ESTRATEGIAS CORRECTAS Y ERRÓNEAS EN TAREAS RELACIONADAS CON LA SEMEJANZA

Élgar Gualdrón Pinto- Universidad de Pamplona- Colombia
Ángel Gutiérrez Rodríguez- Universidad de Valencia- España

Resumen

En este trabajo presentamos algunos de los resultados obtenidos después de experimentar y evaluar una unidad de enseñanza de la semejanza de figuras planas dirigida a estudiantes colombianos de noveno grado (14-15 años), teniendo en cuenta el Modelo de Razonamiento de Van Hiele, aspectos de la Fenomenología de Freudenthal, y los trabajos de Hart y colaboradores en cuanto a proporcionalidad y semejanza. Las conclusiones que se mostrarán aquí son las referentes a este último aspecto. La investigación tenía también el objetivo de estudiar las ideas previas, en cuanto a conocimiento y razonamiento, que poseen dichos estudiantes y constatar éstas con las que poseen después de experimentar, con ellos, la unidad de enseñanza, para lo cual diseñamos un pretest y un postest. Los resultados muestran evidencias de que los estudiantes ven que la estrategia aditiva es incorrecta.

El trabajo se desarrolló con 34 estudiantes de dos instituciones (17 en cada una) de enseñanza secundaria de Colombia, a los cuales se les aplicó un test escrito antes y después de experimentar con ellos la unidad de enseñanza. El postest se aplicó una ves terminada la experimentación. La experimentación se realizó en 9 sesiones de 100 minutos cada una, en las dos instituciones.

Presentación

Por varios años, el estudio de la geometría en la enseñanza secundaria de Colombia fue poco o nada desarrollado en las aulas. En los últimos años, por diferentes razones, nuevamente se ha hecho hincapié en la necesidad de que los estudiantes reciban formación en esta área. La experiencia de los autores, uno, como profesor de matemáticas en secundaria, otro, como investigador, nos han permitido percatarnos de las diversas dificultades de los estudiantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y particularmente en el tema de la semejanza. Es por esta razón que hemos decidido plantear este trabajo con miras a contribuir con el estudio del proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de semejanza.

Antecedentes

Después de realizar una revisión bibliográfica, se puede constatar que es poco lo que se ha hecho respecto al tema de estudio. Algunos de los trabajos encontrados, que incluyen el concepto de semejanza, utilizando diferentes marcos teóricos y persiguiendo diferentes objetivos son por ejemplo, Fernández (2001) quien trabajó con estudiantes. Hart y otros (1981, 1984, 1989) quienes trabajaron con estudiantes y profesores, al igual que Margarit y otros (2001). A nivel de propuestas curriculares (propuestas orientadoras) para profesores desde diferentes corrientes conceptuales encontramos las del Grupo Beta (1997), Lappan y otros (1986), O`Daffer y Clemens (1977), Almató y otros (1986).

Friedlander y otros (1985) realizaron un estudio en el que perseguían tres objetivos bien definidos: determinar patrones de mejoramiento en el desarrollo de los estudiantes (de 6º, 7º y 8º grados) en el concepto de semejanza, determinar los efectos de una intervención de enseñanza (en 6 clases, con una unidad de enseñanza sobre semejanza) en los tres grados, y determinar si la enseñanza de la semejanza tiene algún efecto en la habilidad general de los estudiantes para el razonamiento proporcional. A los estudiantes se les aplicó un test escrito antes y después de enseñarles el tema.

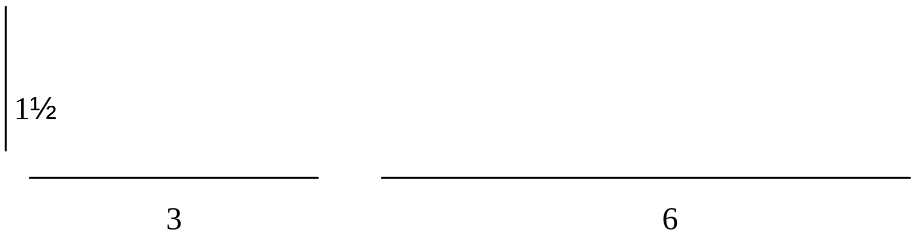
Marco teórico

Para el diseño y posterior análisis de los tests y de la unidad de enseñanza de la semejanza tuvimos en cuenta el Modelo de Razonamiento de Van Hiele, algunos aspectos de la Fenomenología de Freudenthal, y los trabajos de Hart y colaboradores en cuanto a proporcionalidad y semejanza.

