

**Valoración de derivados sobre subyacente  
de renta fija mediante modelos  
estacionales: una aplicación a opciones  
*look-back* y barrera**

**Patricia Auxiliadora Suárez Hernández**

Trabajo de investigación 018/002  
Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

Director: Manuel Moreno Fuentes

Universidad Complutense de Madrid  
Universidad de Castilla-La Mancha  
Universidad del País Vasco  
Universidad de Valencia

[www.finanzascuantitativas.com](http://www.finanzascuantitativas.com)

## Resumen

El objetivo de este trabajo es la valoración analítica de opciones *look-back* y barrera sobre activos de renta fija y el correspondiente análisis de sensibilidades de las primas obtenidas. Suponemos que la estructura temporal de los tipos de interés viene dada por el modelo de Moreno, Novales y Platania (2018). Se obtienen fórmulas analíticas para las primas de ambas opciones y para diferentes sensibilidades con respecto a diversos parámetros. Estas fórmulas cerradas se ilustran de manera numérica y gráfica. Finalmente, se comparan los resultados de este modelo frente a los obtenidos mediante el modelo de Vasicek (1977).

# 1. Introducción

Este trabajo se centra en la valoración de opciones *look-back* y barrera cuyo subyacente es un activo de renta fija y un análisis de las sensibilidades de las primas de dichas opciones. El *payoff* de una opción *look-back* depende de la cotización máxima o mínima alcanzada por el precio del subyacente durante la vida de la opción. Existen dos tipos de modalidades en función de un *strike* variable o fijo. Estas opciones son más caras que las opciones estándar debido a que proporcionan el mejor resultado posible para sus poseedores.

En una opción barrera, su posibilidad de ejercicio dependerá de que el precio del subyacente alcance una cierta barrera durante la vida de la opción. Si esto sucede, se puede convertir en una *call* o *put* estándar o puede que deje de existir desde el momento en que el precio del subyacente alcance la barrera. Estas opciones son siempre más baratas que las opciones estándar porque no se tiene en cuenta algunos escenarios posibles para los precios.

Este estudio utiliza el modelo de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) presentado en Moreno, Novales y Platania (2018) (Moreno *et al.* (2018), a partir de ahora). Este modelo fue utilizado en Landa-Fernández y Moreno (2017) para valorar opciones Asiáticas y generaliza el presentado en Vasicek (1977) suponiendo que los tipos de interés no convergen a largo plazo a un cierto valor constante sino a un valor variable que sigue un comportamiento cíclico. Estos autores proponen que este comportamiento cíclico venga dado por una serie de Fourier introduciendo una gran flexibilidad en los tipos de interés y permitiendo así un mejor comportamiento empírico sin perder tratabilidad analítica. En este modelo, se demuestra que los tipos de interés siguen una distribución Gaussiana y, por tanto, el precio de un bono cupón-cero seguirá una distribución lognormal.

Una herramienta teórica fundamental que se utiliza para la valoración es el principio de reflexión. Este principio establece que, dada una trayectoria de un movimiento browniano con unos ciertos niveles, le corresponde una única trayectoria simétrica. Teniendo en cuenta que el movimiento browniano sigue una distribución Gaussiana, entonces cualquier trayectoria y su simétrica tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Este principio se utiliza para obtener las funciones de distribución necesarias para calcular las primas de opciones *look-back* y barrera.

En virtud de lo anterior, se obtendrán fórmulas analíticas para las primas de opciones *look-back* y barrera que serán cualitativamente similares a las obtenidas en Black y Scholes (1973) para opciones estándar sobre activos de renta variable. Tras esta valoración analítica, se realizará un análisis de sensibilidades para estas primas con respecto a los principales parámetros que influyen sobre la ETTI. Finalmente, se compararán los resultados obtenidos con el modelo de Moreno *et al.* (2018) frente a los que se obtienen para el modelo de Vasicek (1977), caso particular del anterior.

Este trabajo se estructura de la siguiente manera. La Sección 2 realiza un breve repaso de la literatura previa. La Sección 3 introduce el modelo de la ETTI propues-

to en Moreno *et al.* (2018) y en la Sección 4 se describe el principio de reflexión. En la Sección 5 se presentan los derivados objeto de valoración. Así, las Secciones 6 y 7 incluyen la valoración de las opciones *look-back* y el posterior análisis de sensibilidades de las primas obtenidas. En la sección 8 se comparan los resultados obtenidos con los que se obtienen con el modelo de Vasicek (1977). En las Secciones 9 y 10 se valoran las opciones barrera y se realiza el correspondiente análisis de sensibilidades. De manera similar a la Sección 8, la Sección 11 compara los resultados obtenidos con los generados por el modelo de Vasicek (1977). Finalmente, la Sección 12 resume las principales conclusiones obtenidas y sugiere posibles líneas de investigación futuras que se podrían realizar.

## 2. Literatura previa

La modelización de la ETTI es fundamental para entender el funcionamiento de una economía, dado el importante papel que tienen los tipos de interés en la transmisión de los movimientos del sector monetario al sector real. Moreno (2000) presenta y describe diferentes modelos en tiempo continuo para modelizar la ETTI y clasifica dichos modelos en endógenos y exógenos.

Los modelos endógenos suponen que una o varias variables de estado explican la ETTI. Las principales ventajas de estos modelos son su tratabilidad analítica y la simplicidad de su implementación numérica. En general, permiten obtener expresiones cerradas para el precio de bonos y opciones europeas sobre bonos. Sin embargo, sus principales desventajas son que no tienen en cuenta la información contenida en los tipos de interés observados, no consiguen un buen ajuste a toda la estructura temporal observada e incluyen parámetros no observables como el precio de mercado del riesgo.

Por otro lado, los modelos exógenos toman la estructura temporal como dada, intentan conseguir un ajuste perfecto a los tipos de interés observados y no necesitan realizar supuestos sobre el precio de mercado del riesgo. Como principales inconvenientes, podemos señalar que la valoración analítica de los activos derivados suele ser compleja y, en general, esta valoración debe realizarse mediante técnicas numéricas. Dichas técnicas suelen implicar un alto coste computacional pues la mayoría de estos modelos no son markovianos.

A continuación presentamos una serie de trabajos previos de diferentes autores que se han centrado en la valoración de opciones *look-back* y barrera. Goldman *et al.* (1979) es uno de los primeros artículos que introduce las opciones europeas *look-back*. Estos autores presentan las propiedades de cobertura y económicas de dichas opciones y utilizan el modelo de Black y Scholes (1973) para obtener una fórmula cerrada de valoración para estas opciones suponiendo que su *strike* depende de la evolución del precio del activo subyacente durante la vida de la opción. Conze y Viswanathan (1991) también se centra en la valoración de opciones *look-back* aunque, en este caso, supone que el *strike* es fijo.

Wong y Chan (2007) obtiene fórmulas semianalíticas para el precio de opciones *look-back* considerando un modelo bifactorial con volatilidad estocástica, donde ambos factores tienen una cierta velocidad de reversión a la media. Este modelo proporcionará una buena aproximación a los precios de mercado en función de las magnitudes dadas a dicha velocidad en cada factor. Kwai (2013) también considera un modelo de volatilidad estocástica para valorar opciones *look-back* aunque, a diferencia del anterior trabajo, este modelo no realiza supuestos sobre las magnitudes relativas de sus parámetros.

Merton (1973) es el primer artículo que proporciona una fórmula analítica para opciones barreras europeas, en concreto una *call “down and out”* utilizando el modelo de Black y Scholes (1973). Estas opciones también han sido valoradas analíticamente en otros trabajos como, por ejemplo, Benson y Daniel (1991), Hudson (1991) y Rubinstein y Reiner (1991). Kuan y Webber (2003) presentan un método numérico para valorar opciones barrera europeas sobre bonos cupón-cero y suponiendo diferentes procesos estocásticos para los tipos de interés. Estos autores comparan los precios obtenidos con su método frente a los generados por simulaciones de Monte Carlo y concluyen que su técnica numérica es más precisa y rápida. Finalmente, Pelsers (2000) y Chen *et al.* (2010) valoran analíticamente opciones con doble barrera aplicando, respectivamente, transformadas de Laplace y el principio de reflexión.

### 3. Marco teórico

Esta sección presenta el modelo de Moreno *et al.* (2018) para analizar la ETTI que se utilizará para valorar las opciones *look-back* y barrera. Este modelo supone que el valor a largo plazo de los tipos de interés siguen un proceso estocástico cuya deriva incluye una serie de Fourier. Este supuesto permite una gran flexibilidad a la hora de realizar análisis empíricos a la vez que conlleva una gran tratabilidad analítica pues permite obtener fórmulas cerradas para una gran variedad de activos derivados. También se presenta un caso particular de dicho modelo, en concreto, el propuesto en Vasicek (1977).

#### 3.1. Modelo de Moreno *et al.* (2018)

Sea  $r_t$  el tipo de interés instantáneo en el momento  $t$ . Se asume que  $r_t$  evoluciona según la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dr_t = k(f(t) - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

donde  $k, \sigma \in \mathbb{R}^+$  representan, respectivamente, la velocidad de reversión a la media y la volatilidad de los tipos de interés y  $W_t$  es un proceso de Wiener. Se asume que el parámetro de reversión a la media, es decir, el valor a largo plazo no es constante

sino que viene dado por una serie de Fourier, cuya expresión es

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \text{Re}[A_m e^{imwt}]$$

Solo se considera la parte real de la serie de Fourier ya que es la única que tiene sentido económico. Nótese que el parámetro  $w$  representa la frecuencia temporal y  $A_m = A_{m,x} + iA_{m,y}$  con  $A_{m,x}, A_{m,y} \in \mathbb{R}$  denotan, respectivamente, la amplitud y la fase de las fluctuaciones en el tipo de interés. Como caso particular, el modelo de Vasicek (1977) se obtiene tomando  $A_m = 0, \forall m \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

Considerando  $\Lambda(r_t, t)$  el precio de mercado del riesgo constante,  $\Lambda(r_t, t) = \lambda$ . La versión neutral al riesgo del proceso (1) viene dada por

$$dr_t = k(\alpha + g(t) - r_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= A_0 - \frac{\lambda\sigma}{k} \\ g(t) &= f(t) - A_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re}[A_m e^{imwt}] \end{aligned}$$

donde  $A_0 \in \mathbb{R}$  y  $\tilde{W}_t = W_t + \lambda t$  es el proceso de Wiener bajo la medida neutral al riesgo. En la siguiente proposición se proporciona la solución de la ecuación diferencial estocástica (2).

**Proposición 3.1** *La solución al proceso neutral al riesgo que sigue el tipo de interés instantáneo viene dada por*

$$\begin{aligned} r_s &= e^{-k(s-t)}r_t + (1 - e^{-k(s-t)})\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re} \left[ \frac{kA_m}{k + imw} (e^{imws} - e^{-k(s-t)+imwt}) \right] \\ &\quad + \sigma \int_t^s e^{-k(s-u)} d\tilde{W}_u, \quad s > t. \end{aligned}$$

■

Esta proposición indica que el tipo de interés instantáneo sigue una distribución Gaussiana y cuyos dos primeros momentos estadísticos bajo la medida neutral al riesgo vienen dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} E[r_T|r_t] &= e^{-k(T-t)}r_t + (1 - e^{-k(T-t)})\alpha + \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re} \left[ \frac{kA_m}{k + imw} (e^{imwT} - e^{-k(T-t)+imwt}) \right] \\ V[r_T|r_t] &= H(2k, T - t)\sigma^2 \end{aligned}$$

donde

$$H(p, q) = \frac{1 - e^{-pq}}{p} \quad (3)$$

utilizando la propiedad de isometría para integrales estocásticas para el cálculo de la varianza.

Sea  $P(r_t, t, T)$  el precio, en el instante  $t$ , de un bono cupón-cero con vencimiento  $T$ . Utilizando técnicas probabilísticas, este precio puede expresarse como una esperanza condicional bajo la medida neutral al riesgo (medida de martingala):

$$P(r_t, t, T) = E \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} \mid r_t \right]$$

Por la Proposición 3.1 se sabe que  $\int_t^T r_s ds$  sigue una distribución Gaussiana y desarrollando la esperanza anterior se obtiene la siguiente proposición.

**Proposición 3.2** *El precio en el instante  $t$  de un bono cupón-cero que vence en  $T$  viene dado por*

$$P(r_t, t, T) = \exp \left\{ -E \left[ \int_t^T r_s ds \mid r_t \right] + \frac{1}{2} V \left[ \int_t^T r_s ds \mid r_t \right] \right\}$$

donde

$$\begin{aligned} E \left[ \int_t^T r_s ds \mid r_t \right] &= H(k, T-t)r_t - (H(k, T-t) - (T-t))\alpha \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{kA_m}{mw(k+imw)} (e^{imwt}(i - mwH(k, T-t)) - ie^{imwT}) \right] \\ V \left[ \int_t^T r_s ds \mid r_t \right] &= ((T-t) - 2H(k, T-t) + H(2k, T-t)) \frac{\sigma^2}{k^2} \end{aligned}$$

donde  $H(\cdot, \cdot)$  viene dada por (3). ■

Dado que todos los modelos afines proporcionan una forma funcional exponencial-afín para los precios de los bonos, se puede reescribir la proposición anterior de la siguiente manera.

**Proposición 3.3** *El precio en el instante  $t$  de un bono cupón-cero que vence en  $T$  viene dado por*

$$P(r_t, t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r_t}$$

donde

$$\begin{aligned} A(t, T) &= -\frac{\sigma^2}{4k} B^2(t, T) + r^*(B(t, T) - (T-t)) \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{kA_m}{mw(k+imw)} (e^{imwt}(i - mwH(k, T-t)) - ie^{imwT}) \right] \\ B(t, T) &= H(k, T-t). \end{aligned}$$

donde  $H(\cdot, \cdot)$  viene dada por (3) y  $r^* = \alpha - \frac{\sigma^2}{2k^2}$ . ■

Una vez obtenida una expresión matemática para el precio de este bono, podemos obtener la sensibilidad de dicho precio con respecto a cambios en los tipos de interés. Estas sensibilidades son la duración y convexidad. La duración de un bono mide la sensibilidad del precio de dicho bono ante cambios en los tipos de interés mientras que la convexidad mide la sensibilidad de la duración ante cambios en los tipos de interés. Esta última medida ayuda a ajustar la predicción de precios obtenida a través de la duración. Las expresiones matemáticas para ambas medidas vienen dadas por la siguiente proposición.

**Proposición 3.4** *La duración y convexidad de un bono cupón-cero vienen dadas por*

$$\begin{aligned} \text{Duración} &= -\frac{1}{P(r_t, t, T)} \frac{\partial P(r_t, t, T)}{\partial r_t} = B(t, T) \\ \text{Convexidad} &= \frac{1}{P(r_t, t, T)} \frac{\partial^2 P(r_t, t, T)}{\partial r_t^2} = B^2(t, T) \end{aligned}$$

donde  $B(t, T)$  viene dada por la Proposición 3.3. ■

La siguiente proposición proporciona una fórmula de valoración para cualquier derivado sobre un activo subyacente de renta fija en el cual los tipos de interés evolucionan según (2).

**Proposición 3.5** *Si los tipos de interés evolucionan según la ecuación (2), el valor en el instante  $t$ ,  $U(r_t, t, T)$ , de un activo derivado que paga  $g(r_T)$  en el instante  $T$  es*

$$U(r_t, t, T) = P(r_t, t, T)E[g(r')], \quad r' \sim N(m - q, v^2) \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} m &\equiv m(r_t, t, T) = e^{-k(T-t)}r_t + (1 - e^{-k(T-t)})\alpha \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \text{Re} \left[ \frac{kA_m}{k + imw} (e^{imwT} - e^{-k(T-t)+imwt}) \right] \\ v^2 &\equiv v^2(t, T) = H(2k, T - t)\sigma^2 \\ q &\equiv q(t, T) = \frac{1}{2}H^2(k, T - t)\sigma^2 \end{aligned}$$

donde  $H(\cdot, \cdot)$  viene dada por (3). ■

## 3.2. Modelo de Vasicek (1977)

Sea  $r_t$  el tipo de interés instantáneo en el momento  $t$ . Se supone que  $r_t$  evoluciona según la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dr_t = k(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (5)$$



donde  $k, \mu, \sigma \in \mathbb{R}^+$  representan, respectivamente, la velocidad de reversión a la media, el nivel de reversión a la media y la volatilidad de los tipos de interés y  $W_t$  es un proceso de Wiener.

La siguiente proposición proporciona la solución de la ecuación diferencial estocástica (5).

**Proposición 3.6** *La solución al proceso neutral al riesgo que sigue el tipo de interés instantáneo viene dada por*

$$r_s = e^{-k(s-t)}r_t + (1 - e^{-k(s-t)})\mu + \sigma \int_t^s e^{-k(s-u)}dW_u, \quad s > t.$$

■

Esta proposición indica que el tipo de interés instantáneo sigue una distribución Gaussiana y sus dos primeros momentos estadísticos vienen dados por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} E[r_T|r_t] &= e^{-k(T-t)}r_t + (1 - e^{-k(T-t)})\mu \\ V[r_T|r_t] &= H(2k, T - t)\sigma^2 \end{aligned}$$

donde  $H(\cdot, \cdot)$  viene dada por (3).

