

# **Análisis de demostraciones en entornos de Lápiz y Papel y de Cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas**

Félix Rodríguez Díaz

Universidad de las Islas Baleares. Islas Baleares. España

Ángel Gutiérrez Rodríguez

Universidad de Valencia. Valencia. España.

## **Resumen**

En esta comunicación presentamos una investigación realizada con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en la que estamos interesados en conocer si existen diferencias en las resoluciones de problemas de demostrar de geometría entre un entorno de resolución de Lápiz y Papel y un entorno de Software de Geometría Dinámica.

.....

## **Abstract**

We present in this text a study to investigate the differences among the ways university mathematics students solve geometry proof problems when they are working in two different environments, paper-and-pencil and dynamic-geometry-software.

## **Introducción al problema.**

Marrades y Gutiérrez (2000) presentan una investigación para analizar formas en las que el Software de Geometría Dinámica (SGD) puede ser utilizado por estudiantes de Educación Secundaria para mejorar la comprensión de la naturaleza de la demostración matemática y sus destrezas de demostración. Los autores presentan también un marco teórico para describir y analizar las respuestas que dan los estudiantes a problemas de demostrar. Una de las conclusiones del estudio citado es que el SGD puede ayudar a los estudiantes de secundaria a entender la necesidad de las justificaciones abstractas y las demostraciones deductivas en matemáticas. La transición desde las justificaciones empíricas hasta las deductivas es un proceso lento y debe estar arraigado en los métodos empíricos usados por los estudiantes hasta el momento. En este proceso de transición, el SGD permite a los estudiantes realizar exploraciones empíricas antes de intentar producir una justificación deductiva. Al final del artículo apuntan que hay muchas investigaciones basadas en estudiantes de secundaria pero que los estudios basados en estudiantes universitarios son insuficientes.

Es en este punto donde comienza nuestro proyecto. El estudio ha sido realizado con alumnos de los últimos cursos de la Licenciatura en Matemáticas. Esto implica un cambio en la esencia del planteamiento respecto de otras investigaciones: los alumnos supuestamente ya han finalizado la transición desde las justificaciones empíricas hacia las deductivas. Por tanto, en principio, no buscamos maneras de utilizar el SGD para favorecer o agilizar dicha transición, sino que estamos interesados en conocer si existen diferencias entre los procesos de demostración utilizados por los alumnos en un entorno de SGD, concretamente de Cabri (C), y en un entorno clásico de Lápiz y Papel (LP).

## **Objetivos.**

Como ya hemos comentado anteriormente, podemos suponer que los alumnos de los últimos cursos de la Licenciatura en Matemáticas se hallan en un terreno deductivo y, por tanto, no queremos utilizar Cabri para agilizar el paso hacia las demostraciones deductivas, como suele realizarse en las investigaciones con alumnos de enseñanza secundaria. Cabri, en el contexto de nuestra investigación, es una herramienta que los estudiantes pueden utilizar para la resolución de problemas, como lo es el compás en un entorno de resolución de Lápiz y Papel. El programa Cabri tiene un amplio abanico de herramientas que lo hacen más potente que los utensilios convencionales utilizados en un entorno de Lápiz y Papel (regla y compás). Además, se trata de software dinámico, lo que introduce nuevos aspectos a tener en cuenta en la resolución de problemas de demostrar. Por tanto, hemos considerado pertinente marcar los siguientes objetivos centrales de nuestra investigación:

O1. Identificar los tipos de demostraciones que hacen los estudiantes de Matemáticas en un entorno de Lápiz y Papel (LP) y un entorno Cabri (C).

O2. Analizar si existen diferencias en las resoluciones de problemas de demostrar por estudiantes de Matemáticas entre ambos entornos de resolución y, en caso de existir, determinar de qué tipo son las diferencias.