En Hart y otros (1981) se presentan las estrategias de resolución, dificultades más frecuentes y tipos de errores que fueron detectados cuando los estudiantes resuelven tareas relacionadas con razón y proporción y que tienen que ver con nuestro tema de estudio. A continuación aparecen dichas estrategias ejemplificadas por nosotros:

- Doble y mitad (*Doubling and halving*):

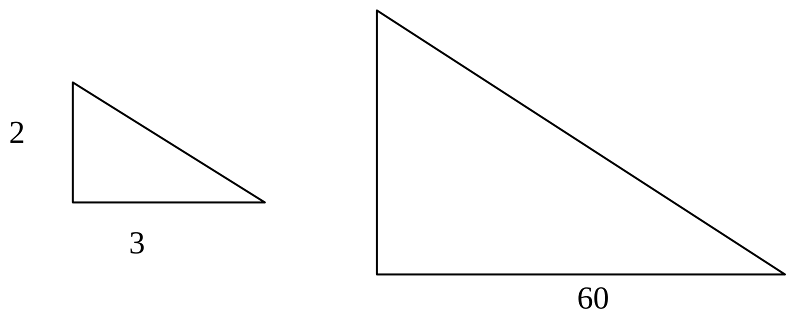
Este es el procedimiento más fácil para los estudiantes cuando se les enfrenta a tareas en forma de problema o de dibujo. Por ejemplo, cuando se les da un segmento de recta y su ampliación y se les pide que completen la figura rectilínea abierta:



Sin embargo, los investigadores plantean que el éxito que pueda tener este método no es un indicador de lo que pueda suceder cuando la razón no es 2:1. De hecho, algunos estudiantes cuando se les pedía ampliar, duplicaban, y de forma similar cuando se les pedía reducir, partían en dos.

- Construcción progresiva (*Build up*):

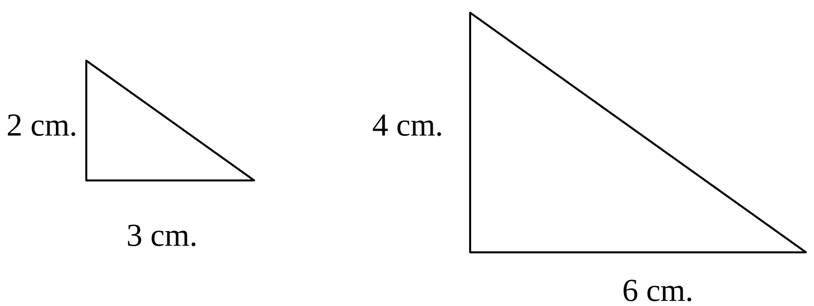
En algunas tareas los estudiantes evitan multiplicar por una fracción y tienden a hacer una construcción progresiva de la respuesta a partir de una relación que establecen entre elementos de la situación. Por ejemplo, cuando se les pide a los estudiantes que determinen la altura del triángulo grande:



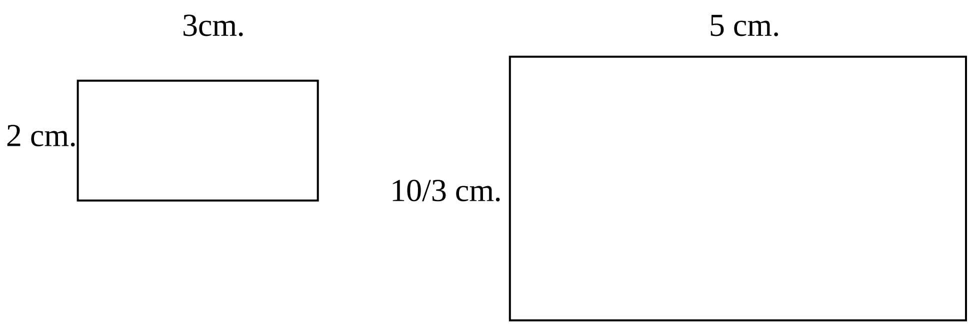
Establecen la relación 3 a 2 y luego 6 a 4, 9 a 6, 12 a 8 y así sucesivamente hasta 60 a 40, para concluir que la respuesta es 40.

- Estrategia multiplicativa:

En tareas en las cuales los estudiantes deben decidir la semejanza de figuras presentes en un problema o en un dibujo, ellos plantean que sí lo son si las medidas de los lados en una ellas son múltiplo en la otra. Por ejemplo, al decidir la semejanza de las figuras:



Los estudiantes plantean que son semejantes puesto que las medidas de los lados del triángulo grande son el doble de las medidas de los lados del triángulo pequeño. Este método causa confusión en los estudiantes ya que cuando las medidas de los lados en una de las figuras no son múltiplo entero de las medidas de los lados en la otra, ellos tienden a creer que las figuras no son semejantes, por lo que se convierte en una estrategia errónea. Por ejemplo, cuando se le pide a los estudiantes que decidan la semejanza de las figuras dadas:



Ellos responden que las figuras no son semejantes porque la medida del largo del rectángulo grande (5 cm.) no es un múltiplo de la medida del largo del pequeño (3 cm.).

- Métodos ingenuos *(Naive)*:

Hace referencia a la más sencilla e ingenua respuesta encontrada. Por ejemplo, cuando se le pide a un estudiante que amplíe una figura según una razón, aún sabiendo de lo que ello implica, no utiliza los datos ni la medida de la figura, sino que dibuja otra figura parecida más grande.

> Así al pedirle a un estudiante que amplíe un rectángulo, él dibuja cualquier rectángulo o amplia el largo pero no el ancho. La idea de que la nueva figura debería ser semejante a la original les extrañó. (Hart et al, 1984; pág. 93).