Tomando  $A_m = 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} - \{0\}$  en la solución del proceso que sigue el tipo de interés en el modelo Moreno *et al.* (2018), definido en la Proposición 3.1, se obtiene la solución para este modelo.

Sea  $P(r_t, t, T)$  el precio, en el instante  $t$ , de un bono cupón-cero que vence en el instante  $T$ . Dado que todos los modelos afines proporcionan una forma funcional exponencial-afín para los precios de los bonos, se puede expresar como se define a continuación.

**Proposición 3.7** *El precio en el instante  $t$  de un bono cupón-cero que vence en  $T$  viene dado por*

$$P(r_t, t, T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r_t}$$

donde

$$\begin{aligned} A(t, T) &= -\frac{\sigma^2}{4k}B^2(t, T) + r^*(B(t, T) - (T - t)) \\ B(t, T) &= H(k, T - t). \end{aligned}$$

donde  $H(\cdot, \cdot)$  viene dada por (3),  $r^* = \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2k^2}$  y  $\hat{\mu} = \frac{k\mu - \lambda\sigma}{k}$ . ■

Tomando  $A_m = 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{N} - \{0\}$  en la solución del precio del bono cupón-cero en el modelo de Moreno *et al.* (2018), definido en la Proposición 3.3, se obtiene la solución para este modelo. De manera análoga para las sensibilidades del precio de dicho bono.

## 4. Principio de reflexión de un movimiento browniano

Esta sección se centra en el principio de reflexión de un movimiento browniano que se utilizará posteriormente para la valoración de opciones *look-back* y barrera.

Para formular y comprender con cierta profundidad el principio de reflexión, es necesario introducir uno de sus principales componentes: el movimiento browniano o proceso de Wiener. Este es un proceso aleatorio  $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$  caracterizado por las siguientes propiedades:

- $Z_0 = 0$ .
- $Z$  tiene incrementos estacionarios:

$$Z_{t+\Delta t} - Z_t \stackrel{d}{=} Z_{s+\Delta s} - Z_s, \quad 0 \leq s \leq t, \quad \forall s, t \in [0, +\infty)$$

donde el símbolo  $\stackrel{d}{=}$  indica que la igualdad anterior es en distribución.

- Los incrementos del proceso,  $Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde  $0 \leq t_i \leq t_j$  si  $i < j$ , son independientes.
- $\forall s, t : 0 \leq s \leq t$ , los incrementos  $Z_t - Z_s$  siguen una distribución Gaussiana con media cero y varianza  $t - s$ .
- Sus trayectorias son continuas pero no son diferenciables en ningún punto.

Como cualquier proceso de incrementos independientes, el movimiento browniano es un proceso de Markov, lo que significa que la distribución de probabilidad de todos los valores futuros del proceso depende únicamente de su valor actual, no siendo afectada por sus valores pasados.

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, el principio de reflexión es la herramienta adecuada para estudiar la distribución de probabilidad de diversas cantidades relacionadas con la evolución de un movimiento browniano en cualquier intervalo fijo de tiempo.

Fijado cualquier nivel  $m > 0$ , la trayectoria del movimiento browniano alcanzará dicho nivel en un determinado instante aleatorio  $\tau_m$ . La propiedad de Markov implica que el proceso renace a partir del punto  $(\tau_m, m)$  con las mismas propiedades con las que arrancó del origen. En particular, sus incrementos siguen una distribución Gaussiana con media nula y, por tanto, cualquier serie de desplazamientos y sus simétricos tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Así pues, la probabilidad de que el proceso siga un determinado conjunto de trayectorias coincide con la probabilidad de que siga el conjunto de trayectorias simétricas, respecto a la recta horizontal de nivel  $m$ , a partir del punto  $\tau_m$ .

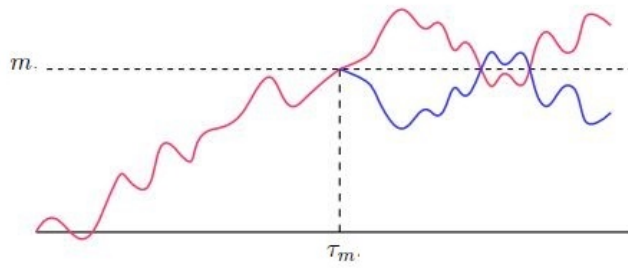


Figura 1: Principio de reflexión

La siguiente proposición expresa el principio de reflexión de un movimiento browniano.

**Proposición 4.1** *El proceso*

$$Z'_t = \begin{cases} Z_t & \text{si } t < \tau_m \\ m & \text{si } t = \tau_m \\ 2m - Z_t & \text{si } t > \tau_m \end{cases}$$

es un movimiento browniano con la misma distribución que el proceso  $Z_t$ . ■

Ahora, nos centraremos en la distribución conjunta de un movimiento browniano y su máximo. Consideramos la variable aleatoria

$$M_T = \max_{0 \leq t \leq T} Z_t$$

y la función de distribución  $F(M_T \geq m, Z_T \leq x)$  que cumple las restricciones  $M_T \geq 0$  y  $M_T \geq Z_T$ . Por el principio de reflexión, si existe  $\tau_m$ , se establece que a cada trayectoria que satisfaga  $(M_T \geq m, Z_T \leq x)$  le corresponde una única trayectoria simétrica que satisface  $(Z_T \geq 2m - x)$  y ambas trayectorias tienen la misma probabilidad.

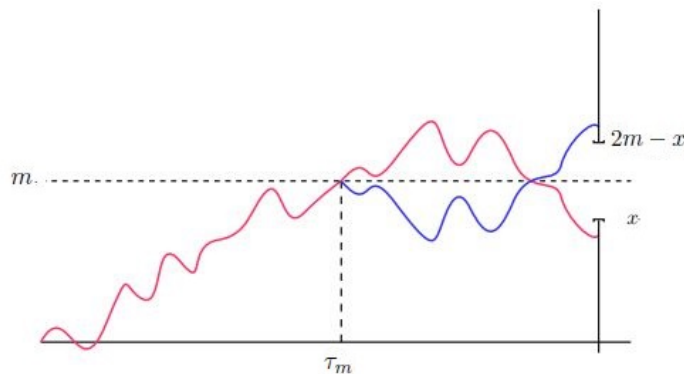


Figura 2: Distribución del máximo

Por tanto, la función de distribución viene dada como

$$F(M_T \geq m, Z_T \leq x) = F(Z_T \geq 2m - x) = \int_{2m-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{u^2}{2T}} du$$

En virtud de lo anterior, la función de densidad conjunta viene dada por

$$\begin{aligned} f(M_T = m, Z_T = x) &= -\frac{d}{dm} \frac{d}{dx} F(M_T \geq m, Z_T \leq x) = -\frac{d}{dm} \frac{d}{dx} F(Z_T \leq 2m - x) \\ &= -\frac{d}{dm} \frac{d}{dx} \int_{2m-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{u^2}{2T}} du \end{aligned}$$

Utilizando la regla de Leibnitz se obtiene

$$f(M_T = m, Z_T = x) = \frac{2}{T}(2m - x) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(2m-x)^2}{2T}}$$

Por simetría, la distribución del mínimo  $J_T = \min_{u \leq t} Z_u$  y  $Z_t$  es igual a la distribución  $F(-M_T, Z_T)$ . Por tanto, su función de densidad conjunta es

$$f(J_T = m, Z_t = x) = \frac{2}{T}(x - 2m) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{(x-2m)^2}{2T}}$$

## 5. Derivados

Esta sección presenta los derivados que valoraremos posteriormente. Dichos derivados son *path-dependent* pues dependen no sólo del valor que alcance el subyacente al vencimiento, sino también de la evolución histórica de dichos valores. En concreto, nos centraremos en opciones *look-back* y barrera.

### 5.1. Opciones *look-back*

Una opción *look-back* es una opción cuyo *payoff* depende de la cotización máxima o mínima alcanzada por el subyacente durante la vida de la opción. Sea  $T$  el vencimiento de esta opción. Consideramos la partición  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ . Sea  $P_i = P(t_i)$  el precio en el instante  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  del subyacente. Denotamos el valor mínimo y máximo del precio del activo por

$$\begin{aligned} D_T &= \min \{P_i\}_{i=0}^n \\ H_T &= \max \{P_i\}_{i=0}^n \end{aligned}$$

Existen dos tipos de modalidades de *look-back* considerando *strike* fijo o variable.

## 1. Opciones *look-back* con *strike* fijo

En el caso de una *call look-back*, el *payoff* viene dado por la diferencia entre el valor máximo alcanzado por el precio del activo subyacente durante la vida de la opción y el *strike*  $K$  fijado al inicio:

$$c_{fija,T} = \text{máx} \{H_T - K, 0\}$$

Para el caso de una *put look-back*, el *payoff* viene dado por la diferencia entre el *strike*  $K$  fijado inicialmente y el valor mínimo alcanzado por el precio del activo subyacente:

$$p_{fija,T} = \text{máx} \{K - D_T, 0\}$$

## 2. Opciones *look-back* con *strike* variable

Estas opciones fijan el *strike* como el máximo o mínimo alcanzado por el precio del activo subyacente durante la vida de la opción. En el caso de una *call look-back*, el *payoff* es la diferencia entre el precio final del activo subyacente y el mínimo alcanzado por el precio del activo subyacente durante la vida de la opción. En otras palabras, el comprador de una *call look-back* tiene el derecho a comprar el subyacente al precio más bajo registrado durante la vida de la opción:

$$c_{variable,T} = \text{máx} \{P_T - D_T, 0\} = P_T - D_T$$

En el caso de una *put look-back*, se calcula como el caso anterior utilizando el máximo alcanzado por el precio del activo subyacente durante la vida de la opción. Es decir, el comprador de una *put look-back* tiene el derecho a vender el activo subyacente al precio más alto registrado durante la vida de la opción.

$$p_{variable,T} = \text{máx} \{H_T - P_T, 0\} = H_T - P_T$$

Por definición,  $D_T \leq P_T \leq H_T$ . Por tanto, las opciones *look-back* con *strike* variable siempre se ejercen.

La siguiente proposición indica diversas relaciones existentes entre opciones *look-back* con *strike* fijo y variable.

**Proposición 5.1** *Considere cuatro opciones: una put look-back con strike variable  $H_T$ , una call look-back con strike variable  $D_T$ , y una call look-back y una put look-back, ambas con strike fijo  $K$ . Todas estas opciones vencen en  $T$  y su activo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . En ausencia de oportunidades de arbitraje, las primas de estas opciones cumplen las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned} c_{fija}(r_t, t, T; T_b) &= P(r_t, t, T)P(r_t, t, T_b)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} - P(r_t, t, T)K + p_{variable}(r_t, t, T; T_s) \\ p_{fija}(r_t, t, T; T_b) &= P(r_t, t, T)K - P(r_t, t, T)P(r_t, t, T_b)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} + c_{variable}(r_t, t, T; T_s) \end{aligned}$$

■

## 5.2. Opciones barrera

Una opción barrera es una opción cuya posibilidad de ejercicio depende de que el subyacente alcance un determinado nivel (barrera) durante un cierto periodo de tiempo. Si esto sucede, se puede convertir en una *call* o *put* estándar o puede que deje de existir desde el momento en que el precio del subyacente alcance la barrera. Por tanto, se pueden identificar dos tipos de opciones barrera: *knock-in* y *knock-out*.

### 1. Opción *knock-in*

Esta opción tiene derecho a ejercerse si el valor del subyacente alcanza un determinado nivel durante la vida de la opción. Podemos distinguir entre “*up and in*”, la cual se activa cuando el valor del subyacente se sitúa por encima de la barrera y “*down and in*” que se activa cuando el valor del subyacente se sitúa por debajo de la barrera durante la vida de la opción.

### 2. Opción *knock-out*

Esta opción puede ejercerse si el valor del subyacente no alcanza un determinado nivel durante la vida de la opción, es decir, si toca la barrera, esta opción desaparece. Podemos distinguir entre “*up and out*”, la cual deja de existir si el valor del subyacente se sitúa por encima de la barrera y “*down and out*” que deja de existir cuando el valor del subyacente se sitúa por debajo de la barrera.

La siguiente tabla incluye los *payoffs* de estas opciones y la restricción correspondiente en relación al nivel de la barrera  $L$ .

Opciones	<i>CALL</i>	<i>PUT</i>	Restricción
“ <i>Up and in</i> ”	$\max(P_T - K, 0)$	$\max(K - P_T, 0)$	$\max\{P_i\}_{i=0}^n \geq L$
	0	0	$\max\{P_i\}_{i=0}^n < L$
“ <i>Down and in</i> ”	$\max(P_T - K, 0)$	$\max(K - P_T, 0)$	$\min\{P_i\}_{i=0}^n \leq L$
	0	0	$\min\{P_i\}_{i=0}^n > L$
“ <i>Up and out</i> ”	0	0	$\max\{P_i\}_{i=0}^n \geq L$
	$\max(P_T - K, 0)$	$\max(K - P_T, 0)$	$\max\{P_i\}_{i=0}^n < L$
“ <i>Down and out</i> ”	0	0	$\min\{P_i\}_{i=0}^n \leq L$
	$\max(P_T - K, 0)$	$\max(K - P_T, 0)$	$\min\{P_i\}_{i=0}^n > L$

Tabla 1: *Payoff* de opciones barrera.

La siguiente proposición indica diversas relaciones entre las primas de opciones barrera y opciones estándar.

**Proposición 5.2** *Considere los ocho tipos de opciones barrera comentados anteriormente y una call y una put estándar, ambas con strike fijo  $K$ . Todas estas opciones vencen en  $T$  y su activo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento*

$T_b > T$ . En ausencia de oportunidades de arbitraje, las primas de estas opciones cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
c_{up-out}(r_t, t, T; T_b) + c_{up-in}(r_t, t, T; T_b) &= c(r_t, t, T; T_b) \\
p_{up-out}(r_t, t, T; T_b) + p_{up-in}(r_t, t, T; T_b) &= p(r_t, t, T; T_b) \\
c_{down-out}(r_t, t, T; T_b) + c_{down-in}(r_t, t, T; T_b) &= c(r_t, t, T; T_b) \\
p_{down-out}(r_t, t, T; T_b) + p_{down-in}(r_t, t, T; T_b) &= p(r_t, t, T; T_b)
\end{aligned}$$

■

## 6. Valoración de opciones *look-back*

A continuación, se dará paso a la valoración de opciones *look-back* cuyo subyacente es un bono cupón-cero a partir del modelo propuesto en Moreno *et al.* (2018). Primero se valoran opciones *look-back* con *strike* variable y, a partir de éstas, se valorarán las opciones *look-back* con *strike* fijo utilizando la Proposición 5.1.

Como se ha comentado anteriormente, en el modelo de Moreno *et al.* (2018), los tipos de interés siguen una distribución Gaussiana. Por tanto, los precios de bonos cupón-cero siguen una distribución lognormal, tal como se muestra a continuación.

Considerando que el vencimiento del bono es  $T_b$ , aplicamos el lema de Itô para calcular la ecuación diferencial estocástica de los precios de bonos cupón-cero:

$$\begin{aligned}
dP(r_t, t, T_b) &= -P(r_t, t, T_b)B(t, T_b)dr + P(r_t, t, T_b)[A'_t(t, T_b) - B'_t(t, T_b)r_t]dt \\
&\quad + \frac{1}{2}P(r_t, t, T_b)B^2(t, T_b)(dr)^2
\end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$\begin{aligned}
A'_t(t, T_b) &= -\frac{\sigma^2}{2k}B(t, T_b)B'(t, T_b) + r^*(B'(t, T_b) + 1) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} Re \left[ \frac{kA_m}{(k + imw)} \left( e^{imwt} \left( 1 + \frac{imw}{k} \right) (1 + B'(t, T_b)) \right) \right] \\
B'_t(t, T_b) &= -e^{-k(T_b-t)}
\end{aligned}$$

La evolución temporal de los precios de bonos cupón-cero se puede expresar de un modo similar al modelo de Black y Scholes (1973). Por tanto, obtendremos expresiones analíticas para la prima de esta *call* similares a las obtenidas en Black y Scholes (1973). Sustituyendo el proceso (2) en la ecuación diferencial (6) se obtiene

$$\frac{dP(r_t, t, T_b)}{P(r_t, t, T_b)} = \tilde{r}dt + \tilde{\sigma}dZ_t \tag{7}$$

donde  $Z_t = -\tilde{W}_t = -(W_t + \lambda t)$  y

$$\begin{aligned}
\tilde{r} &= -B(t, T_b)k(\alpha + g(t) - r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2B^2(t, T_b) + A'_t(t, T_b) - B'_t(t, T_b)r_t \\
\tilde{\sigma} &= B(t, T_b)\sigma
\end{aligned}$$

Considerando  $0 \leq t \leq u$ , la solución de la ecuación estocástica (7) viene dada por

$$P(r_u, u, T_b) = P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)(u-t) + \tilde{\sigma}Z_u}$$

donde  $P(r_t, t, T_b)$  viene dado por la Proposición 3.3 y  $Z_u \sim N(-\lambda(u-t), u-t)$ . Definimos  $\bar{Z}_u = \theta(u-t) + Z_u$ , con  $\theta = \frac{1}{\tilde{\sigma}}(\tilde{r} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2})$ . Por tanto, la evolución en el tiempo del precio de un bono cupón-cero viene dada por

$$P(r_u, u, T_b) = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}\bar{Z}_u} \quad (8)$$

donde  $\bar{Z}_u \sim N(\gamma(u-t), u-t)$ , con  $\gamma = \theta - \lambda$ .

