Reflexiones en torno a la demostración

Documentos presentados por miembros del Grupo 'Aprendizaje de la Geometría' de la SEIEM

INDICE

Documento 1: Noviembre 1999-

CONVICCIÓN Y DEMOSTRACIÓN
Moisés Coriat

Introducción.

Estas dos palabras (convicción, demostración) me vienen "mareando" desde 1987. El contexto, evidentemente, es el de la educación matemática (no sólo el de la educación geométrica, que es algo más concreto).

Es necesario distinguir dos niveles: uno, personal y otro, social.

En el nivel personal hay poco que decir (aunque habría mucho que contar): una persona se convence a sí misma de algo e incluso es capaz de demostrar, para sí, que ese algo es correcto, útil, válido o significativo...

En el nivel social, el escenario es completamente diferente. Una persona convence a otra de algo e incluso es capaz de demostrar, para la otra, que ese algo es correcto, útil, válido o significativo... Conviene observar un hecho que, en mi opinión, resulta preocupante: en ocasiones, se convence a otros de algo sin estar uno mismo plenamente convencido.

Esquemáticamente, en matemáticas se acepta que la convicción se transmite socialmente como conjetura, mientras que la demostración exige un razonamiento público, válido y correcto. Cuando la conjetura "cuaja" sin demostración, se le llama problema abierto. Como ejemplo, puedo citar la famosa pregunta: ¿hay un número infinito de primos gemelos (como 11, 13; 17, 19)?. El profesor Dieudonné escribió (en **En honor del espíritu humano**) que se trata de un problema sin interés para las matemáticas, pero eso no impide a muchas personas trabajar en él.

Como las matemáticas tienen muchos siglos de historia, ha habido tiempo de acumular "formas de demostrar", es decir, metafóricamente, moldes, lingüístico - gráfico - simbólicos, que, de alguna manera, garantizan la obtención válida de conclusiones correctas: reducción al absurdo, inducción, etc. (En algún lugar publiqué una lista.)

¿Qué ocurre en educación matemática al respecto? Si prestamos atención a la educación infantil y obligatoria, la cosa no está nada clara. Añadiré: no puede estarlo, porque (y lo que sigue es un razonamiento) los alumnos están construyendo simultáneamente sus conocimientos lingüísticos y matemáticos, mientras que las demostraciones matemáticas exigen un conocimiento depurado de la lengua.

Conclusión: en educación matemática apelamos (¿erráticamente?) a la convicción social y a la demostración social.

Incluyo a continuación un fragmento de un texto que he entregado este año a mis alumnas de Educación Matemática Infantil (asignatura de 1º de Magisterio, Especialidad de Educación Infantil, 4'5 créditos). Me gustaría conocer vuestra opinión sobre él (y sobre la introducción). La lista de ejemplos puede ampliarse... e incluso limitarse sólo a ejemplos geométricos. El texto sólo da pistas, porque no me gusta "invadir" el pensamiento ajeno con excesivas informaciones.

8. Argumentar y convencer

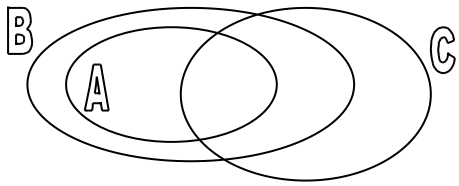
Consideremos el siguiente razonamiento:

Todas las vacas son mamíferos
Algunos mamíferos son cuadrúpedos
Luego:
Todas las vacas son cuadrúpedos

Las tres frases que lo forman son verdaderas. Sin embargo, el razonamiento no es convincente. Esto se debe a que todos los razonamientos tienen una "estructura" que, cuando es correcta, los hace *válidos*; la estructura del razonamiento anterior es

Todos los "A" son "B"
Algunos "B" son "C"
Luego:
Todos los "A" son "C",

estructura que podemos representar así:



"Todos los A son B" se cumple en el dibujo, ya que el óvalo A queda íntegramente dentro de B. También se cumple "Algunos B son C", porque el óvalo B tiene una parte común con C y una parte no común. En cambio la conclusión "Todos los A son C" no se cumple en este dibujo. Podemos "mover" C de manera que, cumpliéndose las premisas, se cumpla también la conclusión del ejemplo inicial, pero nunca se podrá conseguir que cualquier razonamiento con esa estructura y cuyas premisas sean ciertas lleve inevitablemente a una conclusión cierta, como prueba el siguiente ejemplo:

Todas las ballenas son mamíferos
Algunos mamíferos son animales terrestres
Luego:
Todas las ballenas son animales terrestres.

En este caso, como en el ejemplo de las vacas, la conclusión se ha obtenido enlazando la primera parte de la primera frase con la segunda parte de la segunda frase, y la frase así obtenida es falsa.

En lógica matemática, los razonamientos con la estructura anterior son inválidos (a pesar de que, en algunos casos, las tres frases son verdaderas).

Ejercicio 15. Con ayuda de dibujos y ejemplos, estudie la validez de los razonamientos con las siguientes estructuras.
1. Todos los A son B. Todos los B son C. Luego Todos los A son C.
2. Algunos A son B. Todos los B son C. Luego Algunos A son C.
3. Ningún A es B. Todos los B son C. Luego ningún A es C.

Ejercicio 16. Determine la validez o invalidez de los siguientes razonamientos. 1. Todos los españoles son europeos. Algunos españoles son varones. Luego: Algunos europeos son varones.
*** 2. Todo el mundo le tiene miedo a Drácula. Drácula sólo me tiene miedo a mí. Luego: Yo soy Drácula. (Tomado de Smullyan.)

Ejemplo. A. Deaño atribuye los siguientes significados al término “razonamiento”:

Razonamiento:	una de las maneras de pensar
Razonamiento:	actividad de un sujeto producto de esa actividad
Razonamiento:	secuencia ordenada de proposiciones las primeras, se llaman premisas la última, conclusión. (Sinónimo de “inferencia”.)
Razonamiento :	contenido y estructura
Razonamiento :	corrección y validez Premisas (verdaderas o falsas) Conclusión (verdadera o falsa) Estructura (válido o inválido)
Razonamiento :	inductivo y deductivo

Razonamiento deductivo : la verdad de las premisas obliga a aceptar la verdad de la conclusión; sería imposible imaginar situaciones en las que la verdad de las premisas hiciera falsa la conclusión.
Razonamiento inductivo (plausible, probabilista) : la verdad de las premisas no obliga a aceptar la verdad de la conclusión; es posible imaginar situaciones en las que la verdad de las premisas hiciera falsa la conclusión.
Razonamiento deductivo (válido) en lógica de proposiciones: aquel cuya tabla de verdad es una tautología.

Como se comprende, razonar correctamente en la lengua natural es muy difícil, a la vez que parece evidente la conveniencia de usar razonamientos válidos en matemáticas y otras lenguas especializadas. Los niños pequeños, sin embargo, sólo pueden, en casos muy aislados, trabajar razonamientos concretos (no su estructura), y ello siempre que conozcan bien las relaciones que se dan en los enunciados. La lógica infantil es una lógica basada en un “universo de realidades infantiles”. Así la simple frase “todos los perros tienen cuatro patas” (en lugar de “son cuadrúpedos”, que no entenderían seguramente), puede ser considerada “falsa” por algún niño al recordar que su perro es capaz de ponerse sobre sus patas traseras e incluso “andar” así.

Hay varios principios que también sirven para “convencer”.

(1) Principios de autoridad.

El estilo básico de los razonamientos autoritarios sería: “esto es así (o se hace así) porque lo digo yo (o porque así lo hago yo). No se debe subestimar este principio, de uso (desgraciadamente) demasiado extendido en la escuela. Los niños, sobre todo los más pequeños, necesitan algunas referencias disciplinares (que normalmente se inician en la familia): no pegar a otros niños, decir que quieren ir a orinar, respetar turnos de palabra, etc., pero estas referencias también deben aprenderse, practicarse y valorarse en la escuela infantil (deseablemente, con la colaboración de los padres). En general, el significado de las verdades relacionadas con la afirmación del concepto compartido se adquiere de esta manera, con algo de negociación.

Por otra parte, todos concedemos “autoridad” a un verdadero “experto” cuando nos demuestra su buen hacer, ya sea en el campo de la navegación, de la política o de la medicina... e incluso en la enseñanza.

(2) Principios de experiencia.

El estilo básico sería: “esto lo he hecho (o lo hemos hecho) honestamente y me (nos) ha salido así”. Melling-Olsen relata una situación en que invitó a los niños a contar, por parejas, el número de coches que “entraban” en el pueblo o “salían” de él (vistos desde el colegio); estos niños inventaron modos de simbolizar las cantidades, mediante trazos de lápiz o aspas (sin adiestramiento previo).

En general, el significado de las verdades relacionadas con la naturaleza se adquiere experimentalmente. La inducción espontánea y muchas generalizaciones se basan en experiencias. Más arriba quedó dicho que las verdades matemáticas (como el teorema de Pitágoras o la fórmula del volumen de una esfera) son verdades del tipo 2 (afirmación del concepto compartido); de hecho, no hay “esferas” ni “triángulos rectángulos” en el mundo de la experiencia. Sin embargo, muchas investigaciones en educación matemática propugnan que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debe tener una componente experimental que, progresivamente, se irá abandonando. A pesar de que la última frase sea de carácter autoritario (se remite a otras personas que supuestamente saben más que nosotros), la orientación básica de la enseñanza y el aprendizaje en Educación Infantil constituye una decisión fundamental de la Maestra. Experimentar las matemáticas no se reduce a rellenar fichas de colores; hay un campo de vivencias mucho más rico que todos los alumnos podrían disfrutar.

Según Vygotski (p. 269), "El preconcepto es la abstracción del número a partir del objeto y la generalización de las propiedades numéricas del objeto basada en esta abstracción." Lo mismo podría decirse de las nociones geométricas de los pequeños; para un niño, un cuadrado "es", en el mejor de los casos, un dibujo, cuatro rincones de una habitación o un atributo de un objeto, mientras que, para un matemático el término cuadrado significa un sistema de relaciones conceptuales y abstractas entre determinados puntos y rectas del plano.

(3) Principios de analogía.

Según el Diccionario de la Real Academia, un significado del término analogía es el siguiente: “Razonamiento basado en la existencia de atributos semejantes en seres o cosas diferentes.”

Cuando un alumno no entiende una explicación, la mayoría de los profesores procuran buscar una analogía que aclare las cosas a ese alumno. Cuando un niño pequeño no quiere irse a la cama por la noche, se le puede intentar convencer explicándole cómo los pajarillos, las gallinas o incluso el perro, ya “se han ido a dormir” y a reponer fuerza para mañana.

(4) El principio enactivo.

Este principio pone en juego tanto nuestra experiencia como nuestra memoria. De la observación de indicios, extraemos conclusiones. Por ejemplo, si avistamos humo, declaramos que hay un fuego (a pesar de que podría tratarse de una "bomba de humo"); si escuchamos una sirena de alarma por la carretera, deducimos que se acerca una ambulancia y, probablemente, cedemos el paso. Si vemos que hay más palomas que nidos, deducimos que por la noche habrá al menos un nido con al menos dos palomas.

Este principio, popularizado por las novelas de detectives, no debe desdeñarse. Cuando una Maestra observa que un alumno repite un cierto error, puede usarlo como indicio para profundizar en la manera de interpretarlo y analizarlo. Sólo una experiencia posterior permitirá confirmar la conjetura construida con este principio enactivo.

Documento 2: Enero 2000.

GEOMETRÍA, SABER EN ACCIÓN

Mª Lluïsa Fiol Mora (Universitat Autònoma de Barcelona)
Enrique de la Torre Fdez. (Universidade da Coruña)

RESUMEN:

Los alumnos de Educación Infantil y también los de Educación Primaria son exploradores natos, poseen una curiosidad innata para tantear, probar, descubrir.

El futuro maestro de Educación Primaria necesita tiempo y espacio para poder pensar sobre su propio pensamiento, para poder redescubrir su gusto por la exploración ,para redescubrir que disfruta tanteando, haciendo pruebas, escrutando diversas imágenes mentales. Necesita tiempo y espacio para introducirse en una auto-reflexión sobre su saber geométrico. Saber que no es estático sino que es fluido, en movimiento, en construcción.

Hablamos de la Geometría en acción bajo tres aspectos:

1-Como un saber en desarrollo y a desarrollar desde el nacimiento a la edad adulta y que no se expresa de manera uniforme a través de los años ni por descontado prioriza los mismos aspectos.

