

PROPUESTA DE CATEGORIZACIÓN DE LOS OBJETIVOS GEOMÉTRICOS. REANÁLISIS DE LOS NIVELES DE VAN HIELE REFERIDOS A LAS FIGURAS PLANAS

Joxemari Sarasua
joxemari.sarasua@ehu.es
Universidad del País Vasco

Modesto Arrieta
modesto.arrieta@ehu.es
Universidad del País Vasco

Resumen

La presente comunicación es un avance de una tesis doctoral en fase de elaboración que pretende aportar elementos que contribuyan a definir de manera más eficaz los objetivos geométricos asociados a la escolaridad obligatoria. Tomando como referencia el currículo escolar, se han clasificado y categorizado los objetivos geométricos relativos al bloque de las figuras planas y, posteriormente, se han reanalizado los descriptores de los niveles de Van Hiele correspondientes en base a la nueva categorización. Se han obtenido consecuencias relevantes que pueden contribuir a profundizar en la comprensión y mejora de las características de los niveles.

Palabras clave: niveles de Van Hiele, figuras planas, objetivos geométricos, enseñanza obligatoria.

Abstract

This paper releases in advance some of the results of an ongoing PhD thesis that intends to contribute some elements to facilitate a more effective definition of geometry objectives for compulsory education. School Curriculum was taken as a frame of reference, and geometry objectives relating to plane figures were classified and categorized; subsequently descriptors of the corresponding Van Hiele levels were reanalyzed on the basis of the new categorization. Relevant conclusions were obtained that might contribute to go more deeply into the understanding and improvement of the characteristics of Van Hiele levels.

Key Words: Van Hiele levels, plane figures, geometry objectives, compulsory education.

Introducción

Se puede decir, de forma sintética, que son dos las principales líneas teóricas que se han ocupado del análisis del pensamiento geométrico en las últimas décadas: la teoría psicogenética de Piaget y el modelo Van Hiele.

La primera pone el énfasis en los procesos mentales que intervienen en la formación del espacio psicológico del niño, tratando de analizar el desarrollo evolutivo de los conceptos espaciales (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960; Piaget y Inhelder, 1967; Canals 1997) y proponiendo, por ejemplo, una determinada secuenciación de las relaciones y propiedades geométricas ligadas al desarrollo intelectual del niño.

Van Hiele (1986) propone en su modelo diferentes “niveles de razonamiento” que se asignan según las maneras de razonar sobre las diferentes tareas geométricas. Dicho modelo presenta una doble dimensión (Jaime y Gutiérrez, 1990):

- a) **Descriptiva:** define una secuencia de cinco modos de razonar matemáticamente, los llamados *niveles de razonamiento* (de reconocimiento, de análisis, de clasificación, de deducción formal y de rigor) a través de los cuales progresa la capacidad de razonamiento matemático de cualquier individuo (alumnos de infantil, primaria, secundaria o universitarios) desde que inicia el aprendizaje en cierta área de la geometría hasta que llega a su máximo nivel de maestría en dicha área.
- b) **Didáctica:** ofrece a los profesores una serie de directrices sobre cómo pueden ayudar a que sus alumnos alcancen con más facilidad un nivel superior de razonamiento. A estas directrices las denomina “fases de aprendizaje”.

Las ideas centrales del modelo Van Hiele pueden enunciarse de la siguiente manera (Jaime y Gutiérrez, 1990):

- (1) Se pueden encontrar varios niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
- (2) Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
- (3) Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

- (4) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

Áreas de contenidos como las figuras planas, las isometrías, los ángulos y los sólidos han sido objeto de un análisis exhaustivo desde este enfoque (Burger y Shaughessy, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1990; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991; Jaime y Gutiérrez, 1996; Guillén, 1997).

