

# **Análise do domínio de Conceitos Trigonométricos: Estudo exploratório realizado com alunos do ensino básico ao ensino superior de escolas de Beja.**

Ana M. Figueiredo Antunes<sup>1</sup>, Ricardo Luengo González<sup>2</sup>

## **Resumo**

No presente artigo pretendemos mostrar os resultados de um estudo exploratório realizado com alunos de diferentes níveis de ensino, do Básico ao Superior, sobre o domínio de conceitos trigonométricos.

Este estudo dividiu-se em duas partes. Na primeira elaborámos e aplicámos um instrumento de pesquisa: um teste. Na segunda parte procedemos ao tratamento e análise de dados com o recurso ao programa estatístico “SPSS (vs 8.0)” e utilizando a técnica de análise de conteúdo nas questões de resposta aberta.

Os resultados desta investigação apresentam-se organizados em três vertentes:

- Relativa aos conceitos que os alunos demonstraram dominar;
- Relativa à utilização de esquemas/representações nas respostas;
- Relativa às opiniões expressas pelos alunos sobre a importância da aprendizagem da Trigonometria e sua utilidade.

No final apresentamos sugestões de temas para possíveis trabalhos de investigação que emanaram da realização e das conclusões deste estudo exploratório.

## **Abstract**

## **1. INTRODUÇÃO**

Existe a ideia generalizada dos docentes de Matemática, resultante da sua prática profissional, de que quando leccionam o tema *Trigonometria*, nos diferentes níveis de ensino, os alunos demonstram dificuldades na sua aprendizagem. Os antigos alunos chegam mesmo a referir este assunto como algo bastante complicado, até mesmo traumático e que poderá ter contribuído para uma postura negativa relativamente a esta disciplina. Não nos parece que exista uma razão de fundo, relativa ao conteúdo, que possa justificar tal atitude de pânico por parte dos estudantes e antigos estudantes. A Trigonometria sugere a resolução de problemas históricos perfeitamente actuais, permite estabelecer as tão desejáveis ligações com outras disciplinas, como ainda pode ajudar a encontrar uma grande variedade de desafios do quotidiano cuja base matemática é simples e, em muitos casos, único.

Focámos o nosso estudo na compreensão de conceitos trigonométricos, revelada por alunos de diferentes níveis de ensino e contextualizámo-lo a uma realidade geográfica. Os conceitos são a essência do conhecimento matemático e os alunos só podem dar significado à matemática se compreenderem os seus conceitos e significados ou as interpretações destes (NCTM,1991;pp 262).

Foi na forma como o domínio de conceitos trigonométricos evolui relativamente ao nível de ensino a que os alunos pertencem que baseamos a realização deste trabalho, de

---

<sup>1</sup> Aluna do Curso de Doutoramento do Dpto Didáctica de las CC. Experimentales y de las Matemáticas. Docente da Escola Superior de Educação de Beja.

<sup>2</sup> Dpto. Didáctica de las CC. Experimentales y de las Matemáticas.

carácter exploratório. Este visa analisar o domínio de conceitos trigonométricos revelados por alunos de diferentes níveis de ensino, em escolas de Beja.

## 2. O PROBLEMA EM ESTUDO

De uma forma geral, no currículo português actual da disciplina de Matemática, os alunos iniciam a aprendizagem da trigonometria, com o estudo dos conceitos fundamentais de trigonometria no triângulo rectângulo, no final do 9º ano de escolaridade com cerca de 14 anos de idade. Retomam o seu estudo no 11º ano, com aproximadamente 16 anos, onde é introduzido o estudo do círculo trigonométrico. Finalmente, no 12º ano de escolaridade, com 17 anos de idade, abordam o estudo das funções trigonométricas.

Pretendemos, com este estudo, averiguar a forma como os mesmos conceitos trigonométricos básicos vão evoluindo de acordo com o nível de ensino a que os alunos pertencem.

O presente estudo visa, portanto, abordar o seguinte problema:

*Em que medida o domínio de conceitos trigonométricos, revelado por alunos de escolas de Beja, do 9º ano do Ensino Básico ao 2º ano do Ensino Superior, está dependente do nível de ensino/ano a que pertencem?*

Para definirmos e especificarmos melhor o problema que levantámos, enunciámos três questões.

1ª) Como varia o domínio de conceitos trigonométricos, revelado pelos alunos dos diferentes anos de escolaridade?

Com a perspectiva de estudarmos e compararmos o domínio de conceitos trigonométricos previamente escolhidos, considerámos importante, por um lado, inquirir alunos na fase de iniciação ao estudo da trigonometria e por outro, questionar indivíduos que não se encontram a estudar directamente este assunto há algum tempo.

2ª) Que influência poderá ter o esboço de esquemas/representações no desempenho dos alunos, dos diferentes níveis de ensino, na resolução de problemas trigonométricos?

Quando os alunos são confrontados com a resolução de um problema trigonométrico, por vezes, recorrem a representações através de esquemas, que podem contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos que lhe estão subjacentes.

3ª) Qual a opinião que os alunos, que frequentam os diferentes anos de escolaridade, transmitem sobre a importância e utilidade do estudo da Trigonometria?

Existe a ideia, socialmente generalizada, de que a trigonometria é um assunto de extrema dificuldade e que só existe para a estudarmos na aula de Matemática. Parece haver, na maioria das vezes, uma ausência na ligação entre os conceitos mais teóricos e a resolução de problemas da vida real.

