La mecánica de la demostración y la demostración mecánica*

Tomás Recio[1]
Universidad de Cantabria

… y aporto mi convicción (que fue
lugar común durante siglos) de que
estudiar Geometría enseña a discurrir, como
enfrentarse a problemas geométricos
prepara el ánimo para el esfuerzo y la dificultad.
L. Calvo Sotelo [CS]

Resumen: El objetivo de la ponencia es comentar la situacion actual y las perspectivas de la demostracion de teoremas geométricos ante los programas informáticos de geometría dinámica y los avances de la demostración automática. La mecánica de la demostración es, en buena medida, la mecánica del pensamiento plausible, de las técnicas mentales para desvelar un encadenamiento lógico de razones que conduzca a la resolución de las situaciones problemáticas. La posibilidad de exploración exhaustiva de situaciones geométricas mediante programas de geometría dinámica plantea ya algunas dudas sobre la necesidad de "demostrar para verificar" la certeza de lo que es estadísticamente evidente. La reciente posibilidad de demostrar mecánicamente termina con las últimas dudas. Surgen así con más fuerza otros roles de la demostración: el de aportar comprensión sobre los hechos, el de ser un vehículo de comunicacion de la certeza de los mismos al otro, etc. Pero estos otros roles pueden estar más próximos a la epistemología, a la psicología o al marketing que a la matemática (tradicional). A la luz de estas disquisiciones abordaremos la pregunta: ¿es posible, es conveniente, es necesario enseñar a demostrar en la geometría que se imparte en un sistema educativo generalizado?

1. Un poco de historia

Posiblemente todas las épocas son igualmente críticas y confusas para aquellos que las viven en tiempo presente; y siempre en todo tiempo pretérito las cosas han estado más claras… Al menos así lo parece cuando se habla del papel de la demostración en las matemáticas y en su enseñanza y, más concretamente, en su enseñanza en el contexto educativo español.

Algunos afirman que las matemáticas comienzan hace 6.000 años, con la actividad de contar. El desarrollo de mecanismos de medida, de cálculo con números y del consiguiente establecimiento de ciertas fórmulas algebraicas es 2.000 años posterior. Hay que esperar casi otros 2.000 años para la aparición de las demostraciones matemáticas, tal y como hoy las entendemos: un encadenamiento meramente lógico de conclusiones en el marco de un sistema axiomático. Como dice[2] el historiador de las matemáticas E. T. Bell, “las demostraciones son cadenas que amarran la razón humana desde hace 2300 años”.

La vinculación del estilo demostrativo a la geometría (todavía en el siglo XVII Spinoza se refiere a la “*more geometrica demonstratio*”) supone un lastre para el desarrollo de

* Texto correspondiente a la presentación hecha en las X JAEM (Zaragoza, 7-9 de septiembre de 2001).
[1] Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria. 39071-Santander. Email: recio@matesco.unican.es
[2] Citado en “Demonstração – uma questão polémica”, por C. Loureiro y R. Bastos en [LB].

ciertas fórmulas y cálculos: por ejemplo, en Euclides se establece una demostración geométrica del desarrollo de $(x+y)^2$, pero no se obtiene una expresión similar para $(x+y)^4$, por falta de una adecuada interpretación geométrica de la correspondiente identidad. Sólo en el siglo XIX se alcanza una fundamentación axiomática del Análisis Matemático; y hay que esperar al siglo XX para llegar a una unificación (basada en la lógica y la teoría de conjuntos) estructural en todas las ramas de la matemática.

En la actualidad, un siglo después de la crisis de fundamentos, de Gödel, Turing y Chaitin (mostrando diversas limitaciones de los sistemas axiomáticos a la capacidad de probar, computar o mostrar), después de Brouwer y Wittgenstein (con sus distintas aproximaciones filosóficas al hecho matemático), del estilo unificador de Bourbaki y de los resultados de indecibilidad de Cohen, Matiyasiewicz o Novikov, de las soluciones de problemas clásicos (conjetura de Kepler, problema de los cuatro colores) mediante cálculos intensivos de ordenador, las cosas no pueden estar claras… salvo que el papel de la demostración en matemáticas (dejando a un lado la geometría), no ha sido siempre el mismo. El camino de la demostración en la historia de las matemáticas es largo y tortuoso y de porvenir incierto.

2. Demostraciones con cálculos por ordenador

Si nos fijamos en uno de los temas novedosos mencionados arriba, la resolución de conjeturas mediante una demostración tradicional pero con el recurso a la capacidad de cálculo del ordenador para dilucidar una serie de casos dentro de esa demostración, podría pensarse que esta novedad no afecta a la matemática de los matemáticos “corrientes”, sino sólo a problemas de extraordinaria envergadura y complejidad, del mismo modo que uno suele pensar que las paradojas de la física cuántica, por más que se refieren al mundo del que forma parte, no van a afectarle en la vida cotidiana.

Pues bien, sin ir más lejos, en el número 2.3 de La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (Septiembre-Diciembre de 1999), aparece un breve artículo de divulgación de Bochis y Santos [BS] relativo a ciertos aspectos del problema XVIII de Hilbert, en el que esbozan la prueba de que ningún esteroedro (una poliedro convexo que enloseta el espacio tridimensional con teselas iguales, de modo transitivo) puede tener mas de 162 caras (rebajando considerablemente la cota de 390 obtenida por el discípulo de Voronoi, Delone, en 1961). Ahora bien, la prueba incluye una comprobación (“imposible de realizar a mano”, como señalan los autores) realizada mediante una verificación exhaustiva de ciertos casos con la ayuda de un programa escrito en el lenguaje de Maple (un bien conocido software matemático de cálculo simbólico, como Mathematica o Derive). El recurso al ordenador ¿hace esta prueba menos rigurosa? ¿Sería muy diferente si los autores nos presentaran, en cambio, el resultado de diez años de comprobaciones de su puño y letra?

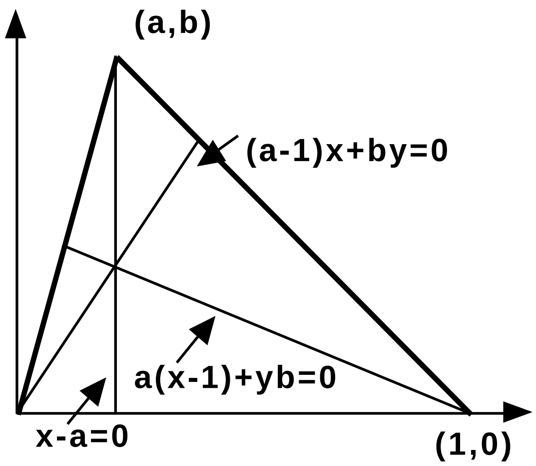
Cambiando de ejemplo, podemos también preguntarnos si resulta más matemático el cálculo de la órbita de la Luna realizado por el astrónomo Charles Delaunay desde 1847 hasta su publicación en dos gruesos volúmenes en 1867 (diez años de cálculo, diez años de cuidadosa verficación personal) que la repetición del mismo cálculo en apenas veinte horas, por Andre Deprit, Jaques Henrard y Arnold Brom (por el que recibieron el James Craig Award de la National Academy of Sciences de los Estados Unidos de America), del Boeing Scientific Research Laboratory, en 1970, usando el programa de cálculo simbólico Macsyma. Digamos, de paso, que encontraron dos errores, de poca importancia, en los cálculos de Delaunay… ¿O eran ellos –o era Macsyma- los errados?

Tal vez ahora, tras veinte años de ordenador personal, estemos más dispuestos que hace una década a admitir la validez de las pruebas matemáticas, tradicionales en su planteamiento, pero en las que el ordenador interviene de forma decisiva (ie. sin otra alternativa por el momento). Al fin y al cabo, diríamos, la probabilidad de un error en la programación, de un mal funcionamiento en un chip del ordenador[3], etc… es mucho menor que la de cometer un fallo humano en unos cálculos o raciocionios y que el mismo no sea percibido por ningún editor o lector[4] (si el resultado es publicado en una revista).

3. Demostraciones por verificación de muchos casos particulares

A pesar de lo dicho en el párrafo precedente muchos dudaríamos en admitir como válida la siguiente prueba probabilística del conocido teorema que afirma que las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto, consistente en verificar que esto ocurre en una gran cantidad de triángulos "suficientemente" genéricos: por ejemplo, moviendo aleatoriamente una construcción "ad hoc" realizada con algún programa de geometría dinámica, como Cabri, Sketchpad o Cinderella. Pero veamos un argumento que apoya esta forma de proceder.

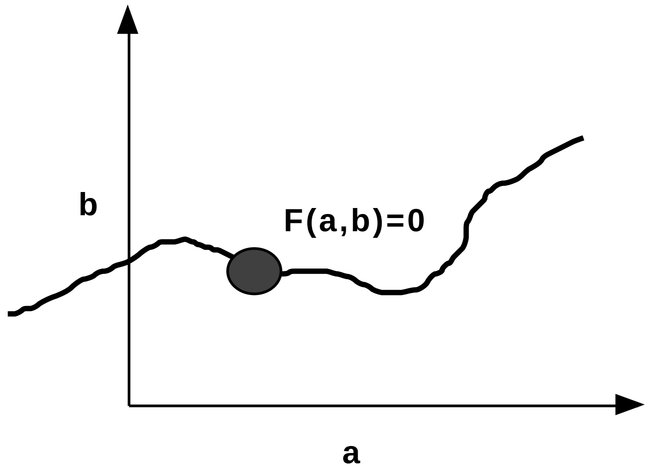
Para empezar, si consideramos que la intersección de las tres alturas es una propiedad que se conserva por semejanza, deduciremos que nos bastaría probarla para triángulos con vértices (0,0), (1,0) y (a,b). Así pues, el conjunto de todos los triángulos que necesitamos estudiar puede identificarse con un plano AB (eliminando ciertas rectas que corresponderían a triángulos degenerados).