## 6.1. Valoración de *call look-back* con *strike* variable

Considere una *call look-back* con *strike* variable que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Considere la partición  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ . Sea  $P_i = P(t_i)$  el precio en el instante  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  de este bono. El *strike* de esta *call* es  $D_T = \min\{P_i\}_{i=0}^n$ . Sea  $c_{variable}(r_t, t, T, T_b)$  el valor en el instante  $t$  de esta *call*. Su *payoff* viene dado por

$$c_{variable}(r_T, T, T, T_b) = \max\{P_T - D_T, 0\} = P_T - D_T$$

Por definición, la condición máxima desaparece pues  $D_T \leq P_T$ .

Ahora suponemos que la opción es emitida antes de  $t_0$ . Entonces

$$c_{variable}(r_T, T, T, T_b) = P_T - \min(D_T, P_{min})$$

donde  $P_{min}$  es el precio mínimo alcanzado desde el momento de emisión de la opción hasta  $t_0$  ( $P_{min} \leq P_0$ ).

Definiendo  $\bar{J}_T = \inf\{\bar{Z}_u, t \leq u \leq T\}$ , el precio más bajo alcanzado por el bono durante el periodo de la vida de la opción se representa como

$$D_T = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}\bar{J}_T}$$

La siguiente proposición proporciona una fórmula analítica para el valor de una *call look-back* europea con *strike* variable.

**Proposición 6.1** *Considere una call look-back que vence en  $T$ , con strike variable  $D_T$  y cuyo activo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Si los tipos de interés evolucionan según la ecuación (2), el valor en el instante  $t$  de esta call viene dado por*

$$c_{variable}(r_t, t, T, T_b) = P(r_t, t, T) \times [P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t)} (N(-b_3^{min}) - sN(b_3^{min})) - P_{min} (N(-b_2^{min}) - se^{2\gamma h_{min}} N(b_1^{min}))]$$



donde  $P(r_t, t, T)$  y  $P(r_t, t, T_b)$  vienen dados por la Proposición 3.3 y

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= -B(t, T_b)k(\alpha + g(t) - r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t, T_b) + A'_t(t, T_b) - B'_t(t, T_b)r_t \\ \tilde{\sigma} &= B(t, T_b)\sigma \\ s &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{r} - \tilde{\sigma}\lambda} \\ h_{min} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln \left( \frac{P_{min}}{P(r_t, t, T_b)} \right) \\ b_1^{min} &= \frac{h_{min}}{\sqrt{T-t}} + \gamma\sqrt{T-t} \\ b_2^{min} &= \frac{h_{min}}{\sqrt{T-t}} - \gamma\sqrt{T-t} \\ b_3^{min} &= b_2^{min} - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t}\end{aligned}$$

■

### Demostración:

Véase Apéndice Técnico.

■

## 6.2. Valoración de *put look-back* con *strike* variable

Considere una *put look-back* con *strike* variable que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Considere la partición  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ . Sea  $P_i = P(t_i)$  el precio en el instante  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  de este bono. El *strike* de esta *put* es  $H_T = \max\{P_i\}_{i=0}^n$ . Sea  $p_{variable}(r_t, t, T, T_b)$  el valor en el instante  $t$  de esta *put*. Su *payoff* viene dado por

$$p_{variable}(r_T, T, T, T_b) = \max\{H_T - S_T, 0\} = H_T - P_T$$

Por definición, la condición máxima desaparece pues  $H_T \geq P_T$ .

Suponemos que la opción es emitida antes de  $t_0$ . Entonces

$$p_{variable}(r_T, T, T, T_b) = \max(H_T, P_{max}) - P_T$$

donde  $P_{max}$  es el precio máximo alcanzado desde el momento de emisión de la opción hasta  $t_0$ , ( $P_{max} \geq P_0$ ).

Definiendo  $\bar{M}_T = \sup\{\bar{Z}_u, t \leq u \leq T\}$ , el precio más alto alcanzado por el bono durante el periodo de la vida de la opción se representa como

$$H_T = P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}\bar{M}_T}$$

La siguiente proposición proporciona una fórmula analítica para el valor de una *put look-back* europea con *strike* variable.

**Proposición 6.2** *Considere una put look-back que vence en  $T$ , con strike variable  $H_T$  y su activo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Si los tipos de interés evolucionan según la ecuación (2), el valor en el instante  $t$  de esta put viene dado por*

$$p_{variable}(r_t, t, T, T_b) = P(r_t, t, T) [P_{max}(N(b_2^{max}) - se^{2\gamma h_{max}} N(-b_1^{max})) - P(r_t, t, T_b)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)}(N(b_3^{max}) - sN(-b_3^{max}))]$$

donde  $P(r_t, t, T)$  y  $P(r_t, t, T_b)$  vienen dados por la Proposición 3.3,  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{\sigma}$  y  $s$  vienen dados por la Proposición 6.1 y

$$\begin{aligned} h_{max} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln \left( \frac{P_{max}}{P(r_t, t, T_b)} \right) \\ b_1^{max} &= \frac{h_{max}}{\sqrt{T-t}} + \gamma\sqrt{T-t} \\ b_2^{max} &= \frac{h_{max}}{\sqrt{T-t}} - \gamma\sqrt{T-t} \\ b_3^{max} &= b_2^{max} - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

■

**Demostración:**

Véase Apéndice Técnico.

■

### 6.3. Valoración de opciones *look-back* con *strike* fijo

Utilizando las Proposiciones 5.1, 6.1 y 6.2, obtenemos la siguiente Proposición que muestra las primas de opciones *look-back* con *strike* fijo.

**Proposición 6.3** *Considere una call look-back y una put look-back. Ambas opciones vencen en  $T$ , su strike fijo es  $K$  y su activo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Si los tipos de interés evolucionan según la ecuación (2), el valor en el instante  $t$  de ambas opciones viene dado por*

$$\begin{aligned} c_{fija}(r_t, t, T; T_b) &= P(r_t, t, T) [P_{max}(N(b_2^{max}) - se^{2\gamma h_{max}} N(-b_1^{max})) \\ &\quad + P(r_t, t, T_b)(1+s)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)}N(-b_3^{max}) - K] \\ p_{fija}(r_t, t, T; T_b) &= P(r_t, t, T) \left[ K - P_{min} \left( N(-b_2^{min}) - sN(b_1^{min})e^{2\gamma h^{min}} \right) \right. \\ &\quad \left. - P(r_t, t, T_b)(1+s)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)}N(b_3^{min}) \right] \end{aligned}$$

donde  $P(r_t, t, T)$  y  $P(r_t, t, T_b)$  vienen dados por la Proposición 3.3,  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{\sigma}$ ,  $s$ ,  $b_i^{min}$ ,  $i = 1, 2, 3$  y  $h_{min}$  vienen dados por la Proposición 6.1 y  $b_i^{max}$ ,  $i = 1, 2, 3$  y  $h_{max}$  vienen dados por la Proposición 6.2.

■

## 7. Sensibilidades de opciones *look-back* en el modelo de Moreno *et al.* (2018)

Esta sección presenta las sensibilidades de la *call look-back* con *strike* variable.<sup>1</sup> La siguiente proposición muestra dichas sensibilidades, obtenidas calculando las correspondientes derivadas parciales en las primas obtenidas en la Proposición 6.1.

**Proposición 7.1** *Las sensibilidades de la call look-back con strike variable vienen dadas por las siguientes expresiones:*

- *Sensibilidad respecto a la volatilidad de los tipos de interés  $\sigma$ :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_{variable}(r_t, t, T, T_b)}{\partial \sigma} &= -\frac{\sigma^2}{2k^2} c_{variable}(r_t, t, T, T_b) (kB^2(t, T) + 2(B(t, T) - (T - t))) \\ &+ P(r_t, t, T) \left[ P(r_t, t, T_b)(T - t) \left( \sigma B^2(t, T) + \frac{\partial A'_t}{\partial \sigma} \right) \right. \\ &\quad e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} (1 - N(b_3^{min})(1 + s)) \\ &\quad - \frac{\partial b_3^{min}}{\partial \sigma} P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N'(b_3^{min})(1 + s) \\ &\quad + \frac{\partial s}{\partial \sigma} (P_{min} N(b_1^{min}) e^{2\gamma h_{min}} - P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N(b_3^{min})) \\ &\quad \left. + P_{min} \left( \frac{\partial b_2^{min}}{\partial \sigma} N'(b_2^{min}) + \frac{\partial b_1^{min}}{\partial \sigma} N'(b_1^{min}) s e^{2\gamma h_{min}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial e^{2\gamma h_{min}}}{\partial \sigma} s N(b_1^{min}) \right) \right] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'_t}{\partial \sigma} &= -\frac{\sigma}{k} B(t, T) B'(t, T) - \frac{\sigma}{k^2} (B'(t, T) + 1) \\ \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \sigma} &= \sigma B^2(t, T) + \frac{\partial A'_t}{\partial \sigma} + B(t, T) \lambda \\ \frac{\partial b_1^{min}}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \sigma} \frac{\sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} - B(t, T) \sqrt{T-t} - \frac{1}{\sigma} (b_1^{min} - \lambda \sqrt{T-t}) \\ \frac{\partial b_2^{min}}{\partial \sigma} &= -\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \sigma} \frac{\sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} + B(t, T) \sqrt{T-t} - \frac{1}{\sigma} (b_2^{min} - \lambda \sqrt{T-t}) \\ \frac{\partial b_3^{min}}{\partial \sigma} &= -\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \sigma} \frac{\sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} - B(t, T) \sqrt{T-t} - \frac{1}{\sigma} (b_3^{min} - \lambda \sqrt{T-t}) \\ \frac{\partial s}{\partial \sigma} &= \frac{\tilde{\sigma} B(t, T) (\tilde{r} - \tilde{\sigma} \lambda) - \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} (2\sigma B^2(t, T) + \frac{\partial A'_t}{\partial \sigma})}{(\tilde{r} - \tilde{\sigma} \lambda)^2} \\ \frac{\partial e^{2\gamma h_{min}}}{\partial \sigma} &= 2h_{min} e^{2\gamma h_{min}} \left( \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \sigma} \frac{1}{\tilde{\sigma}} - \frac{B(t, T)}{\tilde{\sigma}} (\theta + \gamma) - B(t, T) \right) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>De manera similar, se obtendrían las sensibilidades para el resto de opciones *look-back*.

- *Sensibilidad respecto al nivel de reversión a largo plazo  $\alpha$ :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_{variable}(r_t, t, T, T_b)}{\partial \alpha} &= c_{variable}(r_t, t, T, T_b) (B(t, T) - (T - t)) \\
&+ P(r_t, t, T) \left[ P(r_t, t, T_b) (T - t) \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha} e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} (1 - N(b_3^{min})(1 + s)) \right. \\
&+ \frac{\partial b_2^{min}}{\partial \alpha} \left( P_{min} N'(b_2^{min}) - P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N'(b_3^{min})(1 + s) \right) \\
&+ \frac{\partial s}{\partial \alpha} \left( P_{min} N(b_1^{min}) e^{2\gamma h_{min}} - P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N(b_3^{min}) \right) \\
&\left. + P_{min} \left( \frac{\partial b_1^{min}}{\partial \alpha} N'(b_1^{min}) s e^{2\gamma h_{min}} + \frac{\partial e^{2\gamma h_{min}}}{\partial \alpha} s N(b_1^{min}) \right) \right]
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha} &= -kB(t, T) + B'(t, T) + 1 \\
\frac{\partial b_1^{min}}{\partial \alpha} &= \frac{\sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial b_2^{min}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial b_3^{min}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial b_1^{min}}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial s}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2}{(\tilde{r} - \tilde{\sigma}\lambda)^2} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial e^{2\gamma h_{min}}}{\partial \alpha} &= 2 \frac{h_{min}}{\tilde{\sigma}} e^{2\gamma h_{min}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha}
\end{aligned}$$

- *Sensibilidad respecto a la velocidad de reversión a la media  $k$ :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_{variable}(r_t, t, T, T_b)}{\partial k} &= c_{variable}(r_t, t, T, T_b) \left( \frac{\partial A(t, T)}{\partial k} - \frac{\partial B(t, T)}{\partial k} r_t \right) \\
&+ P(r_t, t, T) \left[ P(r_t, t, T_b) (T - t) \left( \frac{\partial \tilde{r}}{\partial k} - \lambda \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \right) \right. \\
&e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} (1 - N(b_3^{min})(1 + s)) \\
&- \frac{\partial b_3^{min}}{\partial k} P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N'(b_3^{min})(1 + s) \\
&+ \frac{\partial s}{\partial k} \left( P_{min} N(b_1^{min}) e^{2\gamma h_{min}} - P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N(b_3^{min}) \right) \\
&+ P_{min} \left( \frac{\partial b_2^{min}}{\partial k} N'(b_2^{min}) + \frac{\partial b_1^{min}}{\partial k} N'(b_1^{min}) s e^{2\gamma h_{min}} \right. \\
&\left. \left. + \frac{\partial e^{2\gamma h_{min}}}{\partial k} s N(b_1^{min}) \right) \right]
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B(t, T)}{\partial k} &= \frac{1}{k} (e^{-k(T-t)}(T-t) - H(k, T-t)) \\
\frac{\partial A(t, T)}{\partial k} &= \frac{\sigma^2}{4k^2} B^2(t, T) - \frac{1}{k} \left( r^* - \frac{\sigma^2}{2k} B(t, T) \right) (e^{-k(T-t)}(T-t) - H(k, T-t)) \\
&+ \frac{\sigma^2}{k^3} (B(t, T) - (T-t)) - \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{A_m}{mw(k+imw)} (e^{imwt}(i-mw(T-t))e^{-k(T-t)}) \right. \\
&\left. - ie^{imwT} - \frac{k}{k+imw} (e^{imwt}(i-mwH(k, T-t)) - ie^{imwT}) \right) \\
\frac{\partial \tilde{r}}{\partial k} &= -(\alpha + g(t) - r_t) e^{-k(T-t)}(T-t) - B(t, T) \frac{\lambda \sigma}{k} \\
&+ \frac{\sigma^2}{k} B(t, T) (e^{-k(T-t)}(T-t) - H(k, T-t)) + \frac{\partial A'_t}{\partial k} - \frac{\partial B'_t}{\partial k} r_t \\
\frac{\partial B'_t(t, T)}{\partial k} &= e^{-k(T-t)} \\
\frac{\partial A'_t(t, T)}{\partial k} &= e^{-k(T-t)}(T-t) \left( r^* - \frac{\sigma^2}{2k^2} B'_t - \frac{\sigma^2}{2k} B(t, T) \right) - \frac{\sigma^2}{k^3} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{A_m}{mw(k+imw)} e^{imwt} (1 - B'_t) \right. \\
&\left. - \frac{kA_m}{mw(k+imw)} e^{imwt} \left( 1 + \frac{imw}{k} \right) \left( \frac{1 - B'_t}{k+imw} + (T-t)B'_t \right) \right] \\
\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} &= \frac{\sigma}{k} (e^{-k(T-t)}(T-t) - H(k, T-t)) \\
\frac{\partial b_1^{min}}{\partial k} &= \frac{\sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial k} - \left( \sqrt{T-t} + \frac{b_1^{min} - \lambda \sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} \right) \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \\
\frac{\partial b_2^{min}}{\partial k} &= -\frac{\sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial k} - \left( \sqrt{T-t} - \frac{b_2^{min} - \lambda \sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} \right) \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \\
\frac{\partial b_3^{min}}{\partial k} &= -\frac{\sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial k} - \left( \sqrt{T-t} + \frac{b_3^{min} - \lambda \sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} \right) \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \\
\frac{\partial s}{\partial k} &= \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{r} - \tilde{\sigma} \lambda} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2}{(\tilde{r} - \tilde{\sigma} \lambda)^2} \left( \frac{\partial \tilde{r}}{\partial k} - \lambda \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \right) \\
\frac{\partial e^{2\gamma h_{min}}}{\partial k} &= 2 \frac{h_{min}}{\tilde{\sigma}} e^{2\gamma h_{min}} \left[ \frac{\partial \tilde{r}}{\partial k} - \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} (\tilde{\sigma} + \theta - \gamma) \right]
\end{aligned}$$

■

## 8. Comparación con Vasicek (1977) en opciones *look-back*

Esta sección compara las primas de la *call look-back* con *strike* variable obtenidas con los modelos presentados en Vasicek (1977) y Moreno *et al.* (2018), respectivamente. La Tabla 2 muestra estas primas. En ambos modelos, se consideran posibles valores para los tres parámetros que influyen en la evolución de los tipos de interés: la velocidad de reversión a la media ( $k$ ), el nivel de reversión a la media en cada uno de los modelos ( $\mu / \alpha$ ) y la volatilidad ( $\sigma$ ). El resto de parámetros del modelo de Moreno *et al.* (2018) se ha obtenido de la sección empírica de dicho trabajo donde estos autores comprueban que un número reducido de términos de Fourier puede ser suficiente para proporcionar un ajuste empírico razonable a los datos.