Para respondermos às questões anteriores, enunciámos as seguintes intenções, que serviram de guião ao nosso estudo:

-Analisar e comparar o domínio de conceitos trigonométricos, revelado pelos alunos do Ensino Básico, Secundário e Superior;

-Categorizar o tipo de esquemas/representações apresentados e verificar se a presença destes, nas respostas dadas pelos alunos dos diferentes níveis de ensino, influencia o seu desempenho na resolução de problemas trigonométricos.

-Analisar e categorizar as opiniões dos alunos, dos diferentes anos lectivos, relativamente à importância e utilidade do estudo da trigonometria.

### 3. SITUAÇÃO ACTUAL DO TEMA

A aprendizagem da Matemática com o suporte de conhecimentos de história da mesma, tem sido recomendada nos novos programas e também objecto de estudo por parte de alguns investigadores. No que respeita à aprendizagem da trigonometria, **Linardakis** e **Costa** realizaram estudos onde são efectuadas transposições didácticas, utilizando aspectos da *história da trigonometria*.

A utilização de *materiais manipuláveis* como suporte da aprendizagem, ou como elemento de comparação entre ambientes de aprendizagem sem o seu recurso e ambientes de aprendizagem com o seu recurso, é estudada pela maioria dos investigadores que se debruçaram sobre a aprendizagem da trigonometria. **Grabovskij (1971)**, utilizou materiais de origem cinemática; **Szetela (1979)**, calculadora; **Dugdale (1990)**, **Blackett (1991)**, **Wenzelburger** e **Carreira (1992)**, utilizaram o computador. Em todos os estudos, a utilização de materiais revelou-se uma das ferramentas fundamentais e facilitadoras da aprendizagem da trigonometria.

A análise bibliográfica efectuada permitiu-nos identificar dois sub-temas no estudo da aprendizagem da trigonometria: **Grabovskij (1971)**, **Dugdale (1990)**, **Blackett (1991)**, **Wenzelburger (1992)**, **Carreira (1992)** e **Doerr (1994)** estudaram a aprendizagem das *Funções Trigonómicas*; **Szetela (1979)**, **Brazier (1979 e 1982)**, **Costa (1995)** e **Pritchard (1999)** centraram os seus estudos na aprendizagem das *Razões Trigonómicas*.

**Brazier (1979 e 1982)** e **Pritchard (1999)** são aqueles que mais se aproximam do tema deste trabalho já que estudaram as *Estruturas Conceptuais e Representações* reveladas pelos alunos na aprendizagem de conceitos trigonométricos simples. Pritchard verificou que os alunos recorrem a representações, na resolução de problemas trigonométricos elementares, mas não recorrem a estas na fase da manipulação simbólica.

Para todos os autores consultados, é comum o facto de que os alunos revelam *dificuldades de aprendizagem* no estudo da trigonometria.

Parece-nos que o tema deste trabalho de investigação não se encontra muito estudado, existindo apenas estudos de caso, de situações pontuais. A vertente mais estudada diz respeito à utilização de computadores, como ferramenta auxiliadora e motivadora do estudo da trigonometria, já que se trata de um assunto considerado, socialmente, de cariz negativo.

### 4. METODOLOGIA

A metodologia utilizada na realização deste estudo exploratório compreendeu a passagem por duas fases:

**Primeira fase:** Caracterização da amostra, construção e aplicação de um instrumento de pesquisa: um teste.

**Segunda fase:** Tratamento e análise de dados.

#### **4.1. Caracterização da amostra**

Como pretendíamos analisar e comparar o domínio dos conceitos trigonométricos revelados pelos alunos dos diferentes níveis de ensino, considerámos importante participarem, neste estudo exploratório, alunos do 9º ano do Ensino Básico, uma vez que é neste ano lectivo que se introduz o estudo da trigonometria, alunos do Ensino Secundário do 11º e 12º ano, já que é nestes que surge novamente o estudo deste tema nos programas oficiais e alunos que já se encontram no Ensino Superior, com a intenção de verificarmos se estes conceitos introdutórios são esquecidos quando deixam de frequentar o Ensino Secundário. Escolhemos inquirir alunos do 1º e 2º ano do Ensino Superior, que frequentassem cursos nos quais este assunto não figurasse de um modo explícito nos conteúdos programáticos das diferentes disciplinas que constituem o plano de estudos, com o objectivo de averiguar até que ponto estes conhecimentos são esquecidos/recordados ao longo dos anos.

Por razões de ordem geográfica, escolhemos alunos que frequentassem escolas de Beja, que é uma cidade situada na região sul de Portugal.

Quanto à amostra, inquirimos uma turma de cada nível de ensino, ou seja, cinco turmas. Tivemos também a preocupação de escolher turmas cujo rendimento dos alunos se pautasse por um nível médio.

#### **4.2. Construção e aplicação do teste**

Em primeiro lugar, com a finalidade de limitarmos o campo conceptual - Conceitos Trigonométricos - seleccionámos os seguintes conceitos, retirados do programa 9º ano, e que de um modo explícito ou implícito estão presentes nos programas dos outros anos do Ensino Secundário.