En ese plano de triángulos, aquellos que verifiquen el que las alturas se cortan en un punto han de formar un subconjunto definido por la anulación de cierto polinomio (la anulación de un determinante 3x3 con coeficientes polinomios lineales en las variables (a,b), dado que estos parámetros aparecen en las ecuaciones de las alturas, y dado que hay que imponer que el sistema lineal dado por la intersección de las tres alturas tiene solución; como es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, tiene solución si y sólo si el determinante del sistema ampliado es cero). Así pues, sin entrar realmente a dilucidar el teorema que queremos probar, vemos que los hipotéticos triángulos que lo verifiquen serán aquellos en los que el tercer vértice (a,b) anula a cierto polinomio F(a,b) (que puede ser bien idénticamente cero o bien de tercer grado).

[3] Como el ocurrido hace unos años con una unidad aritmética o FPU de Pentium, que obligó a Intel a sustituir esta componente en miles de ordenadores.

[4] Pero muchos colegas no universitarios se sorprenderían del escaso número de lectores y revisores cuidadosos que puede tener un artículo de investigación matemática (o del tiempo que es necesario que pase para que una demostración de un teorema importante sea realmente entendida y comprobada con todo detalle por un puñado de expertos). Seguramente ninguno de nosotros va a verificar la prueba del último teorema de Fermat…



Como el conjunto de puntos que verifican F(a,b)=0 es bien todo el plano (si F es idénticamente cero) o una curva algebraica –un conjunto bastante delgado en comparación con la amplitud del plano-- es bastante evidente que si F(a,b)=0 ocurre para toda una nube[5] de valores de (a,b) (como la representada por el círculo sombreado de la figura), entonces F "ha de ser" idénticamente cero, es decir, el teorema ha de verificarse para todos los triángulos. Sin entrar en mayores precisiones, se podría pensar que la probabilidad de equivocarse en una demostración tradicional supera la de "acertar" siempre sobre la curva F=0 si elegimos, digamos, un centenar de puntos al azar.

Es en este sentido como entendemos que una demostración probabilística del teorema tiene realmente gran fuerza…de hecho, esta demostración se podría convertir en un argumento no probabilístico sin más que exigir la verificación del teorema para cuatro triángulos dados al azar, pero cuyos vértices (a,b) estuvieran alineados (pues una curva de grado tres no tiene más de tres puntos en común con una recta).

Es fácil imaginar que este esquema de razonamiento se podría repetir para muchos otros teoremas de geometría elemental. Para buscar un ejemplo de naturaleza diferente, supongamos que queremos probar que en todo triángulo el incentro, circuncentro, ortocentro y baricentro están alineados. Resulta que esto es así cuando el triángulo es isósceles. Ahora bien, en el conjunto (plano (a,b)) de todos los triángulos (con vértices (0,0), (1,0), (a,b)), los triángulos isósceles ocupan simplemente la recta a=1/2. Es evidente que una mera comprobación al azar de unos cuantos casos fuera de esta recta va a descartar el presunto teorema (salvo en el caso improbable de que todos los casos sean elegidos con el vértice (a,b) en esa recta: aquí el método incorrecto es, precisamente, probar con una serie de vértices alineados).

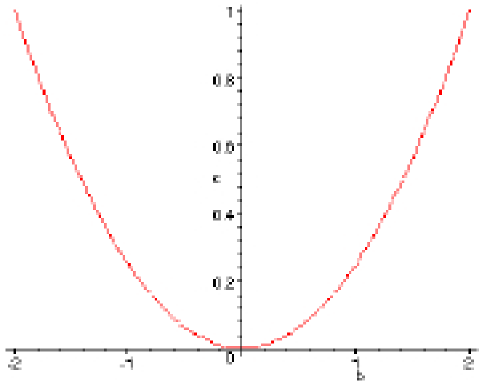
Para no dejar la lector con una impresión errónea, destaquemos que en otras áreas de las matemáticas hay argumentos contrarios al uso indiscriminado de pruebas de carácter estadístico. Por ejemplo[6], para todo entero menor que 10^{23} (un número enorme), se verifica que el logaritmo integral de x, li(x) (la integral definida de 2 a x, de 1/ln(t)) es mayor que el número π(x), de los primos menores que x. Sin embargo, un resultado de Littlewood muestra que li(x)-π(x) cambia de signo infinitas veces, para valores suficientemente grandes (¡muy grandes!) de x.

Por poner otro ejemplo distinto, veremos que no resulta tan evidente como en el caso de la geometría euclídea elemental el argumentar o descartar, con métodos probabilísticos, si

[5] Por ejemplo, para más de tres puntos (a,b) alineados, dado que F, si no es cero, tiene grado tres.

[6] Ejemplo que aparece en unas interesantes notas del prof. José Luis Gómez Pardo (Universidad de Santiago de Compostela).

hay algún polinomio de grado n, con coeficientes reales, que tenga todas sus raíces reales. Si consideramos cada polinomio de grado n con coeficiente inicial 1 como un punto (cuyas coordenadas son los coeficientes del polinomio) de R^n, el conjunto de puntos que corresponden con los polinomios con todas sus raíces reales tiene un cierto tamaño, no es de medida nula. Pero lo mismo ocurre con los que tienen menos raíces, por lo que no es obvio si un procedimiento de búsqueda al azar de polinomios con todas las raíces reales acabaría encontrando un polinomio con tal propiedad (dejando a un lado la prueba trivial consistente en multiplicar (x-1)(x-2)…(x-n)).



En la figura hemos representado el caso del polinomio de segundo grado x^2+bx+c, que se identifica con un punto del plano (b,c). La parábola representa los puntos donde $b^2-4c=0$; así los puntos donde $b^2-4c>0$ representan aquellos polinomios con dos raíces reales, mientras que $b^2-4c<0$ describe aquellos que no tienen raíces reales. Para polinomios de grado superior la situación se complica bastante; resulta todavía hoy un área de investigación activa la descripción ajustada y el análisis de las propiedades de las regiones correspondientes a un número dado de raíces reales de un polinomio de grado arbitrario.

4. La demostración mecánica

Aún podemos dar una vuelta más a la tuerca… y plantearnos la existencia de pruebas exactas pero totalmente automáticas, en las que la intervención humana se reduzca a un mínimo. Se trata, idealmente, de concebir un programa (independiente del teorema que se quiera probar o refutar) tal que, al introducir cualquier enunciado, responda indicando la verdad o falsedad del mismo y aportando las razones en las que basa su respuesta.

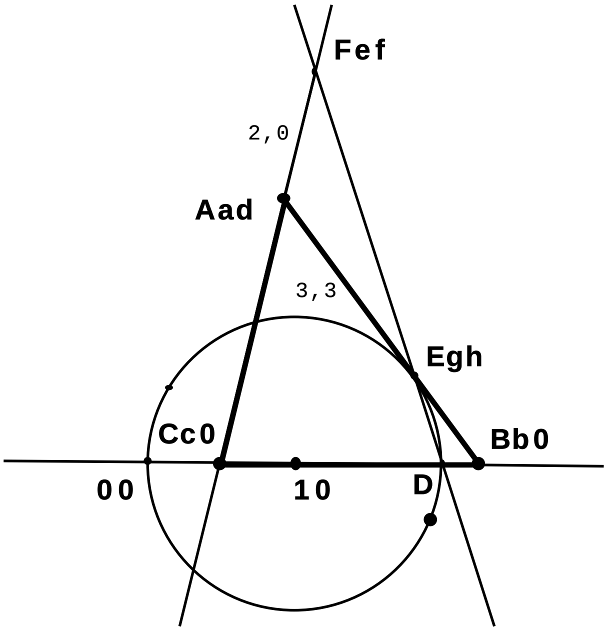
Aunque esta pretensión es antigua (podríamos remontarnos a Leibnitz, por ejemplo) y hay una amplia variedad de trabajos y realizaciones sobre este tema[7], los programas de demostración automática suelen ser bastante limitados en la práctica, por las restricciones impuestas, todavía, por la capacidad y velocidad de cálculo de los ordenadores de hoy. Sin embargo es interesante señalar que actualmente se da una motivación inesperada para desarrollar tales programas de demostración automática: juegan un papel importante en el desarrollo de estándares para la comunicación entre programas de matemáticas y para la reproducción de textos matemáticos a través de Internet. No es casualidad que B. Buchberger se dedique, en la actualidad, al desarrollo de un proyecto de demostración automática (el proyecto *Theorema*), junto con el bien conocido programa Mathematica.

