Reflexiones varias

Documentos presentados por miembros del Grupo
‘Aprendizaje de la Geometría’ de la SEIEM

INDICE

Documento 1: Noviembre 1999

Informe sobre:

EL PAPEL DE LA NUEVAS TECNOLOGÍAS EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRIA

Para el Grupo de Aprendizaje de la Geometría (SEIEM)

María José González López
Dpt. Matemáticas, Estadística y Computación
Universidad de Cantabria
glopez@matesco.unican.es

En este informe presentaré mi visión personal sobre cuáles son los aspectos que merece la pena investigar para abordar con fundamento el uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la geometría. Espero que estas conclusiones personales sean completadas, discutidas e interpretadas por el resto de los colegas del grupo, para que puedan surgir líneas de investigación fructíferas.

1. INTRODUCCION

En primer lugar me encuentro en la necesidad de precisar o delimitar el significado de los términos que aparecen en el título. Bajo el epígrafe de *nuevas tecnologías* se engloban multitud de aspectos distintos: calculadoras de todo tipo, software variado, los múltiples servicios que ofrecen las redes de comunicaciones o los medios audiovisuales. Cualquiera de estos aspectos tiene su aplicación al *ámbito educativo*: el uso de las calculadoras en el aula, la utilización de determinados programas o entornos informáticos interactivos de aprendizaje de algún tema concreto, la enseñanza usando los servicios de Internet, la nueva comunicación con el profesor o con los compañeros usando el correo electrónico o los tablones de noticias, los vídeos en sustitución del profesor, etc. Y para cualquiera de estos aspectos encontramos colecciones de actividades relacionadas con temas de *geometría*.

En este planteamiento estoy separando intencionadamente los mundos “tecnológico”, “educativo” y “geométrico”, porque creo que es precisamente esta separación uno de los factores que impide su incorporación eficaz al sistema educativo. Por ello, entiendo que **el objetivo global de nuestro grupo en este tema concreto, debe ser precisamente el estudio de las interrelaciones complejas entre los aspectos tecnológico, educativo y geométrico**. Sólo de un análisis profundo de dichas interrelaciones podrá surgir una propuesta de uso fundado de las nuevas tecnologías, en la que se delimiten de forma precisa:

- **A.** los contenidos geométricos susceptibles de ser enseñados/aprendidos bajo esta perspectiva, y
- **B.** las implicaciones curriculares (en sentido amplio) que esto conlleve.

Como el abanico de posibilidades es amplio y poco homogéneo, la mayor parte de este informe (Sección 4) se centra en el software de geometría dinámica.

2. PERSPECTIVA INSTITUCIONAL

En las recomendaciones hechas por el MEC en los documentos del Diseño Curricular base de Educación Primaria y de Secundaria Obligatoria encontramos directrices genéricas sobre el uso de nuevas tecnologías en educación en el área de matemáticas, sin que se especifique de forma precisa cuál debe ser su uso, en qué parcelas concretas de las matemáticas puede ser útil y para qué. Literalmente se dice: "*el uso de los nuevos medios tecnológicos ha de tener repercusiones en la manera de enseñar las matemáticas y en la selección de contenidos*". En el caso concreto del ordenador se destacan tres características interesantes desde el punto de vista didáctico:

1. permite "*gestionar y representar la información, permitiendo que el alumno dedique su atención al sentido de los datos y al análisis de los resultados*",
2. permite "*ejecutar órdenes de muy distinto tipo (dibujos, cálculos, decisiones,…) con gran rapidez*",
3. permite "*interactuar con el usuario, que puede intervenir en determinados momentos proponiendo datos o tareas nuevas en función de los resultados que se vayan obteniendo, lo que le convierte en un poderoso instrumento de exploración e indagación*".

Siguiendo la tónica habitual del decreto, se delega en el profesor la tarea de concretar el uso de las nuevas tecnologías, en particular, el ordenador: "*el profesor debe valorar para decidir utilizarlo* [el ordenador]*como recurso*".
Estas directrices genéricas no impiden al profesor que lo desee realizar un diseño curricular que integre el uso de las nuevas tecnologías desde una perspectiva global y razonada, con una selección de contenidos, una metodología y una evaluación adaptadas al medio utilizado. Sin embargo, a pesar de lo reciente de la ley (1990), elaborada en plena efervescencia de las nuevas tecnologías, no encontramos en ella la revolución anunciada por su uso en educación; más bien al contrario, se presentan como un recurso (¿un recurso más?). Podemos deducir que, una vez más, la revolución no lo es si no parte de las bases, en este caso, de la voluntad de los profesores por integrarlas completamente en su proyecto docente personal.

Tampoco está claro que haya una mayoría de profesores a favor o en contra. Normalmente encontramos variedad de opiniones al respecto, opiniones normalmente extremas, sin término medio entre los admiradores incondicionales y los detractores tajantes, a pesar de que externamente los profesores nos decantemos por un "es bueno o no, dependiendo del uso que se le dé", frase que, en boca de un profesor, no adquiere significado hasta que se declara en su propia actuación como docente. Aunque no tengo datos sobre España, (Monaghan, 98) estima que sólo el 5% de los profesores ingleses (no dice en qué nivel) utilizan significativamente las nuevas tecnologías en clase de matemáticas.

Esta perspectiva sugiere dos posibles líneas de investigación relacionadas con el profesor:

A. conocer las creencias de los profesores en cuanto al uso de las nuevas tecnologías en el aprendizaje de la geometría,

B. Determinar la incidencia de las nuevas tecnologías en la formación de profesores de matemáticas: en el currículo de formación inicial y en la formación permanente.

3. PERSPECTIVA DOCENTE

A la vista de los artículos que poseo en los que profesores de matemáticas relatan sus experiencias de uso de las nuevas tecnologías en las clases de matemáticas, he encontrado las siguientes razones esgrimidas por los profesores para fundamentar su uso:

- que no se puede dar la espalda al medio en que vivimos inmersos,
- que se facilita o mejora el aprendizaje de los alumnos, afirmación que se basa en distintos tipos de argumentos:
    - el carácter motivador (lúdico) de las nuevas tecnologías,
    - la ejecución de ciertas operaciones mecánicas es más rápida, por lo que el tiempo se aprovecha mejor,
    - se incorpora como elemento esencial al proceso de enseñanza/aprendizaje la visualización,
    - la memorización deja de tener sentido, se fuerza al alumno a razonar,
    - la manipulación propia permite al alumno conjeturar, descubrir, en definitiva, construir su propio conocimiento,
    - los alumnos cuentan con un "profesor virtual" ante el que están desinhibidos
- que sirve de apoyo al profesor en su metodología de enseñanza:
    - facilita la evaluación continua de los alumnos,
    - posibilita atender a la diversidad.

Las razones en contra del uso de las nuevas tecnologías van en la línea de:
- falta de equipos,
- falta de tiempo (como si el uso de nuevas tecnologías fuera un añadido), y
- dificultad en la gestión de las clases impartidas en un aula de informática.

A pesar de que algunas de estas razones (tanto a favor como en contra) pueden estar fuera de nuestro interés en cuanto a grupo de investigación sobre Aprendizaje de la Geometría, debieran ser tenidas en cuenta para que la investigación progrese en la línea de sustentar o refutar opiniones extraídas de la práctica.

4. FOCOS DE INTERES (para fundamentar el uso de nuevas tecnologías)

Aunque parezca ocioso decirlo, conocer el manejo operativo de un paquete de software geométrico, o conocer y utilizar actividades en él programadas, no proporciona preparación suficiente como para afrontar la enseñanza de la geometría con este tipo de medios. El reto principal es tener argumentos para decidir si los medios tecnológicos se pueden incorporar o no como estrategia pedagógica global. Para ello considero necesario reflexionar sobre los siguientes aspectos:

1. delimitar los contenidos que son susceptibles de ser trabajados con el medio utilizado y cuáles no; me refiero tanto a los conceptos y propiedades geométricas, como a los contenidos procedimentales y actitudinales.
2. saber cuál es la naturaleza del conocimiento geométrico que se adquiere usando un determinado medio tecnológico, quizá distinta de la generada por otros medios.
3. conocer la ó las teorías del aprendizaje en las que se enmarca el tipo de aprendizaje que se produce con el uso de un medio tecnológico,
4. conocer cuáles son los errores más comunes que los alumnos tienen (contemplando la posibilidad de que puedan ser propiciados por el propio medio),
5. adaptar la evaluación al medio utilizado,
6. gestionar situaciones de enseñanza/aprendizaje adaptadas a la nueva forma de construir conocimiento.

Que la investigación se oriente a afrontar estas cuestiones (1 a 6, y seguramente algunas más que me olvido) es mi interés fundamental. Es el primer paso para poder justificar nuestra elección ante la incorporación de las nuevas tecnologías al currículo, **para poder elegir si las usamos como simple recurso de apoyo a la enseñanza/aprendizaje de contenidos particulares o como eje alrededor del cual se articule todo el currículo**; me gustaría conocer vuestras sugerencias sobre cualquiera de estos apartados.

En lo que sigue me centraré en los Sistemas de Geometría Dinámica (tipo Cabri-Géomètre) propuestos como “micro-mundos” para el aprendizaje de la geometría. Esto supone dejar fuera muchos medios y programas que también podrían tener su cabida en nuestro ámbito geométrico, pero entiendo que cada uno exige un tratamiento específico y espero que algunas partes del siguiente análisis puedan extrapolarse a otros medios.

En lo que sigue intentaré profundizar un poco en cada uno de los aspectos planteados, presentando el estado del arte y sugiriendo algunas posibles líneas de actuación (siempre desde mi perspectiva y desde la información que yo manejo).

4.1 CONTENIDOS

De todos los posibles contenidos que se pueden abordar, mencionaré aquellos para los que creo que el uso del software introduce novedades respecto de la enseñanza sin software. Incluyo como contenidos, además de los geométricos, los conocimientos procedimentales y actitudinales que surgen usando un entorno computacional, para los que la geometría constituye un sustento adecuado pero que exceden al ámbito geométrico.

FIGURA GEOMÉTRICA

La posibilidad de desplazamiento de los elementos constituyentes de una construcción geométrica en un sistema de geometría dinámica permite acercarse al concepto de figura geométrica enfatizando las propiedades que quedan invariantes para distintas ejemplificaciones de una representación visual de dicha figura, es decir, **la figura como invariante de propiedades de un dibujo dinámico**.

CONCEPTO/PROCESO/DIBUJO

No sólo las construcciones con regla y compás son manejadas en un sistema de geometría dinámica: en algunos de ellos (por ejemplo, Cabri-Géomètre), existe una orden que permite construir polígonos regulares de cualquier número de lados. Obviamente, en los casos de polígonos no constructibles con regla y compás se trata de una aproximación visual a dichas figuras, efecto que debe ser tenido en cuenta en la enseñanza, y que ejemplifica la diferencia entre un **concepto geométrico** (polígono regular de n lados), **una construcción geométrica** (como proceso algorítmico necesario para obtener una representación de dicho concepto utilizando un determinado material y unas determinadas reglas de construcción), y **la materialización de dicho proceso en una imagen visual en un determinado soporte material** (la colección de pixels cuya percepción visual responde a las características esperadas).