Parámetros			Prima de la <i>call</i>	
k	$\mu / \alpha$	$\sigma$	Vasicek (1977)	Moreno <i>et al.</i> (2018)
0.2	0.05	0.02	0.1610	0.1587
0.3	0.05	0.02	0.1360	0.1396
0.4	0.05	0.02	0.1281	0.1298
0.2	0.01	0.02	0.6984	0.7003
0.2	0.03	0.02	0.3476	0.3485
0.2	0.05	0.01	0.1524	0.1525
0.2	0.05	0.03	0.1759	0.1696

Tabla 2: Prima de la *call look-back* con *strike* variable utilizando los modelos de Vasicek (1977) y Moreno *et al.* (2018). En ambos modelos, tenemos  $r_0 = 0,02$ ,  $P_{min} = 0,1$ ,  $\lambda = 0,001$ ,  $T = 10$  y  $T_b = 30$ . El resto de parámetros en el modelo de Moreno *et al.* (2018) es:  $\omega = 20$ ,  $A_{1,x} = 0,1758$ ,  $A_{1,y} = 0,0402$ ,  $A_{2,x} = -0,3011$ ,  $A_{2,y} = 0,0172$ ,  $A_{3,x} = 0,0498$ ,  $A_{3,y} = -0,1215$ ,  $A_{4,x} = 0,0798$ ,  $A_{4,y} = 0,1618$ ,  $A_{5,x} = 0,0894$  y  $A_{5,y} = 0,0655$ .

Más detalladamente, las Figuras 3 a 5 muestran cómo varía la prima de la *call look-back* con *strike* variable en función de los parámetros anteriores cuando el resto de parámetros permanece constante.

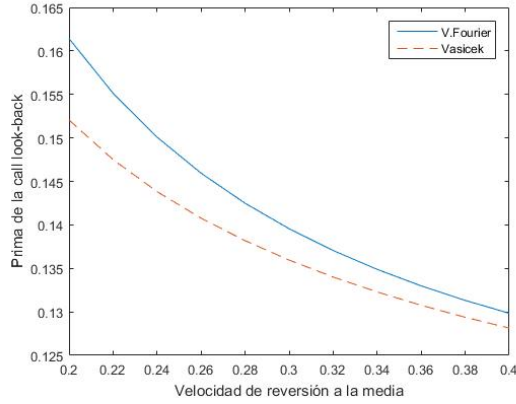


Figura 3: **Prima de la *call look-back* con *strike* variable en función de la velocidad de reversión a la media de los tipos de interés.** Las línea azul y naranja representan los resultados obtenidos según los modelos de Moreno *et al.* (2018) y Vasicek (1977), respectivamente. En ambos modelos,  $r_0 = 0,02$ ,  $\sigma = 0,02$ ,  $P_{min} = 0,1$ ,  $\lambda = 0,001$ ,  $T = 10$  y  $T_b = 30$ . En el caso de Vasicek (1977),  $\mu = 0,05$ . En el modelo de Moreno *et al.* (2018), el resto de parámetros es:  $\alpha = 0,05$ ,  $\omega = 20$ ,  $A_{1,x} = 0,1758$ ,  $A_{1,y} = 0,0402$ ,  $A_{2,x} = -0,3011$ ,  $A_{2,y} = 0,0172$ ,  $A_{3,x} = 0,0498$ ,  $A_{3,y} = -0,1215$ ,  $A_{4,x} = 0,0798$ ,  $A_{4,y} = 0,1618$ ,  $A_{5,x} = 0,0894$  y  $A_{5,y} = 0,0655$ .

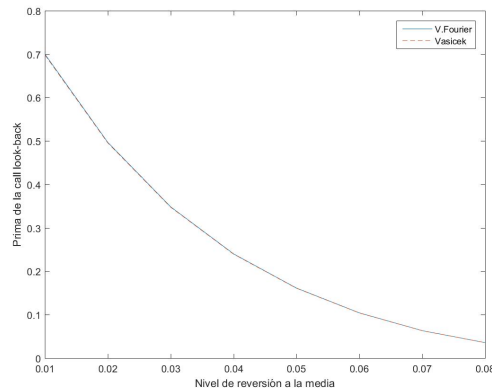


Figura 4: **Prima de la *call look-back* con *strike* variable en función del nivel de reversión a la media de los tipos de interés.** Las línea azul y naranja representan los resultados obtenidos según los modelos de Moreno *et al.* (2018) y Vasicek (1977), respectivamente. En ambos modelos,  $r_0 = 0,02$ ,  $k = 0,2$ ,  $P_{min} = 0,1$ ,  $\lambda = 0,001$ ,  $T = 10$  y  $T_b = 30$ . En el modelo de Moreno *et al.* (2018), el resto de parámetros es:  $\omega = 20$ ,  $A_{1,x} = 0,1758$ ,  $A_{1,y} = 0,0402$ ,  $A_{2,x} = -0,3011$ ,  $A_{2,y} = 0,0172$ ,  $A_{3,x} = 0,0498$ ,  $A_{3,y} = -0,1215$ ,  $A_{4,x} = 0,0798$ ,  $A_{4,y} = 0,1618$ ,  $A_{5,x} = 0,0894$  y  $A_{5,y} = 0,0655$ .

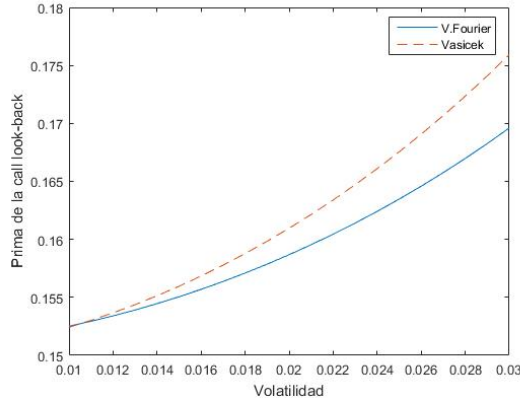


Figura 5: **Prima de la *call look-back* con *strike* variable en función de la volatilidad de los tipos de interés.** Las línea azul y naranja representan los resultados obtenidos según los modelos de Moreno *et al.* (2018) y Vasicek (1977), respectivamente. En ambos modelos,  $r_0 = 0,02$ ,  $k = 0,2$ ,  $P_{min} = 0,1$ ,  $\lambda = 0,001$ ,  $T = 10$  y  $T_b = 30$ . En el caso de Vasicek (1977),  $\mu = 0,05$ . En el modelo de Moreno *et al.* (2018), el resto de parámetros es:  $\alpha = 0,05$ ,  $\omega = 20$ ,  $A_{1,x} = 0,1758$ ,  $A_{1,y} = 0,0402$ ,  $A_{2,x} = -0,3011$ ,  $A_{2,y} = 0,0172$ ,  $A_{3,x} = 0,0498$ ,  $A_{3,y} = -0,1215$ ,  $A_{4,x} = 0,0798$ ,  $A_{4,y} = 0,1618$ ,  $A_{5,x} = 0,0894$  y  $A_{5,y} = 0,0655$ .

Las principales conclusiones de estas figuras son las siguientes:

- Una subida en la velocidad de reversión a la media de los tipos de interés implica que la prima de la opción disminuye. Este hecho se debe a que mayor velocidad de reversión implica que el tipo de interés converge más rápidamente a su valor a largo plazo. Por tanto, se tiene menor incertidumbre en los tipos de interés, lo cual se refleja en menor incertidumbre en el precio del bono cupón-cero y, a su vez, en el mínimo alcanzado durante la vida de la opción haciendo que la prima sea menor.
- Un aumento en el nivel de reversión a la media de los tipos de interés implica una disminución en la prima de la opción. En este caso, los tipos de interés tienden a valores superiores, luego el precio del bono cupón-cero disminuye y, por tanto, la prima de la opción disminuye.
- Finalmente, la prima de la opción es función creciente de la volatilidad de los tipos de interés. Esto se debe a que mayor incertidumbre en los tipos de interés implica mayor incertidumbre en el precio del bono cupón-cero y a su vez en el precio mínimo alcanzado durante la vida de la opción. Por tanto, la prima de la opción será mayor.



## 9. Valoración de opciones barrera

Esta sección se centra en la valoración de opciones barrera sobre bonos cupón-cero a partir del modelo propuesto en Moreno *et al.* (2018). Primero se obtienen las primas de las opciones “*knock-out*” y, a partir de éstas, se valorarán el resto de opciones barrera utilizando las relaciones entre las primas presentadas en la Proposición 5.2.

### 9.1. Valoración de opciones barrera “*up and out*”

Considere una *call* barrera “*up and out*” con *strike*  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Considere la partición  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ . Sea  $P_i = P(t_i)$  el precio en el instante  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  de este bono, cuya evolución viene dada por (8). Considere  $H_T = \max\{P_i\}_{i=0}^n$ . Esta opción deja de existir cuando  $H_T$  alcanza una cierta barrera  $L$ .

Sea  $c_{up-out}(r_t, t, T, T_b)$  el valor en el instante  $t$  de esta *call*. Su *payoff* viene dado por

$$c_{up-out}(r_T, T, T, T_b) = \max\{P_T - K, 0\} 1_{H_T < L}$$

donde  $1_{H_T < L}$  es una función característica definida como

$$1_{H_T < L} = \begin{cases} 0 & \text{si } H_T \geq L \\ 1 & \text{si } H_T < L \end{cases} \quad (9)$$

Definiendo  $\bar{M}_T = \sup\{\bar{Z}_u, t \leq u \leq T\}$ , el precio más alto alcanzado por el bono durante el periodo de la vida de la opción se representa como

$$H_T = P(r_t, t, T_b) e^{\bar{\sigma} \bar{M}_T}$$

La siguiente proposición proporciona una fórmula analítica para el valor de esta *call*.

**Proposición 9.1** *Considere una call “up and out” con strike  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Si los tipos de interés evolucionan según la ecuación (2), el valor en el instante  $t$  de esta call viene dado por*

$$\begin{aligned} c_{up-out}(r_t, t, T, T_b) &= P(r_t, t, T) e^{(\bar{r} - \lambda \bar{\sigma})(T-t)} \left[ P(r_t, t, T_b) N(d_1) - K e^{-(\bar{r} - \lambda \bar{\sigma})(T-t)} N(d_2) \right. \\ &\quad - \left( P(r_t, t, T_b) N(x_1) - K e^{-(\bar{r} - \lambda \bar{\sigma})(T-t)} N(x_2) \right) \\ &\quad - \left( P(r_t, t, T_b) \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} (N(z_1) - N(y_1)) \right. \\ &\quad \left. \left. - K e^{-(\bar{r} - \lambda \bar{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} (N(z_2) - N(y_2)) \right) \right] \end{aligned}$$

donde  $P(r_t, t, T)$  y  $P(r_t, t, T_b)$  viene dado por la Proposición 3.3 y

$$\begin{aligned}
\tilde{r} &= -B(t, T_b)k(\alpha + g(t) - r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t, T_b) + A'_t(t, T_b) - B'_t(t, T_b)r_t \\
\tilde{\sigma} &= B(t, T_b)\sigma \\
c &= \tilde{\sigma} + \gamma, \quad g = \frac{c}{\tilde{\sigma}}, \quad l = c + \frac{2\beta}{T-t} \\
d_1 &= \frac{c(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t} \\
x_1 &= \frac{c(T-t) - \beta}{\sqrt{T-t}}, \quad x_2 = x_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t} \\
y_1 &= \frac{l(T-t) - \beta}{\sqrt{T-t}}, \quad y_2 = y_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t} \\
z_1 &= \frac{l(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}}, \quad z_2 = z_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t}
\end{aligned}$$

■

Ahora considere una *put* barrera “*up and out*” con *strike*  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Considere la partición  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ . Sea  $P_i = P(t_i)$  el precio en el instante  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  de este bono. Considere  $H_T = \max\{P_i\}_{i=0}^n$ . Esta opción deja de existir cuando  $H_T$  alcanza una cierta barrera  $L$ .

Sea  $p_{up-out}(r_t, t, T, T_b)$  el valor en el instante  $t$  de esta *put*. Su *payoff* viene dado por

$$p_{up-out}(r_T, T, T, T_b) = \max\{K - P_T, 0\} 1_{H_T < L}$$

donde  $1_{H_T < L}$  es la función característica definida por (9).

La siguiente proposición proporciona una fórmula analítica para el valor de esta *put*.

**Proposición 9.2** *Considere una put “up and out” con strike  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Si los tipos de interés evolucionan según la ecuación (2), el valor en el instante  $t$  de esta put viene dado por*

$$\begin{aligned}
p_{up-out}(r_t, t, T, T_b) &= P(r_t, t, T)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left[ Ke^{-(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} N(-d_2) \right. \\
&\quad - P(r_t, t, T_b)N(-d_1) \\
&\quad - \left( Ke^{-(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} N(-z_2) \right. \\
&\quad \left. \left. - P(r_t, t, T_b) \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} N(-z_1) \right) \right]
\end{aligned}$$

donde  $P(r_t, t, T)$  y  $P(r_t, t, T_b)$  vienen dados por la Proposición 3.3 y  $\tilde{r}, \tilde{\sigma}, c, g, l, d_i, z_i$ ,  $i = 1, 2$  vienen dados por la Proposición 9.1. ■

## 9.2. Valoración de opciones barrera “down and out”

Considere una *call* barrera “down and out” con *strike*  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Considere la partición  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ . Sea  $P_i = P(t_i)$  el precio en el instante  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  de este bono. Considere  $D_T = \min \{P_i\}_{i=0}^n$ . Esta opción deja de existir cuando  $D_T$  alcanza una cierta barrera  $L$ .

Sea  $c_{down-out}(r_t, t, T, T_b)$  el valor en el instante  $t$  de esta *call*. Su *payoff* viene dado por

$$c_{down-out}(r_T, T, T, T_b) = \max \{P_T - K, 0\} 1_{D_T > L}$$

donde  $1_{D_T > L}$  es una función característica definida como

$$1_{D_T > L} = \begin{cases} 0 & \text{si } D_T \leq L \\ 1 & \text{si } D_T > L \end{cases} \quad (10)$$

Definiendo  $\bar{J}_T = \inf \{\bar{Z}_u, t \leq u \leq T\}$ , el precio más bajo alcanzado por el bono durante el periodo de la vida de la opción se representa como

$$D_T = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} \bar{J}_T}$$

La siguiente proposición proporciona una fórmula analítica para el valor de esta *call*.

**Proposición 9.3** *Considere una call “down and out” con strike  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Si los tipos de interés evolucionan según la ecuación (2), el valor en el instante  $t$  de esta call viene dado por*

$$\begin{aligned} c_{down-out}(r_t, t, T, T_b) = & P(r_t, t, T) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \left[ P(r_t, t, T_b) N(d_1) \right. \\ & - K e^{-(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N(d_2) \\ & - \left( P(r_t, t, T_b) \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} N(z_1) \right. \\ & \left. \left. - K e^{-(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} N(z_2) \right) \right] \end{aligned}$$

donde  $P(r_t, t, T)$  y  $P(r_t, t, T_b)$  vienen dados por la Proposición 3.3 y  $\tilde{r}, \tilde{\sigma}, c, g, l, d_i, z_i$ ,  $i = 1, 2$  vienen dados por la Proposición 9.1. ■

Finalmente, considere una *put* barrera “down and out” con *strike*  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Considere la partición  $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$ . Sea  $P_i = P(t_i)$  el precio en el instante  $t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  de este bono. Considere  $D_T = \min \{P_i\}_{i=0}^n$ . Esta opción deja de existir cuando  $D_T$  alcanza una cierta barrera  $L$ .

Sea  $p_{down-out}(r_t, t, T, T_b)$  el valor en el instante  $t$  de esta *put*. Su *payoff* viene dado por

$$p_{down-out}(r_T, T, T, T_b) = \max\{K - P_T, 0\} 1_{D_T > L}$$

donde  $1_{D_T > L}$  es la función característica definida por (10).

La siguiente proposición proporciona una fórmula analítica para el valor de esta *put*.

**Proposición 9.4** *Considere una put “down and out” con strike  $K$  que vence en  $T$  y el subyacente es un bono con vencimiento  $T_b > T$ . Si los tipos de interés evolucionan según la ecuación (2), el valor en el instante  $t$  de esta *put* viene dado por*

$$\begin{aligned} p_{down-out}(r_t, t, T, T_b) = & P(r_t, t, T) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \left[ K e^{-(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N(-d_2) \right. \\ & - P(r_t, t, T_b) N(-d_1) \\ & - \left( K e^{-(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N(-x_2) - P(r_t, t, T_b) N(-x_1) \right) \\ & - \left( K e^{-(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} (N(-z_2) - N(-y_2)) \right. \\ & \left. \left. - P(r_t, t, T_b) \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} (N(-z_1) - N(-y_1)) \right) \right] \end{aligned}$$

donde  $P(r_t, t, T)$  y  $P(r_t, t, T_b)$  vienen dados por la Proposición 3.3 y  $\tilde{r}, \tilde{\sigma}, c, g, l, d_i, x_i, y_i, z_i, i = 1, 2$  vienen dados por la Proposición 9.1. ■

### 9.3. Valoración de opciones barrera *knock-in*

Utilizando las Proposiciones 5.2, 9.1, 9.2, 9.3 y 9.4 obtenemos la siguiente Proposición que muestra las primas de las opciones barrera *knock-in*.