A pesar de lo dicho, en ámbitos concretos de la matemática, como la geometría elemental, se han desarrollado demostradores automáticos de teoremas con cierto éxito

[7] Veáse, por ejemplo, el reciente "survey" de Barendregt-Cohen [BC], sobre la interrelación entre la demostración automática y el cálculo simbólico, presentado en la reunión del año 2.000 del grupo "Calculemus", dedicado a esta temática.

práctico. Remitiendo al lector a la detallada descripción que aparece en [R98] diremos tan sólo que dichos programas de demostración automática proceden traduciendo las hipótesis y la tesis a fórmulas polinómicas (al estilo de la Geometría Analítica). Luego tratan de verificar si la tesis es una combinación de las hipótesis (mediante algoritmos algebraicos, por tanto de carácter exacto, no aproximado o probabilístico). Si este es el caso, el programa responde que la tesis se sigue de las hipótesis y que, por tanto, el teorema es cierto.

En otro caso, además, el programa puede llegar a aportar tesis complementarias para que el presunto teorema eunciado sea realmente correcto (aportando, *grosso modo*, los polinomios que obstaculizan el que la tesis sea una combinación de las hipótesis). Veamos, muy sucintamente, un ejemplo, sin entrar apenas en detalles y simplificando groseramente las explicaciones.



En la figura de arriba (construída con Cabri-Geometre) tenemos el triángulo ABC (cuyos vértices tienen como coordenadas A(a,d), B(b,0), C(c,0) y un círculo con centro en el lado BC y tangente al lado AB en el punto E(g,h). Suponemos, sin pérdida de generalidad, que el círculo tiene el centro en el punto (1,0) que es de radio 1. Se traza la recta que pasa por E y por el punto D(2,0) de intersección del círculo con el lado sobre el que está el centro. Dicha recta corta al tercer lado en un punto F(e,f). Se trata de probar que la <u>distancia AE es igual a la distancia AF</u>. Obviamente esto es falso, como muestran los valores de las medidas que aparecen en la figura, pero queremos que nos lo confirme el ordenador y que nos aporte otras condiciones para que dicha tesis sea cierta.

Las hipótesis y tesis, por tanto, se podrían expresar así:

<u>Hipótesis</u>:
E(g,h) en el círculo: (g-1)^2+h^2-1=0
E(g,h) en el lado AB: d(a-g)-(d-h)(a-b)=0
F(e,f) en la línea DE: h(g-e)-(h-f)(g-2)=0
F(e,f) en la línea AC: d(a-e)-(d-f)(a-c)=0
Tangencia: (g-1,h) perpendicular a AB: (g-1)(a-b)+hd=0

No degeneración: b≠c, d≠0

<u>Tesis</u>:
(a-g)^2+(d-h)^2=(a-e)^2+(d-f)^2

Prueba (generada automáticamente con el programa CoCoA[8], nuestros comentarios en itálica, el output de CoCoA en negrita):

```
Use R::=Q[tkefghdbac];

H:=Ideal((g-1)^2+h^2-1,
 d(a-g)-(d-h)(a-b),
 h(g-e)-(h-f)(g-2),
 d(a-e)-(d-f)(a-c),
 (g-1)(a-b)+hd,
 (b-c)t-1,dk-1)
```

Aquí aparecen todas las hipótesis, incluyendo las de no degeneración mediante el artificio de multiplicar por una variable muda y restar 1, pues (b-c)t-1=0 es lo mismo que b≠c, etc.)

Dim(R/H)
3

Nos indica que en este conjunto de hipótesis, en esta construcción, hay tres parámetros independientes: son a,b,c…las restantes coordeanadas quedan determinadas a partir de estas.

```
S:=Saturation(H, Ideal(
(a-g)^2+(d-h)^2-((a-e)^2+(d-f)^2)))

Elim(t..d,S)
```
Ideal(0)

Hemos eliminado todas las variables dependientes, es decir, desde t hasta d, del saturado del ideal de las hipótesis por el ideal de las tesis. El saturado nos da el conjunto de polinomios que multiplicados por la tesis son una combinación de las hipótesis. Puesto que el resultado es cero, el teorema es falso en general. Sería cierto si el resultado fuese 1.

```
J:=Ideal((g-1)^2+h^2-1,
 d(a-g)-(d-h)(a-b),
 h(g-e)-(h-f)(g-2),
 d(a-e)-(d-f)(a-c),
 (g-1)(a-b)+hd,
 (b-c)t-1,dk-1,
 (a-g)^2+(d-h)^2-((a-e)^2+(d-f)^2))
```

Se añade entonces al ideal de las hipótesis la propia tesis y se vuelve a eliminar.

```
SS:=Elim(t..d,J);
```

---

[8] CoCoA es un programa de cálculo simbólico de carácter gratuito, desarrollado por un equipo dirigido por el prof. L. Robbiano de la Universidad de Génova. Ver http://cocoa.dima.unige.it

SS
Ideal(-b^2a^3 + b^2a^2c + 2b^2a^2 + 2ba^3 - 2b^2ac - 2ba^2c - b^2a - 2ba^2 - a^3 + b^2c + 2bac + a^2c)

El resultado es un polinomio cuya anulación nos indica hipótesis complementarias para la validez del teorema.

Factor(-b^2a^3 + b^2a^2c + 2b^2a^2 + 2ba^3 - 2b^2ac - 2ba^2c - b^2a - 2ba^2 - a^3 + b^2c + 2bac + a^2c);
[[a - c, 1], [ba - b - a, 2], [-1, 1]]

Factorizado el polinomio, vemos[9] *que si a-c=0 el teorema puede ser cierto. Es decir, si el triángulo es rectángulo en el vértice C.*

Saturation(Ideal((g-1)^2+h^2-1,
 d(a-g)-(d-h)(a-b),
 h(g-e)-(h-f)(g-2),
 d(a-e)-(d-f)(a-c),
 (g-1)(a-b)+hd,
 (b-c)t-1,dk-1,
 a-c), Ideal((a-g)^2+(d-h)^2-((a-e)^2+(d-f)^2)))
Ideal(1)

Verificamos que, añadiendo la nueva hipótesis el resultado de la saturación ya no es cero. El teorema es cierto para triángulos rectángulos. ¡QED!

Señalemos que es también posible exhibir, algorítmicamente, la tesis como combinación de las nuevas hipótesis (es decir, el demostrador puede mostrar las “razones” por las que el teorema es verdad). En este caso se obtiene una larga lista de polinomios por los que hay que multiplicar las hipótesis para llegar a la tesis (que aparece en primer lugar en la sintaxis de GenRepr). Hemos truncado la misma aproximadamente en un quinto de la longitud de la lista original.

GenRepr ((a-g)^2+(d-h)^2-((a-e)^2+(d-f)^2),
Ideal((g-1)^2+h^2-1,
 d(a-g)-(d-h)(a-b),
 h(g-e)-(h-f)(g-2),
 d(a-e)-(d-f)(a-c),
 (g-1)(a-b)+hd,
 (b-c)t-1,dk-1,
 a-c))

[t^2k^3f^2gd^3b - t^2k^3f^2gd^3c - 2t^2k^3f^2d^3b + tk^3f^2gd^3b + 2t^2k^3f^2d^3c - tk^3f^2gd^3c - 2tk^3f^2d^3b - tk^3fgd^2b^2 + 2tk^3f^2d^3c + t^2k^2fgd^3c + tk^3fgd^2bc - 2t^2k^2fgd^3 + tk^3fgd^2b + 2tk^3fd^2b^2 -

[9] El lector introducido en estos temas habrá podido observar que aparece otro factor en uno de los pasos de esta demostración automática: junto con a-c, tenemos el polinomio ba-b-a, que corresponde a una hipérbola de posibles situaciones de (a,b) en las que el teorema podría verificarse. Dejamos al lector el interesante estudio de este caso, ¿un nuevo teorema?

tk^3fgd^2c - t^2k^2fd^3c + tk^2fgd^3c - 2tk^3fd^2bc + 2t^2k^2fd^3 - t^2kf^2d^3 - 2tk^2fgd^3 - 2tk^3fd^2b + 2tk^3fd^2c - tk^2fd^3c - tk^2gd^2bc - t^2kfd^2ac + 2tk^2fd^3 - tkf^2d^3 - k^2f^2d^2b + 2tk^2gd^2b + 2t^2kfd^2a + t^2kfd^2c + k^2f^2d^2c + tk^2gd^2c + tk^2d^2bc - tkfd^2ac - 2t^2kfd^2 - 2tk^2gd^2 + kf^2hd^2 - 2tk^2d^2b + tkfd^2b + k^2fdb^2 + 2tkfd^2a - tk^2d^2c + tkfd^2c + kfgd^2c - k^2fdbc + tkdbac + 2tk^2d^2 - 2tkfd^2 + tf^2d^2 - 2kfgd^2 - k^2fdb - kfhdb - 2tkdba + k^2fdc - kfd^2c - tkdbc - tfdbc - kgdbc - tkdac + tfdac + kfhd + 2kfd^2 + 2tkdb + 2tfdb + 2kgdb + 2tkda - 2tfda + tkdc + kgdc + kdbc - fdbc - 2tkd - 2kgd - 2kdb + 2fdb - 2kdc + fdc + b^2c + 2kd - 3fd - 2b^2 - bc - ac + 2b + 2a + c - 1,
etc…

5. La demostración en la enseñanza secundaria

El Real Decreto de Enseñanzas Mínimas para la ESO, del pasado diciembre del 2000, señala en su introducción que *"La finalidad fundamental de la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo de la facultad de razonamiento y de abstracción"*. Parece estar muy próxima esa declaración del Real Decreto al sentimiento que desprende la cita del hermoso artículo de Calvo Sotelo con la que hemos iniciado nuestras reflexiones. Los estándares curriculares de la NCTM [NCTM] también apuntan (en el ciclo 9-12, correspondiente a nuestro segundo ciclo de la ESO y al Bachillerato) a que *"debe mantenerse este énfasis…en la importancia de la verificación deductiva"*. No cabe duda que la enseñanza de las matemáticas puede servir (pero también la del latín, por ejemplo) para favorecer la capacidad de razonamiento y el rigor argumentativo. Pero no deben confundirse esas capacidades con el tipo tan particular de razonamiento que se requiere en la demostración matemática tradicional.