2-Un saber en acción porque los objetos de estudio no son estáticos. Y no queremos que lo sean, o que aparezcan sólo de forma estática en la presentación de algunos temas. Por lo demás lo que queremos es que aparezcan en sus aspectos de movimiento, de transformación y que interactúen.

Ésto nos lo facilita trabajar el con modelos y con estructuras de organización que permitan la identificación de diversas variables, reconocer las que se mantienen constantes, las que varían y estudiar esta variación.

3-Y también saber en acción porque su propia construcción ha estado influida a lo largo de la historia por la utilización de distintos lenguajes y distintos niveles metafóricos dependiendo de las priorizaciones hechas en ciertos contextos.

La Didáctica de la Geometría nos permite crear entornos de aprendizaje a través de la estructuración de talleres, diseño de modelos, planteo y resolución de problemas y entretenimientos que posibiliten el estudio de la utilización mental y/o material de distintos lenguajes:

a-El lenguaje propio del pensamiento visual.
b-La elaboración de encadenamientos proposicionales.
c-La descripción relacionada con la utilización de materiales.

d-La utilización de gráficos, esquemas o dibujos.
e-El lenguaje algebraico.

Se tratará de -a partir de ejemplos muy diversos- identificar bloqueos y dificultades que se producen con cierta frecuencia y discutir, discutir con detalle, intentando entender y por lo tanto si es necesario reinterpretar, respuestas dadas por alumnos de Educación Primaria, por nuestros alumnos o por nosotros mismos a diversos tipos de preguntas planteadas.

Pensamos que animando a cada persona para que esté atenta a su propia manera de organizar los datos, consideración de variables, planteo y resolución de problemas, potenciamos la autoconfianza y el reconocimiento de la diversidad de estilos como un hecho positivo. Estilos que hay que identificar y explicitar, para potenciar siempre que sea posible.

COMUNICACIÓN:

Los alumnos de Educación Infantil y también los de Educación Primaria son exploradores natos, poseen una curiosidad innata para tantear, probar, descubrir.

Quizás es en este sentido en que, como profesores de Didáctica de la Geometría para futuros profesores de estos pequeños alumnos podemos sentirnos afortunados. La geometría para estos niveles, la geometría como saber en acción, nos da, desde la Didáctica, la oportunidad de dinamizar este instinto exploratorio.

Pero entonces lo que es imprescindible es que seamos conscientes de que el futuro maestro de Educación Primaria necesita tiempo y espacio para poder pensar sobre su propio pensamiento, para poder redescubrir su gusto por la exploración, para redescubrir que disfruta tanteando, haciendo pruebas, escrutando diversas imágenes mentales. Este ser consciente se deberá traducir en organizar tiempo y espacio para que, desde la universidad, el futuro maestro pueda introducirse y sumergirse con profundidad en una autorreflexión sobre su saber matemático. Saber que no es estático sino que es fluido –o debe serlo–, en movimiento, en construcción.

Desde esta perspectiva hablamos de la geometría, como saber en acción, desde tres aspectos diversos:

1.- Como un saber en desarrollo y a desarrollar desde el nacimiento a la edad adulta y que no se expresa de manera uniforme a través de los años ni por descontado prioriza los mismos aspectos.

A lo largo de los años hay una elaboración dinámica del lenguaje, así como de la forma de ver –percepción–, que se traduce en diversas maneras de comprender, de representar, de comunicarse. Es aquí donde debemos considerar la corporalidad y el desarrollo epistemológico en la construcción y desarrollo de los conceptos.

Por descontado, podemos citar a Piaget, que, en cita tomada de Holloway, afirmaba que "el niño construye una representación del espacio con mucha lentitud y que para determinar sus primeras percepciones e ideas de las relaciones espaciales se tiene que recurrir a la topología". En otro contexto Elías Canetti afirma: "A medida que crece, el saber cambia de forma. No hay uniformidad en el verdadero saber".

2.- Un saber en acción porque los objetos de estudio no son estáticos.Y no queremos que lo sean, o que aparezcan sólo de forma estática en la presentación de algunos temas.Por lo demás lo que queremos es que aparezcan en sus aspectos de movimiento, de transformación y que interactúen.

Ésto nos lo facilita el trabajar con modelos y con estructuras de organización que permitan la identificación de diversas variables, reconocer las que se mantienen constantes, las que varian y estudiar esta variación.

Pueden ser ejemplos útiles la superposición de dos hojas, cada una de ellas dibujada con una familia de rectas paralelas. Al mirarlas al trasluz esto da lugar –suponiendo que la separación entre las paralelas en ambas hojas es la misma– a rombos y entre ellos al cuadrado que pavimentan. Pueden estudiarse entonces al mover rotando una hoja sobre la otra qué variables se mantienen constantes y cuáles se modifican.

En general, la utilización de material, de modelos físicos, si la manipulación se hace de manera reflexiva, esto es planteando preguntas, intercambiando dudas, dando opiniones, buscando regularidades, etc. En una palabra, si la utilización de material se hace en un contexto de trabajo en grupo en el que los diversos personajes que participan pueden hablar, suponemos que ello ayuda a la puesta en marcha del pensamiento mental. Ayuda a elaborar imágenes y que estas imágenes se hagan conscientes, se activen e interactúen.

Como dice Adams (p.109), "El individuo bien armado para hallar y resolver un problema posee fluidez en muchos lenguajes mentales y puede utilizarlos alternativamente para registrar información, comunicarse con el inconsciente y manipularlos de forma consciente.

3.- Y también saber en acción porque su propia construcción ha estado influida a lo largo de la historia por la utilización de distintos lenguajes y distintos niveles metafóricos dependiendo de las priorizaciones hechas en ciertos contextos, que han sido condicionados no sólo en el sentido de lo necesario, sino también de los lenguajes de representación disponibles.

Así pues, la Didáctica de la Geometría nos debe permitir crear entornos de aprendizaje a través de la estructuración de talleres, diseño de modelos, planteo y resolución de problemas y entretenimientos que posibiliten el estudio de la utilización mental y/o material de distintos lenguajes:

a- ***El lenguaje propio del pensamiento visual:***

Tenemos en general todos nosotros un pensamiento visual muy potente que se pone en marcha casi siempre sin que, cuando menos en un primer momento, seamos conscientes de ello. Para hacernos conscientes aquí y ahora de esta inmediatez, podemos pensar en el rostro de una persona querida, en una foto nuestra que nos gusta de una manera especial, en la puerta de casa, en la cocina, su luz, sus olores..., en un tetraedro que primero está parado y luego empieza a moverse lentamente, rotando sobre una de sus aristas..., ahora el tetraedro se empequeñece, se hace cada vez más pequeño, más pequeño...

b- ***La elaboración de encadenamientos proposicionales:***

Se trata de estructurar un discurso escrito o hablado de forma lógica, se trata de construir argumentos lógicos. Pero, ¿en nuestro hablar cotidiano interpretamos lo mismo que en un discurso teórico? Puede servir de ejemplo comparar algunas expresiones del tipo "si...entonces...".

c- ***La descripción relacionada con la utilización de materiales:***

Interesa ver los materiales como herramientas que pueden facilitar la descripción de situaciones o la identificación de variables. Ayudan a poner en marcha cuestiones que de otra manera son muy difíciles de visualizar. Así por ejemplo algunas figuras que se obtienen con el tangram circular, o los mosaicos no periódicos de Penrose. Con nuestros alumnos es conveniente reflexionar sobre los pros y los contras de cada material. El material es una representación, y como tal -‘el mapa no es el territorio’- presenta variables que desestimamos, pero que en un momento dado pueden producir algún tipo de distorsión en el estudio que se realiza. Por ejemplo los célebres "triángulo amarillo, pequeño, delgado"... Inevitables, por otra parte, porque al enseñar un folio y hablar de un rectángulo tampoco se trata que cada vez vayamos diciendo:"trozo de papel blanco, rectangular, de grosor ..."

d- La utilización de gráficos, esquemas o dibujos:

En el caso de la Geometría lo más interesante es quizás diferenciar los diversos niveles de dibujo que pueden aparecer a lo largo de distintas clases y su diverso nivel de iconicidad. Una de las cuestiones que habrá que tener en cuenta es la dificultad de la representación plana de figuras del espacio tridimensional. Otra que se da trabajando sólo con polígonos es la necesidad de diferenciar entre: un dibujo/boceto hecho después de leer los datos de un problema, un dibujo a escala, un dibujo que refleja la solución hallada y un dibujo que responde a un enunciado de "construcción geométrica", por lo menos.

e- *El lenguaje algebraico:*

El lenguaje algebraico es quizás el que ocupa un lugar más preponderante en cuanto a su fiabilidad, pero desde la Educación Primaria y para sus futuros maestros ésta es sin duda una situación que creemos debe ser modificada. Con mucha frecuencia se utiliza de forma automática y más que ayudar bloquea el pensamiento espontáneo. Puede ser un ejemplo el problema planteado en 5º lugar en la lista de enunciados finales. ¿Podremos, en algún momento, plantearnos que de forma paralela se puede trabajar el algoritmo que se desea memorizar y a la vez potenciar el pensamiento espontáneo?

Respecto al lenguaje, tenemos también –¡como no!– dos niveles distintos a trabajar en la clase de Didáctica de la Geometría.

Una es la propia diversidad de lenguajes que hay que considerar. Y para ser consciente de estos lenguajes diversos y de su utilidad o inutilidad, lo mejor será resolver unos problemas y estar atentos, especialmente atentos al tipo de razonamiento que utilizamos.

Por otra parte, está el lenguaje de relación entre los diversos personajes que intervenimos en el acto educativo. Todo buen profesor sabe que no es válida la utilización del mismo lenguaje para distintas edades y que debe esforzarse por hacer un feedback positivo entre su lenguaje –más o menos formal- y el del alumno. Debe saber escuchar/interpretar, saber leer entre líneas, aceptar un vocabulario “no tan preciso”, quizás más light pero capaz de generar imágenes fluidas, ricas, que son sugerentes, que ayudan a memorizar y por lo tanto debe evitarse hablar de “esto no se dice así” en las clases de Educación Primaria.

Será interesante para nuestros alumnos que puedan hacerse conscientes del doble rasero que utilizamos ante los hechos cotidianos y ante el lenguaje los adultos con nosotros mismos y con los alumnos pequeños. Damos cosas por supuestas, también en geometría. Será interesante reflexionar sobre ello. ¿Cómo? El método que proponemos aquí pasa por la utilización de unos pocos enunciados. No se trata tanto de hallar la solución sino de identificar el lenguaje más rápido, menos bloqueante, posible, etc.

Se trata también de identificar bloqueos y dificultades que se producen con cierta frecuencia y discutir, discutir con detalle, intentando entender y por lo tanto si es necesario reinterpretar, respuestas dadas por alumnos de Educación Primaria, por nuestros alumnos o por nosotros mismos a diversos tipos de preguntas planteadas. Muchas veces actuamos como si nosotros y nuestros alumnos tuviésemos un tipo de pensamiento muy estático, muy "ya construido, acabado", o incluso como si fuera el pensamiento ya existente, y si no es así pensamos que hay que rectificar "la actitud". Hay que rectificar en el sentido de continuar haciendo siempre lo que dice Edgar Morin: "el único saber que vale es aquél que se nutre de incertidumbre" (¿qué alumno va a permitirse tantear si todo lo que tiene delante es "cierto"?). Nutrirse, vivir y crecer o aceptar y fluir, ésta podría ser nuestra consigna con nuestros alumnos y con nosotros mismos.

Como profesores de Didáctica de la Geometría, pensamos que animando a cada persona para que esté atenta a su propia manera de organizar los datos, consideración de variables, planteo y resolución de problemas, potenciamos la autoconfianza y el reconocimiento de la diversidad de estilos como un hecho positivo. Estilos que hay que identificar y explicitar, para potenciar siempre que sea posible. Volviendo a los alumnos de Educación Infantil y también a los de Educación Primaria, que, decíamos, son exploradores natos, si tienen un traspiés, se levantan y vuelven a empezar. En buscar la solución hemos priorizado la solución y quizás éste es el momento de priorizar el "buscar".

ENUNCIADOS

Finalmente proponemos estas situaciones que pueden permitir la exploración y la reflexión sobre la acción y sobre el propio pensamiento. Situaciones que se pueden abordar desde niveles diferentes y a distintas edades, tanto en la enseñanza obligatoria, como nuestras aulas de formación de maestros:

1. Dadas 6 cerillas, formar 4 triángulos equiláteros.

2. Construir un triángulo isósceles cuya base mida 5 centímetros y el ángulo opuesto 30º.

3. Dado un triángulo rectángulo recortado en cartulina y una circunferencia dibujada sobre un papel, dibujar un triángulo semejante al dado inscrito en la circunferencia dada.