- Estrategia aditiva o de la diferencia constante:

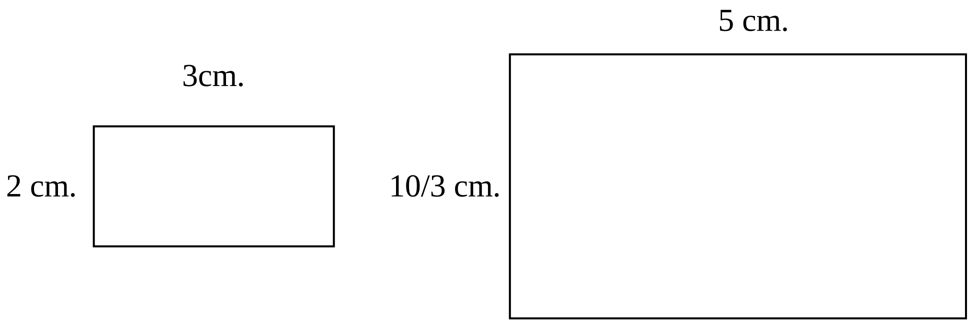
Es otra estrategia errónea, aunque más elaborada, que fue utilizada por los estudiantes en tareas relacionadas con ampliación, en la cual, ellos se concentran en la diferencia a-b y no en la razón a/b. Por ejemplo, cuando se le pide a los estudiantes que amplíen el rectángulo:

de tal forma que la nueva base sea 12cm., ellos dan como respuesta que la altura es 10 cm. Por un lado, porque dicen 12-5=7 y este valor se lo adicionan a la altura 3, para obtener así 7+3=10. Por otro lado, porque dicen 5-3=2 y este valor se lo restan a 12, para así obtener 12-2=10.

Esta estrategia por lo regular también es resultado de que los estudiantes evitan multiplicar por una fracción. Por ejemplo, en la situación anterior, multiplicar el factor de ampliación 12/5 por la altura a ampliar que es 3cm.

- Estrategia multiplicativa con ajuste:

Es una estrategia que, según como se use, puede ser una estrategia errónea o correcta. En el contexto geométrico, consiste en multiplicar las medidas de los lados de una figura por un valor entero y sumar o restar otro (incluso el mismo), resultando una estrategia errónea. O multiplicar las medidas de los lados de una figura por un valor entero y sumar o restar una fracción de la medida del lado, resultando una estrategia correcta. Por ejemplo, para justificar la semejanza de los rectángulos:



plantean erróneamente que 5 resulta de operar 3*2-1 y como 10/3 no resulta de operar 2*2-1, las figuras no son semejantes. O plantean de manera correcta que 5 resulta de operar 3*2-(1/3)*3 y de forma similar que 10/3 resulta de operar 2*2-(1/3)*2, lo que les permite decir que los rectángulos son semejantes.

- Omisión de parte de los datos del problema:

Es una estrategia errónea frecuente en la resolución de problemas de razón y proporción y consiste en que los estudiantes ignoran parte de los datos del problema. Por ejemplo, si el problema es de comparación de razones entonces intentan resolverlo comparando únicamente los antecedentes (o los consecuentes) de las dos razones. En la situación en que se pide a los estudiantes que digan en qué terreno juegan más apretados los niños: en uno de 12 metros cuadrados de área con 6 niños jugando o en uno de 16 metros cuadrados y 8 niños jugando. [1] Ellos responden que en el segundo, puesto que hay más niños en el terreno.

- Estrategia de valor unitario:

Es una estrategia correcta usada por los estudiantes cuando resuelven problemas de razón y proporción, aunque poco usual según Hart y otros. Consiste en calcular el valor unitario y utilizar éste para hallar el valor desconocido. Por ejemplo, cuando se plantea a los estudiantes: Dado que 7 metros de cuerda cuestan $ 630, encontrar el precio de 24 metros de la misma cuerda. Ellos plantean:

7 mts de cuerda cuestan……..$ 630

1 mt de cuerda cuesta………$ 630/7

24 mts de cuerda cuestan…..$ $\frac{630*24}{7}$

Estas dos últimas estrategias de resolución son usuales en contextos diferentes al puramente geométrico.

En Freudenthal (2001) se plantea algunos pasos que según él deben tenerse en cuenta en el recorrido para lograr el objeto mental de semejanza[2]:

> Reconocer la conservación o no conservación de la razón bajo aplicaciones.
> Construir aplicaciones que conservan la razón.
> Resolver conflictos en la construcción de aplicaciones que conservan la razón.
> Manejar operativamente,
> formular,
> relacionar unos con otros:
>
> criterios para la conservación de la razón, tales como
>
> conservación de la igualdad de longitudes,
> conservación de la congruencia,
> conservación de las razones internas,
> constancia de la razón externa,
> conservación de los ángulos,
> y decidir acerca de la necesidad y suficiencia de tales criterios. (Freudenthal, 2001; pág. 121-122).

---

[1] Situación equivalente a una planteada por Fernández (2001).

[2] En Gualdrón (2006), se puede encontrar el sentido que, para esta investigación, hemos asumido para cada uno de estos pasos.

El caso de los criterios para conservación de la igualdad de longitudes no lo tendremos en cuenta como tal, ya que lo consideraremos como incluido en el caso de criterios para la conservación de la congruencia.

Esta secuencia permitirá llevar al estudiante desde las nociones preliminares que ellos tienen, hasta el objeto mental. Además, Freudenthal plantea que la fuerte visualización es una ventaja del contexto geométrico de la razón, en comparación con otros contextos, y que lo que realmente importa es la verbalización gradual del razonamiento visual.