Por ejemplo, un alumno enfrentado a una sencilla prueba geométrica tiene, simultáneamente, que[10] dominar el léxico, la simbología, la mecánica de la deducción lógica (ie. teniendo en cuenta la diferencia entre el discurso natural y el deductivo[11]), las propiedades de las figuras… Es, seguramente, pedirle demasiado, en una enseñanza que, por razones sociales y económicas, debe primordialmente atender –en la etapa obligatoria- a procurar una "numerización" básica para todos los ciudadanos.

Además, puede ser pertinente reproducir aquí el comentario de Hanna [H], citado en [DT]:

> *"Ninguna investigación convincente ha confirmado la hipótesis de que una dedicación a las demostraciones matemáticas haya resultado en una trasferencia de este aprendizaje en forma de capacidades para aplicar hábitos de raciocionio en otras áreas del curriculum".*

El aprendizaje de la sofisticada idea de demostración matemática (al fin y al cabo, llevó a la humanidad cuatro mil años de matemáticas antes de dar con ella) no tiene, en nuestra opinión, por qué estar entre las prioridades educativas. El problema es que el sistema educativo está preparado para trasmitir una formación de carácter más académico que utilitario; y la enseñanza de la demostración tiene un pedigree académico considerable. Pero este es otro asunto que tiene poco que ver con las matemáticas: aquí el problema son las limitaciones extrínsecas (medios, organización del sistema educativo, ámbito y objetivos del mismo, etc.) e intrínsecas (madurez, capacidad, interés, expectativas futuras del alumno, etc.) que todo el

---

[10] Cita libre de un artículo de P.R. Richard que forma parte de su tesis [Ri], en el que se dice textualmente (en francés): "…para el que aprende, la rigidez verbal (del léxico) y simbólica (del registro matemático), la linealidad aparente del texto, la complicación intrínseca que consiste en razonar en geometría sin competencia deductiva y la dificultad de concentrase simultáneamente sobre varias propiedades…"

[11] Según Duval [Du].

mundo conoce, para modificar los objetivos y los modos docentes requeridos en una enseñanza de masas.

Sin embargo, somos conscientes de que el imparable crecimiento del número de alumnos que continuan su formación tras el periodo obligatorio (por ejemplo, en USA se plantean ya el que la educación superior –en algún sentido- ataña al 80% de los jóvenes), acarrea el que las consecuencias de lo que estamos argumentado se trasfieran rápidamente entre la ESO, el Bachillerato y la Universidad. Por eso una forma razonable de hacer compatible el valor educativo de la demostración con las circunstancias actuales de la enseñanza de las matemáticas es reducir el rigor de la demostración a un nivel escolarmente aceptable, sustituyendo la idea de prueba formal por la de una demostración a la medida de las características de los escolares. Como señala De la Torre [DT] :

> "*Aún defendiendo la necesidad del rigor y de un lenguaje apropiado a las matemáticas, éste no puede entrar en conflicto con el lenguaje natural (salvo que estemos en el terreno de la investigación universitaria), como sucede con la disyunción "o", inclusiva o exclusiva; el "existe uno" o "existe sólo uno", etc. Ese lenguaje "natural" debe recuperarse para la clase de matemáticas, construyendo una ampliación del lenguaje natural, con las palabras que se precisen y que es necesario perfilar, en el momento necesario, buscando el objetivo de incardinar la realidad matemática en la realidad cultural y social de los estudiantes…( )…Las demostraciones en matemáticas, en geometría, no pueden ser para "desarrollar el conocimiento", tienen que tener como meta la materia (las matemáticas), y por lo tanto, la contribución de esta materia a la educación. El estudio de la demostración se ha de supeditar a los fines que tenemos previstos para la matemática.*"

Por el contrario, otros consideran que la incardinación del lenguaje natural (frente al deductivo, propio de la demostración formal) en el aula puede significar, en esencia, la sustitución de la noción matemática tradicional de prueba por la, más débil, de mera visualización o comprobación. Seguramente es verdad, pero la cuestión, como puntualiza De la Torre, es si ese debilitamiento contribuye o no a los objetivos generales de la enseñanza que se imparte: por ejemplo, dotar a todos los españoles menores de dieciseis años de un bagage matemático suficiente para andar por la vida[12].

---

[12] Una cuestión polémica. Algunos consideran que esa tarea es de poca monta, que las necesidades matemáticas de un adulto se reducen a cuatro cosas. Citando a A. Delibes [De]:

> *"Evidentemente si se habla de unos conocimientos básicos de matemáticas, que TODA la población pueda y deba tener, no se podrá ir mucho más allá de las cuatro reglas, algún sencillo porcentaje y unos ciertos rudimentos de geometría y si para ello es preciso tener escolarizada a la ciudadanía hasta los 16 o 18 años no hablaremos de matemáticas sino de safaris matemáticos, fotografía matemática, pasatiempos matemáticos y otros entretenimientos propios de recreos y guarderías. Comparto en ese caso la postura de Miguel de Guzmán cuando renuncia a otra objetivo distinto del de conseguir en los escolares una "actitud positiva hacia las matemáticas"."*

Naturalmente, esto es así si ese adulto fuera confinado en una isla desierta, pero no lo es si deseamos que tenga alguna capacidad para ser un agente activo de la sociedad tecnológica en la que vivimos. Porque,

- ¿Cuántos conciudadanos tienen, tras la enseñanza obligatoria, instrumentos matemáticos para estimar, aún groseramente, en sus casas, las cuotas mensuales de amortización de una hipoteca, a 15 años y con un interés fijo del 6%?
- ¿Cuántos razonarían como aquel concursante "de letras", para dividir 12 entre 1/2, obteniendo 3?
- ¿Que ciudadanos estarían dispuestos a entrar en una discusión sobre si es lo mismo estar seguro de una cosa con un 95% de fiabilidad que estar seguro de que no ocurre lo contrario con la misma fiabilidad?
- ¿Cuántos pueden hacer un cálculo mental para decidir que se han equivocado un orden de magnitud al hacer la declaración de la renta o para adelantar cuál sería –aproximadamente- el resultado final de la misma si incluyeran tal ingreso de rentas del trabajo, que se les había casualmente "olvidado" al realizar el primer borrador de la declaración?
- ¿Qué número de aficionados al deporte rey se haría una idea del número de viviendas que se pueden construir (100 metros cuadrados por vivienda, cuatro por planta, seis plantas) si derriban el viejo estadio

6. La demostración en la creación matemática

Otra vía, preconizada por tantos expertos, de aproximación a la“demotración escolar” es la sustitución de la idea de “demostrar para verificar o justificar” por la de “demostrar para explicar”. Puesto que la demostración es la forma característica de discurso de los matemáticos, se trata, en definitiva, de seguir la vía natural por la que los matemáticos producen demostraciones: poniendo al alumno en una situación de creación matemática, en la que la demostración es antes una parte del proceso de explicación de los fenómenos que se investigan que un producto acabado.

Así, de la bien conocida la lista de funciones de la demostración:

-Verificación, Convicción
-Explicación
-Sistematización
-Descubrimiento
-Comunicación
-Reto intelectual

De Villiers [DV99] destaca el papel esencial en la investigación matemática de las funciones de descubrimiento y explicación. Y añade en [DV00]:

> *“Parece importante, desde una perspectiva epistemológica, el que los profesores de matemáticas traten de desarrollar comprensión y aprecio por estas otras funciones de la demostración para hacer de la misma una actividad más significativa para sus estudiantes. Sin embargo, si esperamos que los profesores lideren sus alumnos en el arte de resolver y proponer problemas y les permitan suficientes oportunidades para explorar, conjeturar, refutar, reformular, descubrir, explicar, sistematizar, etc., los propios profesores deberían haberse expuesto a cuestiones parecidas en su propio aprendizaje de las matemáticas.”*

El investigador recurre a la demostración formal sólo después de estar convencido de la plausibilidad de un aserto por diversos mecanismos indirectos: porque esa afirmación novedosa que va a intentar demostrar explica (o encaja bien en) otras situaciones mejor conocidas, porque la evidencia experimental apunta en esa dirección, porque alcanza a “ver” (ie. porque le resulta “evidente”) plenamente la naturaleza del fenómeno que describe el enunciado que persigue… La demostración formal resulta, entonces, una comprobación (a menudo fallida) de que la explicación hallada no se olvida de ningún caso que hubiera pasado inadvertido para la intuición, de que el argumento básico al que se haya reducido un determinado enunciado no encierra otra verdad más profunda que pudiera haber pasado desapercibida. El papel de la demostración en la investigación es, ante todo, un mecanismo de descubrimiento y exploración, de autocorrección y ajuste. Sólo al final del proceso la demostración es una forma de trasmitir a otros, siguiendo unos cánones aceptados por la

---

municipal? ¿O de los kilogramos de pintura que tienen que emplear para renovar el estado de las paredes de su casa?