Algunas carencias del Modelo Van Hiele

Es innegable el acierto de las propuestas tanto didácticas como referidas al proceso de aprendizaje de la geometría desarrolladas a la luz del modelo Van Hiele. Así ha quedado patente durante las últimas décadas por el gran caudal de propuestas y teorías surgidas a su alrededor, por el interés que éstas han despertado, y siguen despertando, en ámbitos educativos y por la incorporación paulatina de sus propuestas didácticas y métodos de análisis en los currículos de varios países.

Gracias a este empuje se ha conseguido modelizar el proceso mediante el cual los alumnos adquieren los contenidos geométricos, caracterizando y jerarquizando diferentes etapas de “pensamiento geométrico”. Esto, por su parte, ha llevado a elaborar minuciosas propuestas didácticas más coherentes y ajustadas al nivel de los alumnos, acelerando de manera significativa el proceso de aprendizaje.

No es menos cierto, sin embargo, que un análisis más exhaustivo de los niveles de razonamiento, del conjunto de sus descriptores y, en general, de la literatura analizada deja al descubierto ciertas carencias que merecen la pena ser analizadas con mayor detenimiento.

a) Indefinición previa de los objetivos a alcanzar

Aunque en las caracterizaciones para los diferentes niveles de razonamiento se hace referencia constante, de manera explícita o implícita, a múltiples competencias que el alumno debe o no revelar para ser asignado a un determinado nivel (por ejemplo: “comparar”, “reconocer”, “clasificar”, “deducir”, “generalizar”, etc.), los objetivos geométricos que se supone debe alcanzar aquel a lo largo de su escolarización no se concretan de forma explícita, ni se organizan de antemano en categorías diferenciadas, ni se establecen entre ellos líneas

jerárquicas o redes de relaciones, ni tampoco se confrontan con los descriptores de niveles de Van Hiele para validar o no su mutua adecuación.

b) Atribución asimétrica de características

Un análisis en conjunto de los descriptores asociados a los niveles de Van Hiele, como base hacia una posible recategorización de los objetivos geométricos, pone de manifiesto una serie de carencias derivadas del desequilibrio y descompensación en las características asociadas a los diferentes objetivos. Dicho de otra manera: mientras algunos objetivos aparecen claramente señalados, otros adolecen, en diverso grado, de indefinición, de ausencia de desarrollo apropiado o de omisión. Esto lleva a que alrededor de 70 descriptores de los diferentes niveles no figuren clasificados convenientemente, lo que a su vez dificulta tanto la comprensión de dichas características como la clarificación de los límites entre los niveles, y puede esconder además déficits o carencias que pueden pasar desapercibidas.

c) Ausencia de aportaciones específicas para las primeras etapas educativas

El grueso de las investigaciones realizadas durante las últimas décadas sobre pensamiento geométrico se ha centrado casi exclusivamente en alumnos mayores de 9 años, estudiantes de Magisterio e incluso profesores en activo (Hershkowitz, 1990), mientras que apenas se han analizado los mecanismos de razonamiento geométrico en niños de corta edad, salvo pequeñas excepciones (Jaime, 1993; Clements, Swaminathan, Hannibal y Sarama, 1999). Es muy poco lo que el modelo Van Hiele ha aportado hasta ahora en esta dirección, apreciándose vacíos al menos en las siguientes áreas: clarificación de objetivos específicos para educación infantil, subsecuenciación integral del primer nivel de razonamiento para, si fuera preciso, hacerlo más operativo, y propuestas didácticas específicas para educación infantil.

d) Autolimitación a ciertos grupos de contenidos

A pesar de la vocación globalizadora y aglutinante que se tiende a atribuir al modelo Van Hiele, al menos en cuanto a pensamiento geométrico se refiere, llama la atención cómo algunos contenidos que han recibido un tratamiento profuso desde una óptica *piagetiana*, por ejemplo los relativos a nociones topológicas y proyectivas, no se han incluido explícitamente dentro del modelo Van Hiele. No se puede decir lo mismo sobre otros tipos de contenidos (isometrías,

ángulos, figuras planas, sólidos), que han sido objeto constante de estudio desde la formulación misma del modelo (Burger y Shaughnessy, 1986; Jaime y Gutiérrez, 1990; Jaime y Gutiérrez, 1996; Guillén, 1997; Alfonso, Camacho y Socas, 2000).