**Conceito 1** – Triângulos rectângulos semelhantes.

**Conceito 2** – Razão trigonométrica de um ângulo agudo.

**Conceito 3**– Seno de um ângulo agudo.

**Conceito 4**– Co-seno de um ângulo agudo.

**Conceito 5**– Tangente de um ângulo agudo.

**Conceito 6**- Razões trigonométricas de ângulos complementares.

Optámos por estes porque são aqueles que introduzem o estudo da trigonometria.

A partir destes, elaborámos um instrumento de pesquisa: um teste.

Como pretendíamos fazer um estudo exploratório sobre o domínio dos conceitos trigonométricos, atrás referidos, revelado por alunos de diferentes níveis de ensino, pareceu-nos pertinente o recurso a um teste escrito igual para todos.

Na construção do teste consideramos diferentes tipos de questões:

### De caracterização:

- **Grupo I** - Neste grupo inquirimos os indivíduos sobre elementos de caracterização como a escola, o agrupamento, a idade, o sexo e o ano, que foram i considera como variáveis independentes neste estudo.

### De escolha múltipla:

- **Grupo II** - O tipo de questões que compõe este grupo, constituído por seis perguntas de escolha múltipla e cada uma destas é formada por quatro possíveis opções de resposta, permite recolher a informação exacta que se pretende e, ao mesmo tempo, diagnosticar possíveis fontes de erro a partir das respostas dadas às alternativas falsas.

### De resposta aberta:

- **Grupo III** - constituído por exercícios e problemas, cujo objectivo principal é obter um lado de um triângulo rectângulo conhecido outro lado e um ângulo agudo. Tivemos a preocupação de apresentar problemas onde aparecessem figuras que servissem de suporte para a resposta do aluno e outros em que o aluno teria de construir o seu esquema, caso considerasse importante para a resolução do problema. Considerámos, por um lado, problemas que traduzissem situações reais e por outro, problemas meramente abstractos.
- **Grupo IV, pergunta 1** (questão de desenvolvimento). Nesta questão pretendíamos que os alunos descrevessem os conceitos de seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo, o que nos poderá permitir obter indicadores da possível evolução relativamente ao domínio dos conceitos trigonométricos revelados, em função do ano a que pertenciam.
- **Grupo IV, pergunta 2** (questão de opinião). O objectivo principal desta questão é indagar os alunos sobre a sua opinião relativamente à utilidade do estudo da trigonometria.

Em cada uma das perguntas, do segundo ao quarto grupo, estão implícitos um, ou mais, dos seis conceitos considerados.

Por exemplo, na **pergunta 1 do grupo IV**,

*“Como explicaria a um colega a definição de  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  e  $\tan \alpha$ , sendo  $\alpha$  um ângulo agudo?”*

considerámos os conceitos 3, 4 e 5.

Contudo, na **pergunta 2 do grupo III**,

*“Um avião voa a 600 m de altura e, do aeroporto, vê-se com um ângulo de  $35^\circ$  relativamente à horizontal. A que distância se encontra o avião do aeroporto?”*

consideramos apenas o conceito 3.

Apresentamos, em seguida um quadro resumo dos conceitos contidos nas diferentes questões do teste.

Perguntas	Conceito1	Conceito2	Conceito3	Conceito4	Conceito5	Conceito6
II-1						×
II-2		×				
II-3						×
II-4	×	×				
II-5		×				
II-6	×				×	
III-1.1				×		
III-1.2					×	
III-2			×			
III-3			×			
III-4				×		
III-5					×	
IV-1			×	×	×	

**Conceito 1-** Triângulos rectângulos semelhantes.

**Conceito 2-** Razões trigonométricas de ângulos agudos.

**Conceito 3-** Seno de um ângulo agudo.

**Conceito 4-** Co-seno de um ângulo agudo.

**Conceito 5-** Tangente de um ângulo agudo.

**Conceito 6-** Razões trig. De ângulos complementares.

Fig1- Presença dos 6 conceitos nas diferentes perguntas.

A versão definitiva do teste foi obtida a partir de um teste provisório inicial que foi depois analisado por professores com experiência nesta área.

Consequentemente aplicámos o teste definitivo à amostra escolhida. Durante a resolução do teste, os alunos usaram calculadoras científicas para obterem os valores das razões trigonométricas de ângulos agudos.

### 4.3. Tratamento de dados

Depois de criadas e definidas as variáveis, as independentes, do grupo I e as dependentes dos restantes grupos, foi construída uma base de dados. A partir desta elaboraram-se tabelas e gráficos que serviram de suporte para o tratamento de dados. Na leitura e na análise dos dados foram utilizadas técnicas tradicionais de estatística como, por exemplo, análise de frequências absolutas e relativas e o cruzamento de variáveis, com recurso a um programa de estatística (SPSS).

Para o tratamento das questões de desenvolvimento e de opinião recorreremos à análise de conteúdo.

#### 4.3.1. Identificação da Amostra

Responderam ao teste 88 alunos de 5 turmas de diferentes níveis de ensino. Uma turma do Ensino Básico-9º ano (com 17 alunos), duas turmas do Ensino Secundário- uma do 11º ano (com 22 alunos) e outra do 12º ano (com 14 alunos) e duas turmas do Ensino Superior - uma do 1º ano (com 21 alunos) e outra do 2º ano (com 14 alunos).