· ¿Qué ecologista de pro pondría sobre la mesa, en una discusión con los amigos, el volumen de escombros que acarrearía la construcción de tal túnel del nuevo trazado de un ferrocarril, o las dimensiones pertinentes que habría de tener el lugar que se considera idóneo para ubicarlos?

· ¿Cuántos podrían atisbar la dificultad matemática que existe para determinar el tiempo que tarda un coche en hacer un recorrido de tantos metros, a partir de una gráfica que muestre sólo la velocidad que lleva en determinados puntos de un circuito (por ejemplo, si un coche sale de la parrilla a 10 kilometros por hora, y a los 50 metros de la salida iba ya a 30km/h, a 100 metros iba a 50km/h, a 200 metros iba a 90km/h, a los 400 metros iba a 170km/h, etc.)?

Pero, sobre todo, ¿cuántos habrán adquirido una cierta actitud de confianza hacia las matemáticas para acudir de modo “natural” a las matemáticas que aprendieron en la enseñanza obligatoria para abordar estos problemas, sin depender del empleado del banco, sin llamar al colega “de ciencias”…?

comunidad científica, organizadamente, esa visión íntima que el investigador ha alcanzado a consolidar de las relaciones entre ciertos entes matemáticos.

6.1 Un ejemplo

Por poner un ejemplo personal y elemental, hace unos años tuve que estudiar[13] la siguiente situación. Sea f(z) un polinomio arbitrario con coeficientes complejos y supongamos que sustituimos z=a+b*I, (donde I es la unidad imaginaria) de modo que P(a,b)=f(a+b*I)=u(a,b)+I*v(a,b), siendo, u(a,b), v(a,b) sendos polinomios con coeficientes reales (que pueden interpretarse como la parte real e imaginaria de f(a+b*I)). Como los cálculos se complican rápidamente con el grado de f(z), usamos el programa Maple para desarrollar algunos ejemplos, como el que sigue[14]:

> assume(a,real): assume(b,real):
> f:=z^5+2*z-3;
> P:=expand(subs(z=a+b*I,f));
f := z^5+2*z-3
P := a^5+5*I*a^4*b-10*a^3*b^2-10*I*a^2*b^3+5*a*b^4+I*b^5+2*a+2*I*b-3
> u(a,b):=Re(P);
u(a,b) := a^5-10*a^3*b^2+5*a*b^4+2*a-3
> v(a,b):=Im(P);
v(a,b) := 5*a^4*b-10*a^2*b^3+b^5+2*b
> gcd(u(a,b),v(a,b));
1

Sin entrar en detalles podemos decir que, ante la complejidad de los resultados de nuestros cálculos –sobre todo si se extienden a cocientes de polinomios--, hubiera sido muy oportuno el encontrar factores comunes para u(a,b) y v(a,b), a fin de simplificar las expresiones obtenidas. Sin embargo, al cabo de varios experimentos conjeturamos que u(a,b) y v(a,b) no tenían nunca factores comunes. Nótese que en esta conjetura no se postula que f(z) sea irreducible sobre los reales: en el ejemplo anterior f(z) factoriza como $f(z)=(z-1)*(z^4+z^3+z^2+z+3)$. Por tanto, f(a+b*I) no es, en general irreducible. Tampoco se afirma que u(a,b) o v(a,b) sean irreducibles (porque, como muestra nuestro ejemplo, es falso). Simplemente, no parecen tener nunca factores comunes: su máximo común divisor (que se calcula con la primitiva *gcd* en el ejemplo anterior) parece ser siempre 1.

Una conjetura de esta naturaleza admite varias vias de aproximación. La más inmediata, la consulta a expertos en Variable Compleja. Los polinomios u(a,b) y v(a,b) son dos ejemplos de funciones armónicas conjugadas; no cualquier par de polinomios aparecen como la parte real e imaginaria de un polinomio f(z), al hacer z=a+b*I, sino sólo aquellos que verifican ciertas condiciones sobre las derivadas parciales respecto de a y b, las condiciones de Cauchy-Riemann, que se estudian en cualquier curso elemental de variable compleja. Los expertos admitieron que la conjetura era original y, sin duda(?), correcta. Y que la demostración sería cosa sencilla, a partir de esas condiciones de Cauchy-Riemann. Pero tras algunas horas de trabajo al lado de algunos especialistas próximos y tras un fluído intercambio de correos con otros más lejanos, resultó evidente que no era evidente. Había que aproximarse por otras vías.

6.2 Un intento de demostración geométrica

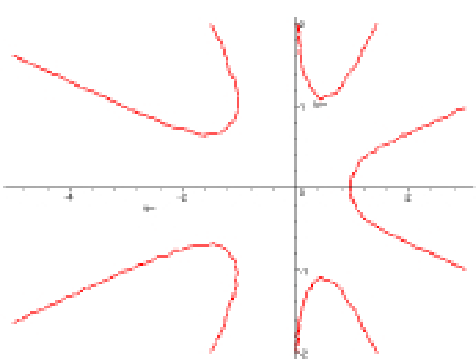
[13] En colaboración con el prof. J. R. Sendra, de la Universidad de Alcalá, como parte de una investigación sobre algoritmos de reparametrización de curvas racionales, buscando un cuerpo de coeficientes óptimo para las ecuaciones paramétricas. Ver [RS]

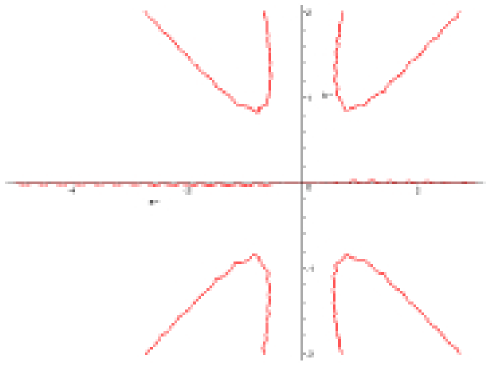
[14] El input aparece precedido del símbolo >. El output está en negrita.

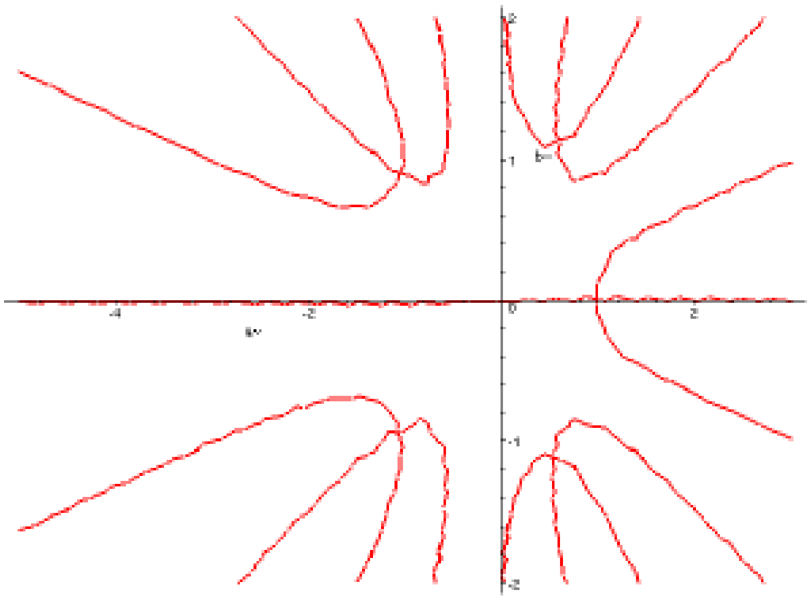
Pensamos que si u(a,b) y v(a,b) tuvieran un factor común, h(a,b), todos los puntos (a,b) tales que h(a,b)=0, serían ceros comunes de u(a,b) y de v(a,b). Así las curvas planas de ecuaciones u(a,b)=0 y v(a,b)=0 tendrían una componente común, h(a,b)=0. Ahora bien, cada punto de coordenadas reales (a,b) de esa componente común daría lugar a una raíz diferente a+b*I de f(z), pues f(a+b*I)=u(a,b)+I*v(a,b). Como f(z)=0 sólo tiene un número finito de raíces complejas (igual al grado de f(z)), el número de puntos reales de la curva h(a,b)=0 tendría que ser, como mucho, finito. Dado que una curva "suele" tener infinitos puntos, esto parece sugerir que ese posible factor h(a,b) habría de ser constante (pues sólo para ecuaciones del tipo 1=0 "parece" haber un número finito – en particular, igual a cero—de soluciones). Si todo esto es correcto, habríamos terminado la demostración. Esta idea parecía prometedora.

En las siguientes figuras aparecen, respectivamente, los dibujos de las curvas u(a,b)=0, v(a,b)=0 de nuestro ejemplo, por separado y conjuntamente, para apreciar mejor los puntos de intersección de ambas curvas.

```
> with(plots):
> implicitplot(u(a,b)), a=-5..3,b=-2..2,thickness=1);
> implicitplot(v(a,b)), a=-5..3,b=-2..2,thickness=1);
> implicitplot({u(a,b),v(a,b)}, a=-5..3,b=-2..2,thickness=2);
```







Y es ahora fácil de comprobar visualmente que los puntos reales (a,b) de intersección de ambas curvas dan, precisamente, las cinco raíces z=a+b*I de f(z)=0 (que podemos calcular con Maple).