**Proposición 9.5** *Considere opciones barrera knock-in con strike  $K$  que vencen en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . Si los tipos de interés evolucionan según la ecuación (2), el valor en el instante  $t$  de estas opciones viene dado por*

■ *Call barrera “up and in”:*

$$\begin{aligned} c_{up-in}(r_t, t, T, T_b) = & P(r_t, t, T) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \left[ \left( P(r_t, t, T_b) N(x_1) - K e^{-(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N(x_2) \right) \right. \\ & + \left( P(r_t, t, T_b) \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} (N(z_1) - N(y_1)) \right. \\ & \left. \left. - K e^{-(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} (N(z_2) - N(y_2)) \right) \right] \end{aligned}$$

- Put barrera “up and in”:

$$p_{up-in}(r_t, t, T, T_b) = P(r_t, t, T)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left[ Ke^{-(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} N(-z_2) - P(r_t, t, T_b) \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} N(-z_1) \right]$$

- Call barrera “down and in”:

$$c_{down-in}(r_t, t, T, T_b) = P(r_t, t, T)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left[ P(r_t, t, T_b) \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} N(z_1) - Ke^{-(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} N(z_2) \right]$$

- Put barrera “down and in”:

$$p_{down-in}(r_t, t, T, T_b) = P(r_t, t, T)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left[ Ke^{-(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} N(-x_2) - P(r_t, t, T_b) N(-x_1) - \left( Ke^{-(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} (N(-y_2) - N(-z_2)) - P(r_t, t, T_b) \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} (N(-y_1) - N(-z_1)) \right) \right]$$

donde  $P(r_t, t, T)$  y  $P(r_t, t, T_b)$  vienen dados por la Proposición 3.3 y  $\tilde{r}, \tilde{\sigma}, c, g, l, d_i, x_i, y_i, z_i, i = 1, 2$  vienen dados por la Proposición 9.1. ■

## 10. Sensibilidades de opciones barrera en el modelo de Moreno *et al.* (2018)

Esta sección presenta las sensibilidades de la *call* barrera “up and out”.<sup>2</sup> Estas sensibilidades se obtienen calculando las correspondientes derivadas parciales en las primas obtenidas en la Proposición 9.1. Puede ser interesante comentar que dichas sensibilidades se simplifican tras aplicar diversos resultados preliminares que se incluyen en la siguiente proposición.

<sup>2</sup>De manera similar, se obtendrían las sensibilidades para el resto de opciones barrera.

**Proposición 10.1** *Dados  $d_i, x_i, y_i, z_i, i = 1, 2$  (véase Proposición 9.1), se cumplen las siguientes relaciones:*

$$\begin{aligned}
KN'(d_2) &= P(r_t, t, T_b)N'(d_1)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \\
LN'(x_2) &= P(r_t, t, T_b)N'(x_1)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \\
P(r_t, t, T_b)N'(y_2) &= LN'(y_1)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \\
KP(r_t, t, T_b)N'(z_2) &= L^2N'(z_1)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)}
\end{aligned}$$

■

La siguiente proposición muestra las expresiones matemáticas para estas sensibilidades.

**Proposición 10.2** *Las sensibilidades de la prima de la call barrera “up and out” vienen dadas por las siguientes expresiones:*

- *Sensibilidad respecto a la volatilidad de los tipos de interés  $\sigma$ :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_{up-out}(r_t, t, T, T_b)}{\partial \sigma} &= -\frac{\sigma^2}{2k^2}c_{up-out}(r_t, t, T, T_b)(kB^2(t, T) + 2(B(t, T) - (T - t))) \\
&+ P(r_t, t, T) \left[ P(r_t, t, T_b)(T - t) \left( \sigma B^2(t, T) + \frac{\partial A'_t}{\partial \sigma} \right) \right. \\
&\quad \left. e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)}(N(d_1) - N(x_1)) \right. \\
&+ KB(t, T)\sqrt{T - t} \left( N'(d_2) - N'(x_2) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} (N'(z_2) - N'(y_2)) \right) \\
&+ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} P(r_t, t, T_b) \left( \frac{K}{L} - 1 \right) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} N'(x_1) \\
&- P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} (N(z_1) - N(y_1)) \\
&\quad \left( (T - t) \left( \sigma B^2(t, T) + \frac{\partial A'_t}{\partial \sigma} \right) + 2 \ln \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \\
&+ 2K \frac{\partial g}{\partial \sigma} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} \ln \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right) (N(z_2) - N(y_2)) \\
&\left. - \frac{\partial y_1}{\partial \sigma} N'(y_2) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} (K - L) \right]
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A'_t}{\partial \sigma} &= -\frac{\sigma}{k}B(t, T)B'(t, T) - \frac{\sigma}{k^2}(B'(t, T) + 1) \\
\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \sigma} &= \sigma B^2(t, T) + \frac{\partial A'_t}{\partial \sigma} + B(t, T)\lambda \\
\frac{\partial x_1}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \sigma} \frac{\sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} + B(t, T)\sqrt{T-t} - \frac{1}{\sigma} \left( x_1 + \lambda\sqrt{T-t} \right) \\
\frac{\partial y_1}{\partial \sigma} &= \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \sigma} \frac{\sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} - B(t, T)\sqrt{T-t} - \frac{1}{\sigma} \left( y_1 + \lambda\sqrt{T-t} \right) \\
\frac{\partial g}{\partial \sigma} &= \frac{2}{\tilde{\sigma}^2} \left( -2B(t, T)c + \frac{\partial A'_t}{\partial \sigma} + 2B^2(t, T)\sigma \right)
\end{aligned}$$

- Sensibilidad respecto al nivel de reversión a largo plazo  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_{up-out}(r_t, t, T, T_b)}{\partial \alpha} &= c_{up-out}(r_t, t, T, T_b) (B(t, T) - (T-t)) \\
&+ P(r_t, t, T) \left[ P(r_t, t, T_b)(T-t) \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha} e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} (N(d_1) - N(x_1)) \right. \\
&+ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} P(r_t, t, T_b) \left( \frac{K}{L} - 1 \right) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} N'(x_1) \\
&- P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} (N(z_1) - N(y_1)) \\
&\quad \left( (T-t) \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha} + 2 \ln \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right) \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right) \\
&+ 2K \frac{\partial g}{\partial \alpha} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} \ln \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right) (N(z_2) - N(y_2)) \\
&\left. - \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} N'(y_2) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} (K-L) \right]
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha} &= -kB(t, T) + \frac{\partial A'_t}{\partial \alpha} = -kB(t, T) + B'(t, T) + 1 \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} &= \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} = \frac{\sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha} \\
\frac{\partial g}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \alpha}
\end{aligned}$$

- *Sensibilidad respecto a la velocidad de reversión a la media k:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_{up-out}(r_t, t, T, T_b)}{\partial k} &= c_{up-out}(r_t, t, T, T_b) \left( \frac{\partial A(t, T)}{\partial k} - \frac{\partial B(t, T)}{\partial k} r_t \right) \\
&+ P(r_t, t, T) \left[ P(r_t, t, T_b)(T-t) \left( \frac{\partial \tilde{r}}{\partial k} - \lambda \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \right) \right. \\
&\quad \left. e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} (N(d_1) - N(x_1)) \right. \\
&+ K \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \sqrt{T-t} \left( N'(d_2) - N'(x_2) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} \left( N'(z_2) - N'(y_2) \right) \right) \\
&+ \frac{\partial x_1}{\partial k} P(r_t, t, T_b) \left( \frac{K}{L} - 1 \right) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} N'(x_1) \\
&- P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2g} (N(z_1) - N(y_1)) \\
&\quad \left( (T-t) \left( \frac{\partial \tilde{r}}{\partial k} - \lambda \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \right) + 2 \ln \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right) \frac{\partial g}{\partial k} \right) \\
&+ 2K \frac{\partial g}{\partial k} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} \ln \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right) (N(z_2) - N(y_2)) \\
&- \left. \frac{\partial y_1}{\partial k} N'(y_2) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{2(g-1)} (K-L) \right]
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B(t, T)}{\partial k} &= \frac{1}{k} (e^{-k(T-t)}(T-t) - B(t, T)) \\
\frac{\partial A(t, T)}{\partial k} &= \frac{\sigma^2}{4k^2} B^2(t, T) - \frac{1}{k} \left( r^* - \frac{\sigma^2}{2k} B(t, T) \right) (e^{-k(T-t)}(T-t) - B(t, T)) \\
&+ \frac{\sigma^2}{k^3} (B(t, T) - (T-t)) - \sum_{m=1}^{\infty} Re \left[ \frac{A_m}{mw(k+imw)} (e^{imwt}(i-mw(T-t))e^{-k(T-t)}) \right. \\
&\quad \left. - ie^{imwT} - \frac{k}{k+imw} (e^{imwt}(i-mwH(k, T-t)) - ie^{imwT}) \right) \\
\frac{\partial \tilde{r}}{\partial k} &= -(\alpha + g(t) - r_t) e^{-k(T-t)}(T-t) - B(t, T) \frac{\lambda\sigma}{k} \\
&+ \frac{\sigma^2}{k} B(t, T) (e^{-k(T-t)}(T-t) - B(t, T)) + \frac{\partial A'_t}{\partial k} - \frac{\partial B'_t}{\partial k} r_t \\
\frac{\partial B'_t(t, T)}{\partial k} &= e^{-k(T-t)} \\
\frac{\partial A'_t(t, T)}{\partial k} &= e^{-k(T-t)}(T-t) \left( r^* - \frac{\sigma^2}{2k^2} B'_t - \frac{\sigma^2}{2k} B(t, T) - \frac{\sigma^2}{k^3} \right) - \frac{\sigma^2}{k^3}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1}^{\infty} Re \left[ \frac{A_m}{mw(k + imw)} e^{imwt} (1 - B'_t) \right. \\
& \left. - \frac{kA_m}{mw(k + imw)} e^{imwt} \left( 1 + \frac{imw}{k} \right) \left( \frac{1 - B'_t}{k + imw} + (T - t)B'_t \right) \right] \\
\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} &= \sigma \frac{\partial B(t, T)}{\partial k} \\
\frac{\partial x_1}{\partial k} &= \frac{\sqrt{T-t} \partial \tilde{r}}{\tilde{\sigma} \partial k} + \left( \sqrt{T-t} - \frac{x_1 + \lambda \sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} \right) \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \\
\frac{\partial y_1}{\partial k} &= \frac{\sqrt{T-t} \partial \tilde{r}}{\tilde{\sigma} \partial k} + \left( \sqrt{T-t} - \frac{y_1 - \lambda \sqrt{T-t}}{\tilde{\sigma}} \right) \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \\
\frac{\partial g}{\partial k} &= \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial k} \left( 1 - \frac{c}{\tilde{\sigma}^2} \right) + \frac{1}{\tilde{\sigma}} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial k}
\end{aligned}$$

■

## 11. Comparación con Vasicek (1977) en opciones barrera

Esta sección compara las primas de la *call* barrera “*up and out*” obtenidas con los modelos presentados en Vasicek (1977) y Moreno *et al.* (2018), respectivamente. La Tabla 3 muestra estas primas. En ambos modelos, se consideran posibles valores para los tres parámetros que influyen en la evolución de los tipos de interés: la velocidad de reversión a la media ( $k$ ), el nivel de reversión a la media en cada uno de los modelos ( $\mu / \alpha$ ) y la volatilidad ( $\sigma$ ). Como se comentó anteriormente, el resto de parámetros del modelo de Moreno *et al.* (2018) se ha obtenido de dicho trabajo.

Parámetros			Prima de la <i>call</i>	
k	$\mu / \alpha$	$\sigma$	Vasicek (1977)	Moreno <i>et al.</i> (2018)
0.2	0.05	0.02	0.0768	0.0769
0.3	0.05	0.02	0.1098	0.1100
0.4	0.05	0.02	0.1213	0.1217
0.2	0.01	0.02	0.0195	0.0195
0.2	0.03	0.02	0.0455	0.0456
0.2	0.05	0.01	0.1304	0.1306
0.2	0.05	0.03	0.0460	0.0461

Tabla 3: Prima de la *call* barrera “*up and out*” utilizando los modelos de Vasicek (1977) y Moreno *et al.* (2018). En ambos modelos, tenemos  $r_0 = 0,02$ ,  $X = 0,1$ ,  $L = 0,4$ ,  $\lambda = 0,001$ ,  $T = 10$  y  $T_b = 30$ . El resto de parámetros en el modelo de Moreno *et al.* (2018) es:  $\omega = 20$ ,  $A_{1,x} = 0,1758$ ,  $A_{1,y} = 0,0402$ ,  $A_{2,x} = -0,3011$ ,  $A_{2,y} = 0,0172$ ,  $A_{3,x} = 0,0498$ ,  $A_{3,y} = -0,1215$ ,  $A_{4,x} = 0,0798$ ,  $A_{4,y} = 0,1618$ ,  $A_{5,x} = 0,0894$  y  $A_{5,y} = 0,0655$ .

Más detalladamente, las Figuras 6 a 8 muestran cómo varía la prima de la *call* barrera “*up and out*” en función de los parámetros anteriores cuando el resto de parámetros permanece constante.

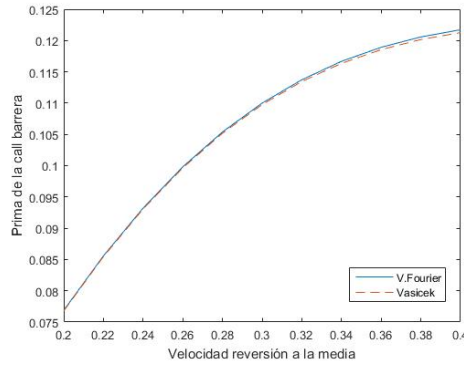


Figura 6: **Prima de la *call* barrera “*up and out*” en función de la velocidad de reversión a la media de los tipos de interés.** Las línea azul y naranja representan los resultados obtenidos según los modelos de Moreno *et al.* (2018) y Vasicek (1977), respectivamente. En ambos modelos,  $r_0 = 0,02$ ,  $\sigma = 0,02$ ,  $X = 0,1$ ,  $L = 0,3$ ,  $\lambda = 0,001$ ,  $T = 10$  y  $T_b = 30$ . En el caso de Vasicek (1977),  $\mu = 0,05$ . En el modelo de Moreno *et al.* (2018), el resto de parámetros es:  $\alpha = 0,05$ ,  $\omega = 20$ ,  $A_{1,x} = 0,1758$ ,  $A_{1,y} = 0,0402$ ,  $A_{2,x} = -0,3011$ ,  $A_{2,y} = 0,0172$ ,  $A_{3,x} = 0,0498$ ,  $A_{3,y} = -0,1215$ ,  $A_{4,x} = 0,0798$ ,  $A_{4,y} = 0,1618$ ,  $A_{5,x} = 0,0894$  y  $A_{5,y} = 0,0655$ .

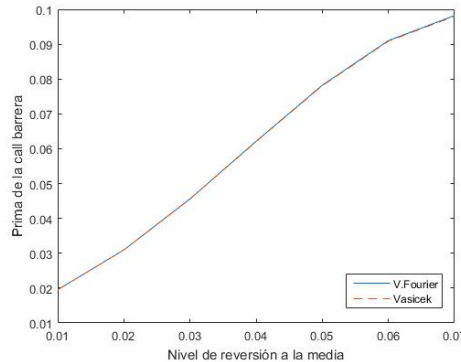


Figura 7: **Prima de la *call* barrera “*up and out*” en función del nivel de reversión a la media de los tipos de interés.** Las línea azul y naranja representan los resultados obtenidos según los modelos de Moreno *et al.* (2018) y Vasicek (1977), respectivamente. En ambos modelos,  $r_0 = 0,02$ ,  $k = 0,2$ ,  $\lambda = 0,001$ ,  $T = 10$  y  $T_b = 30$ . En el modelo de Moreno *et al.* (2018), el resto de parámetros es:  $\omega = 20$ ,  $A_{1,x} = 0,1758$ ,  $A_{1,y} = 0,0402$ ,  $A_{2,x} = -0,3011$ ,  $A_{2,y} = 0,0172$ ,  $A_{3,x} = 0,0498$ ,  $A_{3,y} = -0,1215$ ,  $A_{4,x} = 0,0798$ ,  $A_{4,y} = 0,1618$ ,  $A_{5,x} = 0,0894$  y  $A_{5,y} = 0,0655$ .

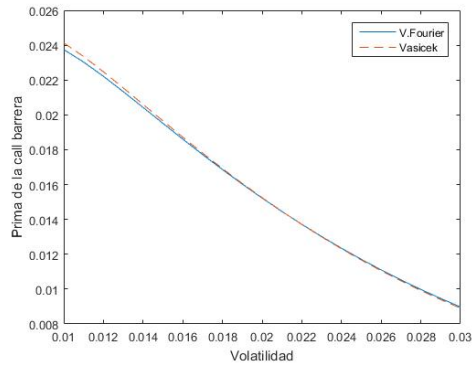


Figura 8: **Prima de la *call* barrera “*up and out*” en función de la volatilidad de los tipos de interés.** Las líneas azul y naranja representan los resultados obtenidos según los modelos de Moreno *et al.* (2018) y Vasicek (1977), respectivamente. En ambos modelos,  $r_0 = 0,02$ ,  $k = 0,2$ ,  $X = 0,1$ ,  $L = 0,4$ ,  $\lambda = 0,001$ ,  $T = 10$  y  $T_b = 30$ . En el caso de Vasicek (1977),  $\mu = 0,05$ . En el modelo de Moreno *et al.* (2018), el resto de parámetros es:  $\alpha = 0,05$ ,  $\omega = 20$ ,  $A_{1,x} = 0,1758$ ,  $A_{1,y} = 0,0402$ ,  $A_{2,x} = -0,3011$ ,  $A_{2,y} = 0,0172$ ,  $A_{3,x} = 0,0498$ ,  $A_{3,y} = -0,1215$ ,  $A_{4,x} = 0,0798$ ,  $A_{4,y} = 0,1618$ ,  $A_{5,x} = 0,0894$  y  $A_{5,y} = 0,0655$ .