Propuesta de categorización de objetivos geométricos

Pocas investigaciones han propuesto un marco tan amplio como el de los niveles de Van Hiele para interpretar mejor el aprendizaje de los estudiantes. También la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991; Pegg, Gutiérrez y Huerta, 1997; Huerta, 1999) se ha mostrado útil para evaluar a los estudiantes y clasificarlos según modos de razonamiento.

Los propios autores reconocen la validez de dicha taxonomía para establecer objetivos de aprendizaje, pero no conocemos estudios que lo hayan desarrollado. Somos conscientes de la dificultad que entraña el tema por la falta de rigor en este tipo de planteamientos; aun así pensamos que una primera aproximación a una caracterización de este tipo puede abrir la vía que nos permita valorar los niveles de razonamiento de Van Hiele desde una perspectiva externa, esta vez curricular, y a la vez instructiva y práctica.

Creemos que un reanálisis de las características de los niveles de Van Hiele desde la perspectiva de los objetivos geométricos contribuiría a:

- a) Facilitar la comprensión de las características de cada nivel.
- b) Fijar los límites de cada nivel.
- c) Mostrar los déficits o carencias del modelo.

El objetivo general de la enseñanza de las matemáticas a lo largo de la enseñanza obligatoria es la mejora de las capacidades intelectuales y la adquisición de herramientas aplicables a otras áreas. Todo ello se concreta en la adquisición de una serie de recursos y capacidades de lenguaje relativos a la **comprensión de conceptos**, el **cálculo de procedimientos** y la **resolución de problemas**, esto último entendido como fruto de la síntesis de los dos primeros objetivos, sobre los cuales pivota. Es por ello que centraremos nuestra atención en aquellos dos, aun conscientes de que la adquisición de competencias resolutorias presenta una dimensión propia susceptible de un análisis más particular y exhaustivo. Así pues, esta **primera categoría** corresponde al nivel general de adquisición del conocimiento matemático, como viene recogido en el currículo escolar.

La **segunda categoría** hace referencia a las destrezas implicadas en su adquisición y que tienen relación con las constantes de área que muchas veces se utilizan a la hora de evaluar la adquisición de conocimientos en matemáticas (Hoffer, 1981; Pegg y Davey, 1991; Davey y Holliday, 1992). Esta segunda categoría, por tanto, abarca los cinco grupos de destrezas geométricas principales: visuales, verbales, manuales, lógicas y de aplicación.

Los *verbos de acción* asociados a cada bloque de destrezas y que hacen referencia a los objetivos geométricos desarrollados en los currícula escolares los ordenamos en grado creciente de dificultad, o complejidad, lo que constituye una **tercera categoría** de objetivos didácticos o terminales.

Una **cuarta categoría** nos indicará, así mismo, el nivel de comprensión o consecución de cada uno de los objetivos didácticos. Proponemos, en particular para las figuras planas, la siguiente clasificación-categorización:

| CATEGORIZACIÓN DE OBJETIVOS GEOMÉTRICOS | | | | |
|--|---|----------------------------------|--|-----------------------------|
| 1ª CATEGORÍA Contenido curricular | 2ª CATEGORÍA Destrezas en Geometría | 3ª CATEGORÍA Objetivos | 4ª CATEGORÍA Modo de abordar el objetivo | |
| Comprensión de conceptos | Reconocimiento (destrezas visuales) | Identificar | Globalmente | |
| | | | Por partes o propiedades | |
| | | Relacionar | Globalmente | |
| | | | Por elementos o propiedades | |
| | Comunicación (destrezas verbales) | Clasificar | | Globalmente |
| | | | | Por partes o propiedades |
| Describir | | Globalmente | | |
| | Definir | Por atributos | | |
| | | Lista exhaustiva | | |
| | | Lista mínima | | |
| Cálculo de procedimientos | Representación (destrezas manuales) | Dibujar o construir | Reproduciendo | |
| | | | Creando | |
| | Razonamiento (destrezas lógicas) | Inducir | | Generalizando |
| | | | | Construyendo analíticamente |
| | | Deducir | | Comprobando |
| | | | | Construyendo analíticamente |
| Demostrar | | Comprobando | | |
| | | Construyendo analíticamente | | |
| Resolución de problemas | Síntesis y aplicación de las destrezas anteriores | | | |

Podemos identificar, relacionar, clasificar, describir y definir *globalmente* (según la forma) o *por partes* (según componentes, atributos o propiedades). Esta doble secuenciación en el significado y adquisición de determinados conceptos geométricos está plenamente justificada dentro del modelo Van Hiele, y responde a la necesidad de adecuar el vocabulario y la terminología específica al nivel de razonamiento del alumno, de tal forma que éste entienda.

Por otra parte, es posible dibujar un objeto, bien *reproduciéndolo* (por ejemplo: coloreando, calcando, proyectando o copiando, a mano alzada o con regla y compás, un modelo), o bien *creándolo* a partir, por ejemplo, de una definición verbal o escrita. El razonamiento inductivo se manifiesta *generalizando* en base a la experimentación (por ejemplo, de un objeto o de un número pequeño de objetos a una clase, o de un caso particular a una ley), o mediante un procedimiento formal analítico.

Análogamente, el razonamiento deductivo y las demostraciones pueden trabajarse desde una doble dimensión: bien *comprobando* en un número finito de casos, usando mediciones directas o indirectas, o bien *construyendo* uno mismo analíticamente la prueba.

Un reanálisis de las características de los niveles de Van Hiele desde la perspectiva de los objetivos geométricos creemos que ayudaría a corregir las carencias señaladas anteriormente, además de poder servir como punto de partida para la generalización del modelo Van Hiele hacia otros contenidos o etapas educativas que hasta ahora no han recibido suficiente atención.

Reanálisis de los niveles de Van Hiele

Después de haber organizado en categorías el conjunto de objetivos geométricos que se pretenden alcanzar durante la enseñanza obligatoria, secuenciándolos, a su vez, según el grado de dificultad de adquisición, procederemos a reanalizar los niveles de Van Hiele relativos a las figuras planas sobre la base de la nueva categorización.

Se trata, en suma, de analizar el encaje de los descriptores de los cuatro primeros niveles de Van Hiele en este modelo, dejando a un lado el quinto por apuntar, en cualquier caso, más allá del ámbito de la enseñanza obligatoria. Por así decirlo, este modelo hará de evaluador externo, como si de una auditoría se tratara, que nos habrá de indicar las virtudes, y en su caso las carencias, de los niveles de Van Hiele.

Para ello hemos tomado como base el texto de Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit, J. B., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994), pues, como ellos mismos señalan, los descriptores que presentan son una síntesis de los escritos de los Van Hiele y de otros autores posteriores que han investigado sobre las características de dichos niveles: Van Hiele-Geldof (1957), Van Hiele (1986); Burger y Shaughnessy (1986); Crowley (1987); Fuys, Geddes y Tischler (1988); Jaime y Gutiérrez (1990). Puntualmente también nos hemos servido de ciertas características, bien complementarias o bien distintivas por algún matiz, de los textos de Jaime y Gutiérrez (1990, 1996).