4. Dado un papel rectangular con un solo corte se originan dos piezas. Con estas dos piezas debe poderse obtener un triángulo rectángulo.

5. Tomás quiere colocar sus soldaditos de plomo en forma de cuadrado, es decir, de manera que las filas y las columnas tengan el mismo número de soldaditos. En una primera prueba le sobran 45. Entonces decide formar un nuevo cuadrado que tiene un soldadito más en cada fila y columna, pero se da cuenta de que necesitará 18 más de los que tiene. ¿Cuántos soldaditos tiene Tomás?

6. Imaginemos un gran trozo de papel, del grosor de esta hoja. Vamos a imaginar también que la doblamos una vez –ahora atiene dos capas–, la volvemos a doblar –ahora tiene 4 capas– y continuamos haciéndolo hasta 50 veces. ¿Qué grosor tiene el papel de 50 dobleces? ¿Más o menos de 1 kilómetro?

7. Trazas sólo 4 líneas, sin levantar el lápiz del papel, que pasen por 9 puntos distribuidos formando un cuadrado.

8. Acabas de naufragar y has caído en manos de una tribu de caníbales. Te han puesto en las manos dos relojes de arena. Uno mide exactamente 4 minutos. El otro mide exactamente 7 minutos. El cacique caníbal te dice que debes señalar cuándo han pasado exactamente nueve minutos. Si consigues hacerlo, te dejarán en libertad. Si no lo consigues, les servirás de almuerzo. El cacique grita: "Empieza ya". ¿Qué harías?

Bibliografía:

ADAMS, J. L. (1979) *Guía y juegos para superar bloqueos mentales*, Gedisa, Barcelona.

ARNHEIM, R. (1987) *Arte y percepción visual. Psicología de la visión creadora*, Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires.

BRUNER, M. (1985) *Acción, pensamiento y lenguaje*, Alianza Psicológica, Madrid.

CASTELNUOVO, E. (1963) *Geometría intuitiva*, Labor, Barcelona.

FISCHBEIN, E. (1987) *Intuition in Science and Mathematics*, Reidel, Dordrecht.

FREUDENTHAL, H. (1983) *En todos los niveles: ¡geometría!*, III JAEM, Zaragoza.

GATTEGNO, C. (1965) *Pour un enseignement dynamique des mathématiques*, Delachaux et Niestlé, Neuchâtel.

HOLLOWAY, G.E.T. (1969) *Concepción del espacio en el niño según Piaget*, Paidós, Buenos Aires.

INHELDER, B. y PIAGET, J. (1955) *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, P.U.F., Paris.

MALKEVICH, J. (Ed.) (1991) *Geometry's future*, Conference Proceedings, COMAP, MA.

MORIN, E.(1990) *Introducción al pensamiento complejo*, Gedisa, Barcelona.

NELSEN, R.B. (1993) *Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking, Classroom resource materials/number 1*, The Mathematical Association of America, Washington.

PENROSE, R. (1991) *La nueva mente del emperador*, Mondadori España, Madrid.

PUIG ADAM, P. (1969) *Curso de geometría métrica. Tomo I*, Biblioteca Matemática, Madrid.

THOMPSON, D'A. W. (1980) *El crecimiento y la forma*, Blume, Madrid.

VAN HIELE, P.M. (1986) *Structure and Insight*, Academic Press, Nueva York.
WATZLAWICK, P. (1994) *El lenguaje del cambio*, Herder, Barcelona.

Documento 3: Enero 2000.

PENSAR CÓMO PENSAMOS. REFLEXIONES METODOLÓGICAS

Enrique de la Torre Fdez. (Universidade da Coruña)
Mª. Lluïsa Fiol Mora (Universitat Autònoma de Barcelona)

RESUMEN:

La metodología que todo profesor implicado en la Formación Inicial del Área de Didáctica de la Matemática desarrolla en la clase está estrechamente vinculada a la concepción que tiene del maestro de Educación Primaria. El análisis de esta concepción nos obliga a reflexionar sobre nuestras más profundas creencias acerca de la educación, la enseñanza, el aprendizaje y las matemáticas.

Así, al diseñar los contenidos y la metodología para un curso a impartir a futuros profesores de Educación Primaria, debemos tener en cuenta lo que consideramos primordial que debe asumir como futuro maestro, y también que el día a día de su trabajo estará condicionado por sus concepciones sobre la educación, la enseñanza, el aprendizaje y las matemáticas.

Como profesores de estudiantes para maestros debemos reflexionar sobre estas concepciones, y sobre nuestra propia idea de lo que entendemos por maestro de Educación Primaria.

Concebimos al maestro como 'educador' y como 'activador y acompañante' en la autoconstrucción del conocimiento del alumno.

Para que pueda actuar como activador y acompañante en la autoconstrucción del conocimiento de sus alumnos de Educación Primaria, él mismo tiene que ser consciente de su propia manera de pensar, especialmente en geometría y tiene que tener experiencia como "aprendiz de matemático". Por lo tanto deberemos facilitarle durante su estancia en la Universidad un espacio y un tiempo donde pueda reflexionar sobre su propio conocimiento matemático, que le permitirá hacerse consciente de su propia manera de pensar, de su propio estilo de razonamiento, de sus dificultades, bloqueos, contradicciones, tipología de sus imágenes, etc., que pone en marcha.

Es necesario que se sitúe a nuestros alumnos futuros maestros de Educación Primaria como seres pensantes frente a su propio pensamiento y se promueva una auto-reflexión sobre su saber matemático, o, en nuestro caso, sobre su saber geométrico, no como un saber estático, perfecto y cristalizado, sino muy al contrario, como un saber fluido, imperfecto y nebuloso, es decir, como un saber en acción.

Nuestra tarea principal consiste en proporcionar una manera diferente de ver la geometría, más libre y abierta, no encorsetada en un conjunto de definiciones y

fórmulas, sino guiada por la acción de enfrentarse con libertad a las preguntas que se formulan, cuyas respuestas deberán ser argumentadas pero que pueden ser también discutidas.

COMUNICACIÓN:

> “La reflexión es un proceso de conocer cómo conocemos. Un acto de volvernos sobre nosotros mismos, la única oportunidad que tenemos de descubrir nuestras cegueras y de reconocer que las certidumbres y los conocimientos de los otros son, respectivamente tan abrumadoras y tan tenues como los nuestros”
>
> Maturana, H. y Varela, F. (1990) *El árbol del conocimiento*, p.19

La metodología que todo profesor implicado en la Formación Inicial del Área de Didáctica de la Matemática desarrolla en la clase está estrechamente relacionada con la concepción que tiene del maestro de Educación Infantil y del de Educación Primaria. El análisis de estas concepciones nos obliga a reflexionar sobre nuestras más profundas creencias acerca de la educación, la enseñanza, el aprendizaje y las matemáticas.

Cuando se trata de diseñar los contenidos y la metodología para un curso a impartir a futuros profesores de Educación Primaria, debemos tener en cuenta lo que consideramos primordial que deben asumir nuestros alumnos como futuros maestros y que creemos indispensable para abordar el trabajo en el aula de Educación Primaria. Ese trabajo está influido y condicionado por las concepciones que el maestro tiene acerca de la educación (como proceso global), acerca de la enseñanza, acerca del aprendizaje y acerca de la materia (en este caso las matemáticas).

Nosotros, como profesores de Didáctica de las Matemáticas, debemos tener en cuenta y reflexionar sobre esas concepciones, a las que hemos de añadir nuestra propia idea de lo que entendemos por maestro de Educación Primaria.

Podemos decir que concebimos el maestro como ‘educador' y como ‘activador y acompañante en la autoconstrucción (por parte del estudiante de primaria) del conocimiento'.

La idea de ‘maestro como educador' es que es deseable considerar el papel del maestro de manera global. El maestro, en su actuación, debería tener presente que tiene como primera meta ‘acompañar al estudiante de primaria en su crecimiento personal'. Con ello queremos decir que no es suficiente considerar al maestro como ‘maestro de... matemáticas, lengua, sociales,..' como si su labor exclusiva fuese impartir conocimientos en alguna o en varias materias. El maestro, como acompañante, es alguien que también ‘usa esta parte de su trabajo' (el ser ‘maestro de... matemáticas, lengua, sociales...') para lograr la meta final y primordial del proceso educativo, la ‘consecución de un individuo autónomo, autorreflexivo y crítico, que pueda participar e influir en la sociedad'; y lo que haga en la hora de matemáticas, en la hora de geometría, debe contribuir a este objetivo primario. Aquí tenemos que referirnos a la interdisciplinariedad y a la educación en valores y deberemos decidir hasta qué punto estas ideas han de formar parte activa en las horas dedicadas a matemáticas en la Educación Primaria. No creemos que se deban abordar de manera aislada en la formación de los maestros, sino que deben formar parte del trabajo en cada una de las materias, y por lo tanto, en esta que nos ocupa, de ‘geometría para futuros maestros de Educación Primaria'.

Para que pueda actuar como activador y acompañante en la autoconstrucción del conocimiento de sus alumnos de Educación Primaria, el maestro tendrá que acompañar a sus alumnos en el desarrollo de su pensamiento y en los distintos estilos de pensamiento que en el aula se pueden manifestar. El maestro debe ser un experimentador, no en el sentido del que hace pruebas, sino en el sentido del que observa –recoge datos, aprende de sus estudiantes, identifica casos diversos, distintas dificultades, varios procedimientos de resolución y explicaciones diferentes...– y actúa. Actúa con método o, mejor, con métodos: traza el camino adecuado a cada uno de sus alumnos.

Para que el maestro pueda actuar en este sentido, para que pueda poner en marcha toda una serie de recursos que sin duda posee, él mismo tiene que tener experiencia sobre su propia manera de pensar, especialmente en geometría, y sobre su trabajo como ‘aprendiz de matemático'. Cuando nuestros alumnos eran estudiantes de primaria o de secundaria y trabajaban sobre contenidos geométricos, es difícil que hayan obtenido ‘experiencia', lo que han obtenido, en la mayoría de los casos, es conocimiento, datos, pero el adquirir experiencia precisa del requisito de ‘reflexión', y eso es algo de lo que necesitamos proveerles, espacio y tiempo para reflexionar sobre el conocimiento matemático. Esa reflexión les debe hacer conscientes de su propia manera de pensar, de su propio estilo, de las dificultades, bloqueos, contradicciones, imágenes imprecisas, etc., que ponen en marcha. Por lo tanto, durante su formación universitaria es necesario que al estudiante para maestro se le sitúe como ser pensante y se promueva una autorreflexión sobre su saber matemático o, en nuestro caso, sobre su saber geométrico, no como un saber estático, perfecto, cristalizado, sino, al contrario, como un saber fluido, imperfecto, nebuloso, es decir, como un saber en acción.

Esa reflexión sobre el aprendizaje y sobre la materia, debe encaminarse de alguna manera al papel del maestro (o estudiante para maestro) como ‘investigador': no sólo como investigador en la construcción del conocimiento matemático, sino especialmente como investigador acerca del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas. Por medio de la reflexión y el análisis del trabajo de los estudiantes en torno a las matemáticas, el maestro aprende, descubre hechos o relaciones que antes no conocía o no había notado y, en cierto modo, obtiene el producto de una investigación. Quizá no sea investigación en el sentido científico u operativo, sino investigación en lo cotidiano. El maestro escudriña, explora, indaga, busca, averigua, sondea, investiga. Esta investigación, llevada a cabo en el entorno de su lugar de trabajo, le sitúa como persona que mira el proceso educativo de una manera implicada. La reflexión sobre el devenir diario de la clase, sobre las preguntas, las dificultades de los alumnos, su forma de manipular el material, sus tanteos, comentarios, etc., le ayudarán sin duda a hacer más dinámico el proceso educativo y por lo tanto a mejorarlo.

Con objeto de que pueda situarse frente a esta experiencia en el punto de reflexión que nos interesa, a lo largo de su formación universitaria se le deberán proporcionar situaciones que promuevan su propia experiencia como matemático. El estudiante de magisterio debe enfrentarse a las matemáticas de manera similar a cómo el estudiante de primaria debe conocer esta materia: no nos interesa que identifique las matemáticas como un producto terminado, sino como un producto en construcción en el cual él tiene algo que aportar. En general, se acepta como una manera habitual de presentar el conocimiento matemático comenzando por el final: se dice lo que se sabe como un producto concluido. Al contrario, creemos que la mejor manera de conocer esta materia es poder llegar a sentirse ‘investigador en matemáticas', entendiendo la palabra investigador como "el que busca", descubriendo lo que ya está en los libros, pero también descubriendo lo que nadie pone nunca en ellos.