El grado de comprensión que los estudiantes posean de la semejanza estará íntimamente ligado con la riqueza de la concepción que posean, debiendo así la enseñanza proporcionar el mayor número de posibles contextos diferentes con el fin de enriquecer y completar su formación en la semejanza.

Van Hiele (1957) y Van Hiele-Geldof (1957), en sus tesis doctorales, presentaron, respectivamente, un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría y una aplicación concreta del modelo en algunos cursos de geometría. La constitución del modelo está basada en la idea central de que a lo largo del proceso de aprendizaje de la geometría, el razonamiento de los estudiantes pasa por una serie de niveles de razonamiento que son secuenciales, ordenados y de tal manera que no se puede saltar ninguno. Cada nivel supone la comprensión y utilización de los conceptos de una manera distinta, lo cual se refleja en una manera diferente de reconocerlos, definirlos, clasificarlos, y realizar demostraciones (Jaime, 1993); todo esto como resultado de la instrucción que puede organizarse en fases de aprendizaje.

Las principales propiedades del modelo de Van Hiele que son imprescindibles en la comprensión y utilización del modelo se pueden encontrar, por ejemplo, en Gualdrón (2006). Sólo nos referiremos a la “continuidad de los niveles” en vista de que difiere de la propuesta inicial hecha por los Van Hiele.

Esta propiedad hace referencia a la manera como se produce el paso de un nivel a otro. En la formulación inicial del modelo hecha por los Van Hiele plantearon que el paso de un nivel al siguiente se produce de manera brusca, como un salto. Sin embargo, posteriores investigaciones, por ejemplo Burger y Shaughnessy (1990) y Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991) han puesto en evidencia la presencia de estudiantes que muestran características propias de dos niveles consecutivos, lo que significa que esos estudiantes se encuentran en transición de un nivel de razonamiento al siguiente. En esta investigación consideramos el carácter continuo de la transición entre niveles.

En sus trabajos originales los Van Hiele plantearon cinco niveles (numerados de cero a cuatro). Teniendo en cuenta que no ha habido unanimidad en cuanto a la numeración de los niveles, pues algunos hablan de los niveles 0 al 4 y otros de los niveles 1 al 5, hemos optado para esta investigación por usar la numeración del 1 al 5 (es mas cómoda su utilización). Además hemos optado por no mencionar el quinto nivel, debido a que hace referencia a la capacidad de los estudiantes de utilizar y comparar diferentes sistemas axiomáticos y que los estudiantes de secundaria colombianos están muy lejos de lograr esta clase de razonamiento.

Los indicadores generales de nivel se pueden encontrar en diferentes publicaciones, por ejemplo Usiskin (1982), Burger y Shaughnessy (1986), Gutiérrez y Jaime (1998).

Cuando se habla de niveles de razonamiento de Van Hiele es importante hablar también de los procesos de razonamiento que tienen lugar en cada uno de ellos. Por ejemplo, Gutiérrez y Jaime (1998) plantean que un nivel de razonamiento no debe ser considerado como un proceso simple el cual debe ser alcanzado o no por los estudiantes, sino que debe ser considerado como un conjunto de procesos. Además plantean que un estudiante debe ser considerado como que ha alcanzado un nivel de razonamiento sólo cuando este muestra dominio en los procesos que integran tal nivel.

Gutiérrez y Jaime (1998) analizan las propuestas de De Villiers (1987) y Hoffer (1981), entre otros, respecto a la consideración de los niveles de razonamiento de Van Hiele como un conjunto de procesos de razonamiento matemático y adoptan una postura intermedia respecto a dichos procesos de razonamiento característicos de varios (pero no todos) los niveles de Van Hiele:

> 1. **Reconocimiento** de tipos y familias de figuras geométricas, identificación de componentes y propiedades de las figuras.
> 2. **Definición** de un concepto geométrico. Este proceso puede ser visto en dos vías: Como que el estudiante *formula* definiciones del concepto que ellos aprenden, y como que el estudiante *usa* una definición dada, leída en un libro de texto, o escuchada del profesor u otro estudiante.
> 3. **Clasificación** de figuras geométricas o conceptos en diferentes familias o clases.
> 4. **Demostración** de propiedades o afirmaciones, esto es, explicar en una forma convincente porqué tal propiedad o afirmación es verdadera o falsa. (Gutiérrez y Jaime, 1998; pág. 29).

Metodología

Diseño del pretest y el postest:

Con el fin de determinar los conocimientos y el nivel de razonamiento previos que poseen los estudiantes sobre semejanza de figuras planas, consideramos oportuno recabar información, mediante la administración de un test, acerca de:

- sus conocimientos en cuanto a contenidos relacionados con el tema,
- sus estrategias de resolución (ejercicios y problemas),
- las dificultades más frecuentes sobre diferentes aspectos de la semejanza de figuras planas,
- los tipos de errores más frecuentes.

En lo que respecta al contenido de los tests, fueron la propia experiencia y resultados obtenidos en las diferentes investigaciones consultadas, los que permitieron la consolidación del diseño de los tests.

En el diseño del pretest se tuvo en cuenta no utilizar el término “semejante”. Éste fue reemplazado por “la misma forma”, como sugieren Hart y otros (1981).