En total se recogen 19 características del nivel 1, 18 del nivel 2, 26 del nivel 3 y 10 del nivel 4. No se analiza el nivel 5. En total: 73 características, algunas de ellas enunciadas en negativo.

| Objetivo | Modo de abordar el objetivo | Frecuencia | | Adecuación | |
|---------------------|-----------------------------|------------|----|------------|-------|
| | | Número | % | | |
| Identificar | Globalmente | 3 | 8 | 11% | ALTA |
| | Por partes o propiedades | 5 | | | |
| Relacionar | Globalmente | 2 | 6 | 8% | ALTA |
| | Por elementos o propiedades | 4 | | | |
| Clasificar | Globalmente | 3 | 4 | 5,5% | MEDIA |
| | Por partes o propiedades | 1 | | | |
| Describir | Globalmente | 7 | 9 | 12% | ALTA |
| | Por atributos | 2 | | | |
| Definir | Lista exhaustiva | 3 | 11 | 15% | ALTA |
| | Lista mínima | 8 | | | |
| Dibujar o construir | Reproduciendo | 2 | 2 | 3% | BAJA |
| | Creando | 0 | | | |
| Inducir | Generalizando | 4 | 4 | 5,5% | MEDIA |
| | Construyendo analíticamente | 0 | | | |
| Deducir | Comprobando | 6 | 11 | 15% | ALTA |
| | Construyendo analíticamente | 5 | | | |
| Demostrar | Comprobando | 12 | 18 | 25% | ALTA |
| | Construyendo analíticamente | 6 | | | |
| TOTAL | | 73 | | | |

Como primera valoración se aprecia la validez general del conjunto de descriptores de los niveles de Van Hiele para abarcar los objetivos geométricos en sus cuatro categorías. Se observa, asimismo, que nuestra subdivisión y jerarquización de objetivos en orden de complejidad muestra una notable consonancia con la secuenciación de los niveles de Van

Hiele, asociándose de forma escalonada a cada objetivo ciertos descriptores de nivel y no advirtiéndose saltos de nivel inverso entre objetivos consecutivos de una misma familia. Para algunos de ellos, sin embargo, se aprecian ciertas discontinuidades que pueden indicar puntuales deficiencias o indefiniciones del modelo Van Hiele a la hora de plantear propuestas didácticas orientadas a la adquisición de dichos objetivos.

Más detalladamente, se pueden extraer las siguientes conclusiones de la tabla, tanto cualitativas como cuantitativas, según el porcentaje de coincidencias y adecuación entre las características de los niveles de Van Hiele y la nueva clasificación de objetivos.

I. Adecuación alta

- a) Los objetivos IDENTIFICAR (GLOBALMENTE - POR PARTES) y RELACIONAR (GLOBALMENTE - POR PARTES) aparecen convenientemente determinados, correspondiéndoles a cada uno de ellos descriptores de nivel diferenciados. Al primero le corresponden $3+5=8$ descriptores, el 11% del total, dos de ellos enunciados de forma negativa; y al segundo $2+4=6$, el 8%, dos de ellos también negativos. El primer objetivo, de menor recorrido, es susceptible de ser trabajado y adquirido en los dos primeros niveles, mientras que el segundo no se alcanzará hasta que el alumno razone según el nivel 3.
- b) Los objetivos DESCRIBIR (GLOBALMENTE - POR PARTES) y DEFINIR (CON LISTA EXHAUSTIVA - CON LISTA MÍNIMA) también aparecen correctamente determinados, correspondiéndoles respectivamente $7+2=9$ y $3+8=11$ descriptores, un 12% y 15% del total, habiendo en cada caso una característica negativa. Se hace referencia explícita a la utilización de terminología adecuada. El objetivo DESCRIBIR corresponde a los niveles primero y segundo de Van Hiele. El objetivo DEFINIR aparece minuciosamente caracterizado, y se asocia a los niveles segundo, tercero y cuarto.
- c) Los objetivos DEDUCIR (COMPROBANDO — CONSTRUYENDO ANALÍTICAMENTE) y DEMOSTRAR (COMPROBANDO — CONSTRUYENDO ANALÍTICAMENTE) también están caracterizados de forma adecuada. Al primero le corresponden $6+5=11$ descriptores, el 15% del total, con dos enunciados en negativo; y al segundo $12+6=18$, el 25%, tres de ellos en

negativo. Ambos objetivos constituyen los de mayor recorrido: (a) por el porcentaje de descriptores, (b) por la minuciosidad con la que se describen, (c) por el número de niveles que los contienen, del nivel dos al cuatro, y (d) por su distribución regular entre los niveles. Se trata, por todo ello, de los objetivos más transversales.