Dos 88 alunos inquiridos, 63 são do sexo feminino e 25 do sexo masculino. Em função do ano a que pertencem os alunos, a variável sexo, apresenta-se distribuída da seguinte forma:

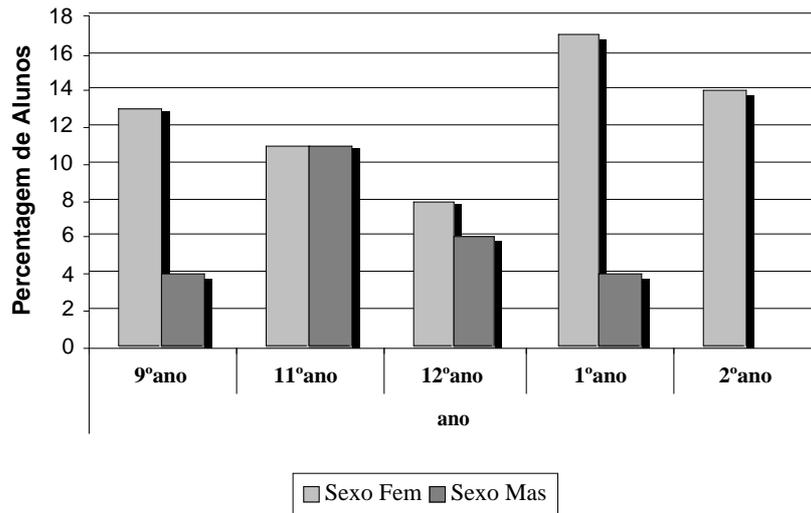


Fig. 2- Distribuição do sexo dos indivíduos dos nos diferentes anos

#### 4.3.2. Caracterização das variáveis

Das diferentes variáveis independentes consideradas, e tendo em consideração os objectivos deste estudo, a mais importante foi a variável ano.

Quanto às variáveis dependentes, obtidas directamente das respostas às diferentes perguntas, estas permitiram criar novas variáveis, tendo em conta os diferentes conceitos presentes nas diferentes perguntas, da seguinte forma:

##### 1º Estabelecimento de condições elementares.

Com base nas variáveis correspondentes às perguntas do teste onde cada conceito está presente, estabelecemos, para cada uma delas, uma igualdade entre as variáveis e as respectivas modalidades que traduzem o domínio do conceito respectivo.

##### 2º Criação de condições compostas.

A partir das condições elementares e com o recurso a operadores lógicos, de acordo com o conceito que pretendemos definir, criámos novas condições que traduzem as novas variáveis para cada um dos conceitos.

Apresentamos, em seguida, como exemplo, as condições definidas para os conceitos trigonométricos 1 e 3.

**Conceito 1** – Triângulos rectângulos semelhantes.

Condição composta:

*Se na pergunta 4 do grupo II respondeu D e na pergunta 6 do grupo II respondeu C, é registado “1” nos alunos que a verificam e consideramos que estes “dominam” este conceito.*

**Conceito 3** – Seno de um ângulo agudo.

Condição composta:

Se na pergunta 2 do grupo III regista “identifica e define” ou “identifica e calcula” ou “certo”, na pergunta 3 do grupo III regista “identifica e define” ou “identifica e calcula” ou “certo” e na pergunta 1 do grupo IV regista a categoria 3 indicador 11 ou a categoria 3 indicador 12, é registado “1” nos alunos que a verificam e consideramos que estes “dominam” este conceito.

### 3º Registo de Frequências.

Introduzimos a condição composta para cada nova variável no programa de tratamento estatístico de dados e obtivemos os registos dos alunos, de cada ano, cujas respostas dadas no teste a verificaram.

Assim, obtiveram-se 6 novas variáveis dependentes, designadas por **Conceito1**, **Conceito2**, **Conceito3**, **Conceito4**, **Conceito5** e **Conceito6**.

## 5. ANÁLISE DE DADOS

Atendendo aos propósitos deste estudo, para efectuarmos a análise de dados, considerámos três vertentes, uma relativa aos conceitos que os alunos dos diferentes anos demonstraram dominar, outra relativa á utilização de esquemas/representações nas respostas dadas pelos alunos dos diferentes anos e outra relativa às opiniões expressas pelos diferentes alunos sobre a pertinência da aprendizagem de trigonometria.

### 5.1. Relativa aos conceitos que os alunos demonstraram dominar.

A principal intenção deste estudo assentou na análise e comparação do domínio de conceitos trigonométricos revelado pelos alunos dos diferentes anos.

Como suporte da análise, apresentamos a tabela seguinte, que contém a descrição das percentagens de alunos, do 9º, 11º, 12º, 1º e 2º ano, que registaram cada um dos conceitos, relativamente ao número de alunos inquiridos de cada ano e aonde aparecem descritas, também, as médias aritméticas das percentagens relativas a cada conceito nos diferentes anos.

Conceitos	9ºano	11º ano	12ºano	1ºano	2ºano	Médias das percentagens
1)Triâng. rect. Semelhantes	0%	9%	50%	29%	21%	22%
2)Razão trig. de um âng. agudo	6%	9%	50%	5%	7%	15%
3)Seno de um âng. agudo	59%	59%	7%	5%	7%	27%
4)Co-seno de um âng. agudo	59%	77%	86%	43%	7%	54%
5)Tangente de um âng. agudo	6%	27%	43%	19%	7%	34%
6)Razões trig. de âng. Comp.	0%	0%	93%	0%	7%	20%

Fig 3- Percentagens registadas para cada conceito e nos diferentes anos.

