El Aprendizaje Colaborativo y la Demostración Matemática

José Fco. Martín. Jesús Murillo , Josep M. Fortuny

1. Introducción.

Los métodos tradicionales de enseñanza contemplan la clase como un entorno en el que el papel del profesor se reduce simplemente a dar información a los estudiantes y en la que los objetivos y metas planteados han de conseguirse individualmente por los alumnos.

Esta situación contrasta con la clase en la que se trabaja de forma cooperativa/colaborativa. El aprendizaje cooperativo se refiere a un método de instrucción en el que los estudiantes trabajan conjuntamente en grupos para alcanzar metas comunes. Los alumnos ayudan a otros para que "todos" puedan alcanzar en alguna medida el éxito. Mientras que en la enseñanza tradicional el profesor es el centro de la clase, siendo éste el transmisor de la información; en la clase de trabajo cooperativo el centro es el estudiante y se considera al profesor como un facilitador y guía del aprendizaje y a los estudiantes como buscadores de información.

Como señalan Scardamalia y Bereiter (1992): *"Los estudiantes necesitan aprender profundamente y aprender cómo aprender, cómo formular preguntas y seguir líneas de investigación, de tal forma que ellos puedan construir su propio conocimiento a partir de lo que conocen. El conocimiento propio que es discutido en grupo, motiva la construcción de nuevo conocimiento"*.

En el trabajo colaborativo, la necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias lleva a que éstas sean más concretas y precisas y a organizar e integrar más el conocimiento.

Propugnamos una metodología basada en el *principio de actividad*, que supone la participación formal del estudiante en la adquisición del conocimiento y el ser copartícipe en su formación, mediante una actividad que no tiene nada que ver con una actividad manual rutinaria, sino más bien con una participación activa en todo el proceso de adquisición de conocimientos y capacidades, formulando preguntas, extrayendo conclusiones, realizando críticas, llevando a cabo iniciativas personales, enunciando resultados en su propio vocabulario, formulando conjeturas, realizando y compartiendo descubrimientos que provoquen en el estudiante una actividad interna, resultado de la interacción entre la reflexión, la actividad externa y la información recibida.

En este sentido el diseño de entornos de aprendizaje ideados o desarrollados por el profesor, que favorezcan la participación activa y efectiva de los alumnos, es un aspecto que consideramos fundamental entre las funciones de éste en cuanto a su actuación en clase, fomentando el trabajo colaborativo entre los alumnos, de manera que éstos asuman parte de la responsabilidad de su aprendizaje, y desarrollen algunas de las funciones que en la enseñanza tradicional están reservados al profesor.

Caracterizaremos el trabajo cooperativo y el aprendizaje colaborativo, aspectos éstos muy relevantes en la construcción social del aprendizaje y que guiarán el diseño de las actividades a desarrollar por los alumnos.

La adquisición por parte de los alumnos de la capacidad de entender y producir demostraciones matemáticas es un objetivo muy importante a alcanzar en todos los currículos oficiales de matemáticas de cualquier sistema educativo en el nivel de la educación secundaria.

En nuestro trabajo hacemos un análisis epistemológico del concepto de demostración matemática y de su importancia en el desarrollo de la capacidad de razonamiento de nuestros alumnos y en la adquisición del conocimiento matemático. Damos una visión de la situación actual de las investigaciones acerca de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática, y planteamos nuestra propuesta de lo que entendemos por demostración en la educación matemática. Realizamos un análisis de dos experiencias de demostración llevadas a cabo con medios informáticos.

En una segunda fase nos proponemos como objetivos de nuestra investigación, a partir de información recogida sobre alumnos reales y utilizando un entorno de *trabajo colaborativo* apoyado en medios informáticos, analizar los beneficios cognitivos que se producen en nuestros alumnos, en relación a su capacidad de entender y producir demostraciones matemáticas.

2. Objetivos.

Como objetivo previos:

Caracterizaremos el trabajo cooperativo y **el aprendizaje colaborativo**, aspectos éstos muy relevantes en la construcción social del aprendizaje y que guiarán el diseño de las actividades a desarrollar por los alumnos.

Establecemos una **propuesta de demostración en la educación matemática**.

Nos proponemos como *objetivo principal* de la investigación **analizar los beneficios cognitivos que se producen en nuestros alumnos en relación con la adquisición del conocimiento matemático y, en concreto con la capacidad de argumentar y demostrar en Geometría, cuando desarrollan trabajo colaborativo utilizando medios informáticos**.

Como objetivos secundarios, analizaremos:

El desarrollo de habilidades de comunicación, utilizando las TIC.

Evolución de las técnicas de trabajo colaborativo.

Capacidad de distinguir demostraciones matemáticas de otras formas de argumentación.