Además, en la elaboración del postest se tuvo en cuenta que el contenido de éste mantuviera correspondencia con las temáticas del pretest y las desarrolladas en la experimentación de la unidad de enseñanza.

En los tests aparecen situaciones en las cuales el estudiante debe justificar el procedimiento que le permitió obtener la respuesta de manera verbal, numérica o gráfica.

Con el fin de contrastar las ideas previas en cuanto a conocimiento y razonamiento que poseen los estudiantes después de experimentar con ellos una unidad de enseñanza del tema semejanza de figuras planas, se diseñó un postest.

Diseño de la unidad de enseñanza:

Después de haber realizado un análisis de los temas incluidos en los actuales lineamientos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2003) y de los resultados obtenidos en la etapa diagnóstica (pretest administrado a los grupos seleccionados), además de tener en cuenta el modelo de razonamiento de Van Hiele (niveles y fases), aspectos de la fenomenología de Freudenthal y los trabajos de Kathleen Hart, realizamos el diseño de una unidad de enseñanza que abordara los siguientes aspectos:

- Manipulación y observación de formas semejantes.
- Deducción de las propiedades básicas de la semejanza.
- Ampliación y reducción de figuras.
- Aplicación de la semejanza (determinación de longitudes desconocidas).

- Introducción del esquema "*por cada* x *unidades en … hay* y *unidades en …*"
- Perímetro y área entre figuras semejantes.
- Semejanza de rectángulos.
- Semejanza de n-ágonos regulares.
- Semejanza de circunferencias.
- Criterios para la semejanza de triángulos y polígonos.

Con el objeto de:

- Fortalecer la adquisición de los niveles de reconocimiento y análisis de Van Hiele (niveles 1 y 2) en el tema propuesto.
- Realizar una enseñanza correctiva de las ideas erróneas más frecuentes que se presentan cuando los estudiantes se enfrentan a tareas relacionadas con la semejanza y en particular con la proporcionalidad geométrica.
- Presentar los aspectos más relevantes relacionados con la semejanza de tal forma que los estudiantes se familiaricen con ellos y así intentar que adquieran el objeto mental semejanza.

En el diseño de las actividades hubo dos aspectos que se tuvieron presentes: uno fue el tipo de papel sobre el cual se presentarían las tareas a los alumnos, y otro, el tipo de figura sobre la que los alumnos deberían trabajar. De esta forma, las tareas fueron escogidas de manera conveniente o diseñadas de modo que los estudiantes por un lado trabajaran sobre hojas de papel blanco o cuadriculado y manipularan diversas superficies poligonales (entre otras, figuras no estándar), tanto cóncavas como convexas, además de ser cuidadosos con las medidas de las longitudes de dichas superficies y posición en la que ellas se presentan en la hoja y con respecto a las demás de la misma actividad (figuras en posición no estándar). En este sentido Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992), teniendo en cuenta las teorías de Van Hiele y Vinner plantean que un estudiante comienza a construir su imagen mental de un concepto de una manera global, a partir de ejemplos concretos, sin realizar un análisis matemático de los elementos o propiedades del concepto, sino usando destrezas básicamente visuales. Además plantean que un método adecuado de introducción de nuevos conceptos sería la inclusión de ejemplos y contraejemplos. De esta manera pretendíamos eliminar estereotipos, que son muy habituales en la enseñanza de la geometría, que limitan la adquisición de conocimiento de los estudiantes y que, como algunos investigadores lo han comprobado, por ejemplo Jaime, Chapa y Gutiérrez (1992), en algunos casos inducen a determinados errores, como es el uso generalizado de formas típicas como el cuadrado, el rectángulo o el triángulo, además de las posiciones estándar de ellas mismas.

Cada actividad fue diseñada para ser presentada en hojas individuales, y sobre las cuales el estudiante debía justificar cada uno de los procesos que lo conducían hacia la respuesta (numérica y/o gráfica y/o verbal). Para el desarrollo de cada una de las actividades el estudiante podía utilizar reglas, escuadras o cartabones, compás, transportador, tijeras y calculadora, entre otros elementos auxiliares.

Elección y descripción de la muestra:

La unidad de enseñanza fue experimentada en dos instituciones de enseñanza secundaria de las ciudades de Floridablanca y Bucaramanga (ambas ubicadas en el departamento de Santander - Colombia) durante los meses de agosto y septiembre del curso académico 2005.

El grado escogido para participar en este estudio fue noveno (14-15 años), último año de la educación básica secundaria, debido a que el tema de estudio se encuentra ubicado en este grado, de acuerdo con lo propuesto por el Ministerio de Educación Nacional. En cada institución se tomó un grupo, cada uno con 42 estudiantes. Las edades de los estudiantes en ambos centros oscilaban entre los 13 y los 15 años.

Metodología de trabajo en clase:

En las dos instituciones, la experimentación comenzó con la aplicación del pretest a los dos grupos.

En uno de los colegios estuvieron presentes la profesora titular y el investigador. Éste asistió a todas las clases en calidad de observador participativo, observando la actividad de los alumnos y, al mismo tiempo, colaborando con la profesora en las tareas de asesoramiento y orientación a los alumnos durante las sesiones de clase. En la otra institución, fue el investigador quien hizo las veces de profesor.