Observando os valores obtidos para cada ano, verificamos que:

Os alunos do 9º ano apresentaram percentagens mais elevadas relativas ao domínio dos conceitos de seno e co-seno de um ângulo agudo. Todavia, salientam-se os conceitos de triângulos rectângulos semelhantes e de razões trigonométricas de ângulos complementares que não foram registados por nenhum dos alunos deste ano. O conceito de tangente de um ângulo agudo recolhe uma percentagem bastante baixa se a compararmos com as percentagens concernentes às outras razões trigonométricas. Por último, o conceito de razão trigonométrica de um ângulo agudo, é um domínio pouco assimilado pelos alunos do 9º ano.

Os alunos do 11º ano apresentaram a percentagem máxima no conceito de co-seno de um ângulo agudo e a mínima (nenhum registo) no conceito de razões trigonométricas de ângulos complementares. Quanto aos conceitos de razões trigonométricas de ângulos agudos e de triângulos rectângulos semelhantes (conceito1 e conceito2), verificamos um índice percentual muito baixo.

No que concerne ao 12º ano, verificamos percentagens próximas dos 50%, ou acima destes, em quase todos os conceitos. A excepção, verifica-se no conceito de seno de um ângulo agudo (conceito3) o que motivou este resultado foi a resposta à pergunta 2 do grupo III, onde, quase todos os alunos deste ano, consideraram a tangente para a resolução do problema.

No que respeita ao 1º ano, verificamos, com a leitura da tabela, que nenhum dos conceitos apresenta níveis percentuais acima dos 43%, o que é revelador de um baixo domínio dos conceitos trigonométricos tratados neste estudo. Sobressai o conceito de co-seno de um ângulo agudo relativamente ao registo com a máxima percentagem. Com a mínima salienta-se o conceito de razões trigonométricas de ângulos complementares.

A turma do 2º ano revelou índices percentuais muito baixos, com o máximo registo de 21%, respeitante ao conceito de triângulos rectângulos semelhantes. Quanto aos restantes conceitos, apresentaram um domínio de conceitos equivalente, com valores percentuais na ordem dos 7%.

Relativamente às médias dos conceitos obtidas e registadas na tabela, verificamos que, numa primeira leitura, estas levam-nos a concluir que os valores percentuais são bastante baixos, o que é revelador de um fraco domínio dos conceitos estudados. A ordenação decrescente destas médias, leva-nos a verificar que é o conceito de “co-seno de um ângulo agudo” (conceito4) que regista a maior média, seguida de “tangente de um ângulo agudo” (conceito5), de “seno de um ângulo agudo” (conceito3), de “triângulos rectângulos semelhantes” (conceito1), de “razões trigonométricas de ângulos complementares” (conceito6) e por último de “razão trigonométrica de um ângulo agudo” (conceito2). Salienta-se, mais uma vez, o registo de valores mais elevados nos conceitos 3, 4 e 5 talvez porque estes permitem a mecanização de fórmulas.

Com o objectivo de comparar as tendências de evolução, ou não, do domínio de conceitos ao longo dos 5 anos, apresentamos, ao lado, seis gráficos (um para cada conceito), onde a cada ano fazemos corresponder a percentagem de alunos que registaram cada conceito, cuja leitura facilita a visualização das referidas tendências.

Na generalidade, é do 11º para o 12º ano que se verifica o maior incremento, excepto para o conceito 3. O conceito de “seno de um ângulo agudo” foi aquele que registou a menor percentagem no que se refere aos alunos do 12º ano e não encontramos explicação para isto.

Do 9º para o 11º ano, o domínio de conceitos cresce (ou mantém-se constante, como é o caso do conceito 6).

Na passagem do 12º ano para o 1º ano os valores percentuais decrescem sempre.

Do 1º para o 2º ano, as percentagens relativas aos conceitos 1, 4 e 5 decrescem, sendo o conceito de “co-seno de um ângulo agudo” aquele que apresenta um declínio mais acentuado. Relativamente aos conceitos 3 e 6 registam um ligeiro aumento nestes anos.

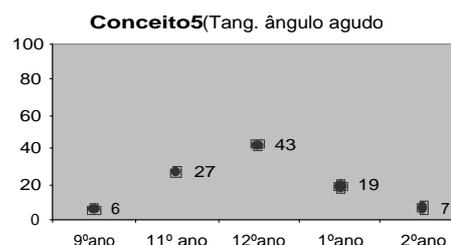
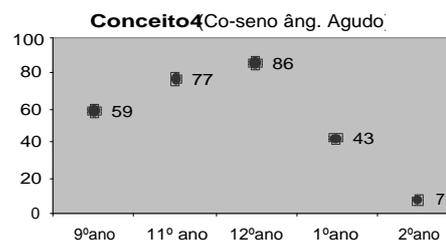
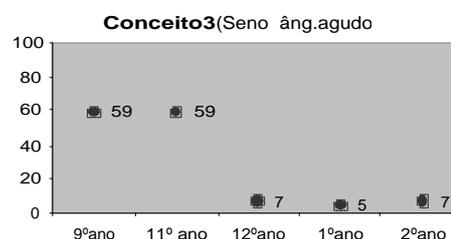
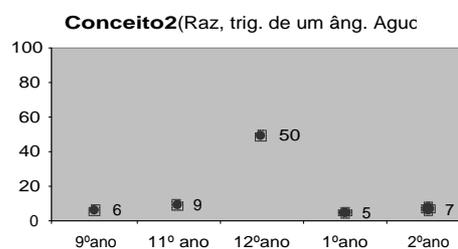
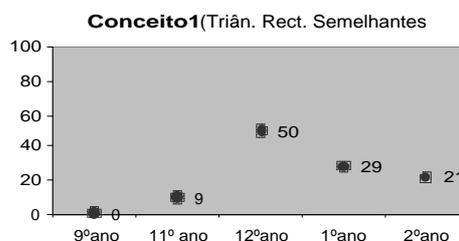
A partir do estudo realizado, podemos concluir que o domínio de conceitos trigonométricos depende do ano lectivo a que pertencem até ao 12º ano, quando abordamos os alunos do 1º e 2º ano, o nível de conhecimentos neste domínio diminui significativamente ao longo dos anos.