Producción de demostraciones a partir de la investigación de un problema

Adquisición del vocabulario matemático adecuado y necesario para desarrollar una demosttación

Comprensión de las matemáticas como modelo de los fenómenos de la vida cotidiana y de problemas reales.

3. Metodología.

En el trabajo que se presenta

1. Realizamos una revisión de artículos y publicaciones sobre trabajo cooperativo y colaborativo y de la demostración matemática.

2. Análisis de otras experiencias realizadas sobre demostración utilizando medios informáticos.

Para la futura investigación.

3. Utilizaremos un entorno interactivo de aprendizaje y describiremos su utilización pedagógica y sus implicaciones didácticas. Diseñaremos unas actividades adecuadas al medio utilizado y analizaremos su estructura y contenidos.

4. Analizaremos la información en base a la actividad de los alumnos utilizando o diseñando los instrumentos correspondientes, con miras a establecer los progresos o

beneficios de los alumnos en relación a sus capacidades y técnicas de demostración, expresión y razonamiento, tomando en consideración la influencia del medio en los resultados obtenidos. Utilizaremos la capacidad de motivación de los medios utilizados para potenciar la participación en el trabajo cooperativo de los alumnos.

5. La investigación, se realizará con datos obtenidos en dos niveles de enseñanza: una con alumnos de Cuarto de E.S.O del I.E.S. "Batalla de Clavijo" de Logroño y otra con alumnos de la Escuela de Magisterio de Logroño, estudiantes universitarios.

4. Antecedentes y marco teórico.

Asumimos una visión *constructivista* del aprendizaje. Desde una perspectiva general los conceptos de trabajo cooperativo y aprendizaje colaborativo aparecen muy relacionados y podría llegarse a pensar que se refieren a los mismos aspectos. A medida que se va estudiando y analizando la literatura y trabajos realizados, vamos descubriendo que se trata de conceptos distintos que tienen puntos de encuentro, pero que parten de necesidades diferentes, aunque finalmente resulten complementarios.

Desde el punto de vista de la investigación, podemos entender *trabajo cooperativo* como un *"área de investigación multidisciplinaria encargada del estudio de teorías y tecnologías que apoyan el trabajo en grupo"*. (Ucrós, M.A., 1997).

En el ámbito de la educación, definimos **el trabajo cooperativo**, *como un conjunto de estrategias (docentes y discentes) y de herramientas tecnológicas, encaminado a implantar y fomentar el trabajo en grupo entre los alumnos con la finalidad de optimizar la adquisición de conocimientos y capacidades personales pretendidos*

Siguiendo a Jonhson y Jonhson (Jonhson, D. y Jonhson, R. 1987), podemos definir el **aprendizaje colaborativo**, como *"un conjunto de métodos de instrucción para la aplicación en los grupos pequeños, de entrenamiento y desarrollo de habilidades mixtas (aprendizaje y desarrollo personal y social), donde cada miembro del grupo es responsable tanto de su aprendizaje como del de los restantes miembros del grupo"*.

El **aprendizaje colaborativo asistido por ordenador** podemos definirlo como *"un método de enseñanza-aprendizaje por medio del cual interactúan dos o más sujetos para construir aprendizaje, a través de discusión, reflexión y toma de decisión, proceso en el cual los recursos informáticos actúan como mediadores"*.

Así pues, ambos conceptos no son excluyentes, sino que son complementarios de acuerdo al tipo de tratamiento de los problemas a resolver y de los valores involucrados en las interacciones entre los participantes en búsqueda de solución.

Planteamos algunas consideraciones teóricas sobre la demostración matemática (Garnier y Taylor (1996), Martínez Recio (1999), Godino y Recio (1997)) y sobre la utilización del ordenador en la demostración matemática asi como de sus limitaciones.

Se analizan asimismo, diversos significados contextuales de la demostración matemática. en la institución matemática, en la institución educativa,… y los tipos de demostración admitidas por nuestros alumnos.-

5. Propuesta de lo que entendemos por demostración en la educación matemática.

Como principio general debemos intentar que los estudiantes entiendan que la demostración formal es el grado más completo de certeza matemática y que se debe tender a ella como elemento básico del desarrollo de la ciencia y como un tipo de demostración que trasciende el tiempo y los sistemas educativos.

Las dificultades de nuestros alumnos a la hora de enfrentarse a la demostración, dentro del ambiente general de desinterés, nos hacen pensar que, si de alguna manera acercamos la actividad en el aula a la actividad real del trabajo matemático y, además, intentamos que el procedimiento de trabajo tenga ese valor de descubrimiento e investigación, que es interesante para ellos, que tiene un cierto “tirón”, podremos de alguna manera captar, convencer, integrar a los alumnos en el proceso de trabajo general de la matemática y de la vida en general. Hay que motivar de alguna manera al alumno para que siga con agrado el proceso de enseñanza que, en este momento, no alcanza a cubrir sus expectativas de interés y motivación para trabajar.