El medio escolar en el que se llevaron a cabo las experimentaciones de la unidad de enseñanza fue el aula de clase, cuyas características físicas permitieron el trabajo en pequeños grupos de los estudiantes. Luego de desarrollar las primeras actividades se decidió (por comodidad en la toma de datos) sólo trabajar con 17 estudiantes (por institución) distribuidos en 5 grupos. Todas las actividades fueron realizadas dentro de la jornada escolar.

En total la experimentación se compuso de nueve sesiones de 100 minutos cada una.

Al finalizar la experimentación, se aplicó de manera simultánea el postest a los estudiantes que participaron en la experimentación (34 en total) en una jornada de clase, supervisada por el investigador y la profesora titular, los cuales sólo intervenían para clarificar palabras o frases; no intervinieron para guiar las respuestas de los estudiantes.

Las actividades de la unidad de enseñanza se plantearon de forma secuenciada y fueron entregadas una a una a cada estudiante en fotocopias. Algunas tareas planteadas requerían para su realización de un material didáctico adecuado, material que les fue proporcionado en cada caso a los grupos y que se detalla junto a la exposición de las tareas. Además del material al que nos hemos referido, durante toda la experimentación, los estudiantes llevaban tijeras, regla, escuadras, transportador, compás, calculadora, para su uso en el momento que se creyera necesario.

En lo que respecta a la organización del aprendizaje, se tuvieron en cuenta las fases de aprendizaje que plantea el Modelo de Razonamiento Geométrico de Van Hiele.

Recogida de información:

Los medios utilizados para la recogida de información en los grupos experimentales fueron:

- Material desarrollado por los estudiantes en el pretest y el postest.
- Material desarrollado por los estudiantes en cada una de las actividades.
- Grabaciones en video tomadas de cada una de las actividades desarrolladas.
- Las notas tomadas por el investigador durante el desarrollo de las actividades.

En cuanto a la toma de información por medio de las grabaciones, éstas se realizaron haciendo seguimiento básicamente a dos subgrupos (en cada institución), los cuales fueron formados por las profesoras titulares teniendo en cuenta la empatía que existía entre los miembros del grupo hacia el trabajo en estas condiciones. También se grabaron las intervenciones de la docente titular en un caso y del investigador en el otro.

Resultados

Con el fin de presentar un análisis de actuaciones de los estudiantes de las instituciones que participaron en la experimentación, a continuación presentamos los aspectos que nos han parecido más relevantes. En este análisis, se tendrá en cuenta lo planteado en el marco teórico sólo en lo referente a los estudios de Hart. Con respecto a los estudios de Hart, nuestro interés es evaluar la adquisición de estrategias correctas y la eliminación de estrategias erróneas en los estudiantes después de la experimentación.

Recordemos primero las diferentes estrategias correctas y erróneas ya comentadas y las que resultaron de la experimentación de la unidad de enseñanza.

Estrategias correctas:

(CP): Construcción progresiva

(EM): Estrategia multiplicativa

(EMA): Estrategia multiplicativa con ajuste

Estrategias erróneas o que pueden conducir a error:

(MI): Método ingenuo

(EA): Estrategia aditiva

(DM): Doble y mitad

(EME): Estrategia multiplicativa errónea

(EMAE): Estrategia multiplicativa con ajuste errónea

(ODP): Omisión de parte de los datos del problema

Otras respuestas:

(VI): Respuestas que no incluyen operaciones aritméticas sino argumentos de tipo visual.

(NC): No contestan o respuestas incoherentes e inclasificables.

Los 10 grupos	**Estrategias correctas**			**Estrategias erróneas**						**Otras respuestas**	
	CP	EM	EMA	MI	EA	DM	EME	EMAE	ODP	VI	NC
Actividad Nº 1										10	
Actividad Nº 2										10	
Actividad Nº 3		1								9	
Actividad Nº 4		1								9	
Actividad Nº 5		2								8	
Actividad Nº 6		6								2	2
Actividad Nº 7		10									
Actividad Nº 8		9(8a-d) 1(8a-c)								1(8d)	
Actividad Nº 9		10									
Actividad Nº 10	1	8									1
Actividad Nº 11		10									
Actividad Nº 12		10									
Actividad Nº 13	2	8									
Actividad Nº 14		9									1

Actividad Nº 15		8									2
Actividad Nº 16		8									2
Actividad Nº 17		6(17a-b)								7(17c) 1(17a-c)	2(17a-b) 1(17c) 1(17a-c)
Actividad Nº 18		8(18a)					2(18a)			10(18b)	
Actividad Nº 19		5(19a-b) 2(19b) 1(19a)								2(19a-b) 1(19b) 2(19a)	
Actividad Nº 20		7								3	
Actividad Nº 21		7(21a-b)								7(21c-d)	3(21a-d)
Actividad Nº 22		9									1

Tabla 1. Estrategias de cálculo utilizadas por los 10 grupos.

En la tabla 1 mostrada arriba, se resumen las actuaciones de los 10 grupos. Aquí podemos observar que:

Los datos reflejan un claro uso por parte de los estudiantes de estrategias correctas y un casi nulo uso de estrategias erróneas durante el desarrollo de las actividades propuestas en la unidad de enseñanza.

