (-A)*
b) *cos (A)* y *cos (-A)*
c) *tan (A)* y *tan(-A)*
d) *cot (A)* y *cot(-A)*
e) *sec (A)* y *sec (-A)*
f) *csc (A)* y *csc(-A)*

¿Las relaciones encontradas son válidas para todo ángulo *A*?

2.3.2 ***Explorando, conjeturando y demostrando***

Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos *A*, *A-90*, *90-A* y demuéstralas utilizando propiedades matemáticas. Utiliza Cabri para realizar construcciones auxiliares que te permitan “ver” las relaciones y propiedades matemáticas.

2.3.3 ***Conjeturando y demostrando***

¿Las propiedades encontradas para las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo se cumplen para los ángulos en posición normal?, ¿por qué?.

2.3.4 ***Discutiendo y comunicando***

Discute lo encontrado en las actividades con tus compañeros(as) de clase y el (la) profesor(a).

Actividad 2.4

Completa el siguiente mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas de las razones trigonométricas de tal manera que tus compañeros(as) entiendan todo lo que has aprendido a través de él.