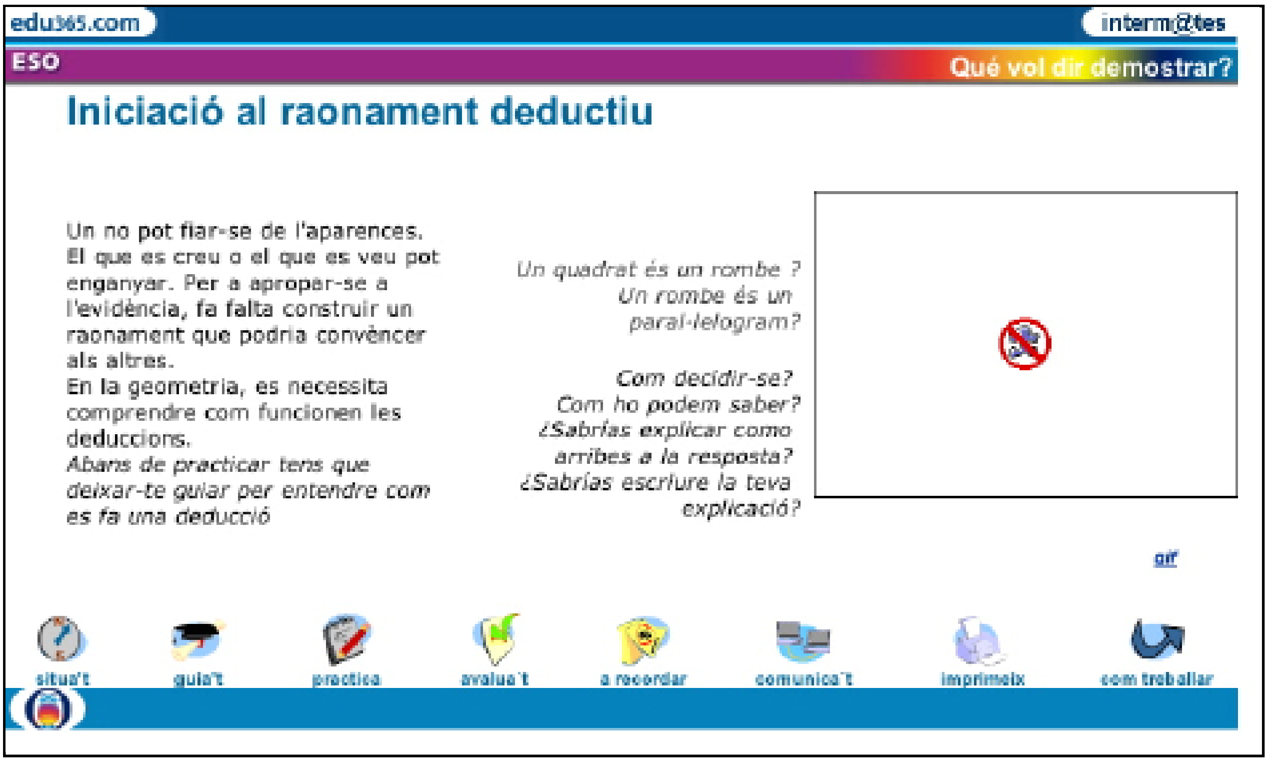
Así, consideramos que podemos admitir como demostración, siempre dentro del campo señalado, con las limitaciones indicadas y dentro del contexto general de que la demostración deductiva es la manera más perfecta de validación y a la que hay que llegar: *tanto la argumentación intuitiva, como la prueba empírico-deductiva, como la prueba deductiva informal. Entendiendo que constituyen aspectos complementarios de la demostración matemática, que representa un proceso activo, vivo, que tiene distintas fases, desde la formulación inicial de conjeturas hasta los procesos finales de expresión formalizada de la demostración.*

Resumiendo diremos que en la práctica docente no es necesario perseguir formas de rigor absoluto, sino suficiente rigor para favorecer la comprensión o para convencer. Un razonamiento presentado en forma suficientemente rigurosa iluminará y convencerá a un mayor número de estudiantes que podrían después convencer a sus compañeros. Es el docente el que debe juzgar cuándo vale la pena insistir en darle una mayor atención a la demostración rigurosa y dosificar el rigor a exigir para conseguir el primordial y, cada vez más difícil, objetivo didáctico que es la comprensión.

6. Análisis de otras experiencias realizadas sobre demostración utilizando medios informáticos.

Vamos ahora a analizar algunas experiencias concretas ya realizadas encaminadas a desarrollar la capacidad de demostración de los alumnos utilizando las T.I.C.

