

# Valoración de futuros sobre permisos de emisión de CO<sub>2</sub>: análisis empírico y predicción

Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

Trabajo de Investigación 018/016



Alexandra Balado

Director: Manuel Moreno Fuentes

Universidad de Castilla-La Mancha  
Universidad Complutense de Madrid  
Universidad del País Vasco  
Universidad de Valencia

Julio 2018

## Resumen

Este trabajo analiza el comportamiento empírico *in* y *out-of-sample* del modelo propuesto en Moreno, Novales y Platania (2018) utilizando precios de futuros sobre permisos de emisiones de CO<sub>2</sub>. Este modelo supone que dichos precios presentan reversión a la media y estacionalidad. En concreto, se supone que los precios convergen a un valor a largo plazo que experimenta diversas fluctuaciones periódicas y suaves durante largos periodos de tiempo. Este supuesto es modelizado a través de una serie de Fourier.

El comportamiento de este modelo se compara frente al de los modelos propuestos en Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002). También se amplían algunas especificaciones del modelo de Moreno, Novales y Platania (2018) para analizar cuántos términos estacionales son necesarios. Finalmente, se estudia el comportamiento *in-sample* de un modelo bifactorial que introduce un segundo factor, el rendimiento por conveniencia (*convenience yield*).

La principal conclusión es que las fluctuaciones a largo plazo se encuentran presentes en los precios de estos futuros medioambientales y que el comportamiento *in-sample* del modelo de Moreno, Novales y Platania (2018) es superior al del resto de alternativas unifactoriales. El análisis predictivo muestra que no hay un modelo que sea claramente superior a los demás. Finalmente, se comprueba que el modelo bifactorial proporciona un ajuste *in-sample* superior al obtenido mediante las especificaciones unifactoriales.

# 1. Introducción

Existen gases de efecto invernadero, tales como el dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ), el gas metano ( $\text{CH}_4$ ) o el óxido nitroso ( $\text{N}_2\text{O}$ ), entre otros, que provocan el incremento en la temperatura mundial. El más importante es el  $\text{CO}_2$ , gas que ha alcanzado su nivel más alto de concentración atmosférica en los últimos 800.000 años. Esto ha provocado un aumento de aproximadamente  $0,9^\circ\text{C}$  desde la revolución industrial. El quinto informe de evaluación del Panel Internacional de Cambio Climático (2014) advierte que, si la evolución de las emisiones de gases de efecto invernadero continúa como ahora, el incremento de la temperatura que se prevé para finales de siglo es de  $4^\circ\text{C}$ .

Por tanto, el cambio climático es uno de los mayores cambios que se producen a nivel global, pero no todos los países se ven afectados de la misma forma. Por ejemplo, los países costeros experimentan los efectos de la subida del nivel del mar causada por el cambio climático, mientras que los países del interior no sufren este efecto de manera directa.

Además, los países que emiten más cantidad de gases no tienen por qué ser los más afectados por sus efectos. De hecho, los países más pobres (cuyas economías se basan en la agricultura y ganadería) son los más afectados con el cambio climático y, sin embargo, son los países más ricos los que emiten una mayor cantidad de gases a la atmósfera.

Para tratar de reducir las emisiones y ralentizar el cambio climático se necesita un acuerdo internacional para que todos los países tengan conciencia de los efectos y se reduzcan las emisiones a nivel global. Con esta motivación surge el Protocolo de Kyoto, un acuerdo internacional de la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático (CMNUCC), que pretende reducir las emisiones de gases de efecto invernadero. En un primer período (2008-2012), el objetivo de este protocolo era reducir estas emisiones a nivel mundial al menos un 8% respecto al año de referencia (1990), teniendo cada país sus propios porcentajes de emisión.

Con el objetivo de facilitar esta reducción de gases, el protocolo de Kyoto introduce tres mecanismos: el mecanismo de desarrollo limpio (CDM), la implementación conjunta (JI) y la negociación internacional de emisiones. El CDM permite invertir en proyectos de reducción de emisiones en países en vías de desarrollo. Por otro lado, la JI permite a países industrializados realizar inversiones conjuntas en proyectos de reducción de emisiones en otros países industrializados.

Entre los objetivos del Protocolo se encuentran, entre otros, los siguientes:

- Fomento de la eficiencia energética en los sectores pertinentes de la economía nacional.
- Promoción de prácticas sostenibles de gestión forestal, la forestación y la reforestación.
- Promoción de modalidades agrícolas sostenibles a la luz de las consideraciones

del cambio climático.

- Investigación, promoción, desarrollo y aumento del uso de formas nuevas y renovables de energía, tecnologías avanzadas y novedosas que sean ecológicamente racionales.
- Reducción progresiva o eliminación gradual de las deficiencias del mercado, los incentivos fiscales, las exenciones tributarias y arancelarias y las subvenciones que sean contrarios al objetivo de la Convención en todos los sectores emisores de gases de efecto invernadero y aplicación de instrumentos de mercado.
- Limitación y/o reducción de las emisiones de metano mediante su recuperación y utilización en la gestión de los desechos así como en la producción, transporte y distribución de energía.

El incumplimiento de estos objetivos daría lugar a sanciones de 100 euros por tonelada de CO<sub>2</sub> excedidas. Por tanto, para evitar dichas sanciones, comienzan a comercializarse los derechos de emisión (EUA, European Emission Allowances), de modo que los países que emiten menos gases venden sus derechos a los países que producen una mayor cantidad de emisiones. Estos derechos se negocian en el Intercontinental Exchange (ICE).

Como consecuencia de la existencia de este nuevo mercado, se producen varios riesgos específicos para la negociación de permisos de emisiones. En particular, el riesgo de precio (debido a fluctuaciones en los precios de los derechos de emisión) y riesgo de volumen (debido a fluctuaciones inesperadas en la demanda de energía que los emisores no conocen antes de realizar su demanda exacta de EUA). Para cubrirse ante estos riesgos, se pueden utilizar diferentes activos derivados como, por ejemplo, los futuros, que serán el objeto de análisis en este trabajo.

En la cumbre de Doha de 2012, se acordó dar continuidad al marco jurídico del Protocolo de Kyoto a través de la adopción de las enmiendas necesarias para hacer posible su continuidad con un segundo periodo de compromiso a partir del 1 de enero de 2013. La adopción de estas enmiendas incluye: los nuevos compromisos de las partes del Protocolo de Kyoto, que accedieron a asumir compromisos en un segundo período (desde 2013 hasta 2020); una lista revisada de los gases de efecto invernadero para el segundo período de compromiso; y las enmiendas a varios artículos del Protocolo de Kyoto, cuestiones específicamente pertenecientes al primer período de compromiso y que necesitaban ser actualizadas para el segundo período de compromiso.

El 12 de diciembre de 2015 se firma el acuerdo climático de París, que es una mejora del Protocolo de Kyoto, y cuya principal distinción reside en que anula la diferencia entre países desarrollados y países en vías de desarrollo. En el protocolo de Kyoto, los países desarrollados debían reducir sus emisiones de gases respecto al año 1990, mientras que los países en vías de desarrollo no tenían ningún compromiso concreto. Además, el acuerdo de París cubre el 86 % de los gases que se emiten,

cuatro veces más que el protocolo de Kyoto. El acuerdo cubrirá el periodo a partir de 2020, que es cuando finaliza la vigencia del protocolo de Kyoto. El objetivo del acuerdo de París es reducir el incremento de la temperatura global por debajo de 2 grados centígrados (y luego seguir trabajando para reducirlo a 1.5 grados) y alcanzar cero emisiones netas para la segunda parte de este siglo. Para comprobar si los países están cumpliendo sus objetivos, deben informar cada 5 años al NDC (National Determined Contributions).

Dado que las emisiones de CO<sub>2</sub> son un tema muy actual, diferentes autores han analizado este tema. Por ejemplo, Dell *et al.* (2009, 2012) proporcionan evidencia empírica de que las temperaturas más altas reducen sustancialmente el crecimiento económico en países pobres. Estos autores encuentran que las temperaturas más altas reducen las tasas de crecimiento en lugar de solo el nivel de consumo. Además, los aumentos de temperatura reducen la producción cultural e industrial y afectan negativamente a la estabilidad política. Esto implica que la temperatura será una fuente de riesgo económico que podría afectar negativamente a la economía.

Hambel *et al.* (2015) afirman que el aumento de la temperatura reduce el crecimiento económico y la producción y estudian la reducción óptima de emisiones de carbono en un modelo de equilibrio estocástico general, en el que diversas variables como la concentración de carbono, la temperatura global y el PIB mundial se modelizan mediante procesos estocásticos. El modelo económico describe la dinámica global de PIB. El calentamiento global puede tener efectos negativos sobre el crecimiento económico y la sociedad debe elegir la política de reducción de emisiones tal que maximice el bienestar actual y futuro.

Estos autores utilizan datos de la concentración de CO<sub>2</sub> en la atmósfera desde 1958 y concluyen que posponer las acciones de reducción de emisiones tiene graves consecuencias para la humanidad. En concreto, si la sociedad actúa ahora e implementa la política de reducción óptima, hay un 60-70 % de posibilidades de que el clima pueda estabilizarse y que los costes sean moderados y el crecimiento económico pueda recuperarse. Posponer la implementación de la política óptima por 10 años reduce esta probabilidad un 30 % aproximadamente. Si la sociedad espera 20 años, entonces la probabilidad está por debajo del 10 % y tanto el clima como el crecimiento económico podrían verse afectados significativamente. Además, afirman que, en el momento actual, los costes de la implementación de la política óptima son moderados. Sin embargo, no hay garantía de que el clima todavía se puede estabilizar pues los posibles efectos de retroalimentación futura sobre la temperatura son difíciles de estimar.

Posteriormente, estos autores proponen en Hambel *et al.* (2018) un modelo teórico de juego dinámico entre diversos países con economías abiertas. A partir de este modelo, se estudian las decisiones óptimas de reducción de emisiones en un marco donde se consideran tanto la situación cooperativa como la no cooperativa. Sostienen que el coste del calentamiento global no es únicamente el que proviene de los efectos directos sobre el país, sino que el efecto que tiene en otros países también afecta

mediante las exportaciones e importaciones. Por tanto, aunque nos encontrásemos en una situación no cooperativa, los países menos afectados por el cambio climático también tendrían incentivos a reducir las emisiones.

Hablando más concretamente del tema de este trabajo, podemos indicar los siguientes trabajos que han estudiado los derechos de emisión y los precios de los futuros sobre dichos derechos: Benz y Trück (2008), Seifert *et al.* (2008) y Paoletta y Taschini (2008) realizan un análisis econométrico de los precios de los permisos de emisión e investigan diferentes modelos para determinar la dinámica de los precios *spot*. Conrad *et al.* (2012) modelizan el proceso de ajuste por el cual los precios de los EUA responden ante publicaciones y anuncios y encuentran que las decisiones de la Comisión Europea sobre los planes de asignación nacionales tienen un gran impacto en el precio de los EUA. Chevallier (2009a) estudia la relación que existe entre la rentabilidad de los futuros del carbono y los cambios de las condiciones macroeconómicas. Bredin y Muckley (2011) estudian cómo ciertos factores fundamentales, como el crecimiento económico, los precios de la energía y las condiciones climáticas, pueden determinar los precios de los futuros sobre EUA. Kara *et al.* (2008) estudia el impacto de los EUA sobre el mercado de electricidad en Finlandia.

También podemos mencionar diversos estudios sobre la valoración de futuros de *commodities* como, por ejemplo, Fama y French (1987), Lucía y Schwartz (2002) o Sørensen (2002), que constatan el componente estacional presente en diversas *commodities*. Adicionalmente, Gibson y Schwartz (1990) proponen un modelo bifactorial para el precio del petróleo y Schwartz y Smith (2000) proponen un modelo bifactorial donde los precios presentan reversión a la media.

En este trabajo nos basaremos en el modelo propuesto en Moreno, Novales y Platania (2018) (Moreno *et al.* (2018), a partir de ahora). Dicho modelo supone que los precios de ciertas *commodities* presentan reversión a la media y estacionalidad.<sup>1</sup> Este modelo fue propuesto inicialmente para futuros sobre subyacentes energéticos y su comportamiento empírico para futuros agrícolas fue analizado en Del Campo y Moreno (2018).

También extenderemos algunas versiones del modelo de Moreno *et al.* (2018) para estudiar los modelos con un componente adicional de estacionalidad y/o sin presencia de oscilaciones a largo plazo. Se espera que la introducción de las series de Fourier del modelo (las cuales introducen la estacionalidad y la reversión a niveles de largo plazo) ayuden a la hora de estimar el precio de los futuros de las emisiones de CO<sub>2</sub>. Para ilustrar esta posible mejora, este modelo será comparado con los modelos propuestos en Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002).

Además, se realizará un estudio del precio de los futuros introduciendo un segundo factor, el rendimiento por conveniencia (*convenience yield*). Para ello nos basaremos en el trabajo de Bacaicoa *et al.* (2014). Según Borak *et al.* (2006), el *convenience*

---

<sup>1</sup>La teoría de la reversión a la media de los precios de las *commodities* supone que los precios revierten a un determinado nivel. Por tanto, si el precio es superior a dicho nivel, la oferta de la *commodity* aumentará y, cuando el precio sea inferior al precio de convergencia, la oferta disminuirá.

*yield* influye para que el mercado este en *contango* o en *backwardation*. Así, entre 2005 y 2007 el mercado se encontraba en *backwardation* pero después, debido a una noticia de sobre-asignación, el *convenience yield* desciende hasta prácticamente anularse y el mercado pasa a estar en *contango*.

En este trabajo se realizarán diversos análisis tanto *in-sample* como *out-of-sample*, los cuales se llevarán a cabo mediante mínimos cuadrados no lineales. Tanto para el modelo bifactorial, que utiliza el *convenience yield*, como para los análisis de predicción se utilizará el Filtro de Kalman. Todos estos análisis se basan en datos de futuros sobre EUA para un período muestral desde 2009 hasta la actualidad.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En la sección 2 se describen los modelos teóricos que utilizaremos y compararemos en este trabajo. La sección 3 presenta el método econométrico que se utiliza, en la sección 4 se describen las características de los datos utilizados y la sección 5 presenta los resultados obtenidos. Finalmente, la sección 6 resume las principales conclusiones y sugiere diversas posibles líneas de investigación futuras.

## 2. Marco teórico

Esta sección describe diversos modelos (unifactoriales y bifactoriales) que han sido propuestos en la literatura para analizar el comportamiento de los precios de las *commodities*. Sin ánimo de presentar una panorámica exhaustiva de la literatura previa, nuestro objetivo es colocar en perspectiva los diferentes modelos propuestos previamente antes de presentar el modelo de Moreno *et al.* (2018) posteriormente.

### 2.1. Modelos unifactoriales

#### 2.1.1. Modelo de Schwartz (1997) (Modelo 1)

Este autor supone que el precio *spot* de una cierta *commodity*,  $S_t$ , sigue el siguiente proceso de difusión:

$$dS_t = \kappa(\mu - \ln(S_t))S_t dt + \sigma dW_t$$

donde  $\kappa$ ,  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes. En concreto,  $\kappa$  denota la velocidad de reversión a la media,  $\mu$  indica el valor de reversión a la media,  $\sigma$  es el coeficiente de difusión y  $dW_t$  es el incremento de un movimiento Browniano estándar.

Si suponemos el precio de riesgo del mercado es constante,  $\lambda$  y aplicamos el Lema de Itô, tenemos que el logaritmo del precio *spot* viene dado por el siguiente proceso riesgo-neutral:

$$d \ln(S_t) = \kappa(\tilde{\alpha} - \ln(S_t))dt + \sigma d\tilde{W}_t \quad (1)$$

donde  $\tilde{\alpha} = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa}$  y  $\tilde{W}_t = W_t + \lambda t$  un movimiento Browniano bajo la medida de martingala. La solución a la ecuación (1) viene dada por:

$$\ln(S_u) = e^{-\kappa(u-t)} \ln(S_t) + (1 - e^{-\kappa(u-t)}) \tilde{\alpha} + \sigma \int_t^u e^{-\kappa(u-s)} d\tilde{W}_s \quad (2)$$

Por tanto,  $\ln(S_u)$  sigue una distribución Gaussiana, cuyas media y varianza condicionales a la información en el instante  $t$  vienen dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}\tilde{E}[\ln(S_T)|F_t] &= e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \tilde{\alpha} \\ \tilde{V}[\ln(S_T)|F_t] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)})\end{aligned}$$

Por tanto, el precio del futuro sobre esta *commodity* sigue una distribución lognormal. Este precio es el precio esperado de la *commodity* bajo la medida de martingala:

$$\begin{aligned}F(S_t, t, T) &= \tilde{E}[\ln(S_T)|F_t] = \exp \left\{ \tilde{E}[\ln(S_T)|F_t] + \frac{1}{2} \tilde{V}[\ln(S_T)|F_t] \right\} \\ &= \exp \left\{ e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \tilde{\alpha} + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \right\}\end{aligned}$$

Alternativamente, en logaritmos, tenemos:

$$\ln(F(S_t, t, T)) = e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \tilde{\alpha} + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \quad (3)$$

### 2.1.2. Modelo de Lucía y Schwartz (2002) (Modelo 2)

Estos autores estudian los precios *spot* y futuros del mercado eléctrico nórdico. Proponen cuatro modelos para la evolución temporal de estos precios: uno basado en el precio *spot*, otro en el logaritmo del precio *spot* y otros dos modelos bifactoriales, basados tanto en el precio *spot* como en su logaritmo. Nos centraremos principalmente en los modelos que proponen para el logaritmo del precio *spot*, al ser el objetivo principal de nuestro trabajo.

Comenzaremos con el caso unifactorial.<sup>2</sup> Estos autores suponen que el logaritmo del precio *spot* incluye una función determinística variable en el tiempo,  $f(t)$ , cuyo objetivo es capturar la naturaleza estacional de los precios:

$$\ln(S_t) = f(t) + Y_t \quad (4)$$

donde  $Y_t$  es un proceso de difusión estocástico, que viene dado por

$$dY_t = -\kappa Y_t dt + \sigma dZ$$

con  $\kappa > 0$  pues indica la velocidad de reversión a la media. El valor de reversión es cero y  $dZ$  es un incremento de un movimiento Browniano estándar.

Bajo la medida neutral al riesgo, tenemos:

$$dY_t = \kappa(\tilde{\alpha} - Y_t)dt + \sigma d\tilde{Z} \quad (5)$$

donde  $\tilde{\alpha} = -\frac{\lambda\sigma}{\kappa}$  con  $\lambda$  constante.

---

<sup>2</sup>La versión con dos factores de este modelo será explicado en la sección de modelos bifactoriales.



La función determinista  $f_t$  incluye una constante más dos términos, que intentan reflejar la variación en el nivel de precios entre días laborables y no laborables y la evolución estacional de los precios a lo largo del año. En concreto, esta función viene dada por

$$f_t = \alpha + \beta D_t + \gamma \cos\left((t + \varphi) \frac{2\pi}{365}\right)$$

donde  $D_t$  toma el valor 1 si  $t$  es fin de semana o festivo y cero en caso contrario.

En este tipo de modelos, la parte estocástica del logaritmo del precio sigue un proceso con reversión a la media, siendo dicha media igual a cero. Esto implica el siguiente proceso para el precio *spot*:

$$dS_t = \kappa(b(t) - \ln S_t)S_t dt + \sigma S_t dZ$$

con

$$b(t) = \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\sigma^2}{2} + \frac{df}{dt}(t) \right) + f(t)$$

El logaritmo del precio siguen una distribución Gaussiana, con esperanza y varianza condicionadas:

$$\begin{aligned} E[\ln(S_t)|F_0] &= f(t) + (\ln S_0 - f(0))e^{-\kappa t} \\ V[\ln(S_t)|F_0] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) \end{aligned}$$

Por tanto, el precio *spot* sigue una distribución lognormal, con

$$\begin{aligned} E[S_t|F_0] &= \exp\left\{E[\ln(S_t)|F_0] + \frac{1}{2}V[\ln(S_t)|F_0]\right\} \\ &= \exp\left\{f(t) + (\ln S_0 - f(0))e^{-\kappa t} + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})\right\} \\ V[S_t|F_0] &= \exp(2E[\ln(S_t)|F_0] + V[\ln(S_t)|F_0]) (\exp(V[\ln(S_t)|F_0]) - 1) \\ &= E[S_t|F_0]^2 \left( \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})\right\} - 1 \right) \end{aligned}$$

La esperanza condicional converge a  $f(\infty) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}$  a largo plazo y la varianza condicional converge a una función del valor del componente determinista en el infinito.

De las ecuaciones (4) y (5) se obtiene la solución bajo la medida neutral al riesgo:

$$\ln(S_t) = f(t) + Y_0 e^{-\kappa t} + \tilde{\alpha}(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma \int_0^t e^{\kappa(s-t)} d\tilde{Z}(s) \quad (6)$$

que sigue una distribución Gaussiana con esperanza y varianza dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\ln(S_t)] &= f(t) + Y_0 e^{-\kappa t} + \tilde{\alpha}(1 - e^{-\kappa t}) \\ \tilde{V}[\ln(S_t)] &= \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}) \end{aligned}$$

Finalmente, el precio del futuro viene dado por

$$\begin{aligned} F(S_0, T) &= E[S_T | F_0] \\ &= \exp \left\{ f(T) + (\ln S_0 - f(0))e^{-\kappa T} + \tilde{\alpha}(1 - e^{-\kappa T}) + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa T}) \right\} \end{aligned}$$

con  $\tilde{\alpha} = -\frac{\lambda\sigma}{\kappa}$ .

### 2.1.3. Modelo de Moreno, Novales y Platania (2018)

Estos autores presentan un modelo de valoración para los precios de *commodities* y obtienen fórmulas cerradas para los precios de diferentes activos derivados. Este modelo incorpora fluctuaciones estacionales y cíclicas, así como oscilaciones a largo plazo en los precios *spot* de los productos básicos. Como consecuencia, se supone que los precios de los futuros convergen a un valor a largo plazo que experimenta fluctuaciones periódicas y suaves a lo largo de períodos de tiempo.

Para reflejar las fluctuaciones cíclicas y estacionales se introducen términos deterministas en el proceso estocástico del logaritmo del precio. Las oscilaciones a largo plazo pueden ser consecuencia de un cambio estructural en la tecnología, las preferencias o los hábitos de consumo y se modelizan con cambios en el nivel de reversión a la media, el cual incorpora una serie de Fourier.

De manera similar al modelo de Lucía y Schwartz (2002), estos autores suponen que el proceso para el precio *spot* se divide en dos componentes

$$\ln(S_t) = f(t) + Y_t$$

donde  $f(t)$  es el componente determinista que representa el comportamiento estacional del precio de la *commodity* y se modeliza con una serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re}[A_n e^{inw_f t}]$$

Por otro lado,  $Y_t$  sigue un proceso de reversión a la media, que converge a  $z(t)$ , una función que depende del tiempo y captura las variaciones a largo plazo. En más detalle, tenemos

$$\begin{aligned} dY_t &= \kappa(z(t) - Y_t)dt + \sigma dW_t \\ z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re}[B_n e^{inw_z t}] \end{aligned}$$

donde  $\kappa$ ,  $\sigma$ ,  $w_f$  y  $w_z$  son constantes positivas y  $W_t$  es un proceso de Wiener estándar.  $A_n$  y  $B_n$  son números complejos:  $A_n = A_{x,n} + iA_{y,n}$  y  $B_n = B_{z,n} + iB_{y,n}$ . Si  $B_n = 0$  y  $A_n = 0$ , este modelo generaliza al propuesto en Schwartz (1997). Si  $B_n = 0$  y  $f(t)$  coincide con la función de Lucía y Schwartz (2002), este modelo anida en el suyo.

Suponiendo un precio de mercado del riesgo constante,  $\lambda$ , podemos escribir el proceso bajo la medida neutral al riesgo

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma d\tilde{W}_t \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_t &= \kappa(\alpha + \tilde{z}_t - Y_t) \\ \alpha &= B_0 - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} \\ \tilde{z}_t &= \sum_{n=0}^{\infty} Re[B_n e^{inw_z t}] \\ \tilde{W}_t &= W_t + \lambda t \end{aligned}$$

La solución a la ecuación (7) viene dada por

$$\begin{aligned} Y_s &= e^{-\kappa(s-t)}Y_t + (1 - e^{-\kappa(s-t)})\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[ \frac{\kappa B_n}{\kappa + inw_z} (e^{inw_z s} - e^{-\kappa(s-t)+inw_z t}) \right] \\ &\quad + \sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)} d\tilde{W}_u \end{aligned}$$

La distribución condicional del logaritmo del precio spot de la *commodity* es Gaussiana, con esperanza y varianza dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\ln(S_t)|F_t] &= f(T) + e^{-\kappa(T-t)}(\ln(S_t) - f(t)) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[ \frac{\kappa B_n}{\kappa + inw_z} (e^{inw_z T} - e^{-\kappa(T-t)+inw_z t}) \right] \\ \tilde{V}[\ln(S_t)|F_t] &= \left( \sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\tilde{W}_u \right)^2 = \sigma^2 \int_t^T e^{-2\kappa(T-u)} du = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \end{aligned}$$

Por tanto, se puede obtener el precio futuro de una *commodity* utilizando las propiedades de la distribución lognormal bajo la medida neutral al riesgo:

$$\begin{aligned} F(S_t, t, T) &= \tilde{E}[S_t|F_t] = \exp \left\{ \tilde{E}[\ln(S_t)|F_t] + \frac{1}{2} \tilde{V}[\ln(S_t)|F_t] \right\} \\ &= \exp \left\{ f(T) + e^{-\kappa(T-t)}(\ln(S_t) - f(t)) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[ \frac{\kappa B_n}{\kappa + inw_z} (e^{inw_z T} - e^{-\kappa(T-t)+inw_z t}) \right] \right\} \end{aligned}$$

Tomando logaritmos en esta expresión, tenemos

$$\begin{aligned} \ln(F(S_t, t, T)) &= f(T) + e^{-\kappa(T-t)}(\ln(S_t) - f(t)) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[ \frac{\kappa B_n}{\kappa + inw_z} (e^{inw_z T} - e^{-\kappa(T-t)+inw_z t}) \right] \end{aligned}$$

Entonces, el logaritmo del precio del futuro se puede descomponer en 4 componentes:

- Efecto del precio *spot*:

$$e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t)$$

- Efecto del componente periódico, estacional y cíclico (efectos a corto y medio plazo):

$$f(T) - e^{-\kappa(T-t)} f(t)$$

- Efecto de la volatilidad:

$$\frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)})$$

- Efecto del nivel de reversión a la media (efecto a largo plazo):

$$(1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[ \frac{\kappa B_n}{\kappa + inw_z} (e^{inw_z T} - e^{-\kappa(T-t)+inw_z t}) \right]$$

Por tanto, el logaritmo del precio del futuro se puede expresar como suma de dos términos

$$\ln(F_t(S_t, t, T)) = M(S_t, t, T; \theta) + N(t, T; \theta)$$

donde

$$M(S_t, t, T; \theta) = e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)})$$

depende del precio *spot*, y del tiempo al vencimiento. Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned} N(t, T; \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} Re [A_n (e^{inw_f T} - e^{-\kappa(T-t)+inw_f t})] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[ \frac{\kappa B_n}{\kappa + inw_z} (e^{inw_z T} - e^{-\kappa(T-t)+inw_z t}) \right] \end{aligned}$$

que representa el componente de estacionalidad, que es el aspecto novedoso de este modelo respecto a los anteriores. Los dos términos de esta ecuación, describen respectivamente, las fluctuaciones estacionales alrededor del precio medio a largo plazo y la evolución temporal del nivel de reversión a la media.

Se proponen siete casos particulares de este modelo,

- **Modelo 3:** cuando se incorpora un único término de la serie de Fourier para representar el nivel de reversión a la media, de modo que el segundo componente del precio del logaritmo del futuro queda como:

$$N(t, T; \theta) = Re \left[ \frac{\kappa B}{\kappa + iw_z} (e^{iw_z T} - e^{-\kappa(T-t)+iw_z t}) \right]$$

- **Modelo 4:** añade una representación de serie de Fourier con una única frecuencia para  $f(t)$ , con el objetivo de capturar el componente cíclico y estacional. En este caso, el segundo componente será:

$$N(t, T; \theta) = \text{Re}[A(e^{iw_{f,1}T} - e^{-\kappa(T-t)+iw_{f,1}t})] + \text{Re}\left[\frac{\kappa B}{\kappa + iw_z}(e^{iw_zT} - e^{-\kappa(T-t)+iw_zt})\right]$$

- **Modelo 5:** considera dos frecuencias diferentes en la serie  $f(t)$ , con el objetivo de capturar fluctuaciones del ciclo económico, y estacionalidad a corto plazo. Por tanto, tenemos:

$$N(t, T; \theta) = \sum_{l=1,2} \text{Re}[A_l(e^{iw_{f,l}T} - e^{-\kappa(T-t)+iw_{f,l}t})] + \text{Re}\left[\frac{\kappa B}{\kappa + iw_z}(e^{iw_zT} - e^{-\kappa(T-t)+iw_zt})\right]$$

- **Modelo 6:** Considera tres frecuencias en  $f(t)$ . De este modo se puede analizar si componentes adicionales de estacionalidad pueden proporcionar un ajuste mejor a los datos observados. Tenemos:

$$N(t, T; \theta) = \sum_{l=1,2,3} \text{Re}[A_l(e^{iw_{f,l}T} - e^{-\kappa(T-t)+iw_{f,l}t})] + \text{Re}\left[\frac{\kappa B}{\kappa + iw_z}(e^{iw_zT} - e^{-\kappa(T-t)+iw_zt})\right]$$

- **Modelo 7:** considera una única frecuencia para  $f(t)$  y no tiene en cuenta la representación del nivel de reversión a la media. Por tanto, tenemos:

$$N(t, T; \theta) = \text{Re}[A(e^{iw_{f,1}T} - e^{-\kappa(T-t)+iw_{f,1}t})]$$

- **Modelo 8:** incorpora dos frecuencias en la serie  $f(t)$  que capturan las fluctuaciones del ciclo económico y la estacionalidad a corto plazo:

$$N(t, T; \theta) = \sum_{l=1,2} \text{Re}[A_l(e^{iw_{f,l}T} - e^{-\kappa(T-t)+iw_{f,l}t})]$$

- **Modelo 9:** añade una tercera frecuencia para  $f(t)$  con el objetivo de capturar la estacionalidad. En este caso, tenemos

$$N(t, T; \theta) = \sum_{l=1,2,3} \text{Re}[A_l(e^{iw_{f,l}T} - e^{-\kappa(T-t)+iw_{f,l}t})]$$

Moreno *et al.* (2018) estiman empíricamente los modelos 1 a 5 utilizando precios de tres activos energéticos y encuentran que sus modelos (3 a 5) superan los resultados de los modelos 1 y 2, tanto a nivel *in-sample* como *out-of sample*. Del Campo y Moreno (2018) obtienen conclusiones similares al realizar un análisis *in-sample* de futuros sobre productos agrícolas.

## 2.2. Modelos bifactoriales

Comentaremos ahora modelos que introducen dos factores a la hora de explicar los precios de ciertas *commodities*.

### 2.2.1. Modelo de Gibson y Schwartz (1990)

Estos autores introducen un modelo de dos factores para el precio del petróleo. Los dos factores que consideran son el precio *spot* y el *convenience yield*, definido como un dividendo neto que obtiene el propietario de la mercancía física. Estos autores argumentan que este modelo, a diferencia de un modelo unifactorial, puede explicar la diferencia intrínseca en el precio de la volatilidad entre los precios *spot* y futuro.

El supuesto de partida es que el precio *spot* y el *convenience yield* siguen los siguientes procesos de difusión

$$\begin{aligned}\frac{dS}{S} &= \mu dt + \sigma_1 dz_1 \\ d\delta &= \kappa(\alpha - \delta)dt + \sigma_2 dz_2\end{aligned}$$

donde  $dz_1$  y  $dz_2$  son incrementos correlacionados de un movimiento Browniano estándar, tal que  $dz_1 dz_2 = \rho dt$ .

Por tanto, el precio *spot* sigue una distribución lognormal. Adicionalmente, proponen un modelo con reversión a la media para el *convenience yield*, con el objetivo de reflejar la evidencia empírica encontrada en Gibson y Schwartz (1989).

Como no tienen datos del precio *spot* del petróleo, estos autores utilizan como *proxy* el precio del futuro más cercano a vencimiento negociado en el NYMEX. El *convenience yield* es una variable no observable y, por tanto, necesita ser aproximada. Esta aproximación se basa en la relación  $F(S, T) = S e^{(r-\delta)(T-t)}$ . De este modo, se puede determinar el *convenience yield* de los *forward* anualizados utilizando los precios de los futuros con vencimientos adyacentes, de acuerdo a la siguiente fórmula

$$\delta_{T-1, T} = r_{T-1, T} - 12 \ln \left( \frac{F(S, T)}{F(S, T-1)} \right)$$

donde  $\delta_{T-1, T}$  indica el *convenience yield* de un *forward* mensual anualizado  $T-1$  periodos hacia delante y  $r_{T-1, T}$  denota el tipo de interés libre de riesgo de un *forward* mensual anualizado  $T-1$  periodos hacia delante.

### 2.2.2. Modelo de Lucía y Schwartz (2002)

Tal y como comentamos anteriormente, el modelo de estos autores incluye también una versión bifactorial. La motivación para añadir un segundo factor es remarcar que los cambios en los precios de los futuros pueden ser diferentes en función de su vencimiento, pues los futuros a diferentes vencimientos no están perfectamente correlacionados. En este caso, el precio *spot* viene dado por:

$$S_t = f(t) + X_t + \varepsilon_t$$

donde

$$\begin{aligned} dX_t &= -\kappa X_t dt + \sigma_x dZ_x \\ d\varepsilon_t &= \mu_t dt + \sigma_\varepsilon dZ_\varepsilon \\ dZ_x dZ_\varepsilon &= \rho dt \end{aligned}$$

Si consideramos el proceso ajustado por riesgo, tenemos

$$\begin{aligned} dX_t &= -\kappa(\tilde{\alpha} - X_t)dt + \sigma_x d\tilde{Z}_x \\ d\varepsilon_t &= \tilde{\mu}_t dt + \sigma_\varepsilon d\tilde{Z}_\varepsilon \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\alpha} = \frac{-\lambda_x \sigma_x}{\kappa}$  y  $\tilde{\mu}_\varepsilon = \mu_\varepsilon - \lambda_\varepsilon \sigma_\varepsilon$ .

Finalmente, el precio del futuro vendrá dado por

$$F_0(P_0, T) = \tilde{E}_0(P_t) = f(T) + e^{-\kappa T} X_0 + \varepsilon_0 + (1 - e^{-\kappa T})\tilde{\alpha} + \tilde{\mu}_\varepsilon T$$

### 2.2.3. Modelo de Bacaicoa, Moreno y Platania (2014)

Estos autores extienden el modelo de Moreno *et al.* (2018) a dos factores, siendo dichos factores el precio *spot* y el *convenience yield*, que siguen los siguientes procesos

$$\begin{aligned} dS_t &= (\mu - \delta_t)S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t^1 \\ d\delta_t &= \kappa(f(t) - \delta_t)dt + \sigma_2 dW_t^2 \end{aligned}$$

donde  $dW_t^1$  y  $dW_t^2$  son incrementos de movimientos Brownianos estándares correlacionados con  $dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt$ . El *convenience yield* converge a largo plazo a la función  $f(t)$ , que viene caracterizada mediante una serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re}[A_n e^{in\omega t}]$$

Si consideramos el logaritmo del precio *spot* y aplicamos el lema de Itô, tenemos

$$d\ln(S_t) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} - \delta_t \right) dt + \sigma_1 dW_t^1$$

Estos autores consideran que el precio del mercado del riesgo asociado al *convenience yield* es constante, tal que

$$\lambda_2(\delta_t, t) = \frac{\lambda}{\sigma_2}$$

El proceso seguido por el precio *spot*, teniendo en cuenta el *convenience yield*, será

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_1 dW_t^1 - \delta_t S_t dt$$

El proceso de descuento reinvertiendo el *convenience yield* vendrá dado por

$$D(t) = e^{\int_0^t (\delta_u - r) du}$$

Por tanto,

$$dD(t) = (\delta_t - r)D(t)dt$$

Aplicando el lema de Itô, el proceso del precio descontado viene dado por:

$$\begin{aligned} d(D(t)S_t) &= dD(t)S_tdt + D(t)dS_t + dD(t)S_t \\ &= (\delta_t - r)D(t)S_tdt + D(t)(\mu - \delta_t)S_tdt + D(t)\sigma_1S_tdW_t^1 \\ &= D(t)(\mu - r)S_tdt + D(t)\sigma_1S_tdW_t^1 = D(t)\sigma_1S_t \left( \frac{\mu - r}{\sigma_1} dW_t^1 \right) \end{aligned}$$

Por tanto, el precio de mercado del riesgo es  $\lambda_1 = \frac{\mu - r}{\sigma_1}$ .

Con estos precios del mercado de riesgo obtenemos las versiones neutrales al riesgo de ambos procesos:

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - \delta_t)S_tdt + \sigma_1S_td\tilde{W}_t^1 \\ d\delta_t &= \kappa \left( f(t) - \delta_t - \frac{\lambda}{\kappa} \right) dt + \sigma_2d\tilde{W}_t^2 \end{aligned}$$

Reagrupando términos constantes, el proceso para el *convenience yield* queda como

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - g(t) - \delta_t)dt + \sigma_2d\tilde{W}_t^2 \quad (8)$$

donde  $g(t) = \sum_1^\infty Re[A_n e^{inwt}]$  y  $\alpha = A_0 - \frac{\lambda}{\kappa}$ .

Resolviendo la ecuación (8), se obtiene que el *convenience yield* viene dado por:

$$\begin{aligned} \delta_T &= e^{-\kappa(T-t)}\delta_t + \alpha(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \kappa \sum_1^\infty Re \left[ \frac{A_n}{inw + \kappa} (e^{inwT} - e^{inwt - \kappa(T-t)}) \right] \\ &\quad + \sigma_2 \int_t^T (1 - e^{-\kappa(T-u)}) d\tilde{W}_u^2 \end{aligned}$$

Por tanto, el *convenience yield* sigue una distribución Gaussiana, con media y varianza condicionadas dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\delta_T | F_t] &= e^{-\kappa(T-t)}\delta_t + \alpha(1 - e^{-\kappa(T-t)}) + \kappa \sum_1^\infty Re \left[ \frac{A_n}{inw + \kappa} (e^{inwT} - e^{inwt - \kappa(T-t)}) \right] \\ \tilde{V}[\delta_T | F_t] &= \frac{\sigma_2^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \end{aligned}$$

Entonces, para  $s > t$ , el logaritmo del proceso del precio *spot* viene dado por:

$$\begin{aligned} \ln(S_s) &= \ln(S_t) + \left( r - \frac{\sigma_1}{2} - \alpha \right) (s - t) + \frac{1 - e^{-\kappa(s-t)}}{\kappa} (\alpha - \delta_t) \\ &\quad + \sum_1^\infty Re \left[ \frac{A_n}{inw + \kappa} (e^{inws} - e^{inwt - \kappa(s-t)}) \right] - \sum_1^\infty Re \left[ \frac{A_n}{inw} (e^{inws} - e^{inwt}) \right] \\ &\quad + \sigma_1 \int_t^s d\tilde{W}_u^1 - \frac{\sigma_2}{\kappa} \int_t^s (1 - e^{-\kappa(s-u)}) d\tilde{W}_u^2 \end{aligned}$$



Por tanto, este logaritmo sigue una distribución Gaussiana. Sus dos primeros momentos estadísticos condicionales para el instante  $T$  vienen dados por:

$$\begin{aligned}\tilde{E}[\ln(S_T)|F_t] &= \ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma_1}{2} - \alpha\right)(T-t) + \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}(\alpha - \delta_t) \\ &\quad + \sum_1^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{A_n}{inw + \kappa} (e^{inwT} - e^{inwt - \kappa(T-t)}) \right] \\ &\quad - \sum_1^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{A_n}{inw} (e^{inwT} - e^{inwt}) \right] \\ \tilde{V}[\ln(S_T)|F_t] &= \left(\sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2} - \frac{2}{\kappa}\sigma_1\sigma_2\rho\right)(T-t) + \left(\frac{2}{\kappa^2}\sigma_1\sigma_2\rho - 2\frac{\sigma_2^2}{\kappa^3}\right)(1 - e^{-\kappa(T-t)}) \\ &\quad + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^3}(1 - e^{-2\kappa(T-t)})\end{aligned}$$

Por tanto, el precio del futuro será

$$\begin{aligned}F(S_t, t, T) &= S_t \exp \left\{ \left(r - \alpha + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{1}{\kappa}\sigma_1\sigma_2\rho\right)(T-t) \right. \\ &\quad + \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \left(\alpha - \delta_t + \frac{1}{\kappa}\sigma_1\sigma_2\rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2}\right) + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa^3} \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} \\ &\quad + \sum_1^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{A_n}{inw + \kappa} (e^{inwT} - e^{inwt - \kappa(T-t)}) \right] \\ &\quad \left. - \sum_1^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{A_n}{inw} (e^{inwT} - e^{inwt}) \right] \right\}\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\ln(F(S_t, t, T)) &= \ln(S_t) + \left(r - \alpha + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{1}{\kappa}\sigma_1\sigma_2\rho\right)(T-t) \\ &\quad + \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \left(\alpha - \delta_t + \frac{1}{\kappa}\sigma_1\sigma_2\rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2}\right) + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa^3} \frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} \\ &\quad + \sum_1^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{A_n}{inw + \kappa} (e^{inwT} - e^{inwt - \kappa(T-t)}) \right] \\ &\quad - \sum_1^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{A_n}{inw} (e^{inwT} - e^{inwt}) \right]\end{aligned}$$

### 3. Método econométrico

Esta sección describe el problema de optimización a resolver y los métodos econométricos que se llevarán a cabo para estimar los parámetros de los diferentes modelos unifactoriales y de una extensión bifactorial que se propone.

### 3.1. Problema de optimización

El problema de optimización que se va a resolver será

$$\min(SR(\tilde{\theta}; \tilde{\theta}_m)) = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{\kappa} (P_{jt} - \beta' \eta_{j,t})' W (P_{jt} - \beta' \eta_{j,t})$$

donde  $W = I_k$  y

$$\beta' \eta_{j,t} = \sum_{i=1}^8 \beta_i \eta_{ij,t}$$

El precio de cada *commodity* presenta una estructura común por cada contrato futuro pero, además, pueden existir componentes estacionales y cíclicos específicos para cada vencimiento del contrato futuro correspondiente (véanse modelos 4 a 9).

Tenemos:

$$\begin{aligned} P_t &= \ln(F(S_t, t, T)) - e^{\kappa(T-t)} \ln(S_t) = \sum_{i=1}^8 \beta_i \eta_{ij,t} + u_t \\ \eta_{1t} &= 1 - e^{-\kappa(T-t)} \\ \eta_{2t} &= \frac{1}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \end{aligned}$$

Por tanto,  $P_t$  y  $\eta_{it}$  son funciones no lineales de los parámetros estructurales. Es importante indicar que  $\eta_{it}$ ,  $i = 3, \dots, 8$  presentan una especificación diferente para cada uno de los modelos.

Con el fin de separar el componente común de largo plazo y los componentes específicos de los diferentes vencimientos, se necesita imponer un nivel de reversión a la media a largo plazo conjunto para todos los vencimientos, pero permitiendo que los componentes estacionales y cíclicos varíen a lo largo de los vencimientos.

Para cada modelo, tenemos los siguientes parámetros:

- Modelo 1: Schwartz (1997):

$$\beta_1 = \tilde{\alpha} = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa}, \quad \beta_2 = \sigma^2, \quad \beta_i = 0, \quad i = 3, \dots, 8$$

- Modelo 2: Lucía y Schwartz (2002):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \tilde{\alpha} = \mu - \frac{\sigma\lambda}{\kappa}, \quad \beta_2 = \sigma^2, \quad \beta_3 = \gamma, \quad \beta_i = 0, \quad i = 4, \dots, 8 \\ \eta_{3t} &= \cos\left((T + \varphi) \frac{2\pi}{260}\right) - e^{\kappa(T-t)} \cos\left((t + \varphi) \frac{2\pi}{260}\right) \end{aligned}$$

Este modelo incorpora un componente de estacionalidad.

Estudiamos ahora las tres especificaciones propuestas por Moreno *et al.* (2018).

- Modelo 3: incorpora oscilaciones a largo plazo, donde

$$\beta_1 = \alpha, \beta_2 = \sigma^2, \beta_i = 0, i = 5, \dots, 10$$

Los componentes de Fourier son:

$$\beta_3\eta_{3t} + \beta_4\eta_{4t} = \text{Re} \left[ (B_x + iB_y) \frac{\kappa}{\kappa + iw_z} (e^{iw_z T} - e^{-\kappa(T-t) + iw_z \kappa t}) \right]$$

- Modelo 4: incluye oscilaciones a largo plazo y un componente de estacionalidad. Así, tenemos:

$$\beta_1 = \alpha, \beta_2 = \sigma^2, \beta_7 = \beta_8 = \beta_9 = \beta_{10} = 0$$

Los componentes de Fourier son:

$$\begin{aligned} \beta_3\eta_{3t} + \beta_4\eta_{4t} &= \text{Re} \left[ (B_x + iB_y) \frac{\kappa}{\kappa + iw_z} (e^{iw_z T} - e^{-\kappa(T-t) + iw_z \kappa t}) \right] \\ \beta_5\eta_{5t} + \beta_6\eta_{6t} &= \text{Re} [(A_{x,1} + iB_{y,1}) e^{iw_{f,1} t}] \end{aligned}$$

- Modelo 5: incorpora dos términos en la expansión de Fourier, que se relacionan el componente cíclico, y un término en la media a largo plazo. En este caso,  $\beta_1 = \alpha, \beta_2 = \sigma^2, \beta_9 = \beta_{10} = 0$ , siendo los componentes de Fourier

$$\begin{aligned} \beta_3\eta_{3t} + \beta_4\eta_{4t} &= \text{Re} \left[ (B_x + iB_y) \frac{\kappa}{\kappa + iw_z} (e^{iw_z T} - e^{-\kappa(T-t) + iw_z \kappa t}) \right] \\ \sum_{i=5}^8 \beta_i \eta_{it} &= \sum_{l=1,2}^8 \text{Re} [(A_{x,l} + iA_{y,l}) e^{iw_{f,l} t}] \end{aligned}$$

Los modelos 4 y 5 incorporan más de una serie de Fourier. La frecuencia más baja se relaciona con oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversion a la media, y el resto de frecuencias definen los componentes cíclicos o estacionales de los precios de los futuros.

Expondremos a continuación los modelos 6 a 9, los cuales suponen una extensión de los modelos 3, 4 y 5.

- Modelo 6: añade un componente estacional adicional al modelo 5. En este caso, los componentes de Fourier son:

$$\begin{aligned} \beta_3\eta_{3t} + \beta_4\eta_{4t} &= \text{Re} \left[ (B_x + iB_y) \frac{\kappa}{\kappa + iw_z} (e^{iw_z T} - e^{-\kappa(T-t) + iw_z \kappa t}) \right] \\ \sum_{i=5}^{10} \beta_i \eta_{it} &= \sum_{l=1,2,3}^{10} \text{Re} [(A_{x,l} + iA_{y,l}) e^{iw_{f,l} t}] \end{aligned}$$

- Modelo 7: es la versión del modelo 4 sin incluir las oscilaciones a largo plazo. Por tanto, incluye únicamente un componente de estacionalidad. Así, tenemos:

$$\beta_1 = \alpha, \beta_2 = \sigma^2, \beta_i = 0, i = 7, \dots, 10$$

Los componentes de Fourier son:

$$\beta_5\eta_{5t} + \beta_6\eta_{6t} = \text{Re} [(A_{x,1} + iB_{y,1})e^{iw_{f,1}t}]$$

- Modelo 8: incorpora dos términos en la expansión de Fourier, que se relacionan con el componente cíclico. En este caso,

$$\beta_1 = \alpha, \beta_2 = \sigma^2, \beta_3 = \beta_4 = \beta_9 = \beta_{10} = 0$$

Los componentes de Fourier son:

$$\sum_{i=5}^8 \beta_i\eta_{it} = \sum_{l=1,2} \text{Re} [(A_{x,l} + iA_{y,l})e^{iw_{f,l}t}]$$

- Modelo 9: añade un componente estacional al modelo 8. Por tanto, los componentes de Fourier cumplen la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=5}^{10} \beta_i\eta_{it} = \sum_{l=1,2,3} \text{Re} [(A_{x,l} + iA_{y,l})e^{iw_{f,l}t}]$$

Para realizar el análisis predictivo y estudiar el modelo bifactorial se utilizará el filtro de Kalman, por lo que se describirá brevemente esta técnica antes de su aplicación a los diferentes modelos.

## 3.2. Filtro de Kalman

Siguiendo a Harvey (1989), el filtro de Kalman es un algoritmo recursivo, que permite evaluar numéricamente una función de verosimilitud para estimar parámetros, generando estimaciones de las variables no observables presentes en el modelo. La limitación de este método es que supone que ninguna variable observable puede afectar a los estados o variables inobservables.

### 3.2.1. Descripción de este algoritmo

Para aplicar este algoritmo es necesario escribir el modelo en forma de espacio de los estados, tal que:

$$\begin{aligned} \xi_{t+1} &= F\xi_t + v_{t+1} \\ y_t &= A'x_t + H'\xi_t + \omega_t \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se llaman ecuación de estado y de observación, respectivamente. El vector  $\xi_t$  incluye la variable no observable mientras que  $y_t$  y  $x_t$  están compuestos por variables observables. En más detalle,  $x_t$  contiene variables exógenas.

El objetivo es predecir  $\xi_{t+1}$  e  $y_{t+1}$  con la información disponible en  $t$ , siendo la predicción  $\hat{\xi}_{t+1|t} = E(\xi_{t+1}|Y_t)$ , y donde  $Y_t$  denota el conjunto de información disponible. Asociada a cada una de las predicciones hay una matriz de error cuadrático medio:  $P_{t|t-1} = E[(\xi_t - \hat{\xi}_{t|t-1})(\xi_t - \hat{\xi}_{t|t-1})']$ .

Bajo el supuesto de que los autovalores de  $F$  están todos dentro del círculo unidad, se empieza la recursión con los valores iniciales  $\xi_{1|0} = 0$  y  $P_{1|0} = \Sigma$ .

Queremos predecir  $y_t$ . Como  $E(y_t|x_t, \xi_t) = A'x_t + H'\xi_t$ , aplicando la ley de proyecciones iteradas, tenemos  $y_{t|t-1} = A'x_t + H'E[(\xi_t|x_t, Y_{t-1})] = A'x_t + H'\hat{\xi}_{t|t-1}$ .

Por tanto, el error de predicción y la matriz de error cuadrático medio son

$$\begin{aligned} y_t - \hat{y}_{t|t-1} &= (A'x_t + H'\xi_t + \omega_t) - (A'x_t + H'\hat{\xi}_{t|t-1}) = H'(\xi_t - \hat{\xi}_{t|t-1}) + \omega_t \\ V_t &= E[(y_t - \hat{y}_{t|t-1})(y_t - \hat{y}_{t|t-1})'] = H'P_{t|t-1}H + R \end{aligned}$$

donde  $P_{t|t-1}$  denota la matriz de error cuadrático medio de  $\xi_t - \hat{\xi}_{t|t-1}$ .

Una vez que se observa  $y_t$ , se actualiza la estimación de  $\xi_t$  mediante

$$\hat{\xi}_{t|t} = \hat{\xi}_{t|t-1} + P_{t|t-1}H(H'P_{t|t-1}H + R)^{-1}(y_t - A'x_t - H'\hat{\xi}_{t|t-1})$$

con error cuadrático medio

$$P_{t|t} = E[(\xi_t - \hat{\xi}_{t|t})(\xi_t - \hat{\xi}_{t|t})'] = P_{t|t-1} - [P_{t|t-1}H_t(H_tP_{t|t-1}H_t + R)^{-1}H_t'P_{t|t-1}]$$

A partir de la ecuación de estado se obtienen las ecuaciones de predicción:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{t+1|t} &= E(\xi_{t+1}|Y_t) = FE(\xi_t|Y_t) + E(v_{t+1}|Y_t) = F\hat{\xi}_{t|t} \\ &= F\hat{\xi}_{t|t-1} + FP_{t|t-1}H(H'P_{t|t-1}H + R)^{-1}(y_t - A'x_t - H'\hat{\xi}_{t|t-1}) \\ &= F\hat{\xi}_{t|t-1} + K_t(y_t - \hat{y}_{t|t-1}) \end{aligned}$$

donde  $K_t$  es la ganancia de Kalman:

$$K_t = FP_{t|t-1}H_t(H_t'P_{t|t-1}H_t + R)^{-1}$$

La matriz de error cuadrático medio es

$$\begin{aligned} P_{t+1|t} &= E[(\xi_{t+1} - \hat{\xi}_{t+1|t})(\xi_{t+1} - \hat{\xi}_{t+1|t})'] \\ &= E[(F\xi_t + v_{t+1} - F\hat{\xi}_{t|t})(F\xi_t + v_{t+1} - F\hat{\xi}_{t|t})'] \\ &= FP_{t|t}F' + Q = (FP_{t|t-1} - K_tH'P_{t|t-1})F' + Q \end{aligned}$$

Por último, para formar la log-verosimilitud bajo el supuesto de normalidad, se necesita

$$\begin{aligned} E(y_t|x_t, Y_{t-1}) &= A'x_t + H_t'\hat{\xi}_{t|t-1} \\ E[(y_t - A'x_t - H_t'\hat{\xi}_{t|t-1})(y_t - A'x_t - H_t'\hat{\xi}_{t|t-1})'|x_t, Y_{t-1}] &= H_t'P_{t|t-1}H_t + R \end{aligned}$$

En cada periodo, la función de densidad del vector  $y_t$  y la función de verosimilitud son, en logaritmos,

$$\begin{aligned} \ln f(y_t|x_t, Y_{t-1}) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(|H'_t P_{t|t-1} H_t + R|) \\ &\quad - \frac{1}{2} (y_t - A'x_t - H'_t \hat{\xi}_{t|t-1})' (|H'_t P_{t|t-1} H_t + R|)^{-1} (y_t - A'x_t - H'_t \hat{\xi}_{t|t-1}) \\ \log Lik &= \sum_{t=1}^T \ln f(y_t|x_t, Y_{t-1}) \end{aligned}$$

Estas funciones se maximizarán respecto a los parámetros que aparecen en las matrices F, Q, A, H y R.

### 3.2.2. Aplicación al análisis de predicción unifactorial

Todos los modelos considerados en este trabajo suponen una cierta relación entre el precio *spot* y el precio del futuro, aunque el mercado *spot* suele presentar cambios más abruptos que el mercado de futuros. Esto se debe a que, en el mercado *spot*, los precios de cierre son precios de liquidación, mientras que en el mercado de futuros se consideran precios promedio de los últimos minutos de sesión. Por esta razón, consideraremos que el precio *spot* puede incorporar un componente de ruido.

Para llevar a cabo el análisis predictivo de los modelos, se utilizará el Filtro de Kalman, donde la representación en el espacio de los estados es la siguiente:

$$\begin{aligned} \ln(S_{t+1}) &= G + F \ln(S_t) + v_{t+1} \\ \ln(F(S_t, t, T)) &= A'x_t + H' \ln(S_t) + \omega_t \end{aligned}$$

donde  $E(v_t v'_t) = Q$  y  $E(\omega_t \omega'_t) = R$ , siendo Q y R constantes.

Tomamos el logaritmo del precio *spot* en el instante  $t+1$  como variable inobservable en la representación en el espacio de los estados. Por tanto, el proceso que se sigue es el siguiente: en el instante  $t$ , el precio *spot* filtrado,  $S_t$  y las estimaciones de  $\hat{F}$  y  $\hat{G}$  se utilizan para predecir  $S_{t+1}$ , que será usado para estimar la ecuación de observación un período hacia delante,  $F_{t+1}$ .

Para cada modelo, tenemos las siguientes ecuaciones de observación:

- **Modelo 2** : Lucía y Schwartz (2002):

$$\begin{aligned} \ln(F(S_t, t, T)) &= \left( \alpha \quad \frac{\sigma^2}{4\kappa} \quad \gamma \quad \gamma \right) \begin{pmatrix} 1 - e^{-\kappa(T_i-t)} \\ 1 - e^{-2\kappa(T_i-t)} \\ \cos((T_i + \varphi)2\pi/269) \\ -e^{-\kappa(T_i-t)} \cos((t + \varphi)2\pi/260) \end{pmatrix} \\ &\quad + e^{-\kappa(T_i-t)} \ln(S_t) + \omega_{ti} \end{aligned}$$

■ **Resto de modelos**

Los demás modelos se pueden resumir en una única matriz pues cada modelo concreto anida en una matriz más general:

$$\ln(F(S_t, t, T)) = \left( \alpha \frac{\sigma^2}{4\kappa} B_x B_y A_x A_y A_{x,2} A_{y,2} A_{x,3} A_{y,3} \right) x'_i + e^{-\kappa(T_i-t)} \ln(S_t) + \omega_{ti}$$

con

$$x'_i = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\kappa(T_i-t)} \\ 1 - e^{-2\kappa(T_i-t)} \\ \kappa \cos(\omega_z T_i) + \omega_z \sin(\omega_z T_i) - e^{-\kappa(T_i-t)} [\kappa \cos(\omega_z t) + \omega_z \sin(\omega_z t)] \\ -\kappa \sin(\omega_z T_i) + \omega_z \cos(\omega_z T_i) - e^{-\kappa(T_i-t)} [\omega_z \cos(\omega_z t) - \kappa \sin(\omega_z t)] \\ \cos(\omega_f T_i) - e^{-\kappa(T_i-t)} \cos(\omega_f t) \\ e^{-\kappa(T_i-t)} \sin(\omega_f t) - \sin(\omega_f T_i) \\ \cos(\omega_{f2} T_i) - e^{-\kappa(T_i-t)} \cos(\omega_{f2} t) \\ e^{-\kappa(T_i-t)} \sin(\omega_{f2} t) - \sin(\omega_{f2} T_i) \\ \cos(\omega_{f3} T_i) - e^{-\kappa(T_i-t)} \cos(\omega_{f3} t) \\ e^{-\kappa(T_i-t)} \sin(\omega_{f3} t) - \sin(\omega_{f3} T_i) \end{pmatrix}$$

Llamaremos vector A a la matriz inicial que premultiplica a la matriz  $x_i$ . Así tenemos:

- El modelo 1 está compuesto por los dos primeros elementos del vector A y las dos primeras filas de la matriz  $x_i$ .
- Modelo 3: debemos tener en cuenta los 4 primeros elementos del vector A y las primeras 4 filas de la matriz  $x_i