Pongamos dos ejemplos:

1.- Al hablar en clase de figuras geométricas, uno de los primeros gestos que tienen nuestros alumnos es clasificar los objetos en ‘los que tienen forma geométrica y los que no’. Esta clasificación la hacen de manera espontánea, no porque se les pida, sino que parece un gesto predeterminado muy elemental. Se les puede pedir que pongan ejemplos de uno y otro tipo y que reflexionen sobre lo que entienden por figura geométrica. Lo más importante a nivel conceptual es que distingan entre objetos más ‘interesantes' para la geometría, y por lo tanto que tienen nombre, y aquellos más corrientes, quizá más irregulares, pero más reales y por lo tanto más ‘interesantes' para nosotros y para el alumno en la vida cotidiana. Puede reflexionarse entonces sobre la complejidad de las formas tal como se presentan en la naturaleza y sobre que, en el fondo, en geometría estudiamos formas simplificadas.

2.- Quizá haya surgido el problema que ponemos como segundo ejemplo de la ‘definición'. Muchas veces las discusiones matemáticas y/o los errores matemáticos provienen de que no se tiene clara la definición de un concepto determinado, o que se pone demasiado énfasis en definir algo con excesivo rigor, sin tener en cuenta que cada ‘rigor’ debe ser puesto al servicio del ser pensante en el contexto correspondiente. Podemos poner el ejemplo de ‘definición de figura geométrica' o de ‘rectángulo' o de ‘rombo'.

Para la mayor parte de los alumnos, un cuadrado no es un rectángulo, ni un rombo, tal como tampoco un triángulo equilátero es un triángulo isósceles. Y así en clase discutimos cual puede ser una buena definición de polígono, de rombo o de rectángulo. Aquí surgen cuestiones que hacen ver la necesidad de que en matemáticas haya términos ‘más flexibles' y otros ‘más rígidos' lo que conduce a considerar las matemáticas de una manera más ‘contextualizada', construida por el hombre y subordinándose a las necesidades del entorno y de los problemas para los que una idea debe ser utilizada.

Recomendamos, en los primeros días del curso o quizás al comienzo de algunos temas, enfrentar a los alumnos con su propio conocimiento de la materia, para que aprendan que dudar y reconocer la duda puede ser más placentero que una seguridad absoluta. Quizá cuando identifiquen sus incertezas y no las disfracen puedan empezar a construir de una forma más creativa. Al pensar, con mucha frecuencia se identifica lo seguro como lo obvio, lo que hay que aplicar. Es lo que Adams (1986) llama "hallar una solución y salir corriendo". Tanto da el procedimiento. Hay que tener en cuenta que todos pensamos en relación a un contexto y, a veces, lo que se sabe de memoria como procedimiento de resolución no es ni lo más rápido ni, desde luego, lo más creativo. Y con ello no decimos nada en contra de la utilización de la memoria en las matemáticas, sino en contra de la memorización; memorización que en lugar de dar herramientas, las quita, y deja a la persona indefensa enfrentada a situaciones que no puede discriminar, memorización que bloquea toda asunción de una forma nueva propia del razonamiento.

Nuestro papel como profesores es potenciar la búsqueda de regularidades, acostumbrar a formular conjeturas ante una pregunta e intentar hallar respuestas y probarlas, ser críticos con los enunciados de los problemas, que a menudo pueden mejorarse, cambiarse, reinterpretarse, completarse.

Creemos que ésta es la única forma de lograr que nuestros alumnos, los futuros maestros de Educación Primaria, sean capaces de reconocer el pensamiento en crecimiento y en positivo de esos pequeños alumnos que más adelante tendrán en la clase. Si el maestro o la maestra se ha dado permiso para dudar, para reconocer su propia manera de pensar sus triunfos y sus dificultades, podrá, sin duda, hacerlo en el otro.

Así pues, nuestra tarea principal consiste en proporcionar una manera diferente de ver la geometría, más libre y abierta, no encorsetada en un conjunto de definiciones y fórmulas, sino guiada por la acción de enfrentarse con libertad a las preguntas que se formulan, cuyas respuesta deberán ser argumentadas pero que pueden ser también discutidas.

<u>Bibliografía</u>:

ADAMS, J. L. (1979) *“Guía y juegos para superar bloqueos mentales”*, Gedisa, Barcelona.

DE BONO, E. (1987) *“Aprender a pensar”*, Plaza & Janes, Barcelona.

FIELKER, D. (1987) *"Rompiendo las cadenas de Euclides"*, M.E.C., Madrid.

GRAVEMEIJER, K.; VAN DEN HEUVEL, M.; STREEFLAND, L. (1990) *“Contexts Free Productions, Texts and Geometry in Realistic Mathematics Education”*, OW&OC, Utrecht.

MATURANA, H.; VARELA, F. (1990) *“El árbol del conocimiento”*, Debate, Madrid.

O'DAFFER, P.G.; CLEMENS, S.R. (1977) *"Geometry: An Investigative Approach"*, Addiso-Wesley, California.

TRIADAFILLIDIS, T.A. (1995) 'Circumventing visual limitations in teaching the geometry of shapes', *Educational Studies in Math.*, 29, 3, pp. 225-235.

WATZLAWICK, P.; WEAKLAND, J. H. y FISCH, R. (1995) *"Cambio"*, Herder, Barcelona.

WUJEC, T. (1988) *"Gimnasia mental"*, Martínez de Roca, Barcelona.

Documento 4: Septiembre 2000.

CONSCIENCIA DE LA NECESIDAD DE UNA DEMOSTRACIÓN

Ricardo Barroso

Creo que interesa que los futuros profesores de Primaria sean conscientes de que una determinada propiedad, *para asumirla* como válida, **debe ser** demostrada.

Es decir, más que hacer varias demostraciones geométricas, quizá convenga centrarse en una desde varias perspectivas, y hacer ver esa necesidad. ¿Cómo? Es relativamente fácil indicar cuestiones teóricas (como acabo de hacer y comenté en la reunión de Huelva) y no mostrar alguna ejemplificación.

Tengo el recuerdo de lo ocurrido con una alumna mía sobre el teorema de Pitágoras. Tenía la convicción de que al suceder que en el triángulo prototípico de (3, 4, 5) era verdad que la suma de los cuadrados de 3 y 4 era el cuadrado de 5, ya era suficiente para demostrarlo.

Es decir, había ocurrido que cuando ella estudió el Teorema en su etapa de EGB, su profesor les había puesto ese ejemplo, y les había indicado que el Teorema de Pitágoras se cumplía. Era una cuestión de asumir un resultado con una simple muestra; ¿cómo hacerle consciente de que eso era absolutamente insuficiente?.

Quizá haciéndole comprender que la generalización y por tanto la demostración de una determinada propiedad, requiere llegar a una situación en la que nos desprendamos de cada uno de los casos (ella era consciente de la concreción en un sólo caso), para hablar del "triángulo rectángulo" sin referencias precisas a ningún caso en particular.

La cuestión es difícil. Se habla a veces de contraejemplos.. Creo que la "discusión entre los mismos alumnos" puede dar luz al tema.

- Si tú tienes otro triángulo rectángulo, ¿cómo puedes asegurar que también sucederá?...

¿Permite prohibir una demostración?

A esta cuestión, planteada por Moisés Coriat, respondí que..

Si el alumno está convencido de una determinada demostración, creo que sí le impedirá determinados ***pasos*** incorrectos.

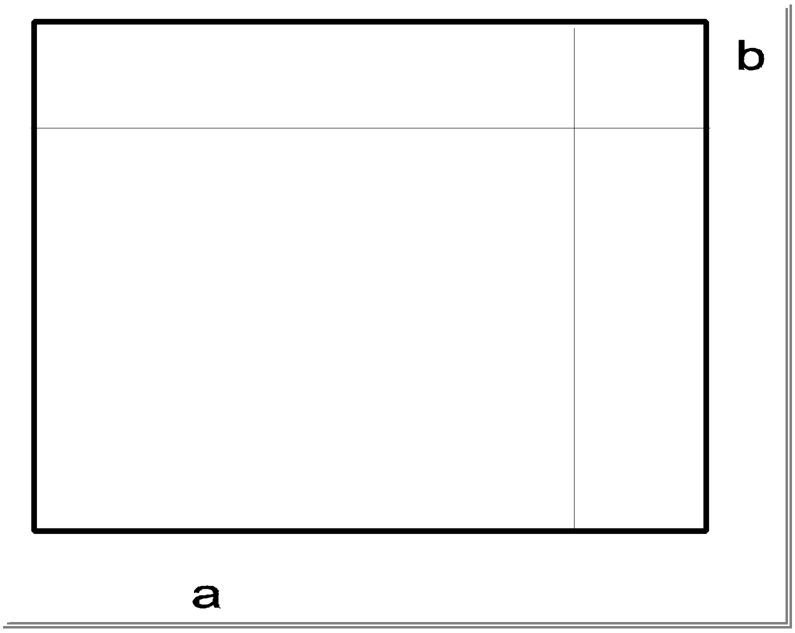
Amplío esta referencia. En ocasiones, los alumnos *recitan* de memoria las demostraciones, sin estar realmente **convencidos** de aquello que están diciendo.

El caso típico es el del cuadrado de la suma de dos elementos. Por mucho que les digamos a algunos alumnos que es "*el cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo*", a la hora de la verdad de la aplicación, una y otra vez, toman simplemente "*el cuadrado* *del primero más el cuadrado del segundo*", **quizá** por ese fenómeno del abuso de la analogía, lo que ha ocurrido antes ¿porqué no ha de ocurrir ahora?

Pienso que es claro que esos alumnos se saben la demostración de la propiedad, la conocen, pero quizá no están **convencidos** de ella.

Posiblemente una pequeña demostración geométrica pueda ayudar a convencerles y utilizarla convenientemente.

Sea la figura siguiente:



Quizá si se logra que esta figura sea comprendida , ...se **convenza** el alumno reticente de la propiedad a veces tan maltratada...y no vuelva por sus fueros, encontrándose una señal de PROHIBIDO al querer volver a utilizarla...

Documento 5: Septiembre 2000.

La demostración.

Enrique de la Torre. Universidade da Coruña.

Quiero escribir sobre algunos aspectos que me preocupan alrededor de la cuestión de la demostración. Antes de nada debo aclarar que, aunque esto se escribe bajo la idea de la demostración en geometría, muchas de las cuestiones que pretendo plantear vienen motivadas por mi preocupación acerca de la enseñanza no sólo de la geometría, sino de las matemáticas en general, y se podrían muy bien decir de otras ramas de la matemática, y también en relación con la educación, no sólo matemática, sino general. Es más, quiero decir que para poner sobre la mesa alguna cuestión sobre la demostración en geometría, no puedo dejar de tener en cuenta el papel que juega todo ésto en la educación.

Primer aspecto: Necesidad de demostrar o las matemáticas recursivas

Nuestra primera pregunta sería acerca de por qué aparece la necesidad de probar. ¿Por qué demostrar? Nos damos cuenta de que la demostración es una cuestión dialógica, sobre todo si la centramos en un contexto educativo. Demuestro para convencer al otro de que es cierto lo que afirmo.

Con ésto estoy tomando la demostración en un sentido muy amplio, en donde la demostración de teoremas queda como un caso particular y puntual. Pero es así como quiero darle sentido a la demostración de enunciados matemáticos, buscando su sitio dentro de un contexto educativo.

Con demostración, prueba, argumentación,... quiero abarcar palabras y acciones que hablan de la necesidad de dar argumentos, de justificar acciones o enunciados, del hecho de concatenar afirmaciones que nos acercan o nos alejan de aquello a lo que queremos llegar. Vista así, la demostración no está lejos de las situaciones reales en la vida, donde el hecho de poseer una argumentación, una razón, debería ser importante. Pienso que esas situaciones reales en la vida, y la vida en sí, son la justificación, el objetivo último, de la educación, y de la educación matemática. Pero aunque objetivo último, no debe estar situado al final, sino al principio y en todo momento del proceso (de todo el proceso) educativo. ¿Se trata entonces de restar importancia a la demostración de los enunciados y propiedades matemáticas, geométricas? Puede que sí, (y puede que se tenga que resituar respecto a su verdadero valor) pero es que resulta que nosotros, que trabajamos dentro del área de 'Didáctica de las Matemáticas', no podemos darle más importancia a las Matemáticas que a la Educación. En otras palabras, la Didáctica de las Matemáticas y las Matemáticas están al servicio de la Educación. Una educación en la que el diálogo y las argumentaciones son habituales en el aula (como un objetivo en educación, podríamos decir). Una Educación en donde jóvenes estudiantes necesitan nuestros conocimientos sobre Didáctica y sobre Matemáticas para llegar a la consecución de los fines educativos que se les supone deben alcanzar.