LUGARES GEOMÉTRICOS

La posibilidad de mover un punto de una construcción geométrica se complementa con la opción de que otros elementos dependientes de él dejen una "huella visual" en la pantalla del ordenador, lo que permite obtener una visualización del lugar geométrico de dichos elementos cuando dicho punto recorre una determinada trayectoria.
Los problemas geométricos que involucran el uso de lugares geométricos suelen plantear dificultades de visualización: por ejemplo, no es trivial poder dibujar sobre un papel, en un nivel de Secundaria, el lugar geométrico siguiente *"Dada una circunferencia y un punto interior A, que no sea el centro, sea P un punto de la circunferencia y r la recta perpendicular al segmento PA por el punto P. Hallar el lugar geométrico que determina la recta r cuando el punto P recorre la circunferencia"* (Carrillo-Llamas 99, p. 45). Y sin embargo se trata de (la envolvente de) una elipse. Así los sistemas de geometría dinámica pueden usarse como **complemento visual a la teoría que se imparte sobre lugares geométricos.**
Otro ejemplo prototipo del uso de lugares geométricos es la construcción de las cónicas. En este aspecto, las últimas versiones de los sistemas de geometría dinámica más conocidos incorporan un paquete específico de tratamiento de cónicas (elipse, hipérbola ó parábola en Cabri-Géomètre) también desde un punto de vista analítico, permitiendo su definición a partir de cinco puntos que deben ser marcados con el ratón sobre la pantalla gráfica del programa. En particular, los programas ofrecen la posibilidad de mostrar la ecuación de dichas cónicas. Se **integra así en un mismo entorno el tratamiento analítico y el geométrico del concepto de cónica**.

DEMOSTRACIÓN DE PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

Al realizar una construcción geométrica en un sistema de geometría dinámica traducimos unas determinadas reglas geométricas a una imagen visual. "Vemos" nuestras hipótesis. Si tratamos de demostrar que dichas hipótesis implican una tesis, ahora también "vemos" la tesis: arrastrando por la pantalla los elementos constituyentes de dicha construcción geométrica seguimos en las mismas hipótesis, por lo que podemos "ver" si se cumple la tesis para distintas (muchas) posiciones posibles de la construcción. Si encontramos un caso en el que la tesis no se cumple habremos demostrado (con un contraejemplo) que no es cierta; en otro caso nos habremos convencido de que la tesis es cierta (quizá como resultado de una mezcla de los principios de autoridad –el ordenador no se equivoca- y de experiencia dados por Moisés Coriat en su informe), pero no tendremos una demostración de ello. El paso siguiente es esperar que este proceso motive o inspire una posterior demostración formal (pero no sé qué argumentos emplear para basar esta esperanza).

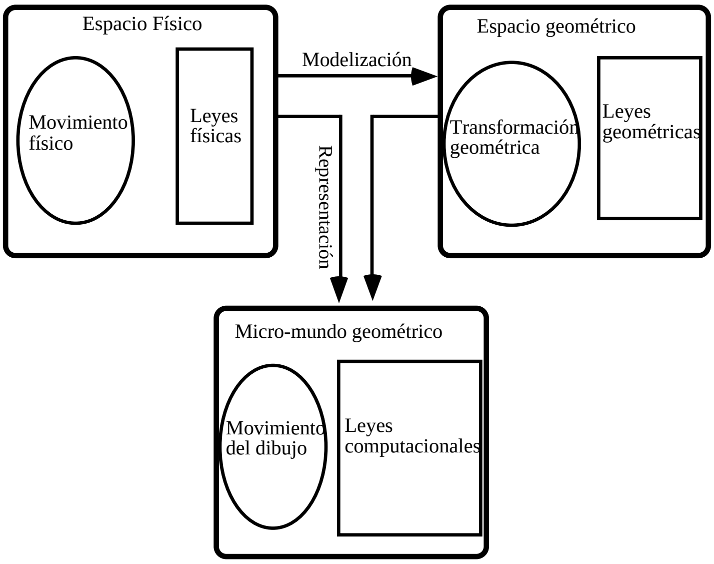
En casos especiales los sistemas de geometría dinámica aseguran la veracidad de ciertas propiedades: alineación de tres puntos, paralelismo y perpendicularidad de rectas, semirrectas, segmentos ó vectores; equidistancia de un punto a otros dos y pertenencia de un punto a un objeto, etc. Algunos sistemas de geometría dinámica incorporan un "chequeo aleatorio de teoremas" que genera y prueba ejemplos de una propiedad conjeturada, concluyendo la veracidad (con una determinada probabilidad) o la falsedad (caso de encontrar un contraejemplo). En cualquier caso, el sistema produce una respuesta sin informar del proceso seguido para conseguirla.

En mi opinión, **está por determinar si los sistemas de geometría dinámica sirven o no para "inspirar" demostraciones geométricas. Cabe aquí preguntarse por el significado atribuido a la demostración en geometría, discusión tan interesante y de actualidad. ¿Varían en algo las nuevas tecnologías el significado de esta palabra?, ¿incluso de cualquier otra de las palabras de la secuencia: "diseñar- explorar- modelizar - conjeturar - definir - argumentar – demostrar"?.**

SIMULACIÓN – MOVIMIENTO - CONTINUIDAD

Los Sistemas de Geometría Dinámica permiten simular el funcionamiento de multitud de mecanismos físicos (poleas, bicicletas, manivelas, etc). Este uso del software de geometría dinámica revela interesantes **cuestiones sobre las implicaciones de *representar el movimiento* valiéndonos de dibujos sobre una pantalla de un ordenador**. Planteo estas cuestiones a continuación.

Cuando utilizamos un sistema de geometría dinámica para simular el movimiento físico entendemos el movimiento del dibujo en la pantalla del ordenador como la reproducción de una película que pudiera haber sido grabada previamente. Sin embargo las leyes que gobiernan el movimiento de los dibujos en la pantalla son geométricas, es decir, el funcionamiento del software obedece a restricciones geométricas, que poco o nada tienen que ver con las leyes físicas del movimiento real. Y aún más, hay leyes computacionales que gobiernan el modo de representar internamente los objetos geométricos y el modo de manipularlos, que también juegan su papel. La situación que pretendo explicar se resume en el siguiente cuadro:

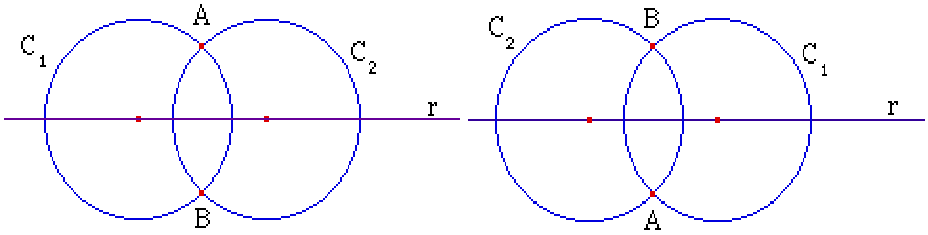


El hecho de que sean leyes geométricas y computacionales las que gobiernen el movimiento del dibujo en la pantalla del ordenador hace que, en ocasiones, no se reflejen propiedades esenciales del movimiento físico que se pretende simular, como, por ejemplo, la *continuidad*. Encontramos construcciones en las que, al mover los dibujos en la pantalla, se producen "saltos" (discontinuidades). (Laborde 99) nos recuerda que la noción de "estar próximo" en un sistema de geometría dinámica no es la misma que en topología, cosa que evidentemente tiene su influencia en la continuidad. Se dice que lo más a lo que podemos aspirar es a afirmar que:

Para cualquier sucesión de posiciones de cualquier punto base P sobre un lazo cerrado P_1, P_2,…, $P_n=P_1$, el estado final $F(P_n)$ es igual al estado inicial $F(P_1)$. (*)

Es decir, tras ejecutar un desplazamiento en un recorrido cerrado volvemos al punto de partida, pero esto no excluye el que en puntos intermedios del recorrido puedan producirse discontinuidades. Este es, a mi entender, uno de los puntos clave a la hora de hablar de simulación; debe ser tenido en cuenta en la enseñanza ya que surge frecuentemente, en ejemplos sencillos, como el siguiente, (y es la causa de algunas situaciones "incomprensibles" para los alumnos cuando realizan sus construcciones):

Consideremos en Cabri dos circunferencias de igual radio C1 y C2 cuyos centros están sobre una recta r; denotemos por A y B, respectivamente, a los dos puntos de corte, en una posición de C1 y C2 en la que ambos existan y sean distintos; si ahora desplazamos el centro de C2 sobre la recta r hasta hacerlo pasar "al otro lado" del centro de C1, podemos observar que A y B "intercambian" sus posiciones, y lo hacen bruscamente en el momento en que el centro de C2 pasa sobre el centro de C1, ejemplificando la falta de continuidad en el movimiento del punto A (resp. B). En el dibujo siguiente se muestra el resultado de esta actividad:



Obviamente no hemos recorrido un lazo cerrado; para ello deberíamos volver a desplazar al centro de C2 hasta su posición inicial, con lo cual volveríamos a la posición de partida.
Esta constatación impide que podamos simular en Cabri-Géomètre con continuidad el movimiento de un artilugio tan simple como un mecano articulado de dos brazos de igual longitud.

Estas dificultades para representar la continuidad en los sistemas de geometría dinámica más conocidos ha tratado de enmendarse en el nuevo sistema Cinderella (Kortenkamp, Richter-Gebert 99), donde se tratan específicamente los problemas de continuidad utilizando técnicas de Geometría Proyectiva Compleja en el tratamiento de los datos empleados. En el ejemplo mencionado de las dos circunferencias, Cinderella resuelve con continuidad el movimiento del punto A; sin embargo en este sistema no se cumple la propiedad anterior (*) sobre un lazo cerrado.

Me interesa especialmente poder **determinar la influencia de estos factores en el significado de los conocimientos que se transmiten usando un sistema de geometría dinámica así como en los posibles errores que se deriven de ello**.

CONTENIDOS PROCEDIMENTALES

- Destrezas algorítmicas: En numerosas actividades propuestas para trabajar en los sistemas de geometría dinámica, los alumnos deben elaborar un proceso de construcción de una figura descrita a partir de sus propiedades geométricas. Para ello cuentan con una serie de primitivas geométricas que pueden elegir de un repertorio dado. (Laborde 98, p. 44) establece: “*El dispositivo obliga a la distinción entre trazado y procedimiento de trazado*”, con lo cual se fomenta el pensamiento algorítmico.
La posibilidad de realizar macro-construcciones, es decir, de definir primitivas propias que pueden ser incorporadas al sistema, exige al usuario identificar separadamente los datos de partida, el proceso de construcción y el producto final. La presentación de un proceso de construcción geométrica como una sucesión de primitivas y de macro-construcciones lo identifica con un proceso algorítmico de atomización de un problema en subproblemas aislados y consecutivos, cuyo seguimiento conduce a una solución global.