## 5.2. Relativa à utilização de representações (esquemas) nas respostas.

Com a pretensão de categorizarmos o tipo de esquemas/representações apresentados e de verificarmos se a presença destes, nas respostas dadas pelos alunos dos diferentes níveis de ensino, influencia o seu desempenho na resolução de problemas trigonométricos, dividimos a nossa análise em duas vertentes.

Numa primeira aproximação analisámos as respostas dadas à pergunta 1 do grupo IV, de desenvolvimento, que enunciámos da seguinte forma:

*“Como explicarias a um colega teu os conceitos de seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo?”.*



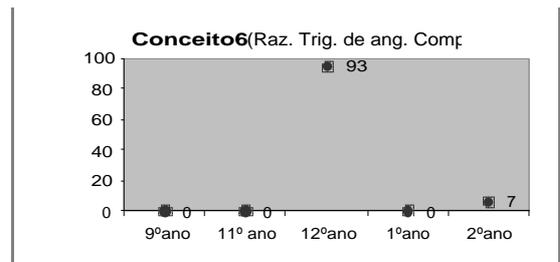


Fig.4 - Variação do domínio dos conceitos pelos diferentes alunos.

Numa segunda abordagem, analisámos os esquemas que os alunos construíram e apresentaram como suporte na resolução de problemas trigonométricos que não continham qualquer tipo de esquema no enunciado.

As categorias que propusemos para as respostas, dadas pelos alunos dos diferentes anos, à pergunta de desenvolvimento encontram-se descritas na tabela seguinte. Salientam-se as duas perspectivas que a trigonometria possui, a geométrica, nas categorias 1 e 2 e a algébrica, nas categorias 3, 4 e 5.

Categorias	Indicadores
C1-Desenha um triângulo rectângulo	I1-Apresenta o triângulo com um dos catetos na horizontal; I2-Indica uma marca identificativa do ângulo recto; I3-Indica um ângulo agudo; I4-Indica o cateto oposto ao ângulo agudo; I5-Indica o cateto adjacente ao ângulo agudo; I6-Indica a hipotenusa.
C2-Desenha o círculo trigonométrico	I7-Representa um ângulo do 1º quadrante; I8-Indica o eixo do seno; I9-Indica o eixo do co-seno; I10-Indica o eixo da tangente;
C3-Define seno de um ângulo agudo	I11- Usa linguagem corrente; I12- Usa linguagem matemática;
C4-Define co-seno de um ângulo agudo	I11- Usa linguagem corrente; I12- Usa linguagem matemática;
C5-Define tangente de um ângulo agudo	I11- Usa linguagem corrente; I12- Usa linguagem matemática;
C6-Outro tipo de observações	

Fig. 5- Categorias e indicadores na pergunta 1 do grupo IV.

No que concerne à primeira categoria, “desenha um triângulo rectângulo”, que se enquadra no âmbito geométrico da trigonometria, foi no 12º ano que se registou a maior percentagem relativa aos alunos inquiridos deste ano.

Ainda dentro da perspectiva geométrica apresentamos a categoria 2 cujos registos figuraram apenas no 12º, 1º e 2º ano. Um dado interessante é verificar que apesar de ser no 12º ano que se introduz o estudo do círculo trigonométrico, nenhum aluno deste ano o representa como suporte para a definição das razões trigonométricas.

Quanto às categorias 3, 4 e 5, a maior percentagem de registos foi apresentada pelos alunos do 9º, 11º e 12º ano, no indicador 12, “usa linguagem matemática”. No que concerne ao ensino superior, os alunos do 1º ano registaram percentagens inferiores às dos alunos do ensino básico e secundário e os alunos do 2º ano não apresentaram qualquer tipo de registo.

Salienta-se a presença de um número reduzido de registos no indicador 11.

Na categoria 6 o número de outro tipo de registos é muito pouco significativo.

Em termos gerais, nesta pergunta, sobressaiu a perspectiva algébrica em detrimento da geométrica, já que os índices percentuais associados a esta perspectiva revelaram-se mais elevados (C3, C4 e C5), o que é revelador da rara tendência para a utilização de representações geométricas.

No que concerne às questões que apelam ao esboço de esquemas, verificámos que, de um modo geral, nas respostas dadas a estes problemas, a presença de representações correctas está associada a respostas correctas. Em contrapartida, associadas às respostas erradas estão ou o esboço de esquema incorrecto, isto é, que não seja representativo da situação problemática ou a ausência de esquema.