Segundo aspecto: Un exceso de familiaridad.

Supongo que nosotros, como matemáticos, estamos demasiado habituados al hecho de 'demostrar' y eso es una traba en muchos casos. Lo que para nosotros es habitual y fácil, para la mayor parte de los estudiantes es algo difícil, artificial y sin sentido. Sitúo aquí el principal escollo a la hora de trabajar la demostración en una clase de matemáticas.

En una clase "normal" los alumnos no esperan ser convencidos de lo que dice el profesor a través de una demostración. Creen lo que decimos, creen que decimos la verdad. No sólo en matemáticas sino también en física, en geografía....

Tercer aspecto: El formalismo

Relacionado con lo anterior está el aspecto del ‘formalismo’. Como educadores matemáticos, hemos de afrontar con prudencia la idea de 'formalismo' en demostración. Aún sin ponernos a pensar qué entendemos por formalismo en un momento determinado, el hacer hincapié en la necesidad de un formalismo al hablar de demostración podría contribuir a seguir creando en la mente de nuestros estudiantes la idea de que las matemáticas son siempre ciertas e inmutables, y que todo lo que se puede reducir a modelos matemáticos será cierto.

¿Por qué no tomar la demostración con más libertad? Como una construcción mental que se puede 'representar', contar, comunicar, simbolizar, pero que <u>permita</u> y <u>facilite</u> la <u>reflexión</u> y la <u>discusión</u> (para aprender).

Gila Hanna (1996, PME 20) dice "... el uso de la prueba en la clase es realmente antiautoritaria", ya que muestra a los estudiantes que ellos pueden razonar por sí mismos, que no necesitan acatar la autoridad. No comparto esa afirmación. Pienso que en el aula autoritarismo no es sinónimo de arbitrariedad, sino de injusticia o improcedencia de las acciones (por ejemplo, al poner el listón más alto de lo esperado). El alumno da por supuesto que el profesor no miente al enunciar un teorema o una propiedad, por ello no necesita la justificación (demostración). Opino que en ese momento la demostración es la 'retirada' del profesor a un terreno al que la mayor parte de los estudiantes no le pueden seguir, con lo que está reafirmando su autoridad (autoritarismo): la del profesor, no la de la materia.

En ese texto Hanna rechaza también las ideas de los que están en contra de las demostraciones porque dicen que 'resaltan la idea de que la matemática es infalible' y 'resaltan la idea de que la matemática es una ciencia *a priori*'. Pienso que los argumentos para rebatir esas concepciones son válidos cuando nos enfrentamos a demostraciones realizadas en un entorno *donde se comprende la necesidad de probar*, donde se comprende el sentido y las limitaciones de una demostración y cuando 'ya' se tiene formada una opinión de lo que es la matemática (con sus limitaciones y certezas). Pero las demostraciones que se presentan en la enseñanza obligatoria no son demostraciones de algo que 'mañana puede ser corregido', ni de hechos o teoremas que se han 'comprobado' antes. Además, podemos estar plenamente de acuerdo con lo que dice Hanna, lo que deberíamos añadir es que hay que tener en cuenta que esas objeciones (que Hanna rechaza) pueden aparecer, ser reales, en alguna clase o en algún estudiante.

Cuarto aspecto: Comunicación en la clase, mensajes deseados y mensajes no pretendidos.

Y al abordar una demostración, hacerlo con el 'temor y temblor' de que se puede estar transmitiendo un mensaje adicional (o alterado) no pretendido. Por ello es fundamental siempre, en toda la enseñanza, la existencia de diálogo, debate, comunicación, para que los 'mensajes no pretendidos' salgan a la superficie, y los errores también.

La demostración queda como un problema abierto, al que no podemos pretender cerrar. Personalmente pienso que los problemas cerrados son feos. Son feos porque la única posibilidad de trabajar es meterse en el túnel de su resolución, sin caminos alternativos, donde se busca descubrir lo que otros han hecho o saben. Se trata de resolver 'el problema de otros', no el propio (y la vida no es así para el estudiante). Los problemas cerrados no tienen interés porque nos privan de la posibilidad de intervenir y de considerar las matemáticas como algo vivo, que se relaciona con cada uno de los que participan en ella, y así el mismo problema admite diferentes soluciones puesto que las personas que entran a formar parte de ese problema matemático lo modifican, lo personalizan, adquiriendo una realidad nueva.

Referencias:

DUVAL, R. (1998). *"Geometry from a cognitive point of view*", en Mammana, C. & Villani, V. (eds) - *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, p. 37 – 52. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

HANNA, G. (1996) *"The ongoing value of Prof.*", en Puig, L.-Gutiérrez, A., "*Proceedings of he 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education"*. Valencia

HANNA, G. (1998). "Proof as Explanation in Geometry". *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 20, p. 4 – 13.

NELSEN, R.B. (1993) "*Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking, Classroom resource materials/number 1*", The Mathematical Association of America, Washington.

Documento 6: Septiembre 2000

SOBRE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA Y DEMOSTRACIÓN

María José González López

1. Una duda

¿Estamos hablando de la necesidad de demostrar/argumentar/justificar en la etapa obligatoria o en asignaturas de matemáticas para futuros maestros? **¿Es esta distinción importante?** ¿A quién van dirigidas nuestras reflexiones, a los (futuros) maestros o a los formadores de maestros?

2. ¿Aporta algo el software de geometría dinámica para la demostración?

Lo que sigue va dirigido al profesor que quiera enseñar geometría a sus alumnos usando software de geometría dinámica (en cualquier etapa).

Conflicto: El software de geometría dinámica (SGD) se presenta como un modelo para la geometría euclídea. Las demostraciones en este marco siguen un proceso deductivo basado en la combinación adecuada de un sistema de reglas lógicas aplicadas a los axiomas. Sin embargo, el modelo didáctico en que se suele insertar el uso de SGD en la enseñanza es el constructivista, basado en la exploración y en la conjetura a partir de observaciones sobre experimentos.

Modelo geométrico euclídeo (deductivo)

$\Updownarrow$

Modelo didáctico pretendido (inductivo)

Este conflicto tiene como consecuencia más inmediata el que no podamos esperar que el uso de SGD sugiera caminos o ideas posibles para la demostración formal de un resultado observado. Solamente si el resultado es falso el modo de arrastre facilita la búsqueda de contraejemplos.

Sobre la necesidad de demostrar:

> *"Cuando los estudiantes son capaces de producir muchas configuraciones fácil y rápidamente, entonces simplemente no tienen necesidad de más convicción/verificación. El problema se intensifica por una facilidad de Cabri que permite chequear si ciertas características de las configuraciones (perpendicularidad, pertenencia a,…) son ciertas en general. […] El ordenador, funcionando como una "máquina de demostración" reduce (elimina) la necesidad de los estudiantes de generar demostración (verificación)"* (De Villiers, 1998, p. 374)

Este párrafo presenta los SGD como un obstáculo para la necesidad de demostrar, entendida la demostración como convicción/verificación. Pero De Villiers, en el mismo artículo, indica que los SGD son útiles para la demostración entendida como explicación y descubrimiento. En la página 388 dice "*when proof is seen as explanation, substantial improvement in students' <u>attitudes</u> toward proof appears to occur*". De Villiers enuncia actividades en las que se ejemplifica este proceso. Dichas actividades se han propuesto a futuros profesores de primaria y secundaria aunque se dice que éstos mismos futuros profesores han experimentado ideas similares con sus alumnos de primaria y secundaria en situaciones de microenseñanza o en entrevistas, obteniendo resultados satisfactorios en cuanto a los propósitos iniciales, que son dos:

- permitir a los estudiantes descubrir y formular una conjetura, y
- guiar a los estudiantes hacia una explicación que ilustre la demostración como descubrimiento.

A continuación os presento la ficha que se entrega a los alumnos de una de dichas actividades junto con algunos comentarios propios.

TRABAJANDO CON UNA COMETA

A. Construye una cometa dinámica (usando propiedades ya conocidas en lecciones previas).

B. Comprueba, para asegurarte, que la construcción es correcta. Compara con las construcciones de tus compañeros.

C. Construye los puntos medios de los lados y únelos consecutivamente para formar un cuadrilátero inscrito.

D. ¿Qué observas sobre él?

E. Establece tu conjetura.

F. Arrastra un vértice cualquiera de la cometa a otra posición. ¿Se confirma tu conjetura? Si no, ¿puedes modificarla?

G. Repite el paso previo unas cuantas veces.

H. ¿Es cierta la conjetura también cuando la cometa es cóncava?

I. Usa el "chequeo de propiedades" de Cabri para ver si tu conjetura es cierta en general.

J. Establece tu conclusión final. Compárala con tus compañeros, ¿es la misma o diferente?

K. ¿Puedes explicar porqué es verdad? (Intenta explicarla en función de otros resultados geométricos conocidos. Indicación: construye las diagonales de tu cometa. ¿Qué observas?)

L. Compara tus explicaciones con las de tus compañeros. ¿Coincides con ellos? ¿Por qué? ¿Qué explicación es la más satisfactoria? ¿Por qué?

Mis comentarios a esta forma de usar los SGD:

1. La actividad está guiada "a priori" ya que se entrega la ficha completa a los alumnos. (Otra forma posible de trabajar sería que la ficha fuese sólo una referencia para el profesor, a la que apelar cuando el alumno no progresa por sí mismo).

2. Los apartados a,b,c,d,e,f,g,h constituyen ejemplos típicos de construcción de figuras y constatación de propiedades que se observan "a primera vista" (es "visualmente obvio" que la figura que se forma es un rectángulo y esto se mantiene al arrastrar cualquier vértice de la cometa, ¿es de esperar que algún alumno –estudiante para maestro- conteste otra cosa como conjetura en el apartado e?
3. El apartado (i) apela al Principio de Autoridad; esta vez la autoridad es la máquina, que sólo contesta SI o NO, sin dar más explicaciones y sin que nadie –ni el profesor ni los alumnos- sepa a ciencia cierta el proceso que ha seguido para dar su respuesta.
4. Sólo el apartado (k) demanda una *explicación* al alumno en términos de otras propiedades geométricas conocidas, pero el autor se ha visto obligado a dar allí una indicación, que es fundamental, y que no tiene por qué deducirse de lo que se ve ni tampoco arrastrando nada.

Mi conclusión para este caso es que no es el software dinámico (modo-arrastre incluido) ni la interacción espontánea la que puede generar explicaciones, sino el diseño guiado de la actividad y la interacción dirigida. Yo intentaré poner en práctica este tipo de actividades con mis alumnos de magisterio este curso y ya os contaré la experiencia. Si alguno de vosotros se anima a hacer lo mismo podemos compartir.

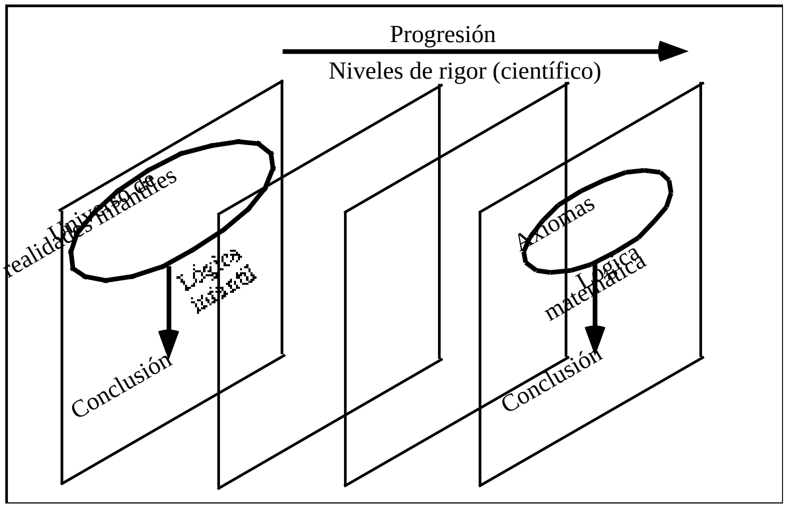
Para profundizar en el futuro

Cualquier tipo de demostración (**formal**/rigurosa/matemática o **informal**/escolar) está basada en una serie de "verdades" previamente aceptadas a las que apelamos en último término, tras haber realizado algún tipo de razonamiento.