>S:=solve(f,z);
S := 1, RootOf(_Z^4+_Z^3+_Z^2+_Z+3)
> evalf(allvalues(S[2]));
.5781471306+1.089496156*I .5781471304-1.089496156*I -1.078147131+.8998074608*I -1.078147131-.8998074608*I

Naturalmente, se aprecia que no hay componentes (trozos de curvas) comunes a las dos familias de curvas, lo que apoya nuestra conjetura.

Esta explicación geométrica tiene, sin embargo, una pega: no encaja del todo con lo que descubrimos posteriormente sobre curvas reales dadas por polinomios. Es verdad que si consideramos un polinomio no constante en dos variables, h(a,b), el número de puntos complejos de la curva h(a,b)=0 es infinito. Con un poco de imprecisión, basta dar a una de las variables un valor arbitrario y considerar las raíces complejas (puesto que sobre los complejos, todo polinomio no constante tiene raíces) del polinomio resultante en la otra variable, para obtener tantos puntos sobre la curva h(a,b)=0 como queramos. El problema es que ese argumento falla sobre los números reales: un polinomio real no constante h(a,b) puede tener un número finito de ceros en el plano real (como ocurre con $x^2+y^2=0$ o con $x^2+y^2+1=0$). Y si repetimos la aproximación geométrica considerando puntos (a,b) complejos, en vez de reales, ya no es verdad que dos puntos complejos distintos (a,b) y (c,d) den lugar a dos raíces distintas, pues a+b*I podría ser igual a c+d*I, tal como (I, 0) y (0,1). Las cosas se complicaban…así que tratamos de hallar una demostración de carácter algebraico, cambiando completamente la forma de abordar el problema.

6.3 Dos pruebas algebraicas

Una, la más corta, procede como sigue. La operación de sustituir en f(z) la variable z por a+b*I puede contemplarse como un cambio de variables. En efecto, suponemos que f(z) es realmente un polinomio en dos variables, z y w, pero que no tiene ningún término en la variable w. Entonces el cambio lineal de variables:

z----->a+b*I
w----> b

convierte f(z) en f(a+b*I), luego los factores de f(z) en factores de f(a+b*I). Como el cambio de variables es inversible, <u>todos</u> los factores de f(a+b*I) proceden de un factor de f(z), vía ese cambio. Si u(a,b) y v(a,b) tuvieran un factor común, h(a,b), sería un factor de f(a+b*I) y sería un factor real (esto es, con coeficientes reales), por serlo de dos polinomios reales. Pero ningún polinomio real h(a,b) puede ser el resultado de sustituir z por a+b*I en algún polinomio m(z), aunque este tenga coeficientes complejos: basta desarrollar el término de mayor grado de m(z), cambiando z por a+b*I para concluir que aparecen necesariamente términos en a y b con coeficientes reales y también con coeficientes complejos no reales. La demostración parece correcta (¡realmente esperamos que lo sea!), pero es un poco artificial…

La otra prueba comienza observando también que ese hipotético factor común no constante de u y v, h(a,b), debería dividir a f(a+b*I). Pero ¿cuáles son los factores de f(a+b*I)? El polinomio f(z) se factoriza (si tiene término de mayor grado igual a 1, un caso al que es fácil de reducirnos) sobre los complejos en un producto de factores de la forma (z-r), donde r es una raíz compleja cualquiera de f(z)=0. Supongamos que r=s+t*I, siendo s,t las partes reales e imaginarias de esa raíz. Entonces f(a+b*I) se factoriza en un producto de factores de la forma (a-s)+I*(b-t). Luego h(a,b), si divide a f(a+b*I), ha de ser un producto de algunos de estos factores. Y h(a,b) ha de ser un polinomio real, pues u(a,b) y v(a,b) son polinomios reales. Por tanto h(a,b) habrá de tener, junto con cada factor (a-s)+I*(b-t), el correspondiente factor conjugado (a-s)-I*(b-t). Pero hemos dicho que h(a,b) es un producto de factores de la forma (a-s)+I*(b-t), y entre estos no aparece ninguno de la forma (a-s)-I*(b-t)! Se sigue que no puede existir tal h(a,b) y se concluye así la demostración.

6.4 Retorno a las curvas

Ahora tratamos de utilizar la demostración algebraica para entender mejor las cuestiones suscitadas por la aproximación geométrica. Hemos visto que las curvas reales u(a,b)=0 y v(a,b)=0 sólo se cortan en un número finito de puntos reales, exactamente tantos como raíces a+b*I tenga el polinomio f(z)=0. Como ahora sabemos que u y v no tienen factores comunes, también resulta que u(a,b)=0 y v(a,b)=0 sólo tienen un número finito de soluciones (a,b) en el plano complejo (aunque previsiblemente muchas más que el grado de f(z), es decir, que el de raíces de este polinomio). ¿Por qué argumento geométrico debemos descartar la dificultad que habíamos encontrado, es decir, el que para una raíz r=s+t*I, no haya un número infinito de puntos complejos distintos (c,d), tales que c+d*I=s+t*I y u(c,d)=v(c,d)=0? Caemos en la cuenta de que, si consideramos la recta compleja a+b*I=s+t*I, todos los puntos (c,d) con tales características estarían sobre dicha recta. Y una recta no puede tener infinitos puntos en común con una curva, salvo que sea un factor de esta. Pero (a-s)+(y-t)*I no puede ser un factor a la vez de u(a,b) y de v(a,b), exactamente por la razón que acabamos de mostrar en la segunda prueba algebraica. Esto refuerza nuestra confianza en la misma, pues el argumento puede ser utilizado en diversos contextos.

¿Cómo describir estos puntos de intersección de las dos curvas complejas u=v=0? Observamos (pues u y v son polinomios reales) que si u(a,b)+I*v(a,b)=f(a+b*I), entonces u(a,b)-I*v(a,b)=g(a-b*I), donde g(z) es el conjugado de f(z). Luego si u(c,d) =v(c,d)=0, entonces c+d*I es una raíz de f(z) y c-d*I es una raíz de g(z). Se sigue que c y d, aunque sean complejos, quedan determinados por los n^2 pares de valores de las distintas raíces de f y g, pues c y d serán las soluciones de los n^2 sistema lineales de ecuaciones de la forma

a+b*I = una raíz de f(z)
a-b*I = una raíz de g(z)

Así, las dos curvas u(a,b)=0 y v(a,b)=0, incluso sobre los complejos, tienen sólo, a lo más, n^2 puntos distintos. Vemos así que, con este argumento diferente, llegamos también a la conclusión de que u=v=0 tienen sólo un número finito de puntos, incluso en el plano complejo. Esto no prueba, como hemos señalado, que no tengan un factor común (pues podría corresponder a una curva real con pocos puntos), pero ayuda a corroborar que las cosas funcionan adecuadamente[15]. En nuestro ejemplo (con n=5) tendríamos 25 puntos, que son calculados (mas o menos) por Maple de la forma siguiente:

```
>L:=[solve({u(a,b), v(a,b)}, {a,b})];
```

L := [{b = 0, a = 1},

{b = 0, a = RootOf(_Z^4+_Z^3+_Z^2+_Z+3)},

{a = 1/2*RootOf(_Z^4-3*_Z^3+4*_Z^2-2*_Z+3), b=RootOf(_Z^2+1-RootOf(_Z^4-3*_Z^3+4*_Z^2-2*_Z+3)+1/4*RootOf(_Z^4-3*_Z^3+4*_Z^2-2*_Z+3)^2)},

[15] Realmente, en un contexto diferente, en el que sustituimos, respectivamente, los reales y los complejos por los racionales Q y por una extensión algebraica Q(α) de grado arbitrario, este argumento permite probar que todas las hipersuperficies que se obtienen --de modo similar al desarrollado en el texto-- al sustituir z por $a+b*\alpha+c*\alpha^2+d*\alpha^3$… tienen un número finito de puntos en común, lo que es más fuerte, para grado mayor que tres, que el hecho de no tener ningún factor común.

{a=1/2*RootOf(_Z^6+3*_Z^5+5*_Z^4+5*_Z^3-8*_Z^2-10*_Z-3), b=RootOf(5*_Z^2-15*RootOf(_Z^6+3*_Z^5+5*_Z^4+5*_Z^3-8*_Z^2-10*_Z-3)^3+37*RootOf(_Z^6+3*_Z^5+5*_Z^4+5*_Z^3-8*_Z^2-10*_Z-3)+19-10*RootOf(_Z^6+3*_Z^5+5*_Z^4+5*_Z^3-8*_Z^2-10*_Z-3)^4-55/4*RootOf(_Z^6+3*_Z^5+5*_Z^4+5*_Z^3-8*_Z^2-10*_Z-3)^2-4*RootOf(_Z^6+3*_Z^5+5*_Z^4+5*_Z^3-8*_Z^2-10*_Z-3)^5)}]

Vemos que hay cuatro bloques de soluciones: el primero corresponde al punto (1,0); el segundo nos da cuatro soluciones más (cuatro valores de “a” correspondiendo a las cuatro raices de Z^4+…. =0, y b=0); el tercero proporciona cuatro valores de “a” y, para cada uno de ellos, dos más de “b” (al ser “b” la raíz cuadrada de cierta expresión): en total ocho. Similarmente, el cuarto bloque nos da doce soluciones (seis valores de “a” y dos valores de “b” para cada uno de ellos). En total 25 puntos, como predice la teoría.

