REFLEXIONES EN TORNO AL PAPEL Y LUGAR DE LO FORMAL: PAPIROFLEXIA, MÚSICA Y TEORÍA.

Mª Lluisa Fiol Mora
Universidad Autónoma de Barcelona

Mi encuentro con la papiroflexia, cuando yo no la llamaba así (y creo que estos primeros ejercicios más bien tienen que llamarse *de plegar papel*), fue cuando empecé a mostrar a mis alumnos de 3er curso de la especialidad de Educación Primaria y en la asignatura de Didáctica de la Geometría a hacer polígonos regulares como el cuadrado, el triángulo equilátero... algunas veces a partir de un rectángulo y otras a partir de un círculo, etc. Mi sorpresa fue que a los alumnos les gustaba también plegar y cortar tapetes, hacer cenefas, etc. Descubrí también errores que se cometían con alguna frecuencia y propiedades geométricas nada triviales que podía ejemplificar de una manera sencilla con ayuda de los pliegues de papel.

Más adelante sí empezaron las papirolas. La primera fue una espléndida estrella modular de 14 piezas. Mientras tanto, y por diversas razones, fui recopilando información.

En este curso continúo con la papiroflexia y cada vez le descubro nuevas posibilidades.

Como os presentamos en el VII Simposio de la SEIEM (Delgado y otras, 2003) vemos posibilidades para los alumnos de Educación Primaria. Por otra parte, y desde hace dos cursos, a partir de la asignatura Prácticas IV con alumnos de la Especialidad de Educación Infantil y con los párvulos de 3 a 5 años hemos trabajado actividades de geometría, y entre ellas algunas de doblar papel, de papiroflexia. Estamos en el principio, porque la pregunta es qué podemos pedir a los alumnos que sea adecuado a su edad, que les guste y cómo lo planteamos. Los resultados y las posibilidades son sorprendentes por el nivel de agrado que se manifiesta en todas las personas que intervienen. Por lo tanto, vamos a continuar. Además, Fröbel ya planteó ejercicios de doblar papel a párvulos y todos sabemos (aunque no sabemos el qué y el cómo) que este tipo de trabajo se hace actualmente en las escuelas japonesas.

Pero en A Coruña lo que quise decir era: es *más duro*. No se trata sólo de hacer papirolas en Geometría, sino de ver las posibilidades de la papiroflexia tomada como modelo para ayudar y ayudarnos a explicar lo que representa lo formal en matemáticas y para intentar acceder con inteligencia mano-cerebro a la estructura de 3D (Wilson, 2002). Como investigadores en Didáctica de la Matemática, es interesante ver que una fórmula considerada como un signo, como una frase algebraica, es polisémica, admite diversas interpretaciones. Dar sentido a las diversas interpretaciones es parte de nuestro trabajo como investigadores.

De ahí el título: «Reflexiones en torno al papel y lugar de lo formal. Papiroflexia, música y teoría.»

Cuando nos enfrentamos a una investigación en enseñanza/aprendizaje de un concepto, entre otras hay estas preguntas básicas:

A: Planteado el enunciado de un problema, un gráfico, una fórmula, ¿tienen una sola interpretación?

B: ¿Cómo se articulan lo que llamamos la teoría y la experiencia?

Y por otra parte:

C: ¿Podemos identificar lo que nosotros no sabemos?

Y todavía más importante:

D: ¿Sómos capaces de pensar lo que sabemos como si no lo supiéramos?

A: A partir de diversos trabajos de investigación realizados, lo que se me evidencia es que lo que llamamos diferentes lecturas del enunciado de un problema (con frecuencia con valoración peyorativa) en realidad parece que son más bien diferentes niveles de *interpretación* que corresponden a diferentes niveles respecto al concepto o la elaboración del concepto. Estos niveles no tienen por qué estar ordenados según una escala normal, la impresión es que la organización es más compleja. Por ejemplo, en el caso del estudio de algunos problemas de proporcionalidad parece que hay una dependencia entre la serie de los números que aparecen, su «tamaño», si son naturales o no, si las variables que aparecen en el enunciado son más o menos familiares, etc., y el tipo de estrategia de resolución que los alumnos utilizan de forma espontánea.