Salienta-se o fraco desempenho dos alunos do 12º, 1º e 2º ano na pergunta 2, devido à presença de esquemas incorrectos. Na pergunta 3 sobressai a presença de esquema correcto associado a resposta errada, nas respostas dadas pelos alunos do 2º ano, que os que revelaram o desempenho mais fraco nesta questão.

Foram os alunos do 9º ano que recorreram mais frequentemente ao uso de esquemas, o que terá contribuído para um melhor desempenho em relação ao domínio de conceitos nestas perguntas.

Na generalidade, a percentagem de alunos dos diferentes anos, que esboçaram um esquema e resolveram os problemas correctamente decresceu ao longo dos 5 anos, o que pode ter sido o resultado de duas situações diferentes, ou a percentagem de alunos que acertaram os problemas diminuiu ao longo dos anos, ou a necessidade de recorrer a esquemas diminuiu com o decorrer dos anos.

Dos resultados observados, podemos concluir que geralmente a presença de esquemas contribui para uma melhor interpretação do problema e está associada a respostas correctas, apesar de terem existido situações em que os alunos não necessitaram de recorrer a esquemas para resolver o problema correctamente.

### **5.3. Relativa às opiniões expressas pelos alunos sobre a aprendizagem da trigonometria.**

Com a questão de opinião, pretendíamos analisar as ideias que os alunos, dos diferentes anos, possuem face às razões que levam à aprendizagem da trigonometria e à utilidade que estes conhecimentos podem ter na resolução de situações problemáticas do dia-a-dia.

Assim sendo, categorizámos as respostas dos alunos, tomando em consideração as opiniões relacionadas com factores científicos e as opiniões ligadas ao contexto dos alunos.

O quadro seguinte apresenta as categorias organizadas.

<b>Categorias</b>	<b>Opiniões relacionadas com a ciência</b>	<b>Opiniões relacionadas com o contexto do aluno</b>
C1-Razões que levam à aprendizagem de conceitos trigonométricos.	C11- calcular ângulos e lados desconhecidos num triângulo rectângulo; C12- calcular áreas e perímetros; C13- para trabalhar ângulos no círculo trigonométrico;	C14- para esgotar a paciência dos alunos; C15- porque todo o conhecimento é importante; C16- porque está no programa da disciplina de Matemática; C17- desconhece as razões.
C2-Utilidade que podem ter os conhecimentos de trigonometria	C21- para resolver problemas como os da pergunta III. C22- para facilitar cálculos complicados;	C23- para ajudar a resolver problemas do quotidiano; C24- são úteis se ensinados tendo em conta situações reais. C25- são úteis para outras disciplinas, como Física e Química. C26- são úteis para quem quer exercer determinadas profissões, como as que se relacionam com a navegação marítima ou aérea; C27- são úteis para quem quer frequentar certos cursos; C28- não reconhece utilidade a este tipo de conhecimentos.

Fig. 6-Categorização das respostas à pergunta 2 do grupo IV.

Na generalidade, as opiniões expressas pelos alunos nesta última questão e indicam-nos que um número significativo de discentes revelaram desconhecer a utilidade do estudo da trigonometria.

Comparando as diferentes categorias estabelecidas, verificamos a existência de um maior número de subcategorias no que respeita à utilidade que podem ter os conhecimentos de trigonometria em detrimento das razões que levam à sua aprendizagem. Salienta-se, também, um maior número de subcategorias no que concerne às categorias relacionadas com o contexto do aluno.

As opiniões apresentadas pelos diferentes alunos foram diversificadas e não imprimiram dependência relativamente ao ano a que os alunos pertencem.

## **6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE ESTUDOS FUTUROS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Da realização deste estudo exploratório e considerando as três vertentes analisadas, retirámos as seguintes conclusões:

### **Domínio de conceitos trigonométricos**

- O nível de conhecimentos, revelado pelos alunos inquiridos dos diferentes anos, relativo ao domínio de conceitos trigonométricos, na generalidade foi fraco. Parece ser um assunto facilmente esquecido ao longo do tempo.
- Salienta-se um crescimento dos índices percentuais, relativos ao domínio dos conceitos trigonométricos, nos alunos do 9º ao 12º ano e um decréscimo bastante acentuado no que concerne aos alunos do 1º e 2º ano do ensino superior.
- Sobressaem melhores resultados registados nos conceitos que permitem a aplicação directa de fórmulas, como por exemplo no de “*seno de um ângulo agudo*”. E piores resultados nas questões que implicam a compreensão de conceitos básicos, como por exemplo no de “*razão trigonométrica de um ângulo agudo*”.

### **Utilização de representações**

- Os alunos que recorreram com maior frequência a esquemas, que facilitassem a compreensão dos problemas, foram os que frequentavam o 9º, 11º ou o 12º ano.
- Normalmente, quando os alunos traduzem dos enunciados dos problemas através de esquemas correctos, acertam-nos.
- Registou-se um número reduzido de alunos que resolveram correctamente os problemas sem necessitarem de esquema, no 9º, 11º e 12º ano.
- Obtiveram-se também respostas correctas a problemas, apesar de utilizarem esquemas incorrectos, no 1º e 2º ano.
- Para definirem seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo, os alunos os diferentes anos, recorrem essencialmente à expressão fraccionária, sem darem grande importância a um suporte geométrico, que poderia ser ou um triângulo rectângulo ou o círculo trigonométrico. Os que utilizaram o triângulo rectângulo, desenharam-no com um dos catetos na horizontal. Poucos recorrem ao círculo trigonométrico como esquema auxiliar para a explicação das referidas definições.
- Salienta-se também o raro recurso a linguagem corrente para a explicação de conceitos. Desde logo procuram os símbolos matemáticos que normalmente o professor usa e que se encontram nos manuais.