Cuando comunicamos a nuestros colegas de Variable Compleja la demostración que habíamos hallado comentaron que ahora se explicaban la dificultad que habían encontrado en sus intentos de prueba por la vía del Análisis Complejo. Habíamos usado de modo esencial un resultado algebraico elemental, pero profundo: la descomposición de polinomios en el anillo C[a,b] en producto de factores irreducibles, de modo único.

6.5 En resumen…

Finalmente enfaticemos que este ejemplo, aunque elemental y limitado, puede servir para mostrar algunas de las características de la demostración en el proceso de creación matemática que hemos apuntado al principio de la sección 6:

-Establecimiento de una conjetura por vía experimental: u(a,b) y v(a,b) no tienen ningún factor común.

-Intento de demostración de la misma en un contexto “natural” (usando que los ceros reales comunes de u(a,b) y v(a,b) coinciden con las raíces a+b*I de f(z)).

-Constatación de los puntos débiles de ese argumento, ante las potenciales patologías de las “curvas” reales.

-Aproximación a la conjetura por otra vía diferente, tal vez menos natural e informativa, que se beneficia de una propiedad fundamental de los anillos de polinomios (la existencia de factorización única).

-Corroboración indirecta de la correción de la prueba obtenida, puesto que permite entender a fondo, ie. explicar, la situación planteada en el otro contexto.

-Descubrimiento, en el transcurso del proceso de prueba, de otra propiedad de las curvas u(a,b)=0, v(a,b)=0, esto es, que se cortan en un número finito de puntos (propiedad que se generaliza a extensiones Q(α) de Q).

7. La demostración en la enseñanza universitaria

Hay que destacar la diferencia esencial entre analizar el papel de la demostración en la enseñanza y analizar la enseñanza de la demostración: una cosa es describir lo que ocurre con la demostración en el quehacer docente y, otra, lo que habría que hacer para enseñar a demostrar. Ambas cosas, a veces, tienen poco que ver.

Por ejemplo, en la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario se produce, muchas veces, el curioso fenómeno de que los alumnos no aceptan de buen grado aquellos resultados que no vengan acompañados de la correspondiente prueba formal, por el profesor, en la pizarra. O los aceptan como resultados informales, colaterales, de segundo orden. Así, a las funciones clásicas de la demostración que hemos descrito en la sección 6, deberíamos añadir una más: <u>la demostración como parte esencial del contrato didáctico en matemáticas</u>.

Paradójicamente, los alumnos siguen considerando, en esta era de la información, que la trasmisión oral de un curso de matemáticas debe contener, ante todo, la validación de los resultados que se citen. Y esto no es, simplemente, por comodidad: ocurre con frecuencia con los mejores alumnos o en cursos que no exigen el conocimiento detallado de las demostraciones en los exámenes. Tampoco sucede porque el alumno espere que la demostración le vaya a ayudar a entender mejor la situación o porque realmente ponga en duda la verdad de una afirmación del profesor: muchas veces le basta al alumno una prueba poco ilustrativa o muy sofisticada, linealmente presentada, con tal de que pueda ser seguida en ese momento (tal vez olvidada unos momentos después) en el encadenamiento lógico de argumentos.

Parece formar parte, como decíamos, del contrato didáctico el que el profesor se vea obligado a demostrar en clase, sin usar el recurso a su conocimiento de otras fuentes de información, lo que afirma que es cierto; y también forma parte del mismo contrato el que el alumno deba estar atento a descubrir cualquier resquicio, aunque sea inesencial, en la prueba que le presentan.

Hay otra función, que también pasa casi inadvertida, de la demostración en la enseñanza de las matemáticas (en los distintos niveles). Ocurre que el profesor muestra, de modo sistemático, las pruebas de todos los resultados que enuncia, porque considera que el análisis y comprensión de las mismas por los alumnos es <u>una fuente insustituíble de entrenamiento</u> en las formas peculiares de razonar y de usar los hechos básicos de la teoría que explica. Ambas funciones, entrenamiento y contrato didáctico, se retroalimentan: el profesor se ve abocado a demostrar, durante la mayor parte del tiempo; y por eso aprovecha esa circunstancia para entrenar a sus alumnos. Les enseña a demostrar mostrando cómo demuestra él.

Pero raramente la demostración lineal de un resultado consolidado (es decir, la demostración que se suele comunicar al alumno) arroja toda la luz sobre un hecho matemático: más frecuente es que lo cubra con un velo que el alumno debe desvelar siguiendo, eso sí, una serie de pistas bien establecidas. En el ejemplo desarrollado en la sección 6, la demostración publicada de ese pequeño resultado es una de las pruebas algebraicas que hemos comentado; todo lo que se refiere a ese tema (que aquí hemos motivado y comentado ampliamente) ocupa, en la publicación científica, apenas una decena de líneas.

Desde esta perspectiva, enseñar (es decir, mostrar) una demostración es como entregar a alguien el mapa (cifrado) del tesoro… Lo que arroja comprensión es la acción de intentar demostrar personalmente o de intentar descifrar personalmente una demostración de otro. El problema en este último caso es que cada persona tiene su forma peculiar de visionar las relaciones entre los objetos matemáticos y, por ello, entender los argumentos de otro tiene la dificultad añadida de requerir la adaptación de nuestra visión personal a la óptica del autor de la prueba (aunque sin olvidar que tiene la ventaja, al menos, de proporcionar "una" prueba). Hay una diferencia entre leer la descripción de las cataratas del Niágara o visitarlas personalmente.

Debe señalarse que el reciente informe [CUPM] del CUPM (Committee on the Undergraduate Program in Mathematics) patrocinado por la MAA (Mathematical Association of America) indica, como posible recomendación para el curriculo de aquellos alumnos que estén siguiendo carreras con fuerte contenido matemático (además de matemáticas menciona explícitamente las carreras de física, informática e ingenierías), el que todos los estudiantes, al término de esas carreras, deberían alcanzar a comprender la naturaleza de la demostración matemática ("*achieve an understanding of the nature of proof*"), pero también advierte que

> "*Nadie afirma que los cursos, particularmente aquellos diseñados para satisfacer las necesidades de los estudiantes no-matemáticos, deberían estar estructurados en el*

> *modo "teorema-demostraciòn". Además, recomendar la inclusión de la demostración como una componente central en el curriculum matemático podría llevar a un vacuo formalismo sin sentido para los alumnos, o podría disminuir la atención sobre las posibilidades de los ejemplos bien elegidos para motivar distintas ideas y para iluminar interrelaciones entre ellas."*

Parece, por tanto, que los problemas que hemos señalado también surgen en otros países.

La incidencia de este estilo didáctico teorema-demostración es aún mayor en las clases para alumnos de la Licenciatura de Matemáticas, porque se suele afirmar que la tarea definitoria del matemático es la de demostrar, aunque hoy sepamos que una mayoría de ellos trabajarán en el mundo empresarial y por ello no van a dedicarse a demostrar como herramienta fundamental en su trabajo (lo que puede predicarse también de aquellos que se dediquen a la enseñanza secundaria), salvo que se considere que la capacidad de razonar en abstracto es equivalente a la de demostrar… Recordemos a este respecto el comentario de Hanna mencionado en la sección 5.

Muchas veces el resultado de la utilización abusiva de la demostración en la enseñanza superior (sea o no en la Licenciatura de Matemáticas) es, en mi opinión, un empobrecimiento

-del contenido informativo de los cursos, ie. de una visión panorámica que incluya suficientes resultados fundamentales de la materia, algoritmos y métodos… ¡sin forzar el ritmo!

-de los aspectos transversales, de la interrelación con otras materias (por ejemplo, intentar extender a las funciones analíticas algunos resultados de un curso sobre anillos de polinomios).

-del contenido formativo, esto es, de la trasmisión de ideas: de cómo deben interpertarse ciertos resultados (¿por qué se desarrolla la descomposición primaria de un ideal frente a la descomposición en ideales irreducibles?), cuál es su significado en diversos contextos, qué es lo que resuelven determinadas teorías, qué es lo que no se puede esperar que resuelvan (a través de contraejemplos a conjeturas "naturales" para el alumno: todo anillo de Artin tiene un número finito de ideales primos, ¿es cierto el recíproco?…)

-de la adquisición de destrezas no rutinarias, del desarrollo de la capacidad de aplicar autónomamente/creativamente una teoría en un contexto dado (por ejemplo, para descubrir la información que aporta la teoría de anillos de Artin sobre los sistemas de ecuaciones polinómicas).

8. Las nuevas tecnologías y la demostración

El lector ya habrá percibido la utilización esencial, a lo largo de este artículo, de los programas de cálculo simbólico para conjeturar, verficar o probar. Apenas insistiremos aquí en las múltiples reflexiones que tantos han desarrollado ya sobre el papel de las nuevas tecnologías en el aprendizaje/enseñanza de la geometría y de la demostración. En particular, los programas de geometría dinámica (como Cabri) resultan un soporte fundamental para desarrollar esa función de demostrar para explicar a la que hemos hecho referencia en la sección 6. Las referencias [EIOM], [Aprengeom] son una fuente extraordinaria de información actual sobre estos temas.