B: Leí en algún libro de Emilio Lledó que algunas palabras de filosofía —y de matemáticas— tienen que ver en su origen con la realidad de nuestro cuerpo. Tampoco es que sea una novedad, porque varios filósofos americanos abundan sobre este tema. Por ejemplo, metodología significa estar en camino y buscar, mirar. Teoría es mirar, contemplar (¿mirar desde un punto de vista?). Contemplar, cómo uno mira e interpreta un determinado fenómeno o fenómenos, cómo los interrelaciona, cómo los explica, se explica.

En el fondo, desde buena parte de las investigaciones en Didáctica de la Matemática queremos ver, escuchar lo que hacen y dicen las personas a las que se pregunta o a las que se plantea una tarea, porque creemos, esperamos que nos darán información sobre su pensamiento. Pensamiento sobre un concepto que inicialmente a nosotros nos podría parecer no sólo acotado sino puntual.

Es aquí donde aparece el paralelismo música, teoría (lo formal) y papiroflexia.

Según Apéry (1999, pág. 198) la música hay que situarla en un tiempo en concreto: se crea la sinfonía. Hay que escribir luego la partitura, y así la sinfonía puede ser interpretada por distintos músicos. Estas interpretaciones dan versiones diferentes, son interpretaciones personalizadas de las sinfonías.

De forma similar, también en las matemáticas en un momento dado (5% de inspiración, ¡pero vaya uno a saber qué se ha leído, cuánto rato se ha tanteado, etc.!) se descubre el teorema que debe luego escribirse en lenguaje formal (95% de transpiración). Pero el estudioso matemático, aprendiz de matemático o estudiante, para aprender/estudiar el teorema tiene que coger lápiz y papel (su particular instrumento musical), reproducir, interpretar, interiorizar el teorema.

¿Y la papiroflexia?

Primero hay un creador-plegador con buenísimas habilidades visoespaciales que idea la papirola. Luego deberá transcribirla a los signos internacionales y así la papirola podrá ser repetida por diversas personas. Esta repetición demanda una interpretación de los signos y, como le oí explicar al plegador Alfredo Pérez Giménez en una entrevista en la radio, «hay que interpretar unos signos... y a cada uno le sale una papirola distinta.»

Se tienen que codificar los pliegues que se realizan con signos aceptados a nivel internacional. Uno tiene pues que interpretar, tiene que hacer, hacer por aproximaciones sucesivas.

No es ni mucho menos una cuestión trivial, como no lo es identificar las diferencias en las distintas papirolas realizadas.

A parte de teoremas conocidos como el de Haga, p.e. para ver algo de las dificultades que se generan al plegar papel, basta hacer varias papirolas, desplegarlas e intentar identificar cuál es cuál a partir del cuadrado con pliegues que se cruzan. ¿Cómo los interpretamos? Los niveles de dificultad son considerables.

Presentada la papiroflexia como posible modelo de lo formal y de la composición musical, se puede justificar con fuerza su aparición en el panorama cultural también por otras razones.

Puede ayudar a pensar en el paso de 2D a 3D, incluso reflexionar (manos y cerebro) sobre la estructura del espacio tridimensional. Estructura compleja de la que tenemos una asunción muy compleja también. Hay quien opina que estando sumergidos en 3D nos resulta difícil el estudio de las estructuras tridimensionales, como a un pez le puede resultar difícil diferenciar agua de no agua. Estemos o no de acuerdo con esta analogía, lo que sí es cierto es que al estudiar los poliedros pronto nos encontramos con dificultades no sospechadas (Boltyanskii, 1973), la no existencia, por ejemplo, de un teorema aplicable a los poliedros que sea análogo al de Bolyai-Gerwin para los polígonos. Con mucha frecuencia, se estudian los poliedros como si en el estudio de una manzana nos centrásemos en la piel. Quizás la papiroflexia nos puede proporcionar el conocimiento (mano-cerebro, ver Wilson, 2002) de las complejidades de estructuras sencillas o modulares en 3D, de los recovecos, esquinas, pliegues, laminaciones, subpiezas, etc., complejísimas que tiene *en sí* todo poliedro.