Los estudiantes prefieren el uso de la estrategia multiplicativa (EM) en la resolución de tareas que tienen que ver con la semejanza. Esto parece indicar que los estudiantes comprenden que la operación implicada en dichas tareas no es la adición. Algo que también confirma el hecho de evitar el uso de estrategia aditiva es que apenas hubo estudiantes que usaron la estrategia "construcción progresiva", que está relacionada con la adición.

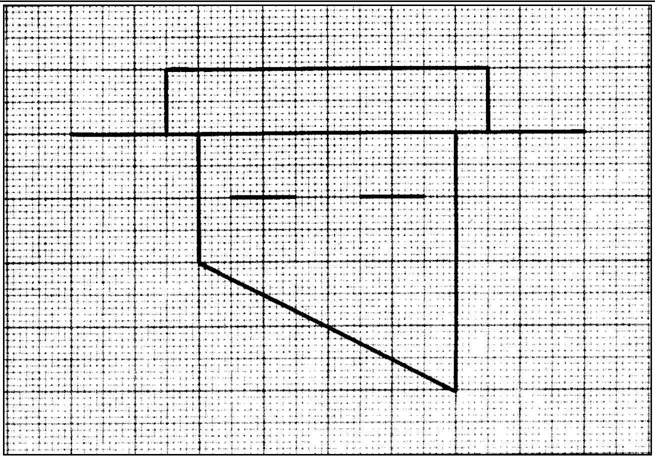
Los estudiantes aprovecharon positivamente la posibilidad que se les presentó de tener un acercamiento a la mayoría de estrategias erróneas, como lo confirma el uso casi nulo por parte de ellos de estrategias erróneas.

Algunos ejemplos que complementan la información de la tabla se muestran a continuación.

Veamos la justificación dada por uno de los grupos respecto de la actividad 7 [3] de la unidad de enseñanza:

Actividad Nº 7

[3] Dibujo tomado de Hart (1984)



a) Utilizando papel cuadriculado, amplía esta figura al doble.

b) ¿Qué dificultades has tenido? ¿Cómo las has resuelto?

c) Prueba ahora a ampliarla al triple.

d) Redúcela a la mitad.

e) Explica el procedimiento utilizado.

Se multiplican las medidas de los lados por 2, y así
obtenemos la figura ampliada al doble.
Después, se multiplican las medidas de los lados (de la fig. inicial)
por 3 para ampliarla al triple.
Por último, dividimos en 2 las medidas de la figura inicial,
para reducirla a la mitad.

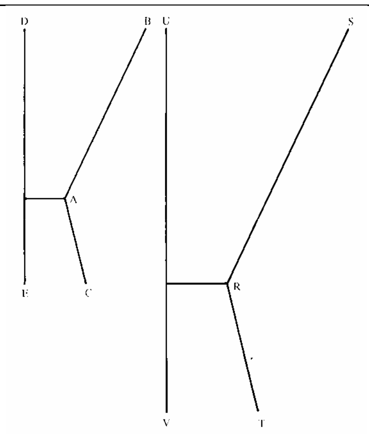
Esta respuesta nos muestra claramente el uso de la EM (“estrategia multiplicativa”) por parte de los estudiantes. Una respuesta errónea hubiera ocurrido si, por ejemplo, los estudiantes hubiesen dibujado cualquier ampliación sin tener en cuenta el factor de ampliación.

A continuación presentamos la actividad 10 [4] y un ejemplo de respuesta de uno de los grupos.

Actividad Nº 10

[4] Actividad tomada de Hart (1984)

Estas dos letras tienen la misma forma (son semejantes), una es más grande que la otra. AC mide 4 unidades. RT mide 6 unidades.



AB mide 7 unidades. ¿Cuál es la longitud de RS?

UV mide 15 unidades. ¿Cuál es la longitud de DE?

Escriba el procedimiento utilizado para dar cada una de sus respuestas.

la figura mas grande es el 1½ de la original entonces para Hallar las medidas q' no nos dieron dividimos la medida correspondiente. y a este valor se le suma la medida original.

En esta ocasión, el grupo seleccionado hace uso de la CP (“construcción progresiva”). El grupo identifica el factor de ampliación y deduce las longitudes desconocidas construyéndolas progresivamente, es decir, divide la longitud dada entre 2 y a este valor le adiciona su valor correspondiente en la otra figura.

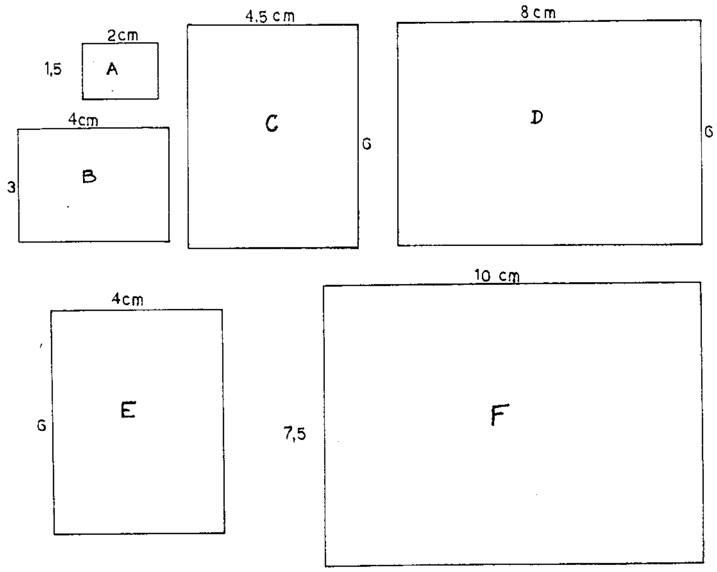
Por último, un ejemplo de respuesta de uno de los grupos, a la actividad 17, en el apartado c, en donde se nota claramente que los estudiantes, únicamente, usan argumentos de tipo visual. Por esto la respuesta fue clasificada como VI (“respuestas que no incluyen operaciones aritméticas sino argumentos de tipo visual”).