6.1 Experiencia en la U.A.B.



En la página Web correspondiente a la experiencia desarrollada en la U.A.B, localizada en la dirección electrónica http://intermat.uab.es/intermates/60/ se ha desarrollado un entorno informático en el que se proponen tres ejercicios que progresivamente van guiando el aprendizaje de las técnicas de demostración matemática. En ellos el alumno individualmente debe resolver una situación problema en la que se pide realizar una demostración concreta.

En el primer ejercicio esta demostración está explícita y debe distinguir, en un primer momento, hipótesis de conclusión, para lo que debe elegir en unas casillas de verificación las diferentes opciones dadas. El programa permite controlar el proceso mediante los mensajes “correcto” o “incorrecto” que se producen al oprimir el botón “corregir”.

Más adelante le pide completar el *esquema de la demostración* en el que se pueden elegir distintas opciones de unos cuadros de selección. Para ello se especifican los axiomas teóricos de justificación que pueden utilizarse. También aquí se controla el proceso de forma similar a la anterior cada vez que se elige una opción.

En último lugar se le pide que haga las primeras deducciones escritas formando una frase que exprese el contenido del esquema de demostración anteriormente realizado. Para ello se le presentan las palabras que forman la expresión escrita de la demostración de forma desordenada y se le pide que las ordene, eligiéndolas con el ratón. Aquí se le da una valoración en % dependiendo del número de palabras ordenadas adecuadamente.

En un segundo ejercicio similar al anterior se pide demostrar una propiedad que no se da explícita, siendo el esquema de demostración más complicado y más completo que el precedente.

En el tercer ejercicio se dispone de un entorno informático que permite cargar la construcción geométrica de la actividad con un único clic de ratón, modificarla mediante el añadido de otros elementos geométricos (puntos, rectas perpendiculares, paralelas, intersecciones, puntos sobre objeto, etc.) y realizar deducciones escritas en un cuadro diseñado al efecto, en el que se pueden elegir los modificadores <, >, = y elementos geométricos como recta, ángulo y área. Se facilitan también unas estrategias a utilizar para llegar a la demostración requerida mediante mensajes del tutor electrónico. El sistema no permite hacer medidas ni deformar la figura.

Esta experiencia está encaminada al trabajo individual del alumno y diseñada para desarrollarse sin apoyo directo del profesor. En tanto que puede ser utilizada en medios con pocas posibilidades de asistencia a clases presenciales (medio rural, situaciones hospitalarias, concentraciones deportivas, etc.) es una experiencia muy valiosa y muy clarificadora en cuanto a que da al alumno una idea muy concreta del concepto de demostración matemática, de los elementos que la componen y del proceso y estrategias para llevarla a cabo. El esquema de demostración es un logro muy importante y muy aclaratorio para los alumnos.

En la futura investigación, se plantea como objetivo principal analizar los beneficios cognitivos que se producen en nuestros alumnos y las mejoras de la capacidad de elaborar demostraciones matemáticas, mediante el trabajo colaborativo, utilizando medios informáticos. En un primer momento de la experiencia, base de la investigación, se pretende que el alumno aprenda a entender el sentido de la demostración matemática, a distinguir una demostración de otras formas de argumentación y a comprender cuáles son los elementos que la componen y el proceso general para desarrollarla. Se utilizará un proceso de comunicación bidireccional entre el “profesor virtual”[1] y el alumno a través del correo electrónico. Esto es, se plantea una actividad de iniciación en la página web del proyecto, en ella se pide al alumno que haga una construcción con Cabri Géomètre II, que tome medidas, que manipule la figura, que trate de tomar conciencia de una propiedad geométrica que se da en la misma, que no debe depender de la figura concreta realizada, sino que deberá ser válida para un conjunto de figuras. Esta propiedad no se le da de forma explícita, sino que se espera que la obtenga por manipulación. Una vez obtenida, se le pide que la exprese con su propio vocabulario y particular sintaxis, y que haga una demostración.

[1] El “profesor virtual” es un profesor que no está presente en la clase y que recibe los mensajes de correo electrónico de los alumnos. Está encargado de aclarar las dudas que se produzcan, corregir las respuestas de los alumnos y sobre todo establecer con los alumnos una relación personal lo más estrecha posible y animar a todos a realizar esfuerzo para realizar la demostración. Esto tiene para los alumnos un gran atractivo y se ha comprobado que el ascendiente de este profesor sobre el alumno es superior incluso al del profesor real que está en la clase presencial.

Aquí se realiza una correspondencia epistolar electrónica entre el alumno y el "profesor virtual" mediante la que se van poco a poco dando instrucciones y refinando la respuesta hasta llegar a una comprensión por parte del alumno del concepto de demostración, de los elementos que la componen del tipo de expresión adecuada para explicitar la demostración requerida.