Tampoco digo ninguna novedad. Cada vez aparecen con más frecuencia en matemáticas libros que estudian el plegado, las laminaciones, «monstruos» tridimensionales, posibilidad o imposibilidad de determinar secciones de formas en 3D bajo determinadas condiciones, etc.

Por otra parte, desde biología, aparte de biólogos que tienen y anuncian en su página web el pasatiempo de la papiroflexia (ver www.ub.es/biocel/mreina/) se acepta cada vez más como modelo para representar el desenvolvimiento, el desarrollo de una semilla, un feto. Los Root-Bernstein (2002, p. 189) citan el ejemplo de K. Tosey, embrióloga en la Michigan State University que enseña la evolución de las aves estableciendo de forma explícita la analogía que existe entre la papiroflexia y los embriones. Textualmente dicen «ya que ambos atraviesan un proceso de plegado (aquí agregar *y desplegamiento*) semejante hasta llegar a alcanzar su pleno desarrollo.»

También son interesantes las papirolas modulares creadas desde biología, como ejemplo los llamados modelos moleculares de matrices de clatrina, creo recordar que creados por Robinson Lab y que el profesor de biología celular Manuel Reina de la Universidad de Barcelona presenta en su página web (ya citada).

En diseño, la papiroflexia aparece igualmente. Los Root-Bernstein ponen (p. 255 ib.) dos citas: del escultor Noguchi y de R. Hayes (ver también Delgado y otros, 2003).

C y **D** son preguntas que me he formulado a partir de la lectura del capítulo 15 de F. R. Wilson (2002, pp. 279-296) que titula *Una cabeza para las manos* (pp. 279-296). Una de las ventajas de la papiroflexia es que no sabemos y nos permite por lo tanto aprender mientras la enseñamos (nunca mejor dicho, porque hay que empezar por *enseñar*, mostrar cómo se hacen, para más adelante pasar a la lectura de los signos) mientras pensamos, investigamos sobre el tema.

Todo ello para decir y plantear a discusión que en la recogida de datos lo realmente interesante desde la Didáctica de la Matemática es interpretar las respuestas dadas por los alumnos, desde su mirada de verdad, intentando buscar su sentido. Ellos quieren decir algo desde su propia estructura del concepto. Interpretando sus respuestas, sus explicaciones y argumentos podemos obtener información sobre el concepto mismo.

Aquí las papirolas pueden jugar un papel de objeto intermediario entre el experto y el aprendiz que al hacer intervenir manos, cerebro y lenguaje facilita niveles de comunicación muy interesantes.

Bibliografía

Álvarez, G.; Bas, L.; Gimeno, J. y Pomarón, C. (Grupo Riglos) (2003): *El libro de los aviones de papel*, Alianza, Madrid.

Apéry, R. (1999): «Matemáticas constructivas» en Guénard, F. y Lelièvre, G.: *Pensar la matemáticas*, Colección Metatemas, Tusquets, Barcelona, pp. 191-205.

Boltyanskii, V. G. (1973): *Figuras equivalentes y equidescomponibles*, Linusa, México.

Bronowski, J. (1979): *Los orígenes del conocimiento y la imaginación*, Gedisa, Barcelona.

Clemente, E. (2001): *Papiroflexia*, Plaza y Janés, Barcelona.

Delgado, L.; Zapatero, M.S. y Fiol M.L. (2003): «La papiroflexia, recurso didáctico para el aprendizaje de la geometría», en Castro, E.; Flores, P.; Ortega, T.; Rico, L. y Valdecillas, A.: *Investigación en Educación Matemática*, en formato CD, Universidad de Granada, Granada.

Palacios, V. (2002): *Papiroflexia. Colección*, Salvatella, Barcelona.

Root-Bernstein, R. y M. (2002): *El secreto de la creatividad*, Kairós, Barcelona.

Wilson, F. R. (2002): *La mano. De cómo su uso configura el cerebro, el lenguaje y la cultura humana*, Colección Metatemas, Tusquets, Barcelona.