Actividad Nº 17

a) Complete el cuadro con la información solicitada.

b) Determine cuáles de los rectángulos son semejantes (tienen la misma forma).

Escriba el procedimiento utilizado para dar la respuesta.



Rectángulo	Lado menor	Lado mayor	Long. mayor -------------- Long. menor
A			
B			
C			
D			
E			
F			

c) Recorte todos los rectángulos, trace a cada uno sus dos diagonales y superpóngalo (de mayor a menor área), haciéndolos coincidir todos por el vértice inferior izquierdo.

¿Qué observa en esta superposición respecto de las diagonales de los rectángulos que son semejantes? Explica tus observaciones.

- En todos los rectángulos que son semejantes, sus diagonales coinciden.
- Pero la diagonal del rectángulo que no es semejante no coincide con las otras.
- las otras diagonales de los rectángulos semejantes son paralelas entre sí a excepción de la diagonal del rectángulo que no es semejante a los otros.

Conclusiones

Los grupos de estudiantes, en su gran mayoría, prefieren usar la estrategia multiplicativa. Esto, según los estudios de Hart, muestra que los estudiantes son conscientes de que la operación necesaria cuando se enfrentan a tareas relacionadas con razón y proporción, es la multiplicación y no la adición. Es decir, hemos logrado que los estudiantes vean que la estrategia aditiva es incorrecta.

Los datos reflejan que la práctica totalidad de los estudiantes usaron estrategias correctas. Este es un indicio del efecto positivo de la unidad de enseñanza experimentada. Por ejemplo, en los resultados del pretest se aprecia que hubo un buen número de respuestas aditivas y de respuestas incorrectas (de otro tipo) que ahora no se aprecian[5].

Los datos reflejan un claro uso por parte de los estudiantes de estrategias correctas y un casi nulo uso de estrategias erróneas durante el desarrollo de las actividades propuestas en la unidad de enseñanza.

Referencias

Almató, A., Fiol, M. L., Fortuny, J. M., Hosta, I., y Valldaura, J. (1986). *Proposta didàctica per treballar la proporcionalitat* (vol. 2). Barcelona: Universidad Politècnica de Catalunya.

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17, 1,* 31-48.

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1990). *Assessing children's intellectual growth in geometry* (Reporte final). Corvallis, USA: Oregon State University.

De Villiers, M. D. (1987). *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the Van Hiele theory: some critical comments*. Stellenbosch, R. South Africa: RUMEUS: Facultad de Educación. Universidad de Stellenbosch.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria.* Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.

[5] Los resultados completos se pueden encontrar en Gualdrón (2006).

Freudenthal, H. (2001). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (L. Puig, Trans.). En E. Sánchez (Ed.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Textos seleccionados)* (2ª edición). México D.F.: Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Friedlander, A., Lappan, G., y Fitzgerald, W. M. (1985). The Growth of similarity concepts over the middle grades (6, 7, 8). *Proceedings of the 7th Annual Meeting of the PME-NA.*, 86-92.

Grupo-Beta. (1997). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis.

Gualdrón, É. (2006). Los procesos de aprendizaje de la semejanza por estudiantes de 9º grado. Valencia, Universidad de Valencia**:** 191.

Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20, 2 y 3*, 27-46.

Gutiérrez, Á., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*, *3*, 237-251.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children`s strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, Inglaterra: The NFER-NELSON.

Hart, K., y otros (1981). *Children`s understanding of mathematics: 11-16* (1 ed.). Londres, Inglaterra: John Murray.

Hart, K., y otros (1989). *Children`s mathematical frameworks 8-13: A study of classroom teaching*. Windsor, Inglaterra: The NFER-NELSON.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. .* Tesis doctoral no publicada. Valencia: Universidad de Valencia.

Jaime, A., Chapa, F., y Gutiérrez, Á. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, *23*, 49-62.

Lappan, G., Fitzgerald, W., Winter, M. J., y Phillips, E. (1986). *Similarity and Equivalent Fractions*. Michigan: Addison-Wesley.

Margarit, J., Gómez, B., y Figueras, O. (2001). Ratio comparison: Performance on ratio in similarity tasks. *Proceedings of the 25th PME Conference, 1,* 340.

M.E.N. (2003). *Estándares básicos de matemáticas y lenguaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

O`Daffer, P. G., y Clemens, S. R. (1977). *Geometry: An Investigative Approach*. Illinois, USA: Addison-Wesley.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Columbus, USA: ERIC.

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School.* Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. (Traducción al inglés en Fuys, Geddes, Tischler, 1984, pp.1-206).

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría).* Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Holanda: Universidad de Utrecht. (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).