### **Opiniões dos alunos sobre aprendizagem da trigonometria**

- Destaca-se o número reduzido de respostas na questão em que foi pedido que os alunos expressassem a sua opinião sobre a pertinência da aprendizagem da trigonometria e foram essencialmente os alunos do 9º, 11º e 12º ano que responderam.
- Das respostas dadas sobressaem aquelas em que os alunos recorrem a exemplos do próprio teste.
- Salienta-se um número reduzido de respostas em que os alunos reconhecem a ligação da trigonometria a situações do dia-a-dia.
- Muitos alunos revelaram desconhecer a utilidade deste tipo de conhecimentos.

Da realização deste estudo exploratório adveio a ideia de que o nível de conhecimentos, relativo aos seis conceitos trigonométricos considerados, não depende inteiramente do ano a que os alunos pertencem.

Pensamos que seria útil adoptar outras formas de inquérito para obtermos mais informações, já que o instrumento utilizado se tornou um pouco limitado.

Parece-nos que, com este estudo, obtivemos resultados que poderão servir de linhas orientadoras para futuros estudos de investigação em Educação Matemática. Nomeadamente as que apresentamos em seguida:

- Análise e comparação das representações geométricas de alunos de diferentes níveis de ensino relativas a determinados conceitos matemáticos.
- Análise e comparação das representações geométricas de professores de diferentes níveis de ensino relativas a determinados conceitos matemáticos.
- Comparação do domínio de conceitos matemáticos revelado pelos alunos com o domínio de conceitos matemáticos revelado pelos respectivos professores.

## REFERÊNCIAS

N.C.T.M., *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Tradução portuguesa dos standards do National Council of Teachers of Mathematics. APM: Lisboa.

Ghiglione, R. ; Matalon, B. (1997) *O Inquérito. Teoria e prática*. Celta: Lisboa.

Carreira, S.(1992) *A aprendizagem da Trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. APM: Lisboa.

Loureiro, C.; Oliveira, A.;Ralha, E.; Bastos, R.(1998) *Geometria-11º ano de escolaridade*. Ministério da Educação-Departamento do Ensino Básico: Lisboa.

Hayman, J.(1984), *Investigación y educación*. Paidós Educador: Barcelona..

Ribeiro, A.; Ribeiro, L.(1989).*Planificação e Avaliação do Ensino-Aprendizagem*. Universidade Aberta: Lisboa.

Rodríguez, A. (1991).*La investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Editorial Síntesis: Madrid.

Costa, M.(1995). *A trigonometria plana do Almagesto: Da história à pedagogia*. Braga: Universidade do Minho.

Ortega, T.; Piñeiro, M.; Jalón, M. (1998). *Trigonometría*.Educación Matemática en Secundária. Síntesis: Madrid

Resumos da base se dados MathDi de:

Grabovskij, M.A.; Kotel'nivok, P.M. (1971): *The Use of Kinematic Models in the Study of Trigonometric Functions*, Educational Studies in Mathematics vol. 3.2, pp. 147-160.

Szetela, W. (1979): *Hand-held Calculators and the Learning of Trigonometric Ratios*, Journal for Research in Mathematics Education vol. 10.2, pp. 111-119.

Mick, H.; Brazier (1979): *Applying mathematical generalisation in the acquisition of conceptual structures in trigonometry*, Proceedings of the 3rd PME Conference vol. 1, pp. 159-162.

Brazier, G.D.; Warren, J.B. (1982): *Determining Representations of Conceptual Structures in Trigonometry*, Proceedings of the 4th PME-NA Conference vol. 1, pp. 154-160.

Dugdale, S. (1989): *Building a Qualitative Perspective Before Formalizing Procedures: Graphical Representations as a Foundation for Trigonometric Identities*, Proceedings of the 11th PME-NA Conference vol. 1, pp. 249-255.

Dugdale, S. (1990): *Beyond the Evident Content Goals: Part III. An Undercurrent-Enhanced Approach to Trigonometric Identities*, The Journal of Mathematical Behavior vol. 9.3, pp. 233-288.

Blackett, N.; Tall, D. (1991): *Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software*, Proceedings of the 15th PME Conference vol. 1, pp. 144-151.

Wenzelburger, E. (1992): *The learning of trigonometric functions in a graphical computer environment*, Proceedings of the 16th PME Conference vol. 3, pp. 106-113.

Doerr, H. (1994): *A modelling approach to understanding the trigonometry of forces: a classroom study*, Proceedings of the 18th PME Conference vol. 2, pp. 264-271.

Pritchard, L.; Simpson, A. (1999): *The role of pictorial images in trigonometry problems*, Proceedings of the 23th PME Conference vol. 4, pp. 81-88.

Linardakis, P. (2000). *The historical evolution of trigonometric notions and its influence on today's teaching of trigonometry*. CIEAEM 51: Cultural diversity in mathematics (education): Chichester, pp 87.94.