Esto hace que en la matemática escolar muchas demostraciones sean "re-interpretaciones" sencillas (orales o escritas…) de los datos de partida en términos de otras cosas conocidas de antemano -el universo de realidades infantiles, junto con algún tipo de explicación basada en la experiencia, la analogía, etc., en terminología de Moisés-. Para las demostraciones matemáticas formales el modelo es el mismo: nos movemos en un mundo de principios/axiomas aceptados implícitamente por toda una comunidad[1], a los que aplicamos razonamientos de la lógica matemática.

Insisto así en que tanto lo formal como lo informal se basa en unos principios de partida y unos modos de razonar; lo que ocurre es que ambos son distintos en cada caso. Parece haber una progresión que va desde lo informal a lo formal y que afecta tanto a los principios como a los razonamientos. El "nivel de rigor" (científico) es el que distingue los distintos estadios. La situación que pretendo plantear se esquematiza en la siguiente figura:

[1] Estos principios sólo se hacen explícitos si la corriente es minoritaria (por ejemplo, los constructivistas); la situación se complica si consideramos la incompletitud de los sistemas de axiomas establecida por Gödel… pero esta es otra historia, quizás alejada del contexto educativo.



Dicho esto, me gustaría profundizar en el futuro en el modo en que el software de geometría dinámica afecta tanto al universo de realidades como al modo de razonar. Pregunto si a alguien del grupo le apetece también avanzar por este camino o si conoce alguna referencia al respecto.

Bibliografía

De Villiers M. 1998. *An alternative approach to proof in dynamic geometry*. En Designing learning environments for developing understanding of geometry and space. R. Lehrer, D. Chazan Eds. Lawrence Erlbaum Assoc., pp. 369-393.

Documento 7: Noviembre 2000

DEBATE SOBRE GEOMETRÍA Y DEMOSTRACIÓN.

Isabel Escudero

1.- En las reflexiones que voy a hacer voy a tener como sujetos de referencia los estudiantes para profesores de Primaria en mis aulas matemáticas (futuros maestros). Voy a apuntar varias ideas y algunas dudas sobre el tema planteado.

2.- ¿En qué niveles de razonamiento están situados nuestros alumnos de primeros cursos?

Distintos trabajos e investigaciones sobre la demostración en niveles no universitarios han estudiado la relación entre los niveles de razonamiento geométrico (unos tomando como niveles los de Piaget y otros los de Van Hiele) y la capacidad de la demostración en geometría y sugieren que el estudio explícito de los sistemas axiomáticos solo es abordable cuando los estudiantes se encuentren en los niveles superiores de dichas teorías (Battista y Clemets, 1995). Estos autores llegan a destacar lo improbable de la productividad de un estudio de este tipo para una amplia mayoría de estudiantes de geometría en niveles no universitarios.

Me pregunto ¿están nuestros estudiantes de primer curso de la Facultad (futuros maestros) en los niveles superiores de razonamiento de Van Hiele?. Ahondando en la cuestión, pienso que, como sugiere Enrique de la Torre en su texto, comprender la necesidad de probar, el sentido y las limitaciones de una demostración, está bastante relacionado con que el sujeto tenga una opinión formada de lo que es la matemática. ¿Tienen nuestros alumnos una opinión formada de la naturaleza de las matemáticas, con sus limitaciones y certezas?.

3.- ¿Qué podríamos hacer en nuestras aulas?

Me parece muy importante la idea apuntada por Enrique de abordar la demostración con mayor libertad, permitiendo la existencia de diálogo, debate y comunicación, pero habría que buscar situaciones de validación (Balacheff) con suficiente potencia como para implicar a los estudiantes en los procesos de probar. Hay que tener cuidado en crear buenos entornos de aprendizaje, cuidando de que la interacción social no sea un obstáculo para el acercamiento a la demostración, ya que como Balacheff (1991) señala hay casos en que los estudiantes no son hábiles en coordinar sus diferentes puntos de vista, o cuando no son hábiles en superar su conflicto sobre una base científica, dando lugar a situaciones en las que se puede favorecer un “empirismo naif”.

Teniendo en cuenta las dificultades del aprendizaje de la demostración (Balacheff (1991) la señala como un auténtico obstáculo epistemológico), pienso que debemos abordarla en nuestras aulas al mismo tiempo que contribuimos a que nuestros estudiantes vayan formándose una opinión sobre la naturaleza de las matemáticas. Profundizar en sus procesos (definir, conjeturar, razonar inductiva y deductivamente, etc.) y uno de estos es construir argumentos de validación y prueba debe ser uno de nuestros retos.

Si aceptamos la premisa de la necesidad de probar, demostrar, argumentar, justificar razonadamente ¿deberíamos fijar la atención en el "nivel de rigor" o estadio de la prueba que puede ser aceptada para nuestros alumnos (futuros profesores)?. Voy a presentar a continuación un ejemplo planteando la pregunta de si podríamos aceptarla como una prueba dentro de las aulas de los futuros maestros:

Planteo el siguiente problema en una clase de "matemáticas para maestros" de primer curso de la especialidad de Primaria:

El cubo de la figura se ha cortado por un plano en una posición tal que se produce la sección plana mostrada en la figura (ver figura 1). ¿Es posible que dicha sección plana sea un cuadrado? Justifica la respuesta.

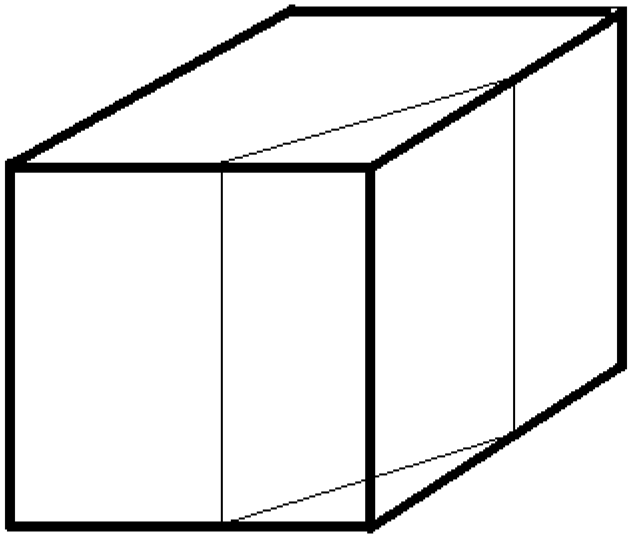
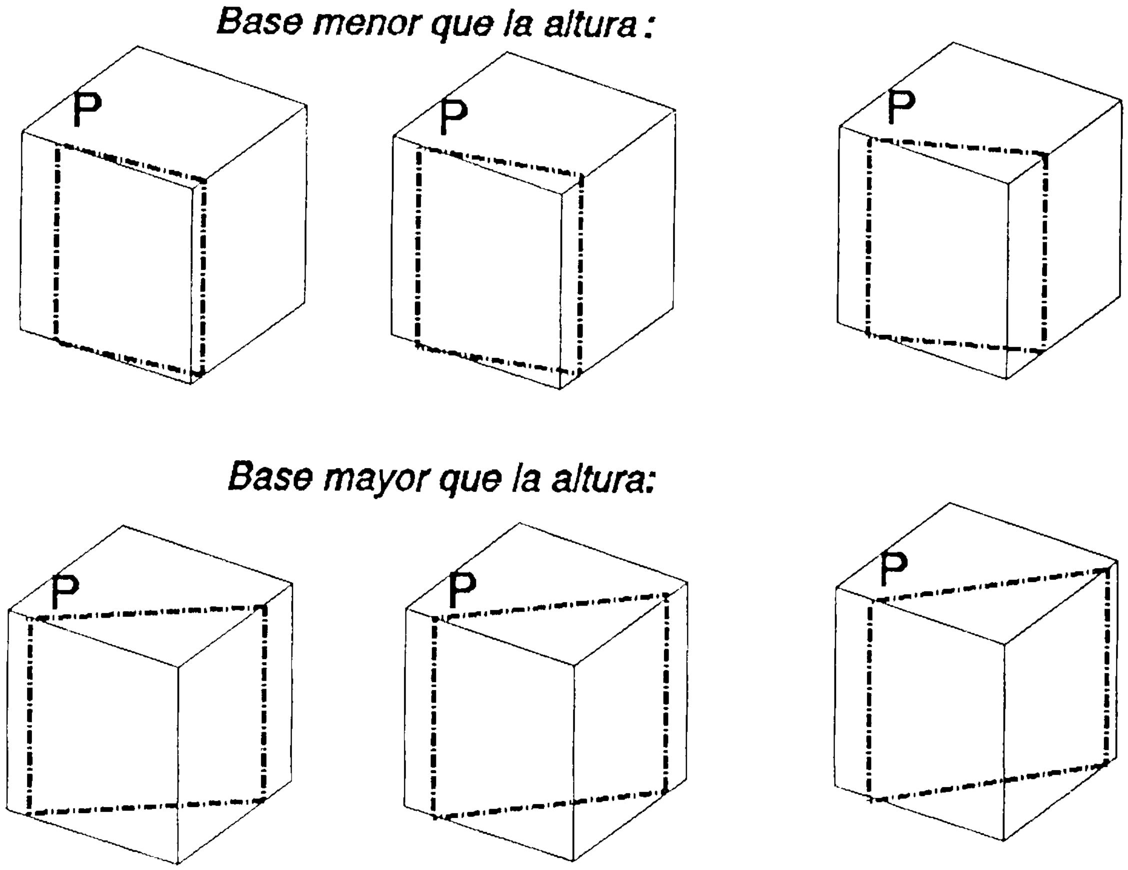


FIGURA 1

Entre las distintas justificaciones (o pruebas) podría plantearse la prueba visual que se muestra en la figura 2, donde se muestran planos de corte paralelos a las aristas laterales del cubo, sin ser paralelos a ninguna cara, que producen secciones planas de dos tipos: 1) rectángulos de base menor que su altura, 2) rectángulos de base mayor que la altura, que iría acompañada de un discurso donde se plantearía que por continuidad debe darse un caso en que se pase de los primeros rectángulos a los segundos, que será el que tiene base y altura de igual medida (el cuadrado buscado).



Aunque se pudiera objetar que estamos haciendo uso de la intuición en suponer que “por continuidad debe haber un punto en el que el corte producido permita pasar de los primeros rectángulos a los segundos” y estuvieramos situándonos en el campo de los que Houdement y Kuzniak (1998-99; 1999; 2000) denominan la “geometría natural”, lo anterior ¿os parece una prueba aceptable para nuestros alumnos?, aunque se puedan dar otras (por ejemplo utilizando expresiones algebraicas en función de la distancia del punto de corte a uno de los vértices). ¿Pruebas de este tipo nos permitirían acercarnos a la discusión de la demostración en estos niveles?.

4.- Sobre la utilización del software dinámico.

En lo que conozco del Cabri-geometre su principal originalidad reside en la posibilidad de poder modificar la figura en la pantalla de manera continua, conservando las relaciones explicitadas en la elaboración de la figura inicial. El desplazamiento en la pantalla del ordenador de un elemento geométrico arbitrario potencia la observación de invariantes entre las diferentes figuras en juego, y favorece así la realización de conjeturas. Por otro lado, también permite la verificación de manera práctica de que un método de construcción puede ser aplicado en numerosos casos de figuras. Por último, una de las exigencias que impone este entorno es que, a lo largo de estos desplazamientos en la pantalla, un determinado dibujo ligado a un objeto geométrico debe guardar sus relaciones espaciales. Para ello, se impone la necesidad de comunicar al ordenador un procedimiento geométrico de construcción que permita así caracterizar el objeto considerado (Laborde y Caponni, 1994).

Pero efectivamente estoy totalmente de acuerdo con María José González en que "no es el software dinámico, ni la interacción espontánea la que puede generar explicaciones, sino el diseño guiado de la actividad y la interacción dirigida" en el sentido que se señala en sus reflexiones. Yo también intentaré poner en práctica ese tipo de actividades, pero aún no se la disponibilidad de aula de informática que tendré, por lo que más adelante precisaré más.

Bibliografía:

Balacheff, N. 1991. The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. En A. Bishop et al. (Eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Trough Teaching*, 175-192. Kluver Academic Publishers.

Battista, M.T. y Clements, D.H. 1995. Geometría y demostración[2]. *The Mathematics Teacher, vol 88, nº1.*

Houdement, C. y Kuzniak, A. 1998-99. Géométríe et paradigmes géométriques. *Petit x*.51, 5-21.