Las principales conclusiones de estas figuras son las siguientes:

- Si la velocidad de reversión a la media de los tipos de interés sube, la prima de la opción aumenta. Intuitivamente, mayor velocidad de reversión implica que el tipo de interés converge antes al valor a largo plazo; esto conlleva menor incertidumbre en los tipos de interés que se refleja en menor incertidumbre en el precio del bono cupón-cero. Por tanto, es menos probable que el precio de este bono toque la barrera haciendo que la prima de la opción sea mayor.
- Un aumento en el nivel de reversión a la media de los tipos de interés implica una subida en la prima de la opción. Esto sucede pues el tipo de interés tiende a valores superiores y, por tanto, el precio del bono cupón-cero disminuye. Como consecuencia, es más probable que la opción barrera no desaparezca y, por tanto, su prima aumenta.
- Finalmente, la prima de la opción decrece con la volatilidad de los tipos de interés. Esto se debe a que mayor incertidumbre en los tipos de interés implica mayor incertidumbre en el precio del bono cupón-cero, haciendo que haya mayor probabilidad de que el precio de este bono toque la barrera y, por tanto, la prima de la opción sea menor.

## 12. Conclusiones

En este trabajo se han valorado opciones *look-back* y barrera cuyo activo subyacente es un bono cupón-cero. Se ha empleado el modelo presentado por Moreno *et al.* (2018) para modelizar la ETTI. Este modelo generaliza el propuesto por Vasicek (1977) suponiendo que el valor a largo plazo de los tipos de interés viene dado por una serie de Fourier. De esta manera, se introduce una gran flexibilidad en la evolución temporal de los tipos de interés y, por tanto, puede posibilitar un mejor comportamiento empírico sin perder tratabilidad analítica.

La valoración realizada se ha basado en la utilización del principio de reflexión de un movimiento browniano, el cual permite calcular las funciones de distribución necesarias para dicha valoración. De este modo, se obtienen fórmulas cerradas para las primas de ambas opciones. Tras esta valoración, para cada una de las primas obtenidas, se ha realizado un análisis de sensibilidades con respecto a los parámetros que determinan la evolución temporal de los tipos de interés. Todas las fórmulas obtenidas se han ilustrado de manera numérica y gráfica.

Adicionalmente, se han comparado las primas obtenidas mediante los modelos de Moreno *et al.* (2018) y Vasicek (1977). Los resultados obtenidos en ambos modelos son cualitativamente similares y acordes con lo esperado según la teoría: a) un aumento en la volatilidad de los tipos de interés implica una subida en la prima de la *call look-back* con *strike* variable y una bajada en la prima de la *call* barrera “*up and out*” y b) subidas en la velocidad y en el nivel de reversión a la media de los tipos de interés conllevan bajadas en la prima de la *call look-back* con *strike* variable y subidas en la prima de la *call* barrera “*up and out*”.

Como posibles líneas futuras de investigación podemos sugerir la valoración de estas opciones mediante el modelo presentado por Moreno y Platania (2015), el cual utiliza funciones trigonométricas para modelizar tanto el valor de reversión a largo plazo como la volatilidad de los tipos de interés. Bajo este supuesto, los tipos de interés siguen una distribución chi-cuadrado y, aunque la distribución del precio del bono cupón-cero es desconocida, este modelo proporciona fórmulas analíticas de valoración para cualquier derivado sobre un bono cupón-cero. Finalmente, otra posible línea de investigación futura sería utilizar el modelo de Moreno *et al.* (2018) para valorar otros derivados exóticos como opciones compuestas u opciones *chooser*.

## Referencias

- [1] Benson R., D.N. (1991). Up, Over and Out. *Risk*, 4, 6, 1991.
- [2] Conze A., Viswanathan R. (1991). Path dependent options: the case of lookback options. *Journal of Finance*, 46, 1893–1907.
- [3] Chen, Ch.-Ch., Wang, Ch.-W., Shyu, D. (2010). Pricing Double Barrier Options Using Reflection Principle. *International Research Journal of Finance and Economics*, 37, 125–137.
- [4] Goldman, M.B., Sosin H.B., Gatto M.A. (1979). Path Dependent Options: “Buy at the Low, Sell at the High”. *Journal of Finance*, 34, 1111-1127.
- [5] Hudson M. (1991). The Value in Going Out. *Risk*, March, 31.
- [6] Kuan G., Webber N. (2003). Pricing Barriers Bond Options with One-factor Interest Rate Models. *Journal of Derivatives*, 10, 33-50.
- [7] Kwai S.L. (2013). An analytic pricing formula for lookback options under stochastic volatility. *Applied Mathematics Letters*, 26, 145–149.
- [8] Landa-Fernández, M., Moreno, M. (2017). Valoración y cobertura de opciones Asiáticas y Australianas sobre subyacente de renta fija: un enfoque basado en modelos con estacionalidad. XV Workshop en Banca y Finanzas Cuantitativas.
- [9] Merton R.C. (1973). The Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
- [10] Moreno, M., Novales, A., Platania, F. (2018). A Term Structure Representation with Cyclical Mean Reversion. *Economic Modelling*, 72, 140-150.
- [11] Moreno M. (2000) Modelización de la estructura temporal de los tipos de interés: Valoración de activos derivados y comportamiento empírico. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, XXIX, 345-376.
- [12] Pelsser, A. (2000). Pricing Double Barrier Options Using Laplace Transforms. *Finance and Stochastics*, 4, 95-104.
- [13] Rubinstein M., Reiner E. (1991). Breaking Down the Barriers *Risk*, Sept., 28-35.
- [14] Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 2, 177-188.
- [15] Wong H.Y., Chan C.M. (2007). Lookback options and dynamic fund protection under multiscale stochastic volatility, *Insurance, Mathematics and Economics*, 40, 357–385.

## Apéndice Técnico

### Demostración de la Proposición 6.1

Considere una *call look-back* con *strike* variable que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . El valor en el instante  $t$  de esta *call* se obtiene aplicando la Proposición 3.5:

$$\begin{aligned}
 c_{variable}(r_t, t, T, T_b) &= P(r_t, t, T)E[(P_T - D_T)^+ | r_t] \\
 &= P(r_t, t, T)E[P_T - \min(D_T, P_{min}) | r_t] \\
 &= P(r_t, t, T)P(r_t, t, T_b)e^{(\tilde{r} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \\
 &\quad - P(r_t, t, T) \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{J}_T = m) \min(P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m}, P_{min}) dm \\
 &= P(r_t, t, T)P(r_t, t, T_b)e^{(\tilde{r} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \\
 &\quad - P(r_t, t, T) \int_{-\infty}^0 f(\bar{J}_T = m) \min(P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m}, P_{min}) dm
 \end{aligned} \tag{11}$$

En este caso,  $\bar{J}_T = m \leq 0$  pues se cumple que  $D_T \leq P(r_t, t, T_b)$ .

Teniendo en cuenta lo comentado en la Sección 4, la función de densidad para  $(J_T, W_T)$  viene dada por

$$f(J_T = m, W_T = x) = \frac{2}{(T-t)}(x - 2m) \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}$$

donde  $W_T$  es un movimiento browniano estándar y  $J_T$  su ínfimo. El problema es que  $D_T \neq P(r_t, t, T_b)e^{(\tilde{r} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)(u_m - t) + \tilde{\sigma}(-\lambda(u_m - t) - J_T)}$  donde  $u_m$  es el instante en el cual el precio del bono cupón-cero es mínimo. Por esta razón, se deben hacer algunas modificaciones en el principio de reflexión, considerando que

$$\bar{Z}_u = \theta(u - t) + Z_u = \gamma(u - t) - (W_u - W_t)$$

donde  $\gamma = \theta - \lambda$  y  $\theta = \frac{1}{\tilde{\sigma}}(\tilde{r} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2})$ . Teniendo en cuenta que un movimiento browniano es el límite en tiempo continuo de un paseo aleatorio en tiempo discreto, se calcula la probabilidad de un paseo aleatorio:

$$\begin{aligned}
 P(\Delta\bar{Z}_u \in [x, x + dx]) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta u}} e^{-\frac{(x - \gamma\Delta u)^2}{2\Delta u}} dx = e^{\gamma x - \frac{\gamma^2\Delta u}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta u}} e^{-\frac{x^2}{2\Delta u}} dx \\
 &= e^{\gamma x - \frac{\gamma^2\Delta u}{2}} P(\Delta W_u \in [x, x + dx])
 \end{aligned}$$

Esto significa que la probabilidad generada por  $\Delta\bar{Z}_u$  en el intervalo  $[x, x + dx]$  puede ser determinada considerando la probabilidad generada por  $\Delta W_u$  en el mismo intervalo y aplicando el término de corrección  $e^{\gamma x - \frac{\gamma^2\Delta u}{2}}$ .

Sea el paseo aleatorio en tiempo discreto  $\bar{Z}_u$  definido en el intervalo  $[t, T]$  y descrito por  $\{\Delta\bar{Z}_1, \dots, \Delta\bar{Z}_T\}$ . Entonces, se tiene

$$\begin{aligned} P(\bar{Z}_u) &= \left( e^{\gamma\Delta\bar{Z}_1 - \frac{\gamma^2\Delta u}{2}} \dots e^{\gamma\Delta\bar{Z}_T - \frac{\gamma^2\Delta u}{2}} \right) P(W_u) \\ &= \left( e^{\gamma(\Delta\bar{Z}_1 + \dots + \Delta\bar{Z}_T) - \frac{\gamma^2}{2}(\Delta u + \dots + \Delta u)} \right) P(W_u) \\ &= e^{\gamma\bar{Z}_T - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} P(W_t) \end{aligned}$$

El término de corrección solo depende del valor final de la trayectoria, lo que significa que diferentes trayectorias con el mismo valor final tendrán el mismo término de corrección. Por tanto, aplicando el teorema de Girsanov, se obtiene que

$$F(\bar{J}_T, \bar{Z}_T) = e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} F(J_T, W_T)$$

La correspondiente función de densidad viene dada por

$$f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x) = e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (x-2m) \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \quad (12)$$

Integrando  $\bar{Z}_T$  se obtiene la probabilidad vinculada con  $\bar{J}_T$ :

$$\begin{aligned} f(\bar{J}_T = m) &= \int_m^\infty f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_t = x) dx \\ &= \int_m^\infty e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (x-2m) \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\ &= e^{2\gamma m} \int_m^\infty \frac{2}{(T-t)} (x-2m) \frac{e^{-\frac{(x-2m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= 2e^{2\gamma m} \int_v^\infty \left( \gamma + \frac{u}{\sqrt{T-t}} \right) \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du \\ &= 2\gamma e^{2\gamma m} \int_v^\infty \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du + 2e^{2\gamma m} \int_v^\infty u \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} du \\ &= 2\gamma e^{2\gamma m} N(-v) + 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \quad (13) \end{aligned}$$

donde  $v = -\left(\frac{m}{\sqrt{T-t}} + \gamma\sqrt{T-t}\right)$  y  $N(\cdot)$  denota la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar.

Sustituyendo (13) en (11) queda

$$\begin{aligned}
c_{variable}(r_t, t, T, T_b) &= P(r_t, t, T)P(r_t, t, T_b)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \\
&- P(r_t, t, T) \int_{-\infty}^0 \left( 2\gamma e^{2\gamma m} N(-v) + 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \min(P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m}, P_{min}) dm
\end{aligned} \tag{14}$$

Cuando  $P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m} = P_{min}$ , se tiene  $m = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln\left(\frac{P_{min}}{P(r_t, t, T_b)}\right) = h_{min}$ . Entonces

$$\begin{cases} P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m} \geq P_{min} & \text{si } m \geq h_{min} \\ P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m} < P_{min} & \text{si } m < h_{min} \end{cases}$$

La integral incluida en (14) se puede expresar como

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 \left( 2\gamma e^{2\gamma m} N(-v) + 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \min(P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m}, P_{min}) dm \\
&= \underbrace{\int_{h_{min}}^0 2\gamma e^{2\gamma m} N(-v) P_{min} dm}_{(1)} + \underbrace{\int_{h_{min}}^0 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} P_{min} dm}_{(2)} \\
&+ \underbrace{\int_{-\infty}^{h_{min}} 2\gamma e^{2\gamma m} N(-v) P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m} dm}_{(3)} + \underbrace{2 \int_{-\infty}^{h_{min}} \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m} dm}_{(4)}
\end{aligned}$$

A continuación, se resuelven estas cuatro integrales. Las integrales (1) y (3) se resuelven aplicando integración por partes mientras que las integrales (2) y (4) son inmediatas. Los resultados obtenidos son los siguientes:

(1)

$$\int_{h_{min}}^0 2\gamma e^{2\gamma m} N(-v) P_{min} dm = P_{min} \left( 1 - 2N\left(-\gamma\sqrt{T-t}\right) - e^{2\gamma h} N(b_1^{min}) + N(b_2^{min}) \right)$$

donde

$$b_1^{min} = \frac{h_{min}}{\sqrt{T-t}} + \gamma\sqrt{T-t}, \quad b_2^{min} = \frac{h_{min}}{\sqrt{T-t}} - \gamma\sqrt{T-t}$$

(2)

$$\int_{h_{min}}^0 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} P_{min} dm = 2P_{min} \left( N\left(-\gamma\sqrt{T-t}\right) - N(b_2^{min}) \right)$$



(3)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{h_{min}} 2\gamma e^{2\gamma m} N(-v) P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} m} dm \\ &= P(r_t, t, T_b) \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{r} - \tilde{\sigma} \lambda} \right) \left( e^{(\tilde{\sigma} + 2\gamma) h_{min}} N(b_1^{min}) - e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N(b_3^{min}) \right) \end{aligned}$$

donde

$$b_3^{min} = \frac{h_{min}}{\sqrt{T-t}} - (\gamma + \tilde{\sigma}) \sqrt{T-t}$$

(4)

$$2 \int_{-\infty}^{h_{min}} \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} m} dm = 2P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N(b_3^{min})$$

Sustituyendo el resultado de estas integrales en el valor del *payoff* esperado y teniendo en cuenta que  $e^{2\gamma h_{min}} = \left( \frac{P_{min}}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{\frac{2}{\tilde{\sigma}} \gamma}$  y  $e^{(\tilde{\sigma} + 2\gamma) h_{min}} = \left( \frac{P_{min}}{P(r_t, t, T_b)} \right)^{\frac{2}{\tilde{\sigma}} \gamma} \frac{P_{min}}{P(r_t, t, T_b)}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} E[\text{mín}(D_T, P_{min}) | r_t] &= P_{min} \left( N(-b_2^{min}) - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{r} - \tilde{\sigma} \lambda} e^{2\gamma h_{min}} N(b_1^{min}) \right) \\ &\quad + P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{r} - \tilde{\sigma} \lambda} \right) N(b_3^{min}) \end{aligned} \quad (15)$$

Sustituyendo (15) en (11) concluye la demostración. ■

## Demostración de la Proposición 6.2

Considere una *put look-back* con *strike* variable que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . El valor en el instante  $t$  de esta *put* se obtiene aplicando la Proposición 3.5:

$$\begin{aligned} p_{variable}(r_t, t, T, T_b) &= P(r_t, t, T) E[(H_T - P_T)^+ | r_t] \\ &= P(r_t, t, T) E[\text{máx}(H_T, P_{max}) - P_T | r_t] \\ &= P(r_t, t, T) \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{M}_T = m) \text{máx}(P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} m}, P_{max}) dm \\ &\quad - P(r_t, t, T) P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \\ &= P(r_t, t, T) \int_0^{\infty} f(\bar{M}_T = m) \text{máx}(P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} m}, P_{max}) dm \\ &\quad - P(r_t, t, T) P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \end{aligned} \quad (16)$$

En este caso,  $\bar{M}_T = m \geq 0$  pues se cumple  $H_T \geq P(r_t, t, T_b)$ .

La función de densidad  $f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x)$ , se calcula similar a la función de densidad (12). Siendo esta

$$f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x) = e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (2m-x) \frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \quad (17)$$

Integrando  $\bar{Z}_T$  se obtiene la probabilidad vinculada con  $\bar{M}_T$ .

$$\begin{aligned} f(\bar{M}_T = m) &= \int_{-\infty}^m f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x) dx \\ &= \int_{-\infty}^m e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (2m-x) \frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\ &= e^{2\gamma m} \int_{-\infty}^m \frac{2}{(T-t)} (2m-x) \frac{e^{-\frac{(2m-x-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \\ &= -2e^{2\gamma m} \int_{-\infty}^v \left( \gamma + \frac{u}{\sqrt{(T-t)}} \right) \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du \\ &= -2\gamma e^{2\gamma m} \int_{-\infty}^v \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du - 2e^{2\gamma m} \int_{-\infty}^v u \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} du \\ &= -2\gamma e^{2\gamma m} N(v) + 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $v = -\left(\frac{m}{\sqrt{T-t}} + \gamma\sqrt{T-t}\right)$  y  $N(\cdot)$  denota la función de distribución de una variable aleatoria normal estándar.