- Visualización dinámica: Ocioso es decir que la visualización juega un papel fundamental en la enseñanza de la geometría, especialmente cuando se utiliza un medio computacional en el que la interacción con el alumno está basada en la percepción visual de un “dibujo dinámico”, es decir, un dibujo en el que se pueden desplazar ciertos elementos para obtener nuevos dibujos con las mismas propiedades geométricas que el de partida. Este aspecto dinámico es fundamental y novedoso en la visualización, incide en la generalización y en la abstracción, en la detección de propiedades invariantes y en la posibilidad de conjeturar y experimentar el cumplimiento de propiedades geométricas que no estaban previamente establecidas.

- Interacción conocimientos geométricos/representación Desde que se plantea al alumno una actividad geométrica se produce un camino de ida y vuelta entre:

- los conocimientos geométricos que inciden en el proceso de construcción geométrica, y
- la percepción visual del movimiento de dicha construcción.

Este tipo de interacción no sólo es considerada útil en el ámbito de la geometría, sino que algunos autores la declaran de interés en la formación otros conceptos, como el de variable o el de función, y en el desarrollo del pensamiento analítico: *By allowing students to investigate continuous variation directly (without intermediary algebraic calculation), dynamic geometry environments can be used to help students build mental constructs that are useful (even prerequisite) skills for analytic thinking.* (A. A. Cuoco, E. P. Goldenberg 97, p. 34).

A la vista de estas reflexiones, ¿qué contenidos pueden o deben ser cambiados en el currículo geométrico si usamos un sistema de geometría dinámica?

4.2 NATURALEZA DEL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO QUE SE ADQUIERE USANDO UN SISTEMA DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Se trata de poner en tela de juicio la influencia del medio en el conocimiento adquirido y transmitido (ya que se habla de que no es lo mismo la geometría con regla y compás que la cabri-geometría; se habla de cabri-dibujo, para distinguirlo del dibujo -a secas-).

Enmarco los micro-mundos geométricos en ámbito de los "Entornos Interactivos de Aprendizaje por Ordenador". Dentro de este marco general, siguiendo a (Balacheff, Vivet 94) podemos adoptar dos perspectivas distintas en el estudio de la naturaleza del conocimiento:

A. **La perspectiva de la Inteligencia Artificial**, donde la dimensión epistemológica se centra en determinar y validar el *modelo computacional* del conocimiento, es decir, determinar cómo se representan en un ordenador ciertos conocimientos que son objeto de enseñanza y establecer las reglas que permiten validar las consecuencias deducidas de dichas representaciones; Balacheff acuña el término *transposición informática* para designar la acción necesaria sobre el conocimiento que permite una representación simbólica del mismo, la implementación de dicha representación en un dispositivo informático, y la validación de las consecuencias de su uso. La transposición informática implica la contextualización del conocimiento, lo que tiene consecuencias importantes sobre el aprendizaje. En este sentido, los condicionantes que determinan la naturaleza de los significados construidos por el alumno son:

- el dominio de problemas al que el entorno da acceso,

- las características de la comunicación sistema/usuario (la modelización computacional del conocimiento geométrico en un sistema de geometría dinámica tiene un condicionante esencial, que es *su representación mediante un dibujo en la pantalla de un ordenador,* que es un soporte discreto. Este dibujo es el principal intermediario entre el usuario y el conocimiento geométrico representado en el ordenador; las propiedades geométricas que deseemos trabajar están mediatizadas por el dibujo y su interpretación),
- la coherencia interna y consistencia del dispositivo en su interacción con el usuario (en los sistemas de Geometría Dinámica, lo que (Laborde 98) llama una retroacción perceptiva).

B. **La perspectiva didáctica**, que valora las consecuencias que tiene la representación del conocimiento en el ordenador sobre el aprendizaje que resulta de las interacciones con un tal sistema. Desde el punto de vista de la construcción del conocimiento, la cuestión de cómo el alumno utiliza el ordenador permanece abierta. En terminología francesa, está por dilucidar –en la mayoría de los casos- qué tipo de contrato didáctico se establece y las consecuencias que de ello se derivan. Algunos autores indican que los conocimientos construidos por el alumno pueden obedecer más a un intento del alumno de satisfacer las expectativas del software que tiene entre manos, tal como él las percibe, lo que no tiene porqué tener relación con el conocimiento específico que el profesor espera de él. Mientras esto no se resuelva no podremos valorar correctamente las secuencias de enseñanza por ordenador en las que se conduce a los alumnos por rutas en las que ellos deben tomar decisiones. Tampoco se puede desligar esta cuestión de los contenidos de enseñanza particulares; encontramos con frecuencia principios generales, desligados de los contenidos, con lo que se puede entrar en conflicto con las características didácticas de los mismos.

4.3 APRENDIZAJE

El uso de entornos interactivos de aprendizaje por ordenador se enmarca dentro de las teorías constructivistas del aprendizaje, donde se entiende que la geometría no es un cuerpo codificado de conocimientos sino esencialmente una actividad, y que el conocimiento se construye mediante la actividad del sujeto sobre los objetos. Además, algunos autores (Laborde 98, Hoyles 92) sugieren la posibilidad de que se desarrollen resortes de aprendizaje nuevos, más allá de la aproximación constructivista, interpretando el papel del profesor y los alumnos como co-exploradores que adquieren conocimiento a partir de las relaciones alumno-profesor y alumno-alumno, interacciones que se enmarcan en las propuestas desarrolladas por Vygotsky sobre construcción social del conocimiento.

En el caso de los micro-mundos geométricos, dos características significativas en el proceso de aprendizaje son las siguientes:

1. La *acción y retroacción*: el software interpreta las acciones del alumno, devolviéndole una información sobre su producción, información que el alumno puede utilizar a su vez para continuar progresando en la construcción de conocimientos. La posibilidad de

modificar una misma construcción amplía el campo de acciones posibles así como los retornos correspondientes. (Laborde 98) comenta la importancia de que la retroacción en un sistema de Geometría Dinámica provenga de un dispositivo externo e independiente del profesor, considerando esta cualidad esencial para hacer evolucionar al sujeto.

2. La *repetición*: (Laborde 98) habla de la propiedad de los sistemas de geometría dinámica de posibilitar al alumno la confrontación repetida con un problema, indicando que no se trata de una opción conductista de aprendizaje por refuerzo, sino más bien de una opción constructivista en la que se produce un proceso de transferencia de responsabilidad al alumno que le permite "construir un sentido del problema, haciéndole cada vez más consciente de lo que le impulsa a actuar".

4.4 ERRORES

No tengo nada de bibliografía sobre este aspecto. ¿Sugerencias?

4.5 EVALUACIÓN

Resulta chocante que mientras consideramos recomendable el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza, tendemos a limitar (prohibir) su uso en los exámenes. Parece claro que si dejamos usar calculadoras, tenemos que preguntar otras cosas, de donde deducimos que deberíamos enseñar otras cosas.
Un ejemplo significativo es el examen de selectividad (a pesar de su discutible valor para evaluar los conocimientos de los alumnos). En este examen hay una ausencia total de nuevas tecnologías: en algunas autonomías, se permite usar calculadoras científicas para operar. Por ello deducimos que el examen no "está pensado" para evaluar conocimientos adquiridos usando nuevas tecnologías.

La falta de consideración de nuevas tecnologías en la evaluación es un síntoma claro de su falta de integración real en el ámbito educativo.

Por supuesto, determinar el tipo de evaluación no puede reducirse a discutir sobre si usar o no el medio tecnológico en un examen. En los micro-mundos geométricos la evaluación de la actividad del alumno y de las producciones que éste realiza es una tarea compleja, que involucra conocer la significación geométrica de los dibujos producidos y por tanto de determinar si el alumno ha satisfecho las restricciones iniciales del problema y no ha aportado una solución ad hoc quedándose en el nivel del dibujo o en un caso particular, etc.

No tengo bibliografía significativa sobre evaluación usando nuevas tecnologías en el ámbito geométrico. En (Drijvers 98) podemos encontrar una panorámica no exhaustiva sobre evaluación y nuevas tecnologías, donde se presenta la situación en distintos países europeos (entre los que no nos encontramos).

4.6 GESTIÓN DE SITUACIONES DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

El interés fundamental de los micro-mundos es que permitan crear las condiciones de enseñanza/aprendizaje precisas. Las cuestiones sobre las que actuar en el planteamiento de situaciones de enseñanza-aprendizaje son las siguientes:

Visualización

La idea obviamente errónea de que mostrar el dibujo de una construcción geométrica es suficiente para que el alumno deduzca una determinada propiedad geométrica podría reafirmarse con el uso de software de geometría, a pesar de que numerosos trabajos demuestran que el paso del dibujo a la figura y a la propiedad geométrica no es tan inmediato, y no se adquiere si no media una enseñanza. En (Laborde 92) se concreta el papel de la visualización en dos tipos de tareas:

- validar o refutar una solución alcanzada, y
- conjeturar resultados,

actividades ambas en las que las percepciones visuales deben interactuar necesariamente con los conocimientos geométricos.

Verbalización

Otra característica a tener en cuenta es la necesidad de verbalización: en (Laborde 98) se indica que "*es necesaria una descripción discursiva que caracterice al objeto geométrico para eliminar las ambigüedades inherentes al dibujo*". Despejar dichas ambigüedades no es el único aspecto a considerar: expresar en palabras una conclusión observada parece suponer un esfuerzo considerable y necesario (Murillo 99).

Contextualización

Los aprendizajes realizados en un determinado contexto no tienen porqué transferirse automáticamente a otros distintos, aunque compartan determinadas características. En (Noos y Hoyles 92) se han estudiado este tipo de transferencias en el marco de los micromundos geométricos, concluyendo que los estudiantes construyen y articulan relaciones matemáticas que son interpretables y tienen significado sólo si se refieren a las herramientas usadas. Así se habla de *abstracciones situadas* para referirse a actividades de las que se puede extraer una generalización, pero el conocimiento está definido por las acciones dentro de un contexto. (Bellemain, Capponi 92) tras proponer una secuencia de enseñanza de las propiedades geométricas de la simetría ortogonal en el entorno Cabri-Géomètre, constatan que ciertas concepciones erróneas (sobre la simetría axial) que no se ponen de manifiesto en el trabajo con el software reaparecen si a continuación se proponen las mismas actividades con papel y lápiz. También se indica que los procedimientos utilizados para realizar determinadas construcciones con lápiz y papel no se transfieren al entorno Cabri- Géomètre ni en el otro sentido. Estas conclusiones conducen a los autores a afirmar la necesidad de que el profesor intervenga para *institucionalizar* los nuevos conocimientos adquiridos; esta intervención está basada en la puesta en común de los nuevos conocimientos y en la propuesta de situaciones similares en otro tipo de entorno.