Houdement, C. y Kuzniak, A. 1999. Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics.* 40, 283-312.

Houdement, C. y Kuzniak, A. 2000. Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 20, 1, 89-116.

Laborde, C. y Caponni, B. 1994. Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 165-210.

[2] Traducción realizada por Ricardo Barroso.

Documento 8: Mayo 2001

DEMOSTRACION

María Lluisa Fiol

1- INTRODUCCIÓN

Desde hace algunos años los profesionales de Didáctica de las Matemáticas estamos preocupados por el tema de LA DEMOSTRACIÓN.
Cómo enfocar las demostraciones en Primaria y en Secundaria pero no como un todo acabado, sino como un proceso que se va resolviendo según los problemas planteados, sin adelantarse demasiado a las preguntas que todavía no pueden ser formuladas, es apasionante.

Actualmente el tema se enfoca desde dos aspectos ¿Cómo enseñar las demostraciones ?¿Por qué los alumnos tienen tal cúmulo de dificultades al realizar- o pretender realizar- "demostraciones"?
Sin duda las dos preguntas están relacionadas. Sabemos, aunque no seamos del todo conscientes de ello, que contestar el Por qué requiere contestar el Cómo e inversamente.

Una forma de abordar la problemática es situándose en la posición de aprendiz.
Resituarnos delante de la demostración, del significado que podrá tener ésta en determinados aspectos para una persona que está aprendiendo matemáticas. Una persona que no sabe, sino que aprende.
Es bastante sorprendente constatar que es muy difícil desembarazarse de ideas preconcebidas y empezar de nuevo (o lo más de nuevo que se pueda)
Podemos empezar afirmando:
- no es imprescindible enseñar " demostraciones" - estamos hablando de EP y de ESO -,
- no sólo a través de demostraciones se puede enseñar a razonar,
- para enseñar matemáticas no sólo hay que preocuparse por el razonamiento deductivo, sino también hay que preocuparse por desarrollar la imaginación, cierto tipo de visualización relacionada con una manipulación creativa, utilizar lenguajes con cierta flexibilidad para describir, y también para argumentar, etc.
- si hablamos de razonar, en lo cotidiano...somos menos "razonables" de lo que puede parecer en un primer momento...
- después de Gödel, ¿qué decir de los sistemas deductivos y su autoconsistencia? ¿Cómo los presentamos?¿Dónde "empezar"?

2- SITUAR LA DEMOSTRACIÓN

Más que contestar preguntas, situar, resituar la demostración pide formular preguntas. Preguntas sobre nuestro conocimiento del mundo, sobre el significado de las palabras y el contexto cultural en
que se ha situado la demostración en la enseñanza de las matemáticas.

i-distintos modos de conocer el mundo, de conocer la realidad.

Aparte de lo que no podemos conocer o incluso de lo conocido que no podemos expresar, lo comunmente aceptado es que nuestro conocimiento, representación y expresión del mundo se hace a través de

ARTE / POESÍA
RELIGIÓN / MITO
CIENCIA
FILOSOFIA

Podemos situar las matemáticas como parte de la ciencia con algunos aspectos de arte y otro aspecto filosófico quizás relacionado con lo histórico.
La matemática es por otra parte un lenguaje que nos ayuda a expresarnos en lo referente a algunas estructuras de nuestro pensamiento que como tales describen de forma más o menos cercana aspectos de la realidad. Pero esta realidad sólo parcialmente abarcable es también sólo parcialmente representable a través de las estructuras matemáticas y por lo tanto también parcialmente expresable a través de un lenguaje formal.
Situados delante de alumnos habrá que contarles que expresarse a través de deducciones es una entre diversas formas de expresarse. Forma ésta que responde a una estructura de causa-efecto, de variables limitadas y controladas y a una jerarquización lineal.

ii-demostrar en la vida cotidiana.

Unos aspectos de LA DEMOSTRACIÓN muy interesantes y que podemos estudiar con cierta facilidad porque para ello tenemos diversos recursos fácilmente a mano son:
a) hacer un estudio y estar atentos a cómo se utiliza la palabra en el lenguaje cotidiano: la televisión, los periódicos, las revistas, y también en los libros de ciencias naturales y de física y química.
b) buscar en unos diccionarios de sinónimos y antónimos cuáles son las palabras que se presentan como más cercanas: MOSTRAR, PROBAR, ENSEÑAR...
c) “perseguir” la palabra a lo largo del tiempo, a lo largo de la historia, antes de Euclides, antes de la introducción del álgebra,
d) buscar en diversas culturas actuales ¿Se da en todas ellas la misma importancia a la demostración?¿Se interpreta tal como lo hacemos nosotros? (por ejemplo, el caso del matemático Srinivasa Ramanujan)
e) indagar en “el sentido filosófico” parece que implícito, en la voluntad de crear unos programas *demostradores universales* con los ordenadores.
f) intentar explicitar los sentimientos que se provocan en la clase al hacer una demostración, y esto tanto por parte de los alumnos como de los profesores (seguramente nos será más fácil hacerlo desde nosotros mismos).

3- ...PERO,¿DÓNDE?

Dar vueltas a estos aspectos de la demostración, leer y trabajar sobre ellos y, en todo caso,”estar al tanto”, me llevó a plantearme cuestiones sobre la *teoría.*
En parte porque creo que en nuestro colectivo el problema *teoria-experiencia* o *teoría-práctica* está muy presente y no resuelto.
Me permitireís que diga aquí que no creo que “deba ser resuelto definitivamente” pero sí que necesitamos y creo que colectivamente deseamos llegar a unas ideas consensuadas, a cierto nivel de lenguaje común que nos dé - en ciertos aspectos tranquilidad.
Encotré en Kahn esta afirmación:
Hay dos formas de desarrollo y exposición científica que aquí llamaré $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$.

$\mathbb{A}$ - Primero se formula una teoría y se aportan las pruebas experimentales que confirman su validez.
En este caso la teoría describe de forma anticipada los hechos.
Son ejemplos:
- -La Tierra tiene forma esférica.
- -La circulación de la sangre a partir del corazón a través de un doble circuito.
- -Existen átomos y constituyen la materia.
- -Todos tenemos mente. O sea yo tengo una mente como tú.

En algunos casos se trata de una suposición teórica en enunciado de observación en otros puede ser una intuición.
Las pruebas, las pruebas experimentales, confirman, <u>demuestran</u> la teoría.

“Sí, es verdad” X X X

La teoría orienta,regula,confirma. T----------> X X

X X

$\mathbb{B}$ - Se presentan un gran número de ejemplos tomados de distintos campos, para intentar luego descubrir de forma práctica cierta estructura común de todos estos ejemplos.Ejemplos o “problemas” o...(?) aparentemente dispares, pero se intenta proponer un modelo de lo que se observa, descubrir una estructura común, dar un lenguaje descriptivo que **explique** y permita efectuar predicciones.

X X X

X X ----------> T **Explica**

X X

Algunos ejemplos:
-La órbita de los cometas.

-La teoría de Darwin.
Los ejemplos, los casos individuales tienen una función similar a las analogías, metáforas, ilustraciones, y su misión es explicar, traducir...algunas regularidades, estructuras emergentes, etc. a un lenguaje fácilmente comprensible, no necesariamente demostrar, porque aveces no puede demostrar.

En un principio pensaba que en la enseñanza/aprendizaje tiene que desglosarse en:

a) enseñanza de las matemáticas
b) matemáticas que queremos que sepan los alumnos
c) matemáticas

y luego resituar $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ con la **T** en estos tres campos.

Ahora y me reafirmo después del "caos de preguntas" que me han asaltado, más bien creo que:

b) está entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ con una "T" pequeña : **t ,** quiero decir que tiene un cierto grado de fluctuación , que podemos discutirla de verdad, que no se da cerrada ni quiere ser "ciéntifica" desde el inicio.
c) también está por ahí aunque con la **T** grande
a) y nuestra enseñanza anda por $\mathbb{B}$

Andamos de manera análoga a Darwin en busca de datos,haciendo una recolección detallada .
Pero recordemos que Darwin intentó ser médico, clérigo y botánico.
A los 22 años se enroló en un barco y estuvo navegando de forma prácticamente seguida durante 5 años; 23 años más tarde , o sea a los 45 años escribió "El origen de las especies"
Había hecho un trabajo de recolección de datos especialmente detallado, inteligente y brillante...pero además se cuenta que crió animales, cultivó plantas, e hizo -siempre que tenía ocasión- muchas preguntas a campesinos, pastores, ganaderos, etc.
La teoría de la evolución en reinterpretaciones, dando lugar a grandes discusiones, ahí está. No demostró nada ni podrá ser nunca demostrada pero...explicó la diversidad de la vida, la complejidad de lo vivo.

Está claro que uno se pregunta: debía tener ideas implícitas, suspicacias. Sí, sin duda formuló conjeturas y utilizó una buena dosis de intuición.

4 -RESUMIENDO

1-Las demostraciones deberían presentarse a las personas que quieren estudiar una carrera de Ciencias o Técnica.

2-Cómo hacer ver la necesidad de las demostraciones, los distintos tipos de demostraciones, etc. en otros niveles, está por redefinir.

3-Para redefinir el punto 2 necesitamos indagar qué significa "aprender matemáticas" y "cómo aprende matemáticas" la gente en general.

4 -Además de la demostración (cerebro izquierdo) está la visualización, la síntesis, la intuición, etc. (cerebro derecho). Una teoría tiene una parte demostrativa pero también mucho de descripción, de explicación y de intuición.

5 -La **t** pequeña quiere decir que tiene su importancia pero considerada algo así como una nube, no como cristal. O sea "se forma" y lo importante no es la forma, sino el **se**.

Ójala pudiésemos preguntar ¿Qué es lo que no se entiende de esta demostración? y obtener una respuesta "de verdad", pero como sabemos los profesores y especialmente los investigadores en Didáctica de las Matemáticas estas preguntas tan directas con frecuencia dan lugar a respuestas esterotipadas. Realmente es muy difícil de contestar. Uno tiene una impresión, no se aclara...pero no encuentra la manera de discriminar la dificultad y después expresarlo con palabras.
-"No sé para que sirve..."
Al escribir esta frase me doy cuenta que la he oído varias veces así:
-"¿Para que sirven las matemáticas?"
Frase que quizás no entendía del todo porque no la situaba en el contexto adecuado.

Propongo como ejercicio que reflexionemos sobre algunas demostraciones ¿ vemos alguna dificultad?
¿podemos expresarla?

Para empezar el debate he aquí dos de ellas:

i) Demostración de que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto.
¿Es posible dado uno de los dibujos que se hacen en la pizarra pensar que pueden ser varios puntos?

ii) La medida de un ángulo inscrito es la mitad del arco que abarca entre sus lados.
¿Y a que viene situar el ángulo de esta manera? ¿Qué significado tiene poner "arco"en esta frase?

5 ¿"UNA" TEORÍA?

Agrego a continuación unas reflexiones sobre "La Investigación en el Aprendizaje de la Geometría para la E. P." que escribí preparando el III SEIEM.

Por los indicios, por las informaciones parciales recibidas todo me hace pensar que en este Simposio ya sea explícita o implícitamente el tema de fondo será: **teoría versus práctica.**
En enseñanza/aprendizaje es muy difícil tomar la práctica escolar diaria como comprobante, o validadora de una teoría. Sí es verdad que quizás un taller, unas

cuestiones diseñadas para progresar en un determinado concepto...nos ayude en su pequeñez a dar apoyo a una teoría, pero...
Sin embargo cuando se investiga y especialmente cuando se escribe la investigación, se dice que "se tiene que apoyar en una teoría" (no en dos o en tres, en una)
Apoyarse en una teoría, pero ¿cómo?