Sustituyendo (18) (16) queda

$$\begin{aligned} p_{variable}(r_t, t, T, T_b) &= -P(r_t, t, T)P(r_t, t, T_b)e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \\ &+ P(r_t, t, T) \int_0^\infty \left( -2\gamma e^{2\gamma m} N(v) + 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \text{máx}(P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m}, P_{max}) dm \end{aligned}$$

Cuando  $P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m} = P_{max}$ , tenemos  $m = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln\left(\frac{P_{max}}{P(r_t, t, T_b)}\right) = h_{max}$ . Entonces

$$\begin{cases} P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m} \geq P_{max} & \text{si } m \geq h_{max} \\ P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}m} < P_{max} & \text{si } m < h_{max} \end{cases}$$

La integral anterior se puede expresar como

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \left( -2\gamma e^{2\gamma m} N(v) + 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \text{máx} (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} m}, P_{max}) dm \\
&= \int_{h_{max}}^\infty \left( -2\gamma e^{2\gamma m} N(v) + 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} m} dm \\
&+ \int_0^{h_{max}} \left( -2\gamma e^{2\gamma m} N(v) + 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) P_{max} dm \\
&= \underbrace{- \int_0^{h_{max}} 2\gamma e^{2\gamma m} N(v) P_{max} dm}_{(1)} + \underbrace{\int_0^{h_{max}} 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} P_{max} dm}_{(2)} \\
&= \underbrace{- \int_{h_{max}}^\infty 2\gamma e^{2\gamma m} N(v) P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} m} dm}_{(3)} + \underbrace{2 \int_{h_{max}}^\infty \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} m} dm}_{(4)}
\end{aligned}$$

A continuación, se resuelven estas cuatro integrales. Las integrales (1) y (3) se resuelven aplicando integración por partes mientras que las integrales (2) y (4) son inmediatas. Los resultados obtenidos son los siguientes:

(1)

$$\int_0^{h_{max}} 2\gamma e^{2\gamma m} N(v) P_{max} dm = P_{max} \left( e^{2\gamma h} N(-b_1^{max}) - 2N(-\gamma\sqrt{T-t}) + N(b_2^{max}) \right)$$

donde

$$b_1^{max} = \frac{h_{max}}{\sqrt{T-t}} + \gamma\sqrt{T-t}, \quad b_2^{max} = \frac{h_{max}}{\sqrt{T-t}} - \gamma\sqrt{T-t}$$

(2)

$$\int_0^{h_{max}} 2 \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} P_{max} dm = 2P_{max} \left( N(b_2^{max}) - N(-\gamma\sqrt{T-t}) \right)$$

(3)

$$\begin{aligned}
& \int_{h_{max}}^\infty 2\gamma e^{2\gamma m} N(v) P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} m} dm \\
&= P(r_t, t, T_b) \left( 1 - \frac{1}{2\tilde{r} - \tilde{\sigma}\lambda} \right) \left( -e^{(\tilde{\sigma}+2\gamma)h_{max}} N(-b_1^{max}) + e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} N(-b_3^{max}) \right)
\end{aligned}$$

donde

$$b_3^{max} = \frac{h_{max}}{\sqrt{T-t}} - (\gamma + \tilde{\sigma})\sqrt{T-t}$$

$$(4) \quad 2 \int_{h_{max}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(m-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}m} dm = 2P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} N(-b_3^{max})$$

Sustituyendo el resultado de estas integrales en el valor del *payoff* esperado y teniendo en cuenta que  $e^{2\gamma h_{max}} = \left(\frac{P_{min}}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{\frac{2}{\tilde{\sigma}}\gamma}$  y  $e^{(\tilde{\sigma}+2\gamma)h_{max}} = \left(\frac{P_{min}}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{\frac{2}{\tilde{\sigma}}\gamma} \frac{P_{min}}{P(r_t, t, T_b)}$ , se tiene que

$$E[\text{máx}(H_T, S_{max}) | r_t] = P_{max} \left( N(b_2^{max}) - \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{r}-\tilde{\sigma}\lambda} e^{2\gamma h_{max}} N(-b_1^{max}) \right) + P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\sigma}^2}{\tilde{r}-\tilde{\sigma}\lambda} \right) N(-b_3^{max}) \quad (19)$$

Sustituyendo (19) en (16) concluye la demostración.  $\blacksquare$

## Demostración de la Proposición 9.1

Considere una *call* barrera “*up and out*” con *strike*  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . El valor en el instante  $t$  de esta *call* se obtiene aplicando la Proposición 3.5:

$$\begin{aligned} c_{up-out}(r_t, t, T, T_b) &= P(r_t, t, T) E[c_{up-out, T} | r_t] \\ &= P(r_t, t, T) \int_0^L \int_0^L f(H_T, P_T) c_{up-out, T} dH_T dP_T \\ &= P(r_t, t, T) \int_{\Omega} f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x) c_{up-out, T} dm dx \end{aligned}$$

Calcularemos  $E[c_{up-out, T} | r_t]$  considerando los posibles caminos que puede seguir el precio del subyacente teniendo en cuenta que la función de densidad  $f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x)$  viene dada por (17).

Se debe tener en cuenta que para que el *payoff* de la *call* barrera “*up and out*” sea distinto de cero debe cumplirse que:

$$P_T > K \Rightarrow P_T = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}\bar{Z}_T} > K \Rightarrow \bar{Z}_T > \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln \left( \frac{K}{P(r_t, t, T_b)} \right) = \alpha$$

y

$$H_T < L \Rightarrow H_T = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}\bar{M}_T} < L \Rightarrow \bar{M}_T < \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right) = \beta$$

Además,

$$P(r_t, t, T_b) < L \Rightarrow \beta > 0$$

1.  $L \leq K$ : El *payoff* será cero pues la opción toca la barrera y desaparece. Por tanto, la región de integración será nula.

2.  $L > K$ . Entonces,  $\beta > \alpha$ . En este caso, existen dos alternativas:

- Si  $K \geq P(r_t, t, T_b)$ , la opción se encuentra *out-of-money* o *at-the-money*. Por tanto,  $\alpha \geq 0$ ,  $\bar{M}_T < \beta$ ,  $\bar{Z}_T > \alpha$  (véase primer gráfico en Figura 9). Entonces

$$\begin{aligned}
E[c_{up-out,T}|r_t] &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_x^{\beta} f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x) (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) dm dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \int_x^{\beta} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (2m-x) \frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) dm dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( -\frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_x^{\beta} dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx
\end{aligned}$$

- Si  $P(r_t, t, T_b) > K$ , la opción se encuentra *in-the-money*. Por tanto,  $\alpha < 0$ ,  $\bar{M}_T < \beta$ ,  $\bar{Z}_T > \alpha$  (véase segundo gráfico en Figura 9). Entonces

$$\begin{aligned}
E[c_{up-out,T}|r_t] &= \int_{\alpha}^0 \int_0^{\beta} f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x) (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) dm dx \\
&+ \int_0^{\beta} \int_x^{\beta} f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x) (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) dm dx \\
&= \int_{\alpha}^0 \int_0^{\beta} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (2m-x) \frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) dm dx \\
&+ \int_0^{\beta} \int_x^{\beta} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (2m-x) \frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) dm dx \\
&= \int_{\alpha}^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( -\frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_0^{\beta} dx \\
&+ \int_0^{\beta} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( -\frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_x^{\beta} dx \\
&= \int_{\alpha}^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\beta e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\
& = \int_\alpha^\beta e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx
\end{aligned}$$

En ambos casos se tiene la misma integral con el mismo espacio de integración. Entonces, se concluye que

$$\begin{aligned}
E[c_{up-out,T}|r_t] & = \int_\alpha^\beta e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\
& = \underbrace{\int_\alpha^\beta P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(1)} - \underbrace{\int_\alpha^\beta K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(2)} \\
& - \underbrace{\int_\alpha^\beta P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(3)} + \underbrace{\int_\alpha^\beta K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(4)}
\end{aligned}$$

A continuación, se resuelven estas integrales:

(1)

$$\begin{aligned}
& \int_\alpha^\beta P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
& = P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_\alpha^\beta e^{\tilde{\sigma} x + \gamma x - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
& = P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_\alpha^\beta e^{cx - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
& = P(r_t, t, T_b) e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} + \frac{c^2(T-t)}{2}} \int_\alpha^\beta \frac{e^{-\frac{(x-c(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
& = P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t)} (N(d_1) - N(x_1))
\end{aligned}$$

donde

$$c = \tilde{\sigma} + \gamma, \quad d_1 = \frac{c(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}}, \quad x_1 = \frac{c(T-t) - \beta}{\sqrt{T-t}}$$

y hemos utilizado  $ax^2 + bx = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right]$ .

(2)

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx = K \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{\gamma x - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
& = K \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\frac{(x-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx = K (N(d_2) - N(x_2))
\end{aligned}$$

donde

$$d_2 = d_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t}, \quad x_2 = x_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t}$$

(3)

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
& = P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{\tilde{\sigma}x + \gamma x - \frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}} dx \\
& = P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{cx + \frac{2\beta x}{(T-t)} - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
& = P(r_t, t, T_b) e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)} + \frac{l^2(T-t)}{2}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\frac{(x-l(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
& = P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t) + 2g \ln\left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\frac{(x-l(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
& = P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2g} (N(z_1) - N(y_1))
\end{aligned}$$

donde

$$l = c + \frac{2\beta}{(T-t)}, \quad g = \frac{c}{\tilde{\sigma}}, \quad z_1 = \frac{l(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}}, \quad y_1 = \frac{l(T-t) - \beta}{\sqrt{T-t}}$$

(4)

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\beta} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
& = K \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{\gamma x + \frac{2\beta x}{(T-t)} - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
& = K e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)} + \frac{q^2(T-t)}{2}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\frac{(x-q(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K e^{2(g-1) \ln\left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{-\frac{(x-q(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= K \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2(g-1)} (N(z_2) - N(y_2))
\end{aligned}$$

donde

$$q = \gamma + \frac{2\beta}{(T-t)}, \quad z_2 = z_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t}, \quad y_2 = y_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t}$$

Entonces, el valor del *payoff* esperado viene dado por

$$\begin{aligned}
E[c_{up-out, T} | r_t] &= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} (N(d_1) - N(x_1)) - K (N(d_2) - N(x_2)) \\
&- P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2g} (N(z_1) - N(y_1)) \\
&+ K \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2(g-1)} (N(z_2) - N(y_2))
\end{aligned}$$

Aplicando el factor de descuento  $P(r_t, t, T)$  concluye la demostración.  $\blacksquare$

## Demostración de la Proposición 9.2

Considere una *put* barrera “*up and out*” con *strike*  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . El valor en el instante  $t$  de esta *call* se obtiene aplicando la Proposición 3.5:

$$\begin{aligned}
p_{up-out}(r_t, t, T, T_b) &= P(r_t, t, T) E[p_{up-out, T} | r_t] \\
&= P(r_t, t, T) \int_0^L \int_0^L f(H_T, P_T) p_{up-out, T} dH_T dP_T \\
&= P(r_t, t, T) \int_{\Omega} \int f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x) p_{up-out, T} dm dx
\end{aligned}$$

Calcularemos  $E[p_{up-out, T} | r_t]$  considerando los posibles caminos que puede seguir el precio del subyacente teniendo en cuenta que la función de densidad  $f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x)$  viene dada por (17).

Se debe tener en cuenta que para que el *payoff* de la *put* barrera “*up and out*” sea distinto de cero debe cumplirse que:

$$P_T < K \Rightarrow P_T = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} \bar{Z}_T} < K \Rightarrow \bar{Z}_T < \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln\left(\frac{K}{P(r_t, t, T_b)}\right) = \alpha$$

y

$$H_T < L \Rightarrow H_T = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} \bar{M}_T} < L \Rightarrow \bar{M}_T < \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln\left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right) = \beta$$

Además,

$$P(r_t, t, T_b) < L \Rightarrow \beta > 0$$



1. Si  $L > K$ . Entonces,  $\beta > \alpha$ . En este caso, existen dos alternativas:

- Si  $K > P(r_t, t, T_b)$ , la opción se encuentra *in-the-money*. Por tanto,  $\alpha > 0$ ,  $\bar{M}_T < \beta$ ,  $\bar{Z}_T < \alpha$  (véase tercer gráfico en Figura 9). Entonces

$$\begin{aligned}
E[p_{up-out,T}|r_t] &= \int_{-\infty}^0 \int_0^\beta f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x) (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) dm dx \\
&+ \int_0^\alpha \int_x^\beta f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x) (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) dm dx \\
&= \int_{-\infty}^0 \int_0^\beta e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (2m-x) \frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) dm dx \\
&+ \int_0^\alpha \int_x^\beta e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (2m-x) \frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) dm dx \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) \left( -\frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_0^\beta dx \\
&+ \int_0^\alpha e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) \left( -\frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_x^\beta dx \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\
&+ \int_0^\alpha e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^\alpha e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx
\end{aligned}$$

- Si  $P(r_t, t, T_b) \geq K$ , la opción se encuentra *out-the-money* o *at-the-money*. Por tanto,  $\alpha \leq 0$ ,  $\bar{M}_T < \beta$ ,  $\bar{Z}_T < \alpha$  (véase cuarto gráfico en Figura 9). Entonces

$$\begin{aligned}
E[p_{up-out,T}|r_t] &= \int_{-\infty}^\alpha \int_0^\beta f(\bar{M}_T = m, \bar{Z}_T = x) (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) dm dx \\
&= \int_{-\infty}^\alpha \int_0^\beta e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (2m-x) \frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) dm dx \\
&= \int_{-\infty}^\alpha e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x}) \left( -\frac{e^{-\frac{(2m-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_0^\beta dx
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma} x} \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx$$

2. Si  $L \leq K$ :

- $P(r_t, t, T_b) \geq K$ : el *payoff* será cero pues la opción toca la barrera y desaparece. Por tanto, la región de integración será nula.
- $L < P(r_t, t, T_b) < K$ : el *payoff* será cero pues la opción toca la barrera y desaparece. Por tanto, la región de integración será nula.
- $P(r_t, t, T_b) < L < K$ : se obtendría la misma región de integración que para la primera alternativa del caso anterior.

En ambos casos se tiene la misma integral con el mismo espacio de integración. Entonces, se concluye que

$$\begin{aligned} E[p_{up-out,T}|r_t] &= \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma} x} \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\ &= \underbrace{- \int_{-\infty}^{\alpha} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(1)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\alpha} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(2)} \\ &\quad + \underbrace{\int_{-\infty}^{\alpha} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(3)} - \underbrace{\int_{-\infty}^{\alpha} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(4)} \end{aligned}$$

A continuación, se resuelven las integrales anteriores.

(1)

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\alpha} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\ &= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\tilde{\sigma} x + \gamma x - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\ &= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{cx - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\ &= P(r_t, t, T_b) e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} + \frac{c^2(T-t)}{2}} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-c(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\ &= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{\tau} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t)} N(-d_1) \end{aligned}$$

donde

$$c = \tilde{\sigma} + \gamma, \quad d_1 = \frac{c(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}},$$

y hemos utilizado  $ax^2 + bx = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right]$ .

(2)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\alpha} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx = K \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\gamma x - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\ &= K \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx = KN(-d_2) \end{aligned}$$

donde

$$d_2 = \frac{\gamma(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}}$$

(3)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\alpha} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\ &= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\tilde{\sigma}x + \gamma x - \frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}} dx \\ &= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{cx + \frac{2\beta x}{(T-t)} - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\ &= P(r_t, t, T_b) e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)} + \frac{l^2(T-t)}{2}} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-l(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\ &= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t) + 2g \ln\left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-l(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\ &= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2g} N(-z_1) \end{aligned}$$

donde

$$l = c + \frac{2\beta}{(T-t)}, \quad g = \frac{c}{\tilde{\sigma}}, \quad z_1 = \frac{l(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}},$$

(4)

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\alpha} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(2\beta-x)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= K \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\gamma x + \frac{2\beta x}{(T-t)} - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= K e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)} + \frac{q^2(T-t)}{2}} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-q(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= K e^{2(g-1)\ln\left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-q(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= K \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2(g-1)} N(-z_2)
\end{aligned}$$

donde

$$q = \gamma + \frac{2\beta}{(T-t)}, \quad z_2 = z_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t},$$

Entonces, el valor del *payoff* esperado viene dado por

$$\begin{aligned}
E[p_{up-out, T} | r_t] &= -P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t)} N(-d_1) + K N(-d_2) \\
&+ P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2g} N(-z_1) \\
&- K \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2(g-1)} N(-z_2)
\end{aligned}$$

Aplicando el factor de descuento  $P(r_t, t, T)$  concluye la demostración. ■

### Demostración de la Proposición 9.3

Considere una *call* barrera “down and out” con *strike*  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . El valor en el instante  $t$  de esta *call* se obtiene aplicando la Proposición 3.5:

$$\begin{aligned}
c_{down-out}(r_t, t, T, T_b) &= P(r_t, t, T) E[c_{down-out, T} | r_t] \\
&= P(r_t, t, T) \int_0^L \int_0^L f(D_T, P_T) c_{down-out, T} dD_T dP_T \\
&= P(r_t, t, T) \int \int_{\Omega} f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x) c_{down-out, T} dm dx
\end{aligned}$$

Calcularemos  $E[c_{down-out, T} | r_t]$  considerando los posibles caminos que puede seguir el precio del subyacente teniendo en cuenta que la función de densidad  $f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x)$  viene dada por (12).