Una vez que el alumno haya comprendido la esencia de la demostración, la forma de desarrollarla y haya adquirido algunas estrategias de demostración, en una segunda fase, se propondrán unas demostraciones a desarrollar mediante discusión entre todos en el "tablero electrónico"[2]. En este caso lo que se pretende es que, mediante la discusión entre todo el grupo de la propuesta, mediante el trabajo colaborativo, se pueda llegar a una demostración más completa y elaborada. Se trata de estudiar cómo mejora la demostración al realizar este trabajo colaborativo comparándolas con las realizadas mediante el trabajo bidireccional alumno-profesor virtual de las actividades hechas individualmente y tuteladas mediante el correo electrónico.

Comparando la experiencia realizada en la U.A.B., con la primera fase de la experiencia a realizar, base de la futura investigación, ésta presenta más flexibilidad a la hora de hacer entender al alumno el concepto de demostración y lo que esperamos de él cuando se le propone construir una demostración, considerando que no se le da explícito lo que ha de demostrar, sino que se pretende que manipule, mida, opere con los resultados de las medidas hasta que descubra la propiedad de la figura, que conjeture, compruebe, realice contraejemplos, etc. y que, una vez definido por él, el objeto a demostrar, lo haga con el mayor rigor posible.

Todo esto lo hace con el apoyo del programa Cabri Géomètre II, un Sistema de Geometría Dinámica que permite incluso la expresión del teorema y su demostración en un cuadro de texto del programa ,que es enviado como adjunto al "profesor virtual" que valida, sugiere y pregunta, hasta llegar a un resultado válido. Este resultado no tiene porqué ser *el mismo* para todos, sino que, según el tipo de actividad, que spretendemos sea lo más abierta posible, puede dar lugar a distintas vías de solución, dependiendo del tipo de alumno con el que interactúa.

La experiencia realizada en la U.A.B. debería permitir mayor variedad de expresiones escritas válidas, a la hora de realizar la expresión escrita de la demostración obtenida. La frase a escribir por los alumnos *es única para todos*, en realidad es una ordenación de las palabras de la misma, incluso si se cambia el orden, aunque no el sentido, o si falta un simple espacio entre palabras, es considerada por el programa como errónea.

Evidentemente se trata de una primera fase en la que el alumno debe tener unos ejemplos claros de demostraciones, pero la exacta expresión no debería limitar la espontaneidad del alumno a la hora de plasmar con sus propias palabras lo que ha deducido, considerando que lo que pretendemos es mejorar la capacidad de razonamiento del alumno, y que una manera de ayudarle es forzarle a escribir de la forma mas clara y concreta posible el razonamiento elaborado por él. Este esfuerzo a la hora de expresar el resultado produce en el autor una aclaración de lo deducido y pone de manifiesto posibles defectos en el mismo. Igualmente produce en los demás alumnos que lo leen un convencimiento, tanto más importante cuanto más próxima esté la expresión al vocabulario y sintaxis propias del alumno. Esto no tiene porqué estar en contra del rigor exigible a toda demostración matemática.

El "rompecabezas" puede ser válido en los primeros estadios de la experiencia, pero debería dársele más flexibilidad de expresión al alumno a la hora de plasmar su razonamiento para la comunicación a los demás, y dotar al sistema de una mayor versatilidad

El tercer ejercicio de la experiencia de la U.A.B. también tiene similitud con la primera fase de la futura experiencia. El alumno puede completar la figura, pero no puede medir ni desplazar los objetos del dibujo de forma continua, como hacen los Sistemas de Geometría Dinámica, para así comprobar o no el mantenimiento de la propiedad al deformar la figura, aspecto éste que, a nuestro juicio, limita mucho la posibilidad de conjeturar y obtener por sus medios el resultado a demostrar.

[2] El "tablero electrónico" es un foro de discusión en el que todos los alumnos pueden escribir su desarrollo de la demostración, consultar las soluciones de los demás y discutirlas por medio de réplicas y contrarréplicas.

Las estrategias que plantea mediante el tutor electrónico son similares a las ayudas que se proponen en nuestras actividades de la primera fase, mediante enlaces que dan de igual manera estrategias a seguir para continuar con la demostración, si ha habido un bloqueo.

Las deducciones a obtener en el cuadro, eligiendo elementos de unas barras, son validadas por el programa sin tener en cuenta su fundamentación anterior, así se puede escribir como deducción que el área de dos triángulos determinados es la misma, sin razonar el por qué; el programa lo acepta como válido.

Los objetivos de la experiencia de la U.A.B. son diferentes de los de la futura investigación, estando más encaminada al trabajo individual en medios con dificultad de recibir clases presenciales, mientras que la futura investigación va encaminada a utilizar el trabajo colaborativo.