Quiero decir que dar una teoría ,describirla y hacer **una** práctica no justifica que una se apoye en la otra, en todo caso sugiero que deberemos pensar, en un momento o en otro, en organizar una secuencia de inferencias.
Y tampoco es suficiente **decir** que se apoya, para que realmente se apoye. Puedo decir que salgo a comprar, y me quedo aquí.
Creo que todos tenemos un punto en común, un espacio donde todos nosotros hemos trabajado. Quizás lo más difícil en la clase, en el aula, en la práctica educativa es la interrelación de la persona adulta que se supone experta y el niño/ña que se supone no tan experto. Pero en esta relación se trata, entre otras cosas de decir/hacer y que estas dos acciones tengan una relación fluída [El árbol de la vida, no certidumbre]
Y un buen maestro necesita hacer, no decir que hace, aunque por descontado podrá explicarlo, quizás...
Más que **una** teoría que nos puede hacer pasar de trabajar con una rigidez a trabajar con dos rigideces lo que se necesita desde el punto de vista de la Investigación en el Aprendizaje de la Geometría es redefinir cuál es la Geometría que imaginamos, que nos reinventamos para los pequeños ,y no tan pequeños [¿también para nosotros...?]
Se necesita:
*Fiarse de lo que uno ve, de lo que se toca,etc.
*Se necesita enfatizar el objeto/material como intermediario.
*Tantear, buscar regularidades
*No repetir y repetir trivialidades, por ejemplo la clasificación de los triángulos. "Poner la imaginación al poder"
*No justificar lo evidente,lo que "se ve"
*Poner de relieve cuando algo se acepta por economía, por convenio.
*Utilizar el vocabulario de forma útil: dar significado, unificar poco a poco...
*Explicar, describir, argumentar y poder,tranquilamente plantear **dudas (** o sea a pesar de lo sabio que soy, o quizás por ello, dudo, y tengo comentarios que hacer, preguntas por formular...)

6 BIBLIOGRAFÍA (y citas)

*__Courant, R. y Robbins, H.__ (1979): ¿Qué es la Matemática? Aguilar, Madrid.
-dice algunas cosas sobre demostración en la introducción
-pàg.17 y siguientes: La infinitud del sistema de números enteros. Inducción matemática.
-pág. 22 :...En tanto que una demostración no proporciona una indicación para el acto del descubrimiento, debe llamarse más propiamente una comprobación (págs. 26 y 27)
*__Davis, P. J. y Hersh, R.__ (1981- 1995): La experiencia matemática
*__Dubnov, Ya. S.__ (1973) : Errores en las demostraciones geométricas , Limusa-Wiley , México. Hay un pequeño comentario en la introducción.
*__Fetísov, A. I.__ (1980) : Acerca de la demostración en geometría , Mir , Moscú.

*__Gelb, M. J.__ (1999) : Pensar como Leonardo da Vinci. Siete lecciones para llegar a ser un genio, Planeta, Barcelona.
-págs. 76 - 93 Dimostrazione: El compromiso de comprobar el conocimiento por medio de la experiencia, la persistencia y la voluntad de aprender de los errores.
*__Ghebverghese,G.J.__ (1996): La cresta del pavo real.Las matemáticas y sus raíces no europeas. Pirámide, Madrid.
*__Giddens, A. y Turner,J.__ (Eds.)(1990): La teoría social hoy, Alianza , Madrid.
*__Gran Diccionario de Sinónimos y Antónimos__ (1989) Espasa - Calpe, Madrid.
*__Hildebrant, S. y Tromba, A.__ (1990) :Matemáticas y formas óptimas, Prensa Científica, Barcelona.
-cap. 2 :El legado de la ciencia antigua. Ver especialmente Sobre la demostración en las páginas 30 a 36.
*__Kahn,P.__ Théorie et expérience
*__Maturana, H. y Varela, F.__ (1990) : El árbol del conocimiento.Las bases biológicas del conocimiento humano,Debate, Madrid.
*__Mèlich,J-C__ (1994): Del extraño al cómplice. La educación en la vida cotidiana , Anthropos, Barcelona.
*__Newman,J.R.__ (1974):"Srinivasa Ramanujan"en Matemáticas en el Mundo Moderno , Selecciones de Scientific American, Blume, Madrid, pp. 84 - 88
*__Otte, M.__ (2000) La prueba matemática y la percepción
*__Pais, A.__ (1984) :"El Señor es sutil..." La ciencia y la vida de Albert Einstein, Ariel, Barcelona.
*__Rivière, A. y Nuñez, M.__ (1996) La mirada mental ,desarrollo de las capacidades cognitivas interpersonales , Aiqué, Capital Federal (Buenos Aires)
-pág. 59: señalar con el dedo [acto protodeclarativo: señalar para compartir no para pedir] (etoqueé? foto de la mano de un niño que empieza a hablar, que señala)
*__Solovine,M.__(Ed.) (1956) : Albert Einstein, Lettres à Maurice Solovine ,Gauthier-Villars, París.
*__Szabó, A.__ (1977) : Les débuts des mathematiques greques J. VRIN, Paris.
-pág. 199.: Troisième partie- La constitution d'une Mathematique systématico-déductive.
-1¿?- La "démostration" dans les Mathématiques greques.
-pág. 205: La mise en évidence concrète ne fournait que la germe de la démostration.
*__Wittgenstein__ (1914) Tractatus-Lógico-philosophicus.

7 - CITAS

*En **Gheverghese**, pág 17 :

En el prefacio habla del matemático indio **Srinivasa Ramanujan** que nació en Erode, al sur de la India...fue reconocido por algunos como un genio natural imposible de igualar a no ser que nos remontemos dos siglos atrás hasta Euler y Gauss. En sus contemporáneos, especialmente en su estrecho colaborador G. H. Hardy, existió una sensación molesta - el sentimiento de que la ignorancia de las matemáticas modernas por parte de Ramanujan, **sus modos extraños de "hacer" matemáticas** , su muerte prematura habían rebajado sus logros y, por tanto, su influencia futura en el campo. Sin embargo, pocos matemáticos hoy aceptarían esta valoración. En 1976, George Andrews, un matemático americano, estaba hurgando en algunos de los trabajos de Ramanujan en una biblioteca de la Universidad de Cambridge cuando se encontró un fajo de 130 páginas llenas de notas que representaban el trabajo de Ramanujan durante el último

año de su vida en Madrás. Esto es lo que Richard Askey, un colaborador de Andrews, dijo acerca de lo que se conoce por “El cuaderno perdido” de Ramanujan:
“El trabajo de ese año, en el que se estaba muriendo (y con grandes dolores durante mucho tiempo según su mujer - este es un comentario de JGG), equivalió al trabajo de toda una vida de un excelente matemático. Lo que se consiguió fue increible. Si se hubiese puesto en una novela , nadie lo habría creído”
“Los tesoros encerrados en el “Cuaderno perdido” se están extrayendo con creciente éxito y emoción por los matemáticos modernos.
El “Cuaderno perdido” ha contribuido a crear uno de los conceptos más revolucionarios de la moderna física teórica: la teoría de las supercuerdas en cosmología. Una ecuación contenida en el “Cuaderno perdido” se ha utilizado para programar un computador hace unos cuantos años para el cálculo de “Pi” hasta un grado de exactitud de millones de dígitos nunca alcanzado anteriormente.
Sin embargo, para mí el aspecto más misterioso de la obra matemática de Ramanujan sigue siendo su **método** . Aquí nos encontramos con alguien pobremente educado en matemáticas modernas y aislado durante la mayor parte de su vida de un trabajo continuado en las fronteras del tema y que, sin embargo, produjo una obra de una calidad y duración que tiende cada vez más a ensombrecer a algunos de sus más eminentes contemporáneos, Hardy entre ellos. **LA FORMA DE HACER MATEMÁTICAS DE RAMANUJAN** fue muy distinta de la del matemático convencional formado en el método axiomático deductivo de las **demostraciones** .
...he encontrado la vida y el trabajo de RAMANUJAN instructivo, ya que suscitan numerosas e interesantes cuestiones.
==>¿Hasta qué punto las influencias culturales determinaron la elección por parte de Ramanujan, de ciertos temas o de sus métodos?
==>Ramanujan provenía de los bramanes Ayyangar de Tamil Nadu en el sur de la India
==>diosa familiar NAMAGIRI
...Pero esto es perfectamente coherente con una cultura que consideraba las matemáticas, en parte, como un instrumento de la intervención divina y de la predicción astrológica. El temperamento de los matemáticos occidentales encuentra difícil reconciliarse con los elementos especulativos, extrarracionales e intuitivos de la obra de Ramanujan.
...¿Es posible identificar algunos rasgos de su peculiar cultura que condujeron al trabajo creativo en matemáticas?
...Las matemáticas y los números tenían una importancia especial en la tradición bramánica como instrumentos extrarracionales para controlar el destino y la naturaleza.
==>La obra de Ramanujan también plantea preguntas acerca de lo que constituye las matemáticas.
==>¿Es necesario ajustarse a un método particular de presentación para que algo pueda ser reconocido como matemáticas?
pág. 182...definir lo que constituye una “demostración” es una cuestión difícil. Hoy resulta inconcebible una demostración matemática rigurosa que no sea simbólica. Una demostración moderna es un procedimiento basado en una deducción axiomática que sigue una cadena de razonamientos desde los supuestos iniciales hasta la conclusión final. Pero ¿no es esto adoptar una visión muy restrictiva de lo que es una **demostración**?
¿No podríamos ampliar nuestra definición para incluir, como sugería Imre Lakatos (1976),
* **explicaciones**
***justificaciones**

*__elaboración de una conjetura__ sometida constantemente a contraejemplos?
¿No sería posible expresar un **argumento o demostración**
en términos retóricos
en vez de simbólicos
y que fueran todavía completamente rigurosos?"

Como sostiene GILLINGS (1972, pág. 233): "Un **argumento o demostración** no simbólicos pueden ser rigurosos cuando se dan para un valor particular de la variable; las condiciones para dicho rigor son que el valor particular de la variable debe ser típico, y que una ulterior generalización a cualquier otro valor debe ser inmediato"

NOTA: esta cita es muy larga pero he querido mantenerla tal cual porque me gusta mucho , a trozos me emociona no se porqué.
Regalé el libro y por lo visto al copiar las citas no lo hice con suficiente cuidado por que está claro que no todo es de la página 17,pero si que creo que toda la primera parte es del Prefacio.
Hay más datos sobre Ramanujan en "Matemáticas en el Mundo Moderno"

** En **Mèlich,J-C** (1994), en pp 28 y 29. se dice:
" La cuestión acerca de las características esenciales de una teoría científica es de sum#a importancia en la epistemología contemporánea. Lo que hoy se conoce como "criterio de demarcación" no es otra cosa que el hecho de establecer la distinción entre los distintos modos de conocimiento a los que acabamos de referirnos. En una carta fechada el día 7 de mayo de 1952, Albert Einstein se dirigía a su amigo Maurice Solovine en un intento de mostrar la que a su juicio constituye la estructura de las teorías científicas (supongo que tomados de:**Solovine,M.**(Ed.) (1956)). Según Einstein, una teoría se construye en cuatro fases (mirar transparencias 1 y 2)
1. Se nos ofrecen una multitud de experiencias sensibles (Erlebnisse).
2. A son los axiomas de los que derivamos consecuencias. Psicológicamente, A se apoya en E (Experiencias sensibles), pero no hay un impulso lógico de E a A, sino solamente un impulso intuitivo (o psicológico).
3. De A deducimos lógicamente una serie de proposiciones (S - Sätze -) que pueden exigir ser exactas (aunque, de hecho, no lo son).
4. S se relaciona con E (a través de la comprobación empírica). Este proceso también pertenece a la esfera extralógica (intuitiva), porque las conexiones entre los conceptos que aparecen en S y las experiencias inmediatas (E) no son de naturaleza lógica. Pero esta relación entre S y E es (pragmáticamente) mucho menos incierta que la relación de A con E. Si tal correspondencia no puede considerarse de modo cierto el mecanismo lógico no tendría ningún valor para la comprensión de la realidad."

Continúa comentando Joan Carles: "Resulta al respecto sumamente interesante comprobar que anteriormente a la evolución de la filosofía de la ciencia pospopperiana, encontramos en Albert Einstein una formulación acerca de la naturaleza de las teorías próxima a la que nos interesa para poder construir una filosofía de la educación en la vida cotidiana".

Mª Luisa Fiol

Transparencia 1

ESTRUCTURA DE UNA TEORÍA BUSCANDO **LA DEMOSTRACIÓN**

ERLEBNISSE

$E_1, E_2 \ldots E_n$

• MULTITUD DE EXPERIENCIAS SENSIBLES

$A_1, A_2 \ldots A_{10}$

• AXIOMAS

A se apoya en E

No hay un impulso lógico de E a A

Hay un impulso intuitivo (relación **más** incierta)

SÄTZE

• PROPOSICONES

De A deducimos lógicamente una serie de proposiciones

• COMPROBACIÓN EMPÍRICA

* S relacionado con E

Proceso que pertenece a la esfera extralógica (intuitiva)

(relación **menos** incierta)

> Si tal correspondencia no puede considerarse de modo cierto, el mecanismo lógico no tendría ningún valor para la comprensión de la realidad

Transparencia 2