Creemos conveniente aclarar ciertos términos utilizados en la redacción de los objetivos principales. Una aclaración es sobre el significado del término “resolución”, que aquí está utilizado en el sentido del proceso que realiza una persona para llegar al resultado del problema, donde el término “resultado” significa la respuesta final a la pregunta del problema, producto de la resolución. Nótese que utilizamos el término “problema” en lugar de “ejercicio” ya que en didáctica de las matemáticas a éste se le da la connotación de pura manipulación

algorítmica o de cierta mecánica o rutina memorizadas. Para más detalle sobre la terminología propia de resolución de problemas aquí utilizada, puede consultarse Puig (1996, capítulo 2).

Por otra parte, es preciso aclarar que utilizamos los términos *demostrar* y *demostración* en un sentido amplio, de modo que incluya cualquier tipo de argumento o justificación elaborado para convencer de la veracidad de una afirmación matemática.

Otra aclaración es qué entendemos por diferencias en las resoluciones o en los procesos de demostrar. Estas diferencias no radican en la estética de las producciones ni en el material utilizado, ya que éstas son obvias. Nos referimos, por ejemplo, a diferencias en la tipología de las demostraciones realizadas, en el mismo sentido que en los trabajos de Bell (1976), Balacheff (1988), Harel y Sowder (1998), Marrades y Gutiérrez (2000) e Ibañes (2001); o en las fases recorridas en los procesos de exploración-conjetura-demostración, en el sentido de los trabajos de Gallo (1994), Arzarello y otros (1998, 2002), y Olivero (1999).

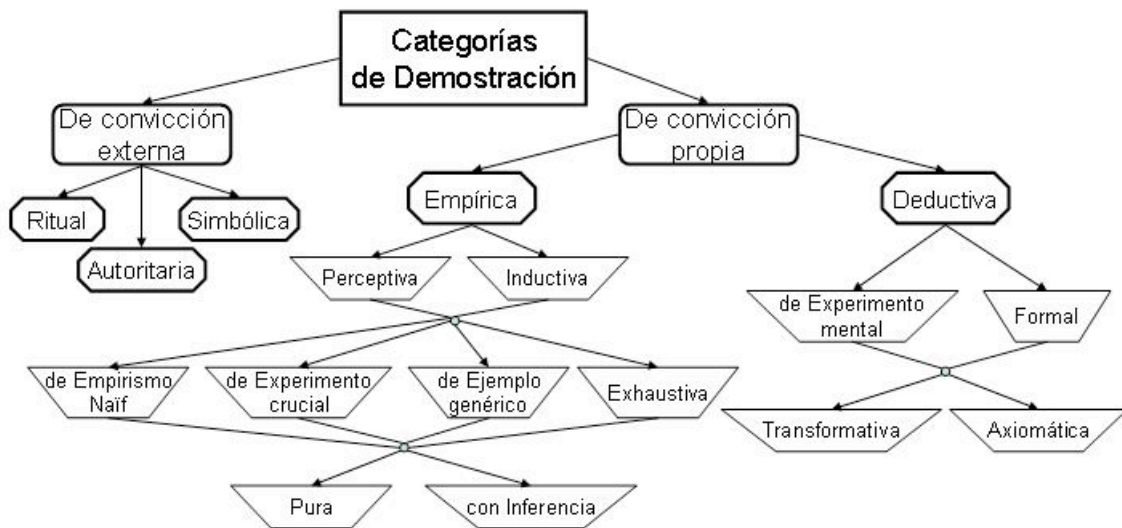
Esta última aclaración es muy importante ya que hace énfasis en el hecho de que si no hallamos diferencias en las resoluciones efectuadas en ambos entornos puede significar dos cosas: que realmente no existen dichas diferencias en los aspectos que analizamos o que la categorización de las demostraciones y estudio de fases empleados no sirven para este fin.

### **Marco teórico.**

Para el análisis de los datos de nuestra investigación, en lo referente a categorías de demostración, hemos intentado reunir aquellos aspectos de las clasificaciones de varios autores, Bell (1976), Balacheff (1988), Harel y Sowder

(1998), Marrades y Gutiérrez (2000) e Ibañes (2001), que consideramos más adecuados para alcanzar los objetivos marcados en nuestro estudio.