II. Adecuación media

- a) El objetivo CLASIFICAR (SEGÚN LA FORMA — SEGÚN PROPIEDADES) no parece lo suficientemente tratado, pues sólo se refieren a él 3+1=4 características, el 5,5% del total, que además abarcan los tres primeros niveles, con dos de ellas enunciadas de forma negativa. El objetivo de clasificar lógicamente (piedra de toque y fuente de innumerables quebraderos de cabeza para enseñantes y alumnos, no solamente en la enseñanza obligatoria, sino también en las Escuelas de Magisterio) adolece particularmente de indefinición, pues no se contemplan entre los descriptores de Van Hiele las diversas relaciones y formas de agrupamiento que caracterizan la acción de clasificar: inclusión/exclusión, partición, pertenencia compartida, etc. Pensamos que estas variables deberían ser tenidas en cuenta y secuenciarse de manera explícita como características fundamentales.
- b) Al objetivo INDUCIR (GENERALIZANDO — CONSTRUYENDO ANALÍTICAMENTE) le corresponden 4 descriptores, el 5,5% del total, siendo uno de ellos negativo. Abarca solamente los dos primeros niveles. El objetivo de la inducción se contempla sólo de manera informal, entendida como comprobación o generalización experimental de una propiedad geométrica a partir de una serie de ejemplos, principalmente manipulativos, y aunque se entiende que la construcción analítica o rigurosa de la inducción corresponde a los niveles más altos, no parece apropiado que un objetivo tan amplio reciba una atención tan escasa, reducido a los niveles uno y dos. En suma, parece que faltan caracterizaciones intermedias para el tercer y cuarto nivel.

III. Adecuación baja

El objetivo DIBUJAR o CONSTRUIR presenta las mayores carencias e indefiniciones, pues sólo aparece asociado a 2 características sobre 73 —el 2,7%— y reducidas al nivel

1. Parece que faltan descriptores relativos, por lo menos, al segundo y tercer nivel. En concreto se perciben las siguientes carencias:

- i) No se hace referencia a competencias relacionadas con los diversos mecanismos para reproducir figuras planas: colorear, calcar, dibujar a mano alzada, dibujar con regla y compás, construir con material manipulativo (tangram, palillos, puzzles, geobandas, teselados, etc.) o *software*.
- ii) No se distingue entre a) dibujar copiando un modelo, y b) dibujar en ausencia de modelo, por ejemplo a partir de una definición verbal o escrita. Cabe suponer que ambas competencias, radicalmente distintas, han de corresponder a diferentes niveles de Van Hiele.
- iii) Faltan referencias específicas a elementos que pueden estar en el origen de representaciones erróneas de figuras: objeto mental frente a concepto (Freudenthal, 1983; Vinner, 1983; Puig, 1997), fenómenos y juicios prototípicos (Hershkowitz, 1990) o distractores en general (Vinner y Hershkowitz, 1983).

El siguiente objetivo, sobre el que ya estamos trabajando, es la formulación e incorporación al conjunto de los descriptores actuales que definen los diferentes niveles de razonamiento de nuevas características relativas a destrezas de construcción y representación de las figuras planas. La fase final de este estudio prevé la validación, o en su caso la refutación, de nuestras propuestas evaluando su idoneidad sobre una amplia muestra de estudiantes de diferentes niveles educativos.