Aprendizaje por descubrimiento guiado

Aunque parezca ocioso decirlo, los micro-mundos geométricos ofrecen al alumno entornos ricos pero por sí sólos no pueden garantizar el aprendizaje. Para ello deben estar integrados en un medio global que contemple y gestiones todas las variables didácticas que entran en juego en un proceso de enseñanza-aprendizaje. Con el fin de automatizar en la medida de lo posible este proceso, se han desarrollado los llamados entornos de aprendizaje por descubrimiento guiado (por ejemplo, HyperCabri (Laborde y Straesser 90)). La idea es construir sobre un micromundo un modelo de tutor del estudiante en el que éste es enfrentado a situaciones-problema ante las que ejerce acciones. El sistema está preparado para interpretar dichas acciones y responder a ellas, proporcionando sugerencias o guiando la resolución del problema a partir de tareas simples. En el ejemplo concreto de HyperCabri se indica que no hay un modelo teórico predefinido y extendido que fundamente la interacción en Hiper-Cabri entre el estudiante y el sistema, sino que la propuesta de ayuda por el tutor está basada en el análisis de los errores más comunes establecidos por investigación empírica.

Intervención del profesor

(Noos y Hoyles 1992) indican que aunque hay rangos de actividades geométricas ante los cuales los alumnos pueden reaccionar espontáneamente, este no tiene porqué ser el caso, por lo que se hace necesaria la adecuada intervención del profesor, cuyos objetivos deben ser, según los mismos autores:

- conducir hacia la abstracción y la generalización,
- invitar a la predicción de resultados,
- provocar la reflexión sobre el tipo o tipos de representación que entran en juego,
- ayudar a la interpretación de relaciones entre lo visual y lo formal,
- introducir formalmente nuevas ideas matemáticas que surjan del entorno visual,
- ayudar a explorar las intuiciones personales.

Otra consideración importante es que los autores creen que es necesario, además de la actividad computacional, con sus específicos tipos de intervención y estructura pedagógica, plantear un entorno no computacional de intervención que exhiba los requerimientos matemáticos de la tarea propuesta: el paso de las abstracciones situadas a las abstracciones matemáticas también necesita de instrucción e intervención. Lo que hace el entorno computacional es ampliar significativamente el rango de abstracciones situadas.

En general, para poder intervenir en la interacción alumno/ordenador hay que tener un gran conocimiento de las concepciones que podemos atribuir a los alumnos relativas a los contenidos en juego y relativos a la tarea que les es propuesta. En particular, es importante ser consciente del grado de iniciativa que se deja al alumno en la actividad propuesta, de forma que las intervenciones del profesor se ajusten a las pautas generales siguientes:

- no dar ayuda salvo que tengamos la certidumbre de que el alumno está en una posición de debilidad,
- no iniciar una acción tutorial si el alumno tiene oportunidades de encontrar él sólo una solución.

En general se trata de buscar un equilibrio entre la “ directividad” y la “no directividad” teniendo en cuenta por un lado el estado del alumno y por otro la complejidad del objeto de enseñanza.

Características observadas en la experimentación con alumnos

Algunos aspectos constatados por investigaciones variadas en el aprovechamiento por parte de los alumnos son:

- La ausencia de renuncia (Laborde 98).
- Las interacciones con los objetos permite a los alumnos establecer relaciones entre sus intuiciones y representaciones geométricas más formales. (R. Noss, C. Hoyles, L. Healy, R. Hoelz).
- Los micro-mundos proporcionan un andamiaje para puentear el hueco entre acciones y generalizaciones: las estrategias que los alumnos usan, y que inicialmente son un medio de evitar el análisis matemático de la situación, proporcionan más tarde un puente hacia la matematización. (en el mismo artículo de Noss… anterior).

BIBLIOGRAFÍA

(Algunas de las referencias incluidas aquí no aparecen detalladas en el texto)

M. Artigue 1990-91. *Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique*. Petit x, n. 26, pp. 5-27.

T. Aussude, B. Capponi 1996. De l'économie et de l'écologie du travail avec le logiciel Cabri-Géomètre. Petit x, n. 44, pp. 53-79.

N. Balacheff, M. Vivet, 1994. *Introducción*. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.14, n12, pp. 5-8.

F. Bellemain, B. Capponi 1992. *Specificite de lórganisation d'une sequence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur*. Educational Studies in Mathematics 23 (1), pp. 59-97.

A. Carrillo, I. Llamas 1999. *Cabri-Géomètre II para windows: construcciones y lugares geométricos*. Ed. RA-MA.

R. Cuppens 1996. *Quelques réflexions sur le logiciel Cabri-Géomètre*. Bulletin APMEP, n. 402, pp. 5-20.

A. A. Cuoco, E. P. Goldenberg 1997. *Dynamic geometry as a bridge from euclidean geometry to analysis.* En Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research. J. King, D. Schattschneider Eds. MAA notes 41, pp. 33-44.

P. Drijvers 1998. *Evaluation et nouvelles technologies: différents stratégies dans différents pays.* En Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques, pp. 127-138. Actes du colloque francophone européen. D. Guin Coord. Ed. IREM de Montpellier.

J. T. Fey 1989. *Technology and mathematics education: a survey of recent developments and important problems*. Educational Studies in Mathemactics 20, pp. 237-272.

J. M. Fortuny 1998. *Materiales y recursos. Geometría en Primaria y Secundaria*. En La geometría y la formación del profesorado en primaria y secundaria, pp. 39-47. Manuales UEX, n. 22, M. Barrantes (Ed.)

C. García, A. Martínez, R. Miñano 1995. *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*. Colección Educación Matemática en Secundaria. Madrid: Ed. Síntesis.

J. Hillel, C. Kieran, J-L. Gurtner 1989. *Solving structured geometric tasks on the computer: the role of feedback in generating strategies*. Educational Studies in Mathematics 20, pp. 1-39.

F. Hitt 1998. *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum*. Educación Matemática, vol. 10, n. 2, pp. 23-45.

C. Hoyles 1992. *Computer-based microworlds: a radical vision or a trojan mouse?* ICME 7- Selected Lectures.

C. Hoyles, R. Noos 1992. *A pedagogy for mathematical micro-worlds*. Educational Studies in Mathematics 23, pp. 31-57.

U. Kortenkamp, J. Richter-Gebert, 1999. *Dynamic Geometry I: The problem of Continuity*. Proceedings 15th European Workshop on Computational Geometry. pp. 51. H. Brönnimann Ed. INRIA Sophia Antipolis.

U. Kortenkamp, J. Richter-Gebert, 1999. *Dynamic Geometry II: Applications*. Proceedings 15th European Workshop on Computational Geometry. pp. 109. H. Brönnimann Ed. INRIA Sophia Antipolis.

C. Laborde 1992. *Enseigner la géométrie: permanences et révolutions*. Plenary Lecture. ICME 7 Proceedings, pp. 47-75.

C. Laborde 1998. *Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría*. Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática, pp. 33-48. L. Puig (Ed.). Una empresa docente.

J. M. Laborde 1997. *Exploring non-eucidean geometry in a dynamic geometry environment like Cabri-géomètre*. pp. 185-192. En Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research. J. King, D. Schattschneider Eds. MAA notes 41.

J. M. Laborde 1999. *Some issues raised by the development of implemented Dynamic Geometry as with Cabri-géomètre*. Proceedings 15th European Workshop on Computational Geometry. pp. 7-19. H. Brönnimann Ed. INRIA Sophia Antipolis.

J. M. Laborde, R. Strässer 1990. *Cabri-Géomètre: a microworld of geometry for guided discovery learning*. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, vol. 5, pp. 171-190.

G. E. Martin 1998. *Geometric constructions*. Springer Verlag New York.

J. Monaghan 1998. *Les enseignants et la technologie*. En Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques, pp. 159-164. Actes du colloque francophone européen. D. Guin Coord. Ed. IREM de Montpellier.

J. Murillo 1999. *Un entorno de aprendizaje interactivo para la enseñanza de la geometría en al ESO: actividades con Cabri*. Ponencia presentada en las III Jornadas de la SEIEM, Universidad de Valladolid.

R. Noos, C. Hoyles 1992. *Looking back and looking forward*. En Learning mathematics and Logo. Hoyles & Noos (Eds.), pp. 431-468. Cambridge: MIT Press.

R. Noos, C. Hoyles, L. Healy, R. Hoelzl. – *Constructing meanings for constructing: an exploratory study with Cabri-Géomètre*. (¿?) pp. 360-367.

T. Recio 1998. *Cálculo simbólico y geométrico.* Colección Educación Matemática en Secundaria. Madrid: Ed. Síntesis.

T. Recio 1999. *Compass avoidance*. Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, Boletín n. 53, pp. 59-66.

T. Recio, M. P. Vélez 1999. *Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry*. Journal of Automated Reasoning 23, pp. 63-82.

J. Richter-Gebert, U. Kortenkamp 1999. *Cinderella – The interactive geometry software*. Berlin: Springer Verlag.

D. Schattschneider 1997. *Visualization of group theory concepts with dynamic geometry software* pp. 121-128. En *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research*. J. King, D. Schattschneider Eds. MAA notes 41.

M. de Villiers 1997. *The role of proof in investigative, computer-based geometry: some personal reflections*. En Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research. J. King, D. Schattschneider Eds. MAA notes 41, pp. 15-24.

Documento 2: Noviembre 1999

RÉPLICA AL DOCUMENTO ANTERIOR. Moisés Coriat

1. Mito
El mito basico de las NNTT es el siguiente: si fueran accesibles a todos los empleados, las tecnologías de la información les permitirían planificar, evaluar, poner en marcha e innovar. Cada uno recoge los datos que le interesan y desarrolla su creatividad, a pesar de su diversidad de planteamientos o heterogeneidad, quizá con ayuda de un supervisor, para mejorar la eficacia de la empresa. Disponemos de algunos contraejemplos históricos: la radio, la televisión, el CD-ROM y el libro de bolsillo.

(A) La radio y la televisión.
Nadie discutirá las potencialidades de la radio y la televisión. Sin embargo, se han convertido en "instituciones" al servicio de grupos de presión políticos y económicos.

(B) El libro de bolsillo y el CD-ROM.
La posibilidad de poner al alcance de todos (verdaderamente, de todos) la literatura, la musica y el arte solo ha aumentado el numero de versiones. No ha permitido "a todos" tener verdadero acceso a las humanidades (arte, musica, literatura) ni a las ciencias, no ha facilitado lecturas comprensivas ni ha permitido un "aumento" de la cultura general de la gente.

2. Maquina y red
Un ordenador aporta informacion (correcta, incorrecta, aparentemente correcta o aparentemente incorrecta) y el uso de esta depende de nosotros. Disponemos de conceptos (y de estructuras conceptuales) para la información que manejamos, recibimos y damos. Gracias a esos conceptos damos sentido a los innumerables hechos, conceptos, procedimientos y actitudes que„capturamos‰ (de otras personas o al filtrar la informacion del ordenador).
En la decada de los 80 se generaliza (en Estados Unidos, principalmente) la investigacion y la publicacion de informes sobre experiencias de "informatizacion" de Aulas, Centros e incluso "complejos" educativos, así como de grupos especificos (necesidades especiales, marginados o género). Se han generado inmensas expectativas, pero cada informe optimista ha recibido su critica. Si unos, por ejemplo, declaran en su informe que el ordenador constituye una formidable herramienta de innovacion, sus criticos mencionaran sobre todo la "intrusion pedagogica" generada por la máquina.
Una cuestión basica me parece que es la siguiente (adapto Miller y Olson, 1994):
Las potenciales innovaciones asociadas a los ordenadores en el aula (con o sin apoyo de la red) tienen que ver con dos cosas: las tecnologías de la información y la manera en que el profesor concibe su práctica docente.
No se trata de negar las posibilidades del ordenador, sino de diseñar una mutua adaptación de "lo informático - tecnológico" con lo "pedagógico". Cada Profesor ha de conseguir esa adaptación y no puede predecirse hasta "donde" puede llegar con cada uno de sus grupos de alumnos.

(L. Miller y J. Olson, 1994. Putting the computer in its place: a study of teaching with technologies. J. Curr. Stud. 26, 2, 121-141.)

3. Red

Recientemente he dado (a prfesores de Instituto) un curso de correoelectronico (posibilidades educativas) y el problema fue... la red, que, por no ser cableada, se venia abajo cada dos por tres. Imaginad una sesion de cualquier topico en clase de Infantil, Primaria o Secundaria y que no podeis hacer nada porque la linea telefonica o el servidor estan saturados...

4. No son pretextos

Estoy convencido de la importancia de los ordenadores y de la red, con los que trabajo desde principios de los 70. (... Eh, oui, yo tambien use tarjetas perforadas para que Fortran IV me diera el oráculo en un mastodontico IBM.)

La informatizacion de la sociedad me parece inexorable, pero creo que, como investigadores, tenemos que cuidarnos mucho de:

(a) alentar falsas esperanzas en los profesores,

(b) transmitir la creencia de que las nntt son un paraiso (como el de Cantor),

(c) defender el uso de un software concreto en cualquier Etapa (porque evolucionara drasticamente o morira, con lo que obligamos al profesor a meterse por una vereda cuyo final ignoramos).

Por favor, entendedme bien; con esto no estoy criticando a Maria Jose, que apunta intuitivamente tambien algunas de las ideas que estoy diciendo, solo me estoy situando con respecto al asunto general, antes de ocuparme del tema matematico: la geometria.

5. Geometria

Mi enfoque, comparado con el de Maria Jose, admite un calificativo que me apresuro a escribir: es desorganizado.

No creo en la construccion axiomatico-intuitiva que empieza con los puntos y termina con las variedades diferenciables en la universidad, aunque reconozco que es poderosa. Defiendo un acercamiento variado que "toca" asuntos geometricos. Creo que habria que investigar cosas sueltas como ejemplos de la modelizacion del espacio fisico (como creo que dice Maria Jose y, desde luego, mencionan en un informe del ICMI, no tengo en casa esta referencia), cosas sueltas del mundo plano, cosas sueltas de la proyeccion, cosas sueltas de patrones geometricos, cosas sueltas del mundo continuo, de la resolucion de problemas geometricos, etc., etc., y que esta "soltura" es tambien generadora de lineas de investigacion.

Considero importante, como dice Maria Jose, que tengamos en cuenta no solo el marco institucional actual, sino el pasado (el olvido, que arrastramos, de la geometria en ese marco hasta la LOGSE, el formulismo, el verbalismo huero, la ausencia casi total de ideas poderosas (ver mas arriba: conceptos)). Acepto que penseis que estoy exagerando, pero os pido que tengais en cuenta que el punto de partida no es el de una tradicion de enseñanza de la geometria, sino el del olvido de esa tradicion. De modo que hay que convencer al profesor, no solo de que la herramienta informatica podria serle util si se acomodara, sino de que la geometria es educativa.

Por eso propugno un acercamiento "desorganizado"; juego con ventaja, ya que todos los apartados que pudieramos mencionar estan disciplinarmente organizados en la universidad con alguna axiomatica.
Dicho esto, viene ahora lo mas dificil. El problema no consiste en elegir un tema de geometria, sino en lograr un diseño de investigacion que ayude al profesor a acomodar lo tecnologico-informatico con lo pedagogico.
Puedo dar ejemplos (que, de momento, solo son convicciones):
(A) Estoy convencido de que se puede enseñar un concepto de esfera en Educacion Infantil... y sin fichas.
(B) Estoy convencido de que en Educacion Primaria se pueden construir poliedros no elementales siguiendo un plan de trabajo diseñado por los crios.
(C) Estoy convencido de que en Educacion Secundaria se pueden demostrar teoremas geometricos.
(Y asi, sucesivamente)
A principios del curso que viene espero estar en condiciones de responder efectivamente a (A) con una propuesta que incluye ordenador (otra cosa es que disponga de medios para hacer una investigacion).

Documento 3: Enero 2000.

PROBLEMAS DE APRENDIZAJE – PROBLEMAS INVERSOS
José María Marbán

Siguiendo a Keller **[KEL]**, diremos que dos problemas son *inversos* uno del otro si la formulación de cada uno de ellos requiere un conocimiento completo o parcial del otro. Según esta definición, parece arbitrario el criterio a través del cuál denominamos a uno *problema directo* y a otro *problema inverso*. De hecho, dar una definición precisa de lo que se entiende por este último tipo de problemas es algo que, hasta la fecha, nadie ha hecho y que, probablemente, no sea posible llevar a cabo. A pesar de ello, son muchos los problemas a los cuales no dudamos en catalogar como *inversos*, lo cual nos lleva a plantear que este tipo de problemas presenta alguna característica que los distingue del resto. Tal vez nuestra afirmación se deba tan sólo al hecho de que sus planteamientos son, en cierto modo, inversos a aquellos a los que estamos más acostumbrados y que corresponden a problemas conocidos y ampliamente estudiados. Existen, sin embargo, diferencias mucho más significativas entre ambos tipos de problemas. Así, en el terreno de la Matemática Aplicada, Hadamard **[HAD]** introdujo a principios de siglo el término *bien-puesto* para referirse a aquellos problemas para los cuales:

1.- existe solución;
2.- la solución es única, y
3.- existe dependencia continua respecto de los datos.

Por supuesto, se podría dar una definición más precisa si considerásemos problemas matemáticos en algún espacio topológico e incluso normado, ya que el concepto de continuidad es de naturaleza topológica.

Todos aquellos problemas que no reflejasen el comportamiento anterior fueron, durante mucho tiempo, obviados por la comunidad matemática al considerarlos carentes de sentido físico. Sin embargo, las demandas de la ciencia y la tecnología exigen en multitud de ocasiones el estudio de problemas *mal-puestos*, como comenzó a quedar patente a principios de los años 60. Es en ese momento cuando la teoría de problemas *mal-puestos* comienza a sufrir un avance vertiginoso gracias, entre otras, a las aportaciones de matemáticos de la extinta Unión Soviética como A.N.Tikhonov, M.M. Lavrent'ev y V.K.Ivanov.

Sucede que gran parte de los problemas *inversos* que presentan cierta relevancia para la ciencia conducen al campo de los problemas *mal-puestos*, mientras que sus correspondientes problemas *directos* resultan ser *bien-puestos*. Destaquemos, por ejemplo, los problemas inversos relativos a la determinación de características internas de una región inaccesible a partir de mediciones en su exterior (localización de tumores, yacimientos minerales, …) y la determinación de estados pasados en un proceso de evolución *parabólico* conocida la situación presente. Es precisamente este último problema el que ha conformado mi labor de investigación hasta la fecha en el área de Matemática Aplicada.

Los problemas inversos en educación.

Más allá de la propia denominación, poco o casi nada tienen que ver estos problemas con los planteados previamente, dentro del campo de la Matemática Aplicada. Sí se acercan, sin embargo, con más claridad a la concepción dada en la introducción al referirnos a un problema inverso como aquél que se plantea de manera inversa u opuesta a otro con el que nos encontramos mucho más familiarizados, bien porque surge con más frecuencia en las aplicaciones, o bien por otras causas. Clarifiquemos el concepto a través de un sencillo ejemplo: en ESO (Enseñanza Secundaria Obligatoria), el estudiante aprende a resolver sistemas de la forma

$$\begin{aligned} Ax+By&=E \\ Cx+Dy&=F \end{aligned}$$

utilizando diferentes métodos de resolución: igualación, sustitución, reducción y el método gráfico. Pero, ¿qué ocurre si planteamos el problema inverso?, es decir, ¿y si pedimos al alumno que proponga un sistema como el anterior para el cual la pareja {x=1, y=-1}, por ejemplo, sea solución?. A priori, el problema parece ahora más sencillo que el correspondiente problema directo (aumentando esta diferencia a medida que aumenta el tamaño del sistema). Sin embargo, experiencias como la que hemos llevado a cabo en el Colegio Concertado Nuestra Señora del Carmen (Valladolid) con alumnos de cuarto curso de ESO, proponiéndoles un problema de características similares y recabando su opinión al respecto, nos muestran que el estudiante encuentra muchas más dificultades en este planteamiento. De forma similar, ¿qué ocurre cuando a un alumno de segundo ciclo de Primaria se le pide que construya un triángulo de área dada en lugar de preguntarle por el área de un triángulo conocidas su base y su altura?.

En cierto modo, muchos de los problemas que habitualmente se le plantean al estudiante encajan en un esquema de la forma

```
Causa >>>>>>> Modelo >>>>>>>> Efecto
                          ¡
                          ¡
                      Algoritmo
```

Mientras que sus correspondiente inversos siguen el formato

```
Causa <<<<<<< Modelo <<<<<<<< Efecto
         ¡
         ¡
    ¿Algoritmo?
```

La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas, siempre que vaya acompañada de la actividad de planteamiento, constituye un procedimiento ciertamente eficaz y adecuado, idóneo en una enseñanza que pretende ser fundamentalmente activa. Tal vez el problema con el que nos enfrentamos se deba en parte a la escasa atención que en esta actividad se le otorga a preguntarse continuamente ¿por qué?, así como al erróneo concepto que en ocasiones se maneja sobre lo que la actividad de planteamiento de problemas constituye.

Propuesta

La actividad asociada al planteamiento de problemas, siguiendo las ideas de Brown y Walter en **[BRO]** y de Moses, Bjork y Goldenberg en **[MOS]**, requiere

- Identificar y cambiar las condiciones;
- Considerar las cosas familiares de forma desconocida;
- Animar a los alumnos a que utilicen la ambigüedad;
- Explicitar el terreno por el que nos movemos.

La primera de las condiciones anteriores nos lleva a plantear al estudiante que se fije en lo conocido, lo desconocido y las condiciones o hipótesis y que entonces se pregunte ¿y si cambian los papeles?. De esta forma explora el problema a fondo, crea problemas nuevos y llega realmente a comprender la esencia del problema inicial. Brown y Walter afirman que este acercamiento se puede no sólo aprender sino también enseñar. Este tipo de actividades y el consiguiente tratamiento equitativo de problemas directos e inversos consideramos favorecerían notablemente el aprendizaje estratégico de nuestros estudiantes. Es nuestro deseo confirmar tal hipótesis. Para ello creemos necesario, por un lado, que los alumnos dediquen más tiempo al planteamiento de problemas, al aprendizaje por descubrimiento, a redescubrir la Matemática; por otro lado, se debe entrenar al profesorado en esta actividad heurística, tarea nada sencilla.

Referencias

[BRO] BOWN, S.L. & WALTER, M.I.: *Problem Posing: Reflections and Applications*
Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1993.

[HAD] HADAMARD, J.: *Lectures on the Cauchy Problem in Linear PDEs*.
Yale University Press, New Haven, 1923.

[KEL] KELLER, J.B.: *Inverse Problems*
Am. Math. Mon., 83, pp. 107-118, 1976.

[MOS] MOSES, B., BJORK, E. & GOLDENBERG, E. P.: *Beyond Problem Solving: Problem Solving*
En [BRO], pp. 178-187.

Documento 4: Marzo 2000-

Informe sobre:

ANÁLISIS DEL TRATAMIENTO DE LA DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA EN ALGUNOS PROGRAMAS DE LA FORMACIÓN DE MAESTROS EN ED. INFANTIL Y PRIMARIA. Teresa Fernández

Para el Grupo de Aprendizaje de la Geometría (SEIEM)

María Teresa Fernández Blanco
Dpto. Didáctica das CC Experimentais. Área de Didáctica da Matemática
Fac. de Ciencias da Educación. Campus Norte
Universidad de Santiago de Compostela
tebla@usc.es

INTRODUCCIÓN

El presente documento es el resultado del análisis de varios programas de asignaturas de las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado y Facultades de CC de la Educación de universidades españolas que incluyen, en todo o en parte, temas dedicados a la Didáctica de la Geometría. Antes de comenzar con las conclusiones en sí mismas, quería hacer una serie de puntualizaciones sobre el enfoque que le he dado a este trabajo y los objetivos que pretendo con él.

El análisis que he hecho no es un estudio cuantitativo ni basado en estadísticas, pues considero que la muestra que tengo de los programas no sería suficiente para abordar un estudio de este tipo.

Tampoco me gustaría que las opiniones aquí incluidas fueran vistas como una crítica a algunos de los programas revisados, pues en ningún caso esa fue mi intención. Solamente se trata de una serie de reflexiones subjetivas que buscan, sobre todo, servir (si sirven de algo) como punto de partida para un intercambio de opiniones al respecto de los temas aquí tratados.

Una de las causas que me impidió abordar un análisis comparativo de los programas fue la heterogeneidad de los mismos, tanto en su planteamiento como en la asignatura que representan. Este hecho se ve reflejado sobre todo en:

- Distinto número de créditos, lo que condiciona de forma notable los contenidos abarcables por la asignatura.
- Los diversos grados de concreción a la hora de elaborar los programas: algunos muy detallados y otros demasiado genéricos, impiden contrastar la realidad de la enseñanza en distintas universidades.
- La ausencia en algunos programas de orientaciones metodológicas no permite saber cómo se afronta realmente la docencia de estas asignaturas.

Quiero también indicar que este trabajo me ha resultado muy instructivo desde el momento que supone un conocimiento de formas muy distintas de enfocar y abordar situaciones y necesidades comunes a todos, lo que, en realidad, fue la motivación que me movió a plantearme realizarlo. Por todo ello, quizás lo tome como un inicio de una investigación mas profunda y exhaustiva para la que espero contar con vuestra colaboración.

CONCLUSIONES

En la elaboración de este trabajo he analizado 28 programas de asignaturas obligatorias de las Diplomaturas de Maestro en varias especialidades, distribuidas del siguiente modo:

- Educación Primaria: 8 programas.
- Educación Infantil: 7 programas.
- Educación Física: 5 programas.
- Educación Musical: 3 programas.
- Lengua Extranjera: 3 programas.
- Educación Especial: 2 programas.

El análisis ha sido más detallado en los programas de E. Primaria y E. Infantil, ya que los de las otras especialidades en muchas ocasiones coinciden y casi siempre se basan en los correspondientes de Educación Primaria. Hay que hacer una excepción con los de E. Especial, en los que hay alguna característica particular que luego destacaré.

He recibido, además, programas de algunas asignaturas optativas o de libre configuración, pero no los he incluido en este análisis por tratarse de asignaturas con unas circunstancias muy distintas a las demás que implican un programa, un planteamiento y unos objetivos también distintos. Incluyo una relación de las mismas por si a alguno de vosotros le pudiera interesar el programa de alguna de ellas:

- Resolución de problemas.
- Taller de Matemáticas.
- Didáctica de la Geometría del Plano.
- Didáctica de la Geometría del Espacio.
- Juegos y experiencias para el desarrollo de la Geometría en Educación Infantil.

También debo señalar que la información expuesta por cada profesor en su programa es muy variada, razón esta por la que en algunos casos no se dispone de datos como el número de créditos de la asignatura, el curso en que se imparte, la parte de los créditos que se dedica a la Geometría (en los casos en que se trata de asignaturas que incluyen temas de Aritmética), etcétera. Nos encontramos con asignaturas que tienen desde 6 créditos hasta 12 (en este caso no sólo dedicados a la Didáctica de la Geometría), pero la norma general está en torno a los 6, tanto en E. Primaria como en E. Infantil.

Las conclusiones se han estructurado en una serie de puntos que coinciden con la estructura de la mayoría de los programas presentados (excepto el primer punto): Objetivos, contenidos, metodología, evaluación y bibliografía.

Objetivos

En una primera aproximación a los documentos analizados, llama la atención ver que sólo seis de los programas analizados contienen un apartado en el que se incluyen los objetivos de la asignatura. Parece extraño que se nos haya olvidado este apartado, a mi entender muy importante, a la hora de redactar los programas. Supongo que todos nos planteamos una serie de objetivos sobre los que enfocar la asignatura, por lo que sería interesante (no sólo para el alumno, sino para ayudar al profesor a una reflexión sobre su práctica) que estuvieran recogidos de modo explícito en nuestros programas. Es más, pienso que un planteamiento correcto para la elaboración de un programa debería hacer depender todos los otros puntos (contenidos, metodología, bibliografía y hasta evaluación) de los objetivos que se pretenden conseguir.

Dentro de esos objetivos se pueden diferenciar dos líneas generales que no deberían ser nunca incompatibles sino complementarias, aunque quizás es imposible mantener un equilibrio entre ambas y todos terminamos anteponiendo una sobre la otra.

- Los que, siguiendo el lema *"para saber hacer hay antes que saber"*, consideran prioritaria la adquisición por parte de los alumnos de contenidos matemáticos sobre los contenidos didácticos.
- Los que presuponen al alumno unos conocimientos matemáticos suficientes como resultado de su formación anterior y hacen más hincapié en el trabajo sobre contenidos y recursos didácticos.

Contenidos

Teniendo en cuenta que nuestra labor es la formación de futuros maestros, los contenidos deberían estar condicionados (si no determinados) por el D. C. B. de las correspondientes Comunidades Autónomas, circunstancia esta que se nota al observar que existen muchos contenidos coincidentes entre los programas estudiados. A pesar de ello, hay algunas particularidades que debo destacar:

- Como ya he dicho, los contenidos son muy similares, tanto en geometría del plano como en la tridimensional; aunque existen temas que no son comunes dentro de los temarios de las distintas asignaturas. Principalmente se trata de tres: las isometrías en el plano, círculo y circunferencia y construcciones de figuras geométricas con instrumentos de dibujo. En algunas ocasiones la ausencia de estos epígrafes puede deberse a una redacción poco detallada del programa, pero en otras se observa con claridad que son temas que no se desarrollan dentro de la asignatura.
- También existe una diferencia en la secuenciación de la materia (suponiendo siempre que sea la misma que aparece en los programas). Existen aquí dos tipos de planteamientos opuestos:
  - Comenzar por el punto y la recta para pasar luego a las geometrías plana y espacial (en este orden), como venía haciéndose de modo clásico y como casi siempre se presenta en los manuales de primaria.
  - Comenzar por la geometría espacial e ir luego estudiando, a partir de ella, la geometría del plano y, por último, el punto y la recta. Este enfoque liga el estudio de la Geometría a la percepción que el alumno tiene de las cosas (percibimos nuestro

entorno en tres dimensiones) y, dentro de los programas revisados es el que más seguidores tiene, aunque la diferencia numérica es mínima.

- Una de las principales diferencias entre los programas estudiados consiste en la inclusión (o no) de temas dedicados a la didáctica de la medida dentro del bloque de geometría. A este respecto quizás deberíamos tener en cuenta el planteamiento que las distintas administraciones educativas hacen del tema en los curricula de primaria. Señalar también que en algunas universidades que no lo tratan tienen asignaturas dedicadas específicamente a Didáctica de la Medida, como en el caso de la de Santiago, en la que yo trabajo.
- También es destacable el hecho de que sólo dos de los programas incluye el D.C.B. de primaria como contenido a estudiar, aunque hay otros que lo incluyen en la bibliografía. Quizás esta diferencia pueda parecer poco importante, pero supone una apreciación de este documento como un medio bibliográfico de ayuda y consulta o bien como una parte del temario propiamente. Este tema podría y debería ser objeto de una reflexión y posterior debate en próximas reuniones.
- Otro tema que se incluye en la mayoría de los programas **de modo explícito** es la construcción y estudio de materiales didácticos. Quiero resaltar las palabras anteriores porque me parece que los que no lo incluyen sí lo tratan en el desarrollo de sus materias. De hecho algunos especifican en el apartado de evaluación la construcción de material didáctico como un trabajo a realizar por los alumnos.
- También me gustaría destacar aquí que en los programas de la especialidad de Educación Especial se incluyen temas relativos a problemas y dificultades de los alumnos en el aprendizaje de conceptos geométricos: dislexia y problemas de orientación espacio - temporal. Reflexionando sobre esta parte del programa se me ocurre si debería ser un tema exclusivo de esta especialidad, teniendo en cuenta la realidad que nuestros alumnos se encontrarán en el futuro en las aulas. ¿Son estos problemas exclusivos de alumnos de educación especial o, por el contrario, forman parte de los obstáculos que pueden influir negativamente en el aprendizaje de la geometría por parte de cualquier alumno? Mi experiencia en el trato con maestros y profesores de secundaria me indica que no estaría de más plantearse tocar estos temas dentro de las asignaturas que incluyan el bloque de Didáctica de la Geometría, aunque el tiempo no permita en la mayoría de los casos abordarlos con detenimiento.
- Otro aspecto a destacar es la ausencia, en todos los programas excepto en uno, de alguna referencia al uso de las nuevas tecnologías (software matemático, calculadoras gráficas) en la enseñanza de la geometría. Los motivos de esta ausencia y los de la necesidad de incluir estos temas ya los trató Mª José González en su informe, por lo que no entraré en detalles, aunque me gustaría dejar clara mi opinión de que, cada vez más, los avances tecnológicos forman parte del entorno en que nos movemos profesores, alumnos de universidad y hasta alumnos de primaria, por lo que nuestros planteamientos no deberían dejar al margen este hecho.
- También me parece reseñable el hecho de que sólo en dos de los programas se incluye en este apartado un punto dedicado a una aproximación a la historia de la Geometría, tema muy interesante a la hora de justificar y dar un sentido más amplio a los contenidos geométricos estudiados. Este conocimiento también supondría un recurso muy valioso para nuestros alumnos en su futura práctica laboral.

Metodología y criterios de evaluación

He reunido estos dos aspectos dentro del mismo apartado porque los criterios de evaluación dependen directamente de la metodología usada en la clase (o deberían depender). Las referencias a estos puntos en la mayoría de los programas son muy genéricas y las principales características a destacar serían las siguientes:

- La exposición del tema por parte del profesor puede ser de muchas formas: ¿Se trata de una exposición puramente formal de los contenidos de manera que la teoría y la práctica quedan totalmente separadas o se trata de una exposición "integral" en la que teoría y práctica van unidas?. En los programas analizados podemos encontrarnos con cualquiera de las dos opciones, si bien en algunos casos la no descripción de la metodología en el programa me impide saber por cual de ellas se decide el profesor.
- En casi todos los programas se especifica que la participación del alumno en clase y su trabajo diario influirán en su evaluación, lo que implica que se apuesta por una metodología activa. También es muestra de ello el hecho de proponer a los alumnos trabajos, individuales o en grupo, con la consiguiente exposición ante el aula.
- A pesar de todo ello en ningún programa se dice de modo explícito que estos trabajos sean o puedan ser sustitutivos de uno o varios exámenes escritos, lo que no implica que en algunos casos no se haga eso (en mi caso particular hay trabajos que sí eximen al alumno de realizar el examen final).
- Dentro de los medios o instrumentos de evaluación utilizados, hay bastante variedad, por lo que elaboré la siguiente lista en la que incluyo todos por si nos puede servir de ayuda a la hora de plantear los nuestros (a mi sí me ha servido):
  - ✓ *Análisis de libros de texto de primaria y secundaria.*
  - ✓ *Elaboración de unidades didácticas por parte de los alumnos.*
  - ✓ *Análisis de experiencias didácticas.*
  - ✓ *Exámenes parciales o final.*
  - ✓ *Trabajos individuales y en grupo.*
  - ✓ *Análisis de artículos de investigación recientes.*
  - ✓ *Elaboración de material didáctico y actividades en torno al mismo.*
  - ✓ *Exposición de algún trabajo realizado (individual o en grupo) ante la clase.*
  - ✓ *Participación del alumno en clase.*

Bibliografía

La bibliografía de consulta recomendada en los programas estudiados me parece bastante completa en general, repitiéndose en la mayoría algunos libros como "Invitación a la didáctica de la geometría" y "Materiales para construir la geometría", de C. Alsina, C. Burgués y J. M. Fortuny. También se incluyen en la mayoría los D.C.B. de la comunidad autónoma correspondiente y, en menos casos, libros de texto de primaria.

Si acaso existe algún punto susceptible de ser debatido en este punto sería la idoneidad o no de incluir en las referencias bibliográficas artículos de investigación recientes sobre temas de didáctica de la geometría, como se hace en alguno de los programas analizados.

Se echa en falta la referencia a bibliografía relativa a recursos de software o calculadoras gráficas (coincidiendo con la ausencia de estos temas en los programas). Otro de los puntos a tener en cuenta a la hora de elaborar una bobliografía de apoyo podría ser la inclusión en ella de revistas actuales sobre Didáctica de la Matemática (o sobre Didáctica en general) y de algunas direcciones interesantes de Internet relacionadas con este tema. La finalidad de esta última sugerencia no sería encaminada tanto a la formación inicial del alumno como a proporcionarle medios para desarrollar y complementar su posterior trabajo en el aula.

Documento 5: Septiembre 2001.

LA INFLUENCIA DE LA REPRESENTACIÓN COMPUTABLE DEL CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO EN LAS PERCEPCIONES E INTERPRETACIONES DE LOS ALUMNOS

María José González López
glopez@matesco.unican.es

1. UN OBJETIVO

Nos proponemos:

Analizar la influencia del tipo de representación de la geometría que tienen implementados los sistemas de geometría dinámica (SGD) en las interpretaciones que hacen los alumnos al usar tales sistemas.

Este objetivo nos ha interesado por entender que es un centro de interés principal a la hora de atribuir cualidades al uso de los SGD en un ámbito educativo y porque sospechamos que los SGD son recursos 'opacos' (por utilizar un antónimo de la palabra 'transparente', usada habitualmente para indicar que el medio utilizado no influye en el fin perseguido). Tenemos en cuenta que:

- el sencillo pulsado de iconos para producir efectos sobre una pantalla gráfica obedece a la implementación interna de sofisticados algoritmos. En numerosas ocasiones dicha implementación 'esconde' elecciones realizadas por los diseñadores del programa, cuya naturaleza no es matemática sino computacional. En definitiva, el modelo geométrico computacional tiene diferencias con la teoría geométrica.
- el uso de SGD suele enmarcarse en ámbitos de experimentación e investigación por parte de los alumnos, en contextos de resolución de problemas. Pero entonces, los significados que los alumnos construyen dependen claramente de las características del experimento que perciben (Goldenberg & Cuoco, 1998).

Combinando estos dos aspectos, trataremos de identificar características de la implementación computacional del conocimiento geométrico que tienen influencia en el comportamiento de los dibujos en la pantalla y, en consecuencia, en la atribución de significado a ese comportamiento por parte de los observadores del mismo (es decir, alumnos sin conocimientos geométricos que utilizan el sistema precisamente para adquirirlos).

2. UN PAR DE EJEMPLOS

2.1. Relaciones de proporcionalidad en triángulos semejantes (Tomado de Goldenberg & Cuoco 1998)

Supongamos que se propone a los alumnos investigar relaciones de proporcionalidad en triángulos en posición

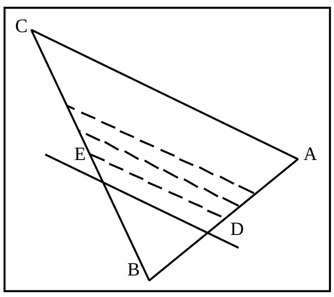


Figura 1

de Thales, es decir, dado un triángulo ABC se construye una paralela al lado AC que corta al triángulo en puntos D y E, y se pide comparar razones entre los segmentos que aparecen. En un contexto de geometría dinámica, este problema tiene la siguiente estrategia esperada: se construye el triángulo ABC, la paralela al lado AC por un punto D del lado AB y se calculan las razones entre los segmentos obtenidos. Ahora se 'arrastra' D sobre AB para observar cómo se modifican dichas razones; también se varía el aspecto del triángulo ABC, arrastrando sus vértices, para comprobar si se trata de relaciones válidas para 'cualquier' triángulo (Figura 1). Dos observaciones que pueden hacer los alumnos son:

a) Cuando arrastramos D, el valor de BD/BE permanece constante.

b) Cuando arrastramos A, el valor de BD/BA permanece constante.

La primera observación constituye un teorema geométrico; sin embargo la segunda es consecuencia del modelo computacional implementado.

2.2. Simulación del funcionamiento de mecanismos articulados (Detallado en (González-López 2001))

Consideremos un mecano articulado plano compuesto por dos "brazos" rígidos iguales (Figura 2), uno de cuyos extremos, el punto O, está fijado por una chincheta a un punto de una mesa. Para mover el mecano en el plano de la superficie de la mesa arrastraremos con la mano el otro extremo (P). Supongamos que queremos modelizar en un entorno computacional de geometría dinámica este mecanismo, utilizando, por ejemplo, Cabri-Géomètre. Tenemos distintas opciones:

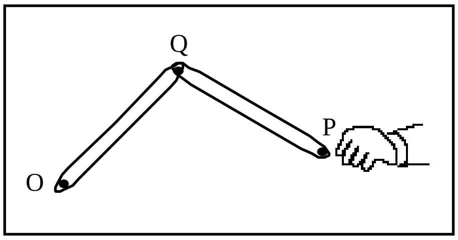


Figura 2

- Algoritmo 1: O y P son puntos libres. Q queda determinado por la intersección de dos circunferencias iguales: C_1 (centro O y radio r) y C_2 (centro P y radio r). Elegimos uno de los dos puntos de intersección para definir Q. Finalmente, dibujamos los segmentos OQ y QP, (Figura 3(a)).

- Algoritmo 2: O es un punto libre. Dibujamos una recta que pasa por O. Elegimos un punto P sobre ella. Dibujamos una perpendicular a OP por O y una paralela, l, a esta recta por el punto medio de OP. C es un círculo de centro O y radio r. Elegimos Q como uno de los dos puntos de intersección entre C y l. Dibujamos los segmentos OQ y QP, (Figura 3(b)).

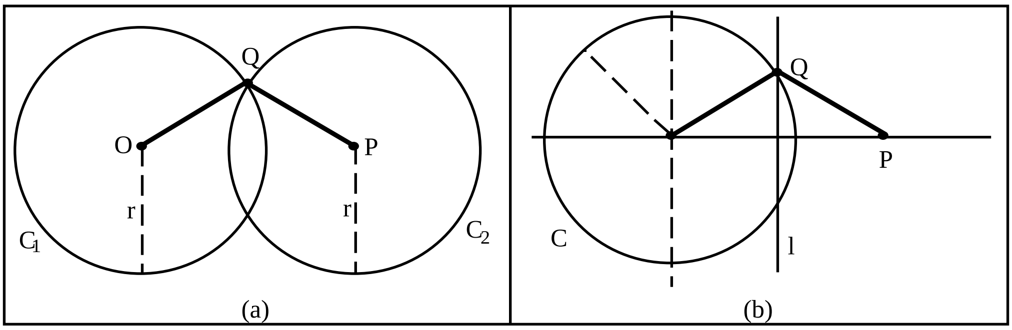


Figura 3: Dos implementaciones del mecanismo en Cabri Geométrè.
(a) A partir de dos circunferencias iguales.
(b) a partir de una circunferencia y una recta.

Para analizar las características del modelo geométrico subyacente a estos dos algoritmos, arrastraremos el punto P por la pantalla y compararemos lo que ocurre con el funcionamiento de un mecanismo real. Una observación remarcable es que si arrastramos P exactamente sobre O, en el Algoritmo 1, el punto Q ‘salta’ bruscamente (Figura 4(a)), mientras que en el Algoritmo 2 no se produce esta discontinuidad (Figura 4(b)).

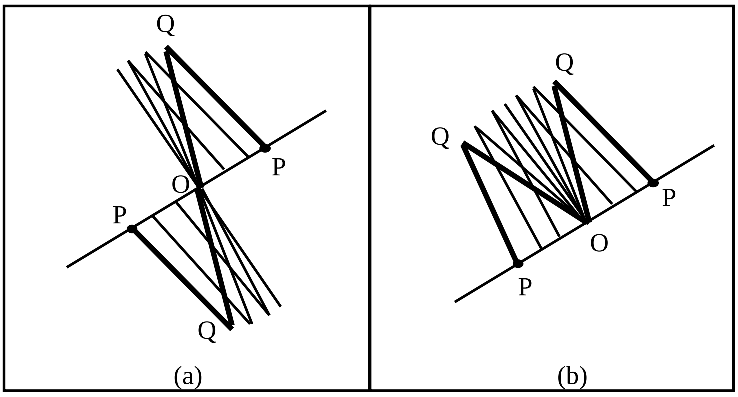


Figura 4: Comportamiento de la construcción cuando P pasa sobre O
(a) en el Algoritmo 1; (b) en el Algoritmo 2.

Si ahora tratamos de comparar estos hechos con el funcionamiento físico real del mecano, la discontinuidad no tiene interpretación física, sino que se produce por los condicionantes que tiene, por un lado, la teoría geométrica euclídea (el que Q pertenezca a dos circunferencias iguales y que éstas se corten en uno, dos o todos sus puntos) y, por otro lado, su modelización computacional en Cabri-Géomètre: el modelo implementado en el sistema no “elige” la posibilidad continua. Debe ser el usuario, modificando el algoritmo, el que intervenga en este comportamiento.

En el párrafo siguiente recopilamos algunas consideraciones teóricas que fundamentan estos comportamientos desde el punto de vista de las restricciones impuestas por la modelización computacional.

3. CONSIDERACIONES TEÓRICAS

3.1 Proximidad y dominio de validez

J. M. Laborde (1999, p. 13) define la geometría dinámica como sigue:

> *"Dynamic geometry is the situation in which one can construct a figure following one of its possible procedural description, progressing with base points […] in such a way that the result of the construction meets the specifications and meets them also for* ***points close to the base points[1]"***.

En la misma referencia se indica que la noción de *estar próximo* en un sistema de geometría dinámica no es la clásica en la topología del plano. Laborde indica así que cada construcción geométrica en un sistema de geometría dinámica tiene un *dominio de validez* que limita el movimiento de los elementos libres a determinadas regiones (los puntos próximos a ellos para el sistema), fuera de las cuales la construcción realizada puede no tener sentido.

3.2 La propiedad conservativa

Vemos así que arrastrar un punto de una construcción por un punto fuera del dominio de validez modifica el sentido de la misma y aunque luego alcancemos puntos inicialmente válidos la construcción ya ha cambiado. Sin embargo ocurre que cuando regresamos al punto de partida la construcción recupera su configuración inicial. Este tipo de propiedad, llamada *conservativa*, puede enunciarse como sigue (Laborde 99; p. 14):

> *Para cualquier sucesión de posiciones de cualquier punto base P sobre un lazo cerrado P_1, P_2,…, P_n=P_1, el estado final F(P_n) es igual al estado inicial F(P_1).*

En el ejemplo del mecano, si partimos de una posición P_1 del punto P, en la cual el mecano está en una posición F(P_1), y arrastramos P sobre un recorrido de forma que al final P vuelve a la posición de partida, entonces la posición final del mecano vuelve a ser F(P_1), independientemente de que durante el recorrido se hayan producido discontinuidades sin sentido físico en una simulación.

La modelización computacional de la geometría implementada en sistemas como Cabri-Géomètre o Geometer's Sketchpad cumplen la propiedad conservativa; no ocurre lo mismo con Cinderella. En este programa, la utilización de técnicas de Geometría Proyectiva Compleja en el tratamiento de los datos permite resolver los problemas de continuidad.

3.3 Orientación de objetos geométricos

La perspectiva dinámica requiere que el sistema distinga de alguna forma los distintos puntos de intersección que se producen en las construcciones geométricas. Para ello, los sistemas tipo Cabri-Géomètre almacenan los objetos geométricos 'orientados': por ejemplo, una recta definida por dos puntos A y B estará orientada 'desde A a B'; la orientación de una perpendicular a una recta r se obtiene girando p/2 en sentido contrario a las agujas del reloj la orientación de r; dos paralelas tienen la misma orientación. El usuario no tiene porqué ser consciente de esta cualidad, se trata de una restricción computacional, no geométrica, que no aparece de forma explícita en ninguno de los manuales consultados para el uso de estos programas.

---

[1] La negrita no está en el original.

Al arrastrar por la pantalla los elementos geométricos el sistema mantiene invariantes las orientaciones almacenadas, produciendo así un comportamiento ‘continuo’ de la orientación interna, a costa de producir ‘discontinuidades’ en la posición de los objetos en la pantalla, como hemos visto en el ejemplo del mecano. En este ejemplo, la diferencia esencial entre los dos algoritmos presentados es, precisamente, el diferente control de la variable orientación que hemos implementado (Figura 5).

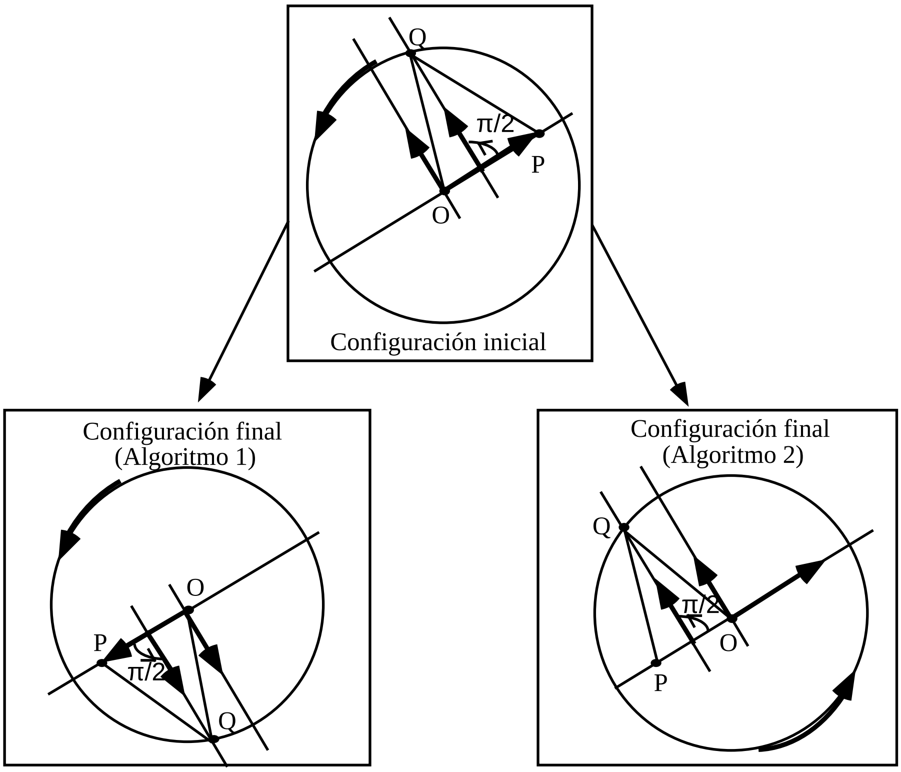


Figura 5: Orientación de los elementos geométricos cuando arrastramos P sobre O.

3.4 Influencia del algoritmo de construcción utilizado

En un SGD puede haber distintas descripciones algorítmicas que conducen a una misma construcción geométrica. Así, cabe preguntarse si la particular modelización computacional de la geometría implementada en un SGD puede ‘superarse’ con un uso posterior adecuado por parte del usuario. Por ejemplo, las peculiaridades observadas en los dos ejemplos de la sección anterior ¿podrían evitarse si elegimos otra forma de realizar las construcciones geométricas, tomando otros comandos, otro orden en ellos? La respuesta general a esta cuestión es negativa, es decir, hay restricciones inherentes al modelo geométrico implementado que no se pueden evitar, independientemente del algoritmo que se use. Es el caso, por ejemplo, de la discontinuidad del mecano de dos brazos: (Baker, 1990) demuestra que, en un contexto en el que se verifique la propiedad conservativa, *no puede haber algoritmos globales cíclicos para el mecano de dos brazos en un entorno del punto O*. Por tanto, independientemente del algoritmo implementado, el paso por O habría necesitado de un tratamiento especial. (Nótese que el Algoritmo 2 representa únicamente movimiento rectilíneo sobre O).

CONCLUSIONES

La falta de continuidad en el movimiento de un dibujo construido a partir de leyes geométricas y la invariancia inesperada de una razón nos han permitido reflexionar sobre las limitaciones que la modelización computacional impone desde el punto de vista de la representación del conocimiento. Consideramos que éste es un paso previo para poder determinar la incidencia de dichas limitaciones en los usos educativos de los sistemas de geometría dinámica, ya que constatamos que las respuestas producidas por el sistema pueden no tener coherencia con el conocimiento geométrico del alumno ni con el conocimiento que se pretende que adquiera, sino que son consecuencia de la modelización computacional implementada. El estudio de estas cuestiones tiene como marco la línea de investigación en didáctica de la geometría ocupada en determinar qué perciben los alumnos en un dibujo dinámico y qué conocimiento construyen a partir de su percepción. A la lista de características de un dibujo (de entre las que la investigación trata de determinar cuáles serán percibidas como esenciales por el alumno y cuáles ignoradas) habrá que añadir las derivadas del modelo computacional.

BIBLIOGRAFÍA

Baker, D. (1990). *Some topological problems in robotics*. The Mathematical Intelligencer, Vol. 12, n. 1, pp. 66-76.

Goldenberg, E. P. and Cuoco, A. A. (1998). *What is Dynamic Geometry?* In R. Lehrer, D. Chazan (Eds.) *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. Lawrence Erlbaum Assoc., pp. 351-367.

González-López, M. J. (2001). *Using dynamic geometry software to simulate physical motion*. Int. Journal of Computers for Mathematical Learning, (en prensa).

Laborde, J. M. (1999). *Some issues raised by the development of implemented Dynamic Geometry as with Cabri-géomètre*. Proceedings 15th European Workshop on Computational Geometry. pp. 7-19. H. Brönnimann Ed. INRIA Sophia Antipolis.