Sin más detalle incluimos el siguiente diagrama que sintetiza nuestra categorización de la demostración. Remitimos al lector a Rodríguez (2006) para la explicación pormenorizada de cada una de las categorías.



La información aportada por las categorías de demostración es insuficiente si queremos obtener una información detallada de los procesos de resolución, debido a que asumen que el estudiante trabaja de una forma lineal y coherente en una categoría desde el principio hasta el final de la resolución del problema.

Así pues, es necesario ampliar el marco teórico de las clasificaciones de la demostración y el análisis de las resoluciones de manera que queden recogidos de alguna forma el tipo de trabajo realizado en cada momento de la resolución de un problema y los diferentes saltos entre unas modalidades y otras. Para ello, basándonos en investigaciones sobre los procesos de exploración-conjetura-demostración descritos en Arzarello y otros (1998), y en la línea de Marrades y Gutiérrez (2000), definimos:

- *Fase ascendente*: toda actividad empírica que ayuda a entender el problema, generar conjeturas o verificarlas.

- *Fase descendente*: toda actividad encaminada a construir una demostración deductiva de una conjetura realizada.

### **Contexto.**

La fase experimental de la investigación fue realizada durante el curso 2004-2005 con los 8 alumnos matriculados en la asignatura “Métodos Geométricos”, optativa cuatrimestral del segundo ciclo de la Licenciatura en Matemáticas de la Universitat de les Illes Balears. Dicha asignatura constaba de clases de aproximadamente 100 minutos, dos días a la semana durante el primer cuatrimestre.

Para formar las cuatro parejas dimos libertad a los alumnos para que las formaran, con la única consigna de que al menos un miembro de cada pareja hubiera cursado la asignatura de geometría de primer curso del plan nuevo. Debido a que coexistían dos planes de estudios y en el antiguo no existía ninguna asignatura de geometría euclídea, la directriz dada impedía que formaran una pareja sin una base establecida de conocimientos en este tipo de geometría.

Una vez introducidos los conceptos básicos necesarios, comenzamos con las clases de resolución de problemas. La estructura general de una clase fue la siguiente:

- i) se enuncia el problema,
- ii) cada pareja intenta resolverlo por separado,

iii) la docente supervisa las resoluciones de cada pareja, evaluando si es necesario dar alguna ayuda o resolver alguna duda que surja,

iv) si dentro del tiempo de la clase se resuelve el problema, entonces alguna de las parejas que lo han resuelto expone su resolución en la pizarra y se discute entre toda la clase bajo la moderación de la docente.

Si no da tiempo a terminar el problema dentro de la clase, éste queda pendiente como tarea para casa que las parejas deben entregar a la docente en las próximas clases. Tanto si el problema queda resuelto como si no, al terminar la clase, los alumnos deben entregar al investigador las resoluciones que han realizado durante la clase. El papel que jugó el investigador durante las clases fue el de observador participativo, tomando notas de campo, y colaborando con la docente en la tarea de supervisión de las resoluciones y evaluación de la necesidad de dar ayudas o resolver dudas.

La batería de problemas fue dividida en dos bloques. El primero corresponde a los problemas que debían resolverse en el entorno LP, y el segundo corresponde a aquellos que debían resolverse en el entorno C. Cada uno de estos bloques comienza con varios problemas de construir (problemas dónde el objetivo es construir cierta figura geométrica y justificar la corrección de los pasos dados para realizarla) que sirvieron de recordatorio para la resolución de problemas de geometría euclídea, de entrenamiento en la nueva forma de escribir las resoluciones de los problemas y para familiarizarse con el compañero de pareja, la dinámica de las clases y con el entorno (especialmente en el uso de Cabri). Además, una vez finalizados los problemas de LP y antes de comenzar los de C, dedicamos dos clases completas a explicar a los alumnos el funcionamiento del programa Cabri-Géomètre (versión II plus para Windows) y sus comandos y funciones con ejercicios prácticos para que fueran adquiriendo

cierta destreza en su manejo, que acabarían de obtener con los problemas de construir.