Referencias bibliográficas

Alfonso, M.C.; Camacho, M.; Socas, M.M. (2000). “Dos ejemplos de unidades de aprendizaje desarrollados bajo la perspectiva de los V.H.: medidas de ángulos y giros”. En Alfonso, M.C.; Camacho, M; Socas, M.M. (Ed.), *Formación del profesorado e investigación en educación matemática II*, 11-50. Universidad de La Laguna. Tenerife.

- Biggs, J. B., Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: SOLO Taxonomy*. Academia Press. Nueva York.
- Burger, W.F.; Shaughnessy, J.M. (1986). "Characterizing the VH levels of development in Geometry". *Journal for Research in Mathematics Education* 7(1), 31-48.
- Canals, M.A. (1997). "La Geometría en las primeras edades escolares". *SUMA* 25, Junio 1997, 31-44.
- Clements, D.H.; Swaminathan, S.; Hannibal, M. A. Z.; Sarama, J. (1999). "Young Children's Concepts of Shape". *Journal for Research in Mathematics Education* 30(2), 192-212.
- Corberán, R.; Gutiérrez, A.; Huerta, M. P.; Jaime, A.; Margarit, J. B.; Peñas, A.; Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. C.I.D.E., M.E.C. Madrid.
- Crowley, M.L. (1987). "The van Hiele model of the development of geometric thought". En M.M. Lindquist; A.P. Shulte (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12*. 1-16. N.C.T.M. Reston, VA.
- Davey, G.; Holliday, J. (1992). "Van Hiele: Guidelines for Geometry". *The Australian Mathematics Teacher* 48(2), 26-29.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel. Dordrecht.
- Fuys, D; Geddes, D; Tischler, R. (1988). "The VH model of thinking in Geometry among adolescents". *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph 3. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.
- Guillén, G. (1997). *El modelo de VH aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis doctoral. Universitat de València.
- Gutiérrez, A.; Jaime, A.; Fortuny, J.M. (1991). "An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the VH levels". *Journal for Research in Mathematics Education* 22(3), 237-251.

- Hershkowitz, R. (1990). "Psychological Aspects of Learning Geometry". En Neshet, P.; Kilpatrick, J. (Ed.), *Mathematics and Cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 70-148. Cambridge UP. Cambridge.
- Hoffer, A. (1981). "Geometry is more than Proof". *Mathematics Teacher* 74(1), 11-18.
- Huerta, M. P. (1999). "Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: Un análisis comparado, una integración necesaria". *Enseñanza de las ciencias* 17(2), 291-309.
- Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990). "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el Modelo Van Hiele". En Llinares, S.; Sánchez, M.V. (Ed.), *Teoría y práctica en Educación Primaria*. 295-384. Alfar. Sevilla.
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis). Universitat de València. Valencia.
- Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1996). *El Grupo de las Isometrías del Plano*. Síntesis. Madrid.
- Pegg, J.; Davey, G. (1991). "Levels of geometric understanding". *The Australian Mathematic Teacher* 47(2), 10-13.
- Peeg, J., Gutiérrez, A. Y Huerta, M. P. (1998). "Assessing Reasoning Abilities in Geometry". En Villani, V. y Mammana, C. (Eds.), *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century*. Colección: Publicaciones del ICMI, Kluwer Academic Press. 275-295.
- Piaget, J.; Inhelder, B.; Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. Routledge y Kegan Paul. London.
- Piaget, J.; Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. Norton. New York.
- Puig, L. (1997). "Análisis fenomenológico". En Rico, L. (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. 61-94. Horsori / ICE. Barcelona.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight*. Academic Press. London.
- Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of Secondary School* (Tesis). (Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda). (Traducción al inglés en Fuys; Geddes; Tischler (1984), 1-206).

Vinner, S. (1983). "Concept definition, concept image and the notion of function".

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 14(3), 293-305.

Vinner, S; Hershkowitz, R. (1983). "On concept formation in geometry". *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 83(1), 20-25.