6.2. Experiencia en la UR

Tablero electrónico.

La experiencia realizada en la UR, constituyó la base para la tesis doctoral de Jesús Murillo y tenía como objetivos:

1. Diseñar e implementar un sistema interactivo y colaborativo de enseñanza dela Geometría de la ESO (12-16 años), que permita al alumno trabajar de forma autónoma e independiente o en interacción con el tutor u otros alumnos, contribuyendo de esta manera a que el sistema de enseñanza se adapte al ritmo de aprendizaje de cada alumno.

2. Clasificar, estudiar y evaluar las interacciones a distancia y sus efectos en el aprendizaje de 5 alumnos.

En la metodología se consideraba trabajo bidireccional alumno-profesor virtual utilizando el correo electrónico y el programa Cabri Géomètre II, y discusión de una actividad entre todos en un foro de discusión.

Asi pues, un objetivo era la construcción y diseño de un entorno de trabajo interactivo y colaborativo que se adaptara a las características de cada alumno y el estudio de las interacciones y beneficios que se pudieran producir.

Partiendo de esta base, en la futura investigación nos proponemos desarrollar y perfeccionar el sistema creado, enfocándolo hacia la mejora de la capacidad de demostración matemáticas de los alumnos mediante el trabajo colaborativo.

Como se ha indicado, el trabajo de investigación futuro se desarrollara en dos fases. En la primera, que llamaremos de iniciación a la demostración y de habituación al medio informático, se utilizará la comunicación bidireccional alumno-profesor virtual a través del correo electrónico, ya descrita en el punto anterior.

Las actividades que se propondrán serán actividades específicas, diseñadas y dirigidas especialmente a desarrollar la capacidad de realizar demostraciones matemáticas en nuestros alumnos, mejorando las actividades de iniciación de la experiencia realizada en la UR, con la inclusión de applets interactivos y completando el sistema de ayudas, aumentando el número de enlaces en los que se dan pistas sobre distintas estrategias de demostración que pueden ser utilizadas.

Una de las carencias que presenta la experiencia de la UR, en la discusión en el tablero electrónico, es la imposibilidad de situar en el mismo unos gráficos que apoyaran los razonamientos a discutir. En la segunda fase de la futura experiencia, esta limitación estará superada, dado que hemos conseguido, utilizando el mismo tipo de programa libre, ampliando opciones, que se puedan incluir gráficos de respuestas de alumnos para que sean discutidos entre todos y, colaborativamente, se llegue a una demostración más completa, rigurosa y elaborada.

El procedimiento que poponemos, es el siguiente:

a) Los alumnos reciben la propuesta de actividad a través del la página web o del correo electrónico.

b) Individualmente y utilizando Cabri elaboran una primera aproximación de la demostración. El correspondiente archivo de Cabri es enviado al profesor virtual por correo electrónico.

c) El profesor sitúa los gráficos correspondientes a los archivos recibidos en el tablero electrónico.

d) Los alumnos discuten las respuestas dadas apoyándose en los gráficos que están accesibles, trabajando colaborativamente hasta conseguir entre todos mejorar éstas y llegar a una expresión más completa, aunque no única para todos.

Otra modificación que entendemos cualitativamente muy importante es la extensión de la experiencia a los futuros Maestros de Educación Primaria. Se dispone para el curso 2002/2003 , además de la colaboración desde ya hace 5 años, del I.E.S. “Batalla de Clavijo” de Logroño en su clase de Taller de Matemáticas de la ESO, la participación de estudiantes de Magisterio, de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica, para estudio de la mejora de la capacidad de demostración matemática, utilizando el mismo entorno de aprendizaje.

7.- Bibliografía.

Appel y Haken (1977) – "La solución del problema del mapa de los cuatro colores", *Investigación y Cienci*, Dcbre: 78-90.

Arbelaez, G. I. (1995) – "Una aproximación histórico-filosófica a la demostración y el rigor matemático", Cali, UniValle, Tesis de Maestría.

Baeza, P. y otros (1999) – "Aprendizajo Colaborativo Asistido por Computador: La Esencia Interactiva. http://contexto-educativo.co.ar/1999/12/nota-8.htm

Balacheff, N (1987) – "Processus de preuve et situations de validation".- Educational Studies in Mathematics, 18: 147-176.

Bell, A. (1976) – "A study of pupils' Proof.-explanations in mathematics situations". Educational Studies in Mathematics, V: 23-40.

Boolos, G. (1993) – "The Logic of Provability", Cambridge: Cambridge University Press.

Boolos, G. y Sambin, G. (1991) – "Provability: the emergence of a mathematical modality", *Studia Logica*, 50: 1-23.