Cabe, sin embargo, hacer una breve mención a las diferencias cualitativas implicadas en el uso de los ordenadores en relación con la demostración. Por un lado es necesario ahondar en el estudio del papel de la interfaz: ie. de la peculiar representación del mundo, del entorno de aprendizaje geométrico, al que se ven expuestos los alumnos que trabajan con programas de geometría dinámica. Como señalan Balacheff y Shuterland: "*La interfaz no puede separarse estrictamente de la representación interna, no es una mero barniz superficial de esta."*

No sabemos, realmente, cuáles son las consecuencias epistemológicas implicadas en el aprendizaje a través de un medio que, si bien modela la geometría, la modela de una determinada manera (véase [GL]). La historia de la geometría (y no sólo de la enseñanza de la geometría) tiene ejemplos en los que la herramienta (el compás, por ejemplo, veáse [R99]) para hacer geometría ha determinado la geometría que hay que hacer. Aquí tambien ocurre, a veces, que el mensaje es el medio. Pero hay otro aspecto que nos gustaría comentar. De la Torre [DT] señala que

> *"Lo que hemos de reconocer es que el empleo de algún programa de geometría dinámica no siempre será de ayuda para la demostración, si estamos mirando la demostración desde una óptica "educativa". Por ejemplo, la "demostración" de que los ángulos interiores de un triángulo siempre suman lo mismo, nos la puede estropear el programa informático, pues al pedirle que nos calcule la medida de los ángulos y sume, siempre responderá 180º, por lo que puede parecer superfluo intentar ya "otra" demostración. Sin embargo, para la localización del "punto de Fermat" (el punto de un triángulo que minimiza la suma de distancias a los vértices) y para averiguar sus propiedades es de una gran ayuda el disponer del Cabri o del Geometer's Sketchpad."*

Sin embargo ya existe, aunque como prototipo, un software (ver [BV99], [BV01a], [BV01b]) que utiliza recursos informáticos al alcance de cualquier ordenador personal (o, incluso, de una calculadora de bolsillo) y que facilita (con una interfaz adecuada entre la geometría y los cálculos algebráicos[16], que esconde las manipulaciones simbólicas –de aspecto poco amistoso- que hemos mostrado en la sección 4) la demostración o el descubrimiento <u>automático</u> en geometría elemental. Este software podría mostrar, con rigor absoluto, la localización del punto de Fermat, bastante mejor que como los programas de geometría dinámica muestran ahora que los ángulos de un triángulo suman 180º (puesto que estos lo hacen con posibles errores de medida). ¿Acabará situando, en el contexto de la geometría escolar, a la la demostración en una situación similar a la que tiene hoy el "hacer cuentas" ?

> En la introducción del Real Decreto de Enseñanzas Mínimas para la ESO se indica que *"En los últimos años hemos presenciado un vertiginoso desarrollo tecnológico. El ciudadano del siglo XXI no podrá ignorar el funcionamiento de una calculadora o de un ordenador, con el fin de poder servirse de ellos, pero debe darles un trato racional que evite su indefensión ante la necesidad, por ejemplo, de realizar un cálculo sencillo cuando no tiene a mano una calculadora…()…la calculadora y ciertos programas informáticos resultan ser recursos investigadores de primer orden en el análisis de propiedades y relaciones numéricas y gráficas y en este sentido debe potenciarse su empleo."*

El problema es que ese vertiginoso desarrollo tecnológico supera las previsiones de todos los implicados en el sistema educativo: es lógico que los alumnos, sobre todo los más jóvenes, adquieran unas destrezas básicas de cálculo mental que evite su indefensión cuando no tienen una calculadora a mano. Pero, ¿será necesario que también adquieran unas destrezas básicas en el razonamiento de propiedades geométricas, si llega el momento en el que las calculadoras, de modo generalizado, sean capaces de informarnos, con rigor "matemático", de las propiedades de las figuras ideales, por ejemplo, a partir de un simple esquema realizado en una pantalla? ¿O, como ocurre en el ejemplo de la sección 4, si incluso esa calculadora es capaz de añadir las restricciones que debe tener tal esquema para que se verifique determinada propiedad buscada?

[16] Una idea que aparece también en [Ro].

Es tal vez una razón mas para apostar por una enseñanza de las matemáticas en la que predomine la trasmisión de ideas, la valoración de soluciones en situaciones problemáticas, el desarrollo de la creatividad y la adquisición de actitudes positivas hacia las mismas. Lo único que no puede ser suplido por las máquinas.

9. Agradecimientos

El autor quisiera agradecer sinceramente a la Comisión de Programas la invitación para participar como ponente en estas X JAEM. Y a sus compañeros del grupo de trabajo SEIEM-Apregeom, por el material desarrollado sobre estos temas.

10. Referencias

[Aprengeom] Documentos de los Simposia de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. (SEIEM). Huelva, 2000, Almería, 2001. Ver: http://www.ugr.es/~seiem/V_Simposio.htm. Grupo: Aprendizaje de la Geometría. <http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html>

[BC] Barendregt, H.; Cohen, A.: “Electronic communication of mathematics and the interaction of computer algebra systems and proof assistants”. J. Symbolic Computation, 2001.

[BS] Bochis, D.; Santos, F.: “Nuevas cotas superiores para el número de caras de esteroedros de Dirichlet 3-dimensionales”. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. No. 2.3. Sept-Dic, 1999.

[BV99] Botana, F.; Valcarce, J.L.: “REX: un recurso para el estudio de la geometría”, Actas das IX Xornadas para a Aprendizaxe e o Ensino das Matemáticas (IX JAEM), Lugo, 1999.

[BV01a] Botana, F.; Valcarce, J.L.: “Unha interface gráfica para o descubrimento automático de teoremas en xeometría elemental”. Revista Galega do Ensino, 2001.

[BV01b] Botana, F.; Valcarce, J.L.: “Cooperation between a Dynamic Geometry Environment and a Computer Algebra System for Geometric Discovery”. Proceedings CASC, 2001.

[CS] Calvo Sotelo, L.: “EL DIOS GEOMETRA Y LA VUELTA A LA GEOMETRIA”. Diario ABC, pág. 3, sábado, 23 de enero de 1999.

[CUPM] “CUPM discussion papers about mathematics and the mathematical sciences in 2010: what students should know?” Mathematical Association of America. 2001.

[DT] De la Torre, E. “Réplica a “Demonstração – uma questão polémica”, de Cristina Loureiro y Rita Bastos”. En: Informes de los ponentes en el IX Encontro de investigaçao en educaçao matemátca. Ensino e aprendizagem da geometría. (7 - 9 de mayo de 2000), Fundao (Portugal).
Ver http://paginas.teleweb.pt/~tongio/ENCONTROS/IXEIEM/IXEIEM.HTM

[De] Delibes, A.: “Las matemáticas y la LOGSE”. La Gaceta de la RSME. 4.1. enero-abril, 2001.

[DV99] De Villiers, M.D.: “The role and function of proof with Sketchpad”. En: “Rethinking proof with the geometer’s Sketchpad”. Key Curriculum Press. 1999.

[DV00] De Villiers, M. D.: “Developing understanding of proof within the context of defining quadrilaterals”. Contribution to: P. Boero, C. Maher, M. Miyazaki (organisers) “Proof and Proving in Mathematics Education”. ICME-9, TSG 12. Tokyo/Makuhari, Japan

[Du] Duval, R.: “Geometry from a cognitive point of view”. En: Mammana, C. & Villani, V. (eds), “Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century”, 1998. Kluwer Academic Publishers.

[EIOM] Informes de los ponentes en el “IX Encontro de investigaçao en educaçao matemátca. Ensino e aprendizagem da geometría”. (7 - 9 de mayo de 2000), Fundao (Portugal),ver http://paginas.teleweb.pt/~tongio/ENCONTROS/IXEIEM/IXEIEM.HTM

[GL] González-López, M.J. :” El papel de la nuevas tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.” Informe para el Grupo de Aprendizaje de la Geometría (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM). 2000.

[H] Hanna, G.: “Proof as Explanation in Geometry”. Focus on Learning Problems in Mathematics, vol. 20. 1998.

[LB] Loureiro, C.; Bastos, R.: “Demonstração – uma questão polémica”. En: Informes de los ponentes en el IX Encontro de investigaçao en educaçao matemátca. Ensino e aprendizagem da geometría. (7 - 9 de mayo de 2000), Fundao (Portugal).
Ver http://paginas.teleweb.pt/~tongio/ENCONTROS/IXEIEM/IXEIEM.HTM

[NCTM] “Curriculum and evaluation standars for school mathematics”. Reston, Va. 1989. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. 1991.

[R98] Recio, T.: “Cálculo simbólico y geométrico”, Editorial Síntesis, Colección “Educación Matemática en Secundaria”, Madrid, 1998.

[R99] Recio, T.: “Tratamiento automático de la información geométrica”. UNO, Vol. 20, 1999.

[RS] Recio, T.; Sendra, J. R.: “Real reparametrizations of real curves”. J. Symbolic Computation, 23, 1997.

[Ri] Richard, P. R.: “Modélisation du comportement en situation de validation”. Tesis. Universitat Autònoma de Barcelona, 2000.

[Ro] Roanes-Lozano, E.: “Boosting the geometrical possibilities of Dynamic Geometry systems and Computer Algebra systems through cooperation”, AISC (Artificial Intelligence and Symbolic Computation), Viena, 2001.