Se debe tener en cuenta que para que el *payoff* de la *call* barrera “*down and out*” sea distinto de cero debe cumplirse que:

$$P_T > K \Rightarrow P_T = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} \bar{Z}_T} > K \Rightarrow \bar{Z}_T > \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln \left( \frac{K}{P(r_t, t, T_b)} \right) = \alpha$$

y

$$D_T > L \Rightarrow D_T = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} \bar{J}_T} > L \Rightarrow \bar{J}_T > \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right) = \beta$$

Además,

$$P(r_t, t, T_b) > L \Rightarrow \beta < 0$$

1. Si  $L < K$ . Entonces  $\beta < \alpha$ . En este caso, existen dos alternativas:

- Si  $K \geq P(r_t, t, T_b)$ , la opción se encuentra *out-of-money* o *at-the-money*. Por tanto,  $\alpha \geq 0$ ,  $\bar{J}_T > \beta$ ,  $\bar{Z}_T > \alpha$  (véase primer gráfico en Figura 10). Entonces

$$\begin{aligned} E[c_{down-out,T}|r_t] &= \int_{\alpha}^{\infty} \int_{\beta}^0 f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x) (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) dm dx \\ &= \int_{\alpha}^{\infty} \int_{\beta}^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (x-2m) \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) dm dx \\ &= \int_{\alpha}^{\infty} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_{\beta}^0 dx \\ &= \int_{\alpha}^{\infty} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \end{aligned}$$

- Si  $P(r_t, t, T_b) > K$ , la opción se encuentra *in-the-money*. Por tanto,  $\alpha < 0$ ,  $\bar{J}_T > \beta$ ,  $\bar{Z}_T > \alpha$  (véase segundo gráfico en Figura 10). Entonces

$$\begin{aligned} E[c_{down-out,T}|r_t] &= \int_{\alpha}^0 \int_{\beta}^x f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x) (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) dm dx \\ &+ \int_0^{\infty} \int_{\beta}^0 f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x) (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) dm dx \\ &= \int_{\alpha}^0 \int_{\beta}^x e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (x-2m) \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) dm dx \\ &+ \int_0^{\infty} \int_{\beta}^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (x-2m) \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) dm dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\alpha}^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_{\beta}^x dx \\
&+ \int_0^{\infty} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_{\beta}^0 dx \\
&= \int_{\alpha}^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\
&+ \int_0^{\infty} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\
&= \int_{\alpha}^{\infty} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx
\end{aligned}$$

2.  $L \geq K$ :

- $P(r_t, t, T_b) \leq K$  : El *payoff* será cero pues la opción toca la barrera y desaparece. Por tanto, la región de integración será nula.
- $L > P(r_t, t, T_b) > K$ : El *payoff* será cero pues la opción toca la barrera y desaparece. Por tanto, la región de integración será nula.
- $P(r_t, t, T_b) > L > K$ : Se obtendría la misma región de integración que para la segunda alternativa del caso anterior.

En ambos casos se tiene la misma integral con el mismo espacio de integración. Entonces, se concluye que

$$\begin{aligned}
E[c_{down-out,T}|r_t] &= \int_{\alpha}^{\infty} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} - K) \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\
&= \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(1)} - \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(2)} \\
&\quad - \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} P(r_t, t, T_b)e^{\tilde{\sigma}x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(3)} + \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}_{(4)}
\end{aligned}$$

A continuación, se resuelven las integrales anteriores.

(1)

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\infty} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{\tilde{\sigma}x + \gamma x - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{cx - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} + \frac{c^2(T-t)}{2}} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-c(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{\sigma} - \lambda\tilde{\sigma})(T-t)} N(d_1)
\end{aligned}$$

donde

$$c = \tilde{\sigma} + \gamma, \quad d_1 = \frac{c(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}},$$

y hemos utilizado  $ax^2 + bx = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right]$ .

(2)

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\infty} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx = K \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{\gamma x - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= K \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx = KN(d_2)
\end{aligned}$$

donde

$$d_2 = \frac{\gamma(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}}$$

(3)

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha}^{\infty} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{\tilde{\sigma}x + \gamma x - \frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{cx + \frac{2\beta x}{(T-t)} - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) e^{-\frac{\gamma^2 T}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)} + \frac{l^2(T-t)}{2}} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-l(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t) + 2g \ln\left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-l(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2g} N(z_1)
\end{aligned}$$

donde

$$(4) \quad l = c + \frac{2\beta}{(T-t)}, \quad g = \frac{c}{\tilde{\sigma}}, \quad z_1 = \frac{l(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha}^{\infty} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= K \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{\gamma x + \frac{2\beta x}{(T-t)} - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= K e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)} + \frac{q^2(T-t)}{2}} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-q(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= K e^{2(g-1) \ln\left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-q(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= K \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2(g-1)} N(z_2)
\end{aligned}$$

donde

$$q = \gamma + \frac{2\beta}{(T-t)}, \quad z_2 = z_1 - \tilde{\sigma} \sqrt{T-t},$$

Entonces, el valor del *payoff* esperado viene dado por

$$\begin{aligned}
E[c_{down-out, T} | r_t] &= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} N(d_1) - K N(d_2) \\
&\quad - P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2g} N(z_1) \\
&\quad + K \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2(g-1)} N(z_2)
\end{aligned}$$

Aplicando el factor de descuento  $P(r_t, t, T)$  concluye la demostración. ■

## Demostración de la Proposición 9.4

Considere una *put* barrera “*down and out*” con *strike*  $K$  que vence en  $T$  y cuyo subyacente es un bono cupón-cero con vencimiento  $T_b > T$ . El valor en el instante  $t$  de esta *call* se obtiene aplicando la Proposición 3.5:



$$\begin{aligned}
p_{down-out}(r_t, t, T, T_b) &= P(r_t, t, T) E[p_{down-out, T} | r_t] \\
&= P(r_t, t, T) \int_0^L \int_0^L f(D_T, P_T) p_{down-out, T} dD_T dP_T \\
&= P(r_t, t, T) \int_{\Omega} f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x) p_{down-out, T} dm dx
\end{aligned}$$

Calcularemos  $E[p_{down-out, T} | r_t]$  considerando los posibles caminos que puede seguir el precio del subyacente teniendo en cuenta que la función de densidad  $f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x)$  viene dada por (12).

Se debe tener en cuenta que para que el *payoff* de la *put* barrera “*down and out*” sea distinto de cero debe cumplirse que:

$$P_T < K \Rightarrow P_T = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} \bar{Z}_T} < K \Rightarrow \bar{Z}_T < \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln \left( \frac{K}{P(r_t, t, T_b)} \right) = \alpha$$

y

$$D_T > L \Rightarrow D_T = P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} \bar{J}_T} > L \Rightarrow \bar{J}_T > \frac{1}{\tilde{\sigma}} \ln \left( \frac{L}{P(r_t, t, T_b)} \right) = \beta$$

Además,

$$P(r_t, t, T_b) > L \Rightarrow \beta < 0$$

1. Si  $L \geq K \implies$ : el *payoff* será cero pues la opción toca la barrera y desaparece. Por tanto, la región de integración será nula.
2. Si  $L < K$ . Entonces  $\beta < \alpha$ . En este caso, existen dos alternativas:
  - Si  $K > P(r_t, t, T_b)$ , la opción se encuentra *in-the-money*. Por tanto  $\alpha > 0$ ,  $\bar{J}_T > \beta$ ,  $\bar{Z}_T < \alpha$  (véase tercer gráfico en Figura 10). Entonces

$$\begin{aligned}
E[p_{down-out, T} | r_t] &= \int_{\beta}^{\alpha} \int_{\beta}^x f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x) (K - P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x}) dm dx \\
&+ \int_0^{\alpha} \int_{\beta}^0 f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x) (K - P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x}) dm dx \\
&= \int_{\beta}^0 \int_{\beta}^x e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (x-2m) \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x} - K) dm dx \\
&+ \int_0^{\alpha} \int_{\beta}^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (x-2m) \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (K - P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x}) dm dx \\
&= \int_{\beta}^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma} x}) \left( \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_{\beta}^x dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\alpha e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma}x} \left( \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_\beta^0 dx \\
& = \int_\beta^0 e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma}x} \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\
& + \int_0^\alpha e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma}x} \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\
& = \int_\beta^\alpha e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma}x} \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx
\end{aligned}$$

- Si  $P(r_t, t, T_b) \geq K$ , la opción se encuentra *out-the-money* o *at-the-money*. Por tanto,  $\alpha \leq 0$ ,  $\bar{J}_T > \beta$ ,  $\bar{Z}_T < \alpha$  (véase cuarto gráfico en Figura 10). Entonces

$$\begin{aligned}
E[p_{down-out,T}|r_t] & = \int_\beta^\alpha \int_\beta^x f(\bar{J}_T = m, \bar{Z}_T = x) (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma}x} dmdx \\
& = \int_\beta^\alpha \int_\beta^x e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{2}{(T-t)} (x - 2m) \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma}x} dmdx \\
& = \int_\beta^\alpha e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma}x} \left( \frac{e^{-\frac{(x-2m)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) \Big|_\beta^x dx \\
& = \int_\beta^\alpha e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma}x} \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx
\end{aligned}$$

En ambos casos se tiene la misma integral con el mismo espacio de integración. Entonces, se concluye que

$$\begin{aligned}
E[p_{down-out,T}|r_t] & = \int_\beta^\alpha e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} (K - P(r_t, t, T_b)) e^{\tilde{\sigma}x} \left( \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} - \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \right) dx \\
& = - \overbrace{\int_\beta^\alpha P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}^{(1)} + \overbrace{\int_\beta^\alpha K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}^{(2)} \\
& + \overbrace{\int_\beta^\alpha P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}^{(3)} - \overbrace{\int_\beta^\alpha K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx}^{(4)}
\end{aligned}$$

A continuación, se resuelven las integrales anteriores.

(1)

$$\begin{aligned}
& \int_{\beta}^{\alpha} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\beta}^{\alpha} e^{\tilde{\sigma}x + \gamma x - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\beta}^{\alpha} e^{cx - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) e^{-\frac{\gamma^2 T}{2} + \frac{c^2 T}{2}} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-c(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r} - \lambda \tilde{\sigma})(T-t)} (N(-d_1) - N(-x_1))
\end{aligned}$$

donde

$$c = \tilde{\sigma} + \gamma, \quad d_1 = \frac{c(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}}, \quad x_1 = \frac{c(T-t) - \beta}{\sqrt{T-t}}$$

y hemos utilizado  $ax^2 + bx = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right]$ .

(2)

$$\begin{aligned}
& \int_{\beta}^{\alpha} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx = K \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\beta}^{\alpha} e^{\gamma x - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= K \int_{\beta}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-\gamma(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx = K (N(-d_2) - N(-x_2))
\end{aligned}$$

donde

$$d_2 = d_1 - \tilde{\sigma} \sqrt{T-t}, \quad x_2 = x_1 - \tilde{\sigma} \sqrt{T-t}$$

(3)

$$\begin{aligned}
& \int_{\beta}^{\alpha} P(r_t, t, T_b) e^{\tilde{\sigma}x} e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\beta}^{\alpha} e^{\tilde{\sigma}x + \gamma x - \frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\beta}^{\alpha} e^{cx + \frac{2\beta x}{(T-t)} - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)} + \frac{l^2(T-t)}{2}} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-l(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)+2g \ln\left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-l(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2g} (N(-z_1) - N(-y_1))
\end{aligned}$$

donde

$$l = c + \frac{2\beta}{(T-t)}, \quad g = \frac{c}{\tilde{\sigma}}, \quad z_1 = \frac{l(T-t) - \alpha}{\sqrt{T-t}}, \quad y_1 = \frac{l(T-t) - \beta}{\sqrt{T-t}}$$

(4)

$$\begin{aligned}
&\int_{\beta}^{\alpha} K e^{\gamma x - \frac{\gamma^2(T-t)}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-2\beta)^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= K \frac{e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\beta}^{\alpha} e^{\gamma x + \frac{2\beta x}{(T-t)} - \frac{x^2}{2(T-t)}} dx \\
&= K e^{-\frac{\gamma^2(T-t)}{2} - 2\frac{\beta^2}{(T-t)} + \frac{q^2(T-t)}{2}} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-q(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= K e^{2(g-1) \ln\left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{e^{-\frac{(x-q(T-t))^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dx \\
&= K \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2(g-1)} (N(-z_2) - N(-y_2))
\end{aligned}$$

donde

$$q = \gamma + \frac{2\beta}{(T-t)}, \quad z_2 = z_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t}, \quad y_2 = y_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T-t}$$

Entonces, el valor del *payoff* esperado viene dado por

$$\begin{aligned}
E[p_{down-out,T}|r_t] &= -P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} (N(-d_1) - N(-x_1)) + K (N(d_2) - N(x_2)) \\
&+ P(r_t, t, T_b) e^{(\tilde{r}-\lambda\tilde{\sigma})(T-t)} \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2g} (N(-z_1) - N(-y_1)) \\
&- K \left(\frac{L}{P(r_t, t, T_b)}\right)^{2(g-1)} (N(-z_2) - N(-y_2))
\end{aligned}$$

Aplicando el factor de descuento  $P(r_t, t, T)$  concluye la demostración. ■

## Apéndice de Figuras

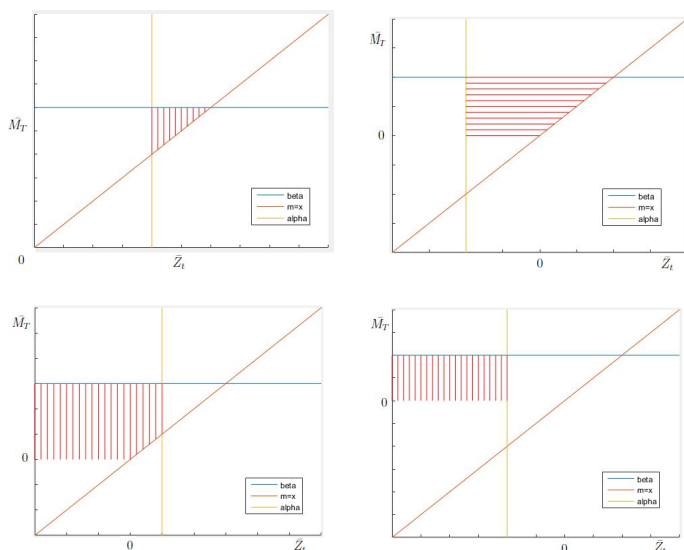


Figura 9: Región de integración para opciones “up and out” cuando  $L > K$ . La primera fila muestra las regiones para opciones *call* y las alternativas  $K \geq P(r_t, t, T_b)$  y  $P(r_t, t, T_b) > K$ , respectivamente. La segunda fila muestra las regiones para opciones *put* y las alternativas  $K > P(r_t, t, T_b)$  y  $P(r_t, t, T_b) \geq K$ , respectivamente.

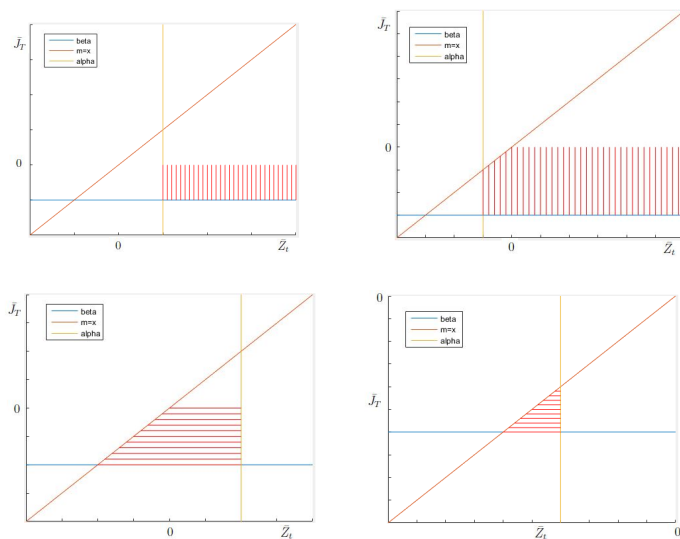


Figura 10: Región de integración para opciones “down and out” cuando  $K > L$ . La primera fila muestra las regiones para opciones *call* y las alternativas  $K \geq P(r_t, t, T_b)$  y  $P(r_t, t, T_b) > K$ , respectivamente. La segunda fila muestra las regiones para opciones *put* y las alternativas  $K > P(r_t, t, T_b)$  y  $P(r_t, t, T_b) \geq K$ , respectivamente.