Castillo, J. (1999) – "El trabajo colaborativo a través de Internet con BSCW" http://www.rediris.es/cvu/publ/bscw99.html

Cupillari, A. (1989) - "Proof without words: 1+2+3+ ... +n=[n(n+1)]/2", Mathematics Magazine, 62, 259.

De Gortari, E. (1983) - "Conclusiones y pruebas en la ciencia", Barcelona, Océano.

Díaz, J. y M.C. Batanero (1994) - "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos", Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, nª.3, 325-335.

Dieudonné, J. (1987) – "The concept of 'rigorous proof'". *The Mathematical Gazzete* 80: 204-206.

Douek, N. (2000) – "Comparing argumentation ad proof in a mathematics education". *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.(http://www-cabri.imag.fr/Preuve).*

Fetisov, A. (1973) - "La demostración en Geometría", Temas Matemáticos, Limus-Wiley (Ed.).

Finochiaro, M. A. (1980) - "Galileo and the Art of Reasoning", Dordrecht/Boston, Reidel.

Fischebin, E. (1982) – "Intuition and Proof.". For the learning of mathematics, 3 (2): 9-24.

Flores, A. (1993)-"Un tratamiento geométrico de la inducción matemática: pruebas que explican", Miscelánea Matemática 19, 11-23.

Garuti, R., Boero, P. y Lemut, E. (1998) – "Cognitive units of theorems and dificulty of proof.". En A. Olivier and K. Newstead (Eds.). *Proceedings of the 22th International Conferencie of PME* (Vol, 2). Stellenbosch, South Afica.

Gil, F. (1980) - "Prove. Attraverso la nozione di prova/dimostrazione", Milano, Jaca Book.

Glymour, C. (1992) – "Thinking Things Through", Cambridge (Mass.), M.I.T. Press.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (1997) – "Significado de la demostración en educación matemática".- Meaning of proofs in mathematics education, E. Pehkonen (Ed), Proceedings of the 21 th International Conference of PME, Vol 2, p.313-321.

Godino, J.D. y Recio, A.M. (1996) – "Assessment of university Through", Cambridge (Mass,), M.I.T. Press.

Herbs, P. (1998) - "Wath works as Proof. in the mathematic class?" Doctoral these. University of Georgia, Athens.

Horgan, J. (1993) – “La muerte de la demostración”, *Investigación y Ciencia*, 208.

Isles, D. (1992) - “What Evidence is There That 2^{65536} is a Natural Number?”, *Notre Dame Journal of Formal Logic.*

Johnson, D., Johnson, R. (1989) – “Cooperative Learning: Giving At-Risk Students Hopes for a Brighter Future”, *Edina, MN: International Book Company.*

Kline, M. (1980) - “Matemáticas. La pérdida de la certidumbre”. Madrid: siglo XXI, 1985.

Knut, E. (2000) - “The rebirth of proof in school mathematics in the United States”. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.(http://www-cabri.imag.fr/Preuve).*

Knowless, M. H. (1998) – “What is Proof.?! – in matemathics”. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.* (URL: http://www.cabrinet/Preuve)

Krummheuer, G. (1995) – “The ethnography of argumentation”. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom culture*s (p. 229-269). Hillsdale, N. J.: Lawrewnce Erlbaum Ass.

Lakatos, I. (1976) – “Proofs and refutations: The logic of mathematical dicovery”, In J. Worral & E. Zahar (Eds.), Cambridge University Press, Cambridge.

Lakatos, I. (1978) – “Mathematics, sicience and epistemology”, In J. Worrall & G. Currie (Eds.), *Philosophical papers,* v.2, Cambridge University Prees, Cambridge.

Legris, J. (2001) – “Deducción y conocimiento en los orígenes de la teoría de la demostración”, *Theoría: Revista de teoría, historia y fundamentos de la ciencia,* Vol. 16, Nº 42, 421-538.

Lester, F.K (1975). – Developmental aspects of children’s ability to understand mathematical Proof.”. Journal for research in Mathematics Education, Jan., 1975: 14-25.

Lorenzo, J. de, (1992) – “Dónde situar la matemática”, *Mathesis,* 8: 369-387.

Lorenzo, J. de, (1993) – “La razón constructiva matemática y sus haceres”, *Mathesis,* 9: 129-153.

Lorenzo, J. de (1996) – “El ordenador y la demostración matemática”, *Calculemos ... Matemáticas y libertad:* homenaje a Miguel Sánchez-Mazas/edición de Javier Echeverría, Javier de Lorenzo y Lorenzo Peña.

Mackenzie, D. (1993) – “Negotiating Arithmetic, Constructing Proof.: The Sociology of Mathematics and Information Technology·, *Sical Studies of Science*, 23: 37-65.

Mariotti, M. (**1998) –** “Intuition and Proof.: reflecting on Fischbein’s paper.