En cada bloque, una vez finalizados los problemas de construir, fueron resueltos los problemas de demostrar que han sido objeto de estudio en este trabajo. Los problemas de cada tipo (construir y demostrar) de la lista que habíamos elaborado para el curso fueron repartidos en los dos bloques sin seguir un criterio específico. Dicho de otro modo, los problemas del bloque de C no son problemas que cumplan ciertas condiciones ni que hayan sido elegidos porque sea más fácil o difícil su resolución con dicho software.

### **Metodología.**

Uno de los dilemas que surgieron a la hora de planificar la investigación fue hallar una herramienta metodológica que nos permitiera obtener la máxima información posible sobre los procesos cognitivos realizados por los alumnos durante la resolución de los problemas, es decir en sus intentos de llegar a escribir demostraciones que sean las soluciones de los problemas.

La información aportada por pruebas de tipo test puede ser útil si lo que nos interesa es la solución del problema, pero es insuficiente para estudiar los procesos realizados en la resolución del mismo.

Por otra parte, la información que aporta una demostración formal “pasada a limpio” y saneada de conjeturas refutadas y comprobaciones empíricas es escasa. La valoración de las demostraciones finales producidas por los estudiantes, comparadas con las resoluciones de “experto”, no es lo que más interesa en esta investigación.



Si son recogidas las producciones “en sucio” de los alumnos, esto es, las hojas de papel que contienen sus conjeturas, comprobaciones empíricas, fragmentos de demostraciones informales y formales, sin más orden que el espacial del lugar en que han sido escritas por los alumnos, obtenemos una información mucho más rica, aunque, al mismo tiempo, mucho más compleja y difícil de analizar.

Realizar entrevistas clínicas sería útil y productivo, pero entrevistar a todas las parejas de alumnos después de cada problema era, en la práctica, imposible dado el número de problemas y el tiempo disponible para ello, y entrevistar sólo a parte de los estudiantes o sólo después de unos pocos problemas podría dar insuficiente información.

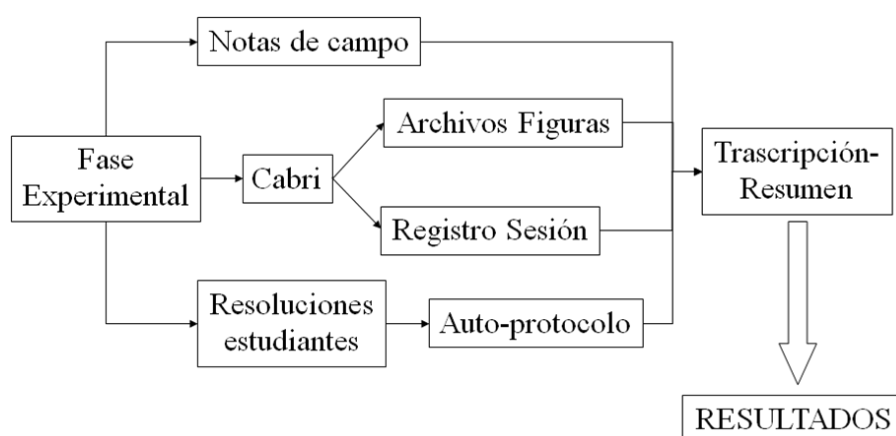
Para solventar esta serie de inconvenientes de los métodos tradicionales de recogida de datos pensamos que, como novedad de la investigación y a modo experimental, podríamos hacer que fueran los propios alumnos quienes, mientras resolvían los problemas, escribieran un “guión” de lo que hacían y pensaban, qué decisiones tomaban y por qué las tomaban, y cualquier otro aspecto que ellos consideraran interesante o que había influido en su trabajo. Hemos denominado *auto-protocolo*, ver Gutiérrez (2005) y Rodríguez (2006), a estos textos escritos por los estudiantes, que, generalmente, incluyen, entremezclados pero ordenados temporalmente, sus progresos en la resolución de los problemas y sus comentarios de tipo descriptivo o metacognitivo.

Además de los auto-protocolos, recogimos notas de campo del investigador, los archivos de las figuras de Cabri guardadas en el ordenador y los registros de sesión de Cabri.

Para integrar la información procedente de los diferentes tipos de datos obtenidos sobre la resolución de un problema por una pareja de estudiantes, y

para facilitar su posterior análisis, especialmente en los problemas resueltos con Cabri, elaboramos unas tablas que incluyen

- un resumen detallado del auto-protocolo correspondiente, con transcripciones de los fragmentos significativos,
- comentarios del investigador y
- los dibujos en papel o figuras de Cabri correspondientes al trabajo realizado en esos párrafos.



## Resultados.

En cuanto a las categorías de demostración la siguiente tabla sintetiza los resultados obtenidos:

Categoría	Pareja	Problema								
		LP05	LP06	LP07	LP09	C03	C04	C05	C06	C07
Experimento mental transformativa	01	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	02		x	x	x		x	x	x	x
	03		x	x	x	x	x	x	x	x
	04		x	x	x	x	x	x	x	x
Inductiva de ejemplo genérico con inferencia	02	x				x				
Perceptiva de empirismo naíf con inferencia	03	x								
	04	x								

LP = problema resuelto en entorno de Lápiz y Papel    C = problema resuelto en entorno Cabri

Respecto a las fases ascendentes y descendentes aparecidas en las resoluciones, la siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

Pareja	Problema								
	LP05	LP06	LP07	LP09	C03	C04	C05	C06	C07
01	II	II	II	II	II	II	II	II	II
02	I	II	II	II	I	II	II	II	II
03	I	II	II	II	II	II	II	II	II
04	I	II	II	II	II	II	II	II	II

I = Secuencia de fases ascendentes (sólo aparecen fases ascendentes en la resolución)  
 II = Secuencia de fases ascendentes y descendentes alternadas.

Para una descripción mucho más detallada del análisis de los resultados del estudio véase Rodríguez (2006).

### **Conclusiones.**

Una labor de conjunción de la información contenida en los diferentes tipos de datos recogidos nos permite realizar un análisis de los resultados desde la perspectiva planteada desde un principio y elaborar las siguientes conclusiones:

1. En problemas de demostrar de geometría euclídea, salvo muy pocas excepciones, los estudiantes de la experiencia, alumnos de la licenciatura en Matemáticas, han realizado demostraciones deductivas del tipo experimental transformativo, independientemente del entorno de resolución (LP o C).

2. En los aspectos analizados, y en el nivel educativo estudiado, no hemos hallado evidencias de que existan diferencias significativas entre las resoluciones del entorno LP y las del entorno C.

3. Las categorizaciones de la demostración propuestas y el estudio de fases nos han permitido hacer un análisis detallado de las respuestas de los estudiantes a problemas de demostrar en ambos entornos, LP y C, pero no han mostrado que

existan diferencias en las resoluciones de problemas de demostrar con alumnos de este nivel entre ambos entornos, ya que todas quedan etiquetadas en la misma categoría y no hay diferencias evidentes en las secuencias de fases.

4. El auto-protocolo ha resultado ser una herramienta metodológica útil para obtener información acerca de la actividad de los estudiantes durante la resolución de problemas que, en unos casos, no aparece en la información que obtenemos a través de otros tipos de datos y, en otros, la complementa.

Sin intención de dar carácter general a las conclusiones de nuestro estudio, al revisarlas inducen al establecimiento de una hipótesis de trabajo para futuras investigaciones: el software de geometría dinámica no influye en la categoría de demostración ni en la secuencia de fases realizadas por alumnos que han finalizado la transición hacia las demostraciones deductivas. Por consiguiente, y a diferencia de lo que algunas publicaciones informan sobre alumnos de enseñanza secundaria, la utilización de Cabri parece que no hace que los alumnos de la licenciatura en Matemáticas muestren menos necesidad de realizar demostraciones deductivas para justificar los resultados.

### **Limitaciones y vías abiertas.**

Como en los aspectos analizados no hemos hallado diferencias entre las resoluciones de ambos entornos, es necesario ampliar el análisis a otros aspectos, además de las categorías de demostración y las secuencias de fases. Igualmente, en futuros estudios deben tenerse en cuenta las limitaciones de esta investigación con el objetivo de fortalecer sus puntos débiles:

- El auto-protocolo ha dado buenos resultados como herramienta metodológica experimental, no obstante hay que depurarlo y determinar los contextos en los que es útil aplicarlo.
- Se debe realizar un análisis más profundo de los procesos de exploración-conjetura-demostración. Identificar las fases ascendentes y descendentes es insuficiente para una descripción detallada de los procesos seguidos en la resolución de un problema de demostrar. Puede resultar conveniente combinar estas fases con otros conceptos como, por ejemplo, la abducción descrita en Olivero (1999).
- Tal y como afirmamos en la conclusión 2, no hemos hallado evidencias de que existan diferencias significativas entre las resoluciones del entorno LP y las del entorno C. Esta conclusión surge de la comparación de los resultados obtenidos en el entorno LP con los obtenidos en el entorno C. En el caso de las categorías de demostración, en nuestro estudio, el resultado de la comparación es obvio ya que casi la totalidad de las resoluciones quedan descritas como deductivas de experimento mental transformativas. La comparación no es tan sencilla si hablamos de secuencias de fases. Si clasificamos las secuencias de fases en tipos, resulta que casi la totalidad de las resoluciones quedan catalogadas por un mismo tipo (secuencia de fases ascendentes y descendentes alternadas). Sin embargo, esa clasificación en dos tipos es muy simple. Es necesario, junto con la sugerencia del punto anterior, disponer de un método o una herramienta para poder comparar las secuencias de fases de dos resoluciones. Sin unos criterios específicos establecidos, la comparación queda reducida a una visión simplista de las fases o a una apreciación subjetiva del investigador.

A modo de comentario final, esperamos que nuestro estudio arroje un poquito de luz sobre aspectos insuficientemente investigados y, sobre todo, abra el camino a nuevas líneas de investigación.

### **Referencias bibliográficas.**

- Arzarello, F. y otros (1998). A model for analysing the transition to formal proofs in geometry. *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 2, pp. 24-31. University of Stellenbosch. Stellenbosch.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children*, pp. 216-235. Hodder & Stoughton: Londres.
- Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, vol. 1, 23-40.
- Gallo, E. (1994). Control and solution of "algebraic problems". *Rendiconti del Seminario matematico dell'Università e del Politecnico di Torino*, 52, vol. 3, pp. 263-278.
- Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría Dinámica. En A. Maz, B. Gómez, M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: IX Simposio de la SEIEM*, pp. 27-44. Universidad de Córdoba y SEIEM: Córdoba.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. En A.H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*, pp. 234-283. American Mathematical Society: Providence, EE.UU.
- Ibañez, M.J. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Valladolid.
- Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.
- Olivero, F. (1999). Cabri-géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations. *Proceedings of ICTMT4*. Plymouth, Inglaterra.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. (Colección Mathema, 6), Comares. Granada.
- Rodríguez, F. (2006). *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabri por estudiantes de la licenciatura en Matemáticas*. Memoria del

Trabajo de Investigación presentado en el programa de doctorado de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. Valencia.

Rodríguez, F.; Gutiérrez, A. (2006). Analysis of proofs produced by university mathematics students, and the influence of using Cabri software. *Proceedings of the 30th PME International Conference*, 4, p. 433. Prague, Czech Republic.