Martínez, Á. (1999) - “Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática”.- Tesis Doctoral. Universidad de Córdoba.- Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba, 2000

Murillo, J. (2000) – “Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades, aplicado a la enseñanza de la geomeyría en la E.S.O.”.- Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.- Servicio de publicaciones de la UAB, 2000.

Müller, H. (1980) – “Inferencia lógica y demostraciones de la enseñanza de la matemática”.- Editorial Pueblo y Educación, La Habana (Cuba).

Nápoles, J. E. (1997).- “Sobre el significado de los objetos matemáticos. El caso de los irracionales”, Memorias COMAT’97, Universidad de Matanzas (Cuba).

Nápoles, J. E. (2000) – “La historia de y la educación matemática. Formalizando una relación informal” – Conferencia para el III Simposio de Educación Matemática, Chivilcoy, Argentina (Mayo 2001).

Nelsen, R.B. (1990) – “Proof without words corollary: Sums of squares”, Mathematics Magazine 63, 314-315.

Richard, P.R. (2000) – “Diagnostic sur la structure et la qualité des preuves inadmissibles” http.//www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Richard00.pdf

Sánchez, C. H. (1994) – "Los tres famosos problemas de la geometría griega y su historia en Colombia". Santafé de Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1992). "Two models of classroom learning using a communal database". In S. Dijkstra, M. Krammer, & J. Merriënboer, (Eds.). *Instructional models in computer-based learning environments.* Berlin: Springer-Verlag.

Schrage, G. (1992) - "Proof without words 1+2+3+ ... +n=[n(n+1)]/2", Mathematics Magazine, 65, 185.

Scriven, M. (1987) – "Probative Logic. Rewiew & Prewiew", en F. van Eemeren et al., "Argumentación: Accros the Lines of Discipline", Dordrecht, Foris, 7-32.

Senk, S. L. (1985) - "How web do students writw geometry proofs?". Mathematics Teacher, Sep. 1995: 448-456.

Serrano, J. (1991) - "El binomio demostración-explicación", México, Trillas.

Smullyan, R. (1992) - "Gödel's Incompleteness Therorems", Oxford/New York: Oxford University Press.

Tymocko, Th. (1979) – "The Four.Color problem ad Its Philosophical Significance", *The Journal of Philosophy* 76-2, 57-83 En Tymoczko (ed.) 1986, 243-266.

Ucrós, M.A. (1996) – "Sistema de investigación cooperativa bajo la perspectiva del modelo YUBARTA" Tesis. Santa Fe de Bogotá : Uniandes.

Vega, L. (1990a)-"Dureza y fragilidad de las demostraciones", Signos (Anuario de Humanidades, UAM-Iztapalapa), III, 127-144. -Vega, L. (1990b)-"La trama de la demostración", Madrid, Alianza.

Vega, L. (1992a)-"Los *elementos* de geometría y el desarrollo de la idea de demostración", Mathesis, 8, 403-423.

Vega, L. (1992b)-"¿Pruebas o demostraciones?. Problemas en torno a la idea de demostración matemática", Mathesis 8, 155-177

Vega, L. (1993)-"La encrucijada de la demostración", Agora, 12/1, 69-85.

Vega, L. (1994a)-"Argumentos, pruebas y demostraciones", en AAVV, Perspectivas actuales de lógica y filosofía de la ciencia, Madrid, Siglo XXI, 202-221.

Vega, L. (1994b)-"La demostración «more geométrico»: notas para la historia de una extrapolación", Mathesis, 10: 25-45

Vega, L. (1995) -"En torno a la idea tradicional de demostración", Laguna, 3: 28-56.

Vega, L. (1996) -"La dimostrazione", en Salvatore Settis (ed.) I Greci, Torino, Einaudi,, Vol. I, 285-318.

Vega, L. (1999) – "Artes de la razón: una historia de la demostración en la Edad Media", universidad Nacional de Educación a Distancia, Aula Abierta.

Villiers, M. de (1993) – "El papel y la función de la demostración en matemáticas", *Epsilon: Revista matemática de bachillerato*, Nº 26 15-30.

Villiers, M. de (2000) – "Developing understanding of Proof. within the context of defining quadrilaterals". *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.(http://www-cabri.imag.fr/Preuve).*

Weinstein, M. (1990) -"Towards an account of argumentation in science", Argumentation, 4: 169-298.

Williams, E. (1980) – "An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof". Journal for Research in Mathematics Education, 11 (3): 165-166.

Wu, T.C. (1989) -"Proofs witout words: (1x2)+(**2x3**)+(3x4)+...+ (n-1)n=(n-1)n(n+1)/3", Mathematics Magazine, 62, 27.

Zerger, M.J. (1990)-"Proof without words: Sums of Triangular Numbers", Mathematics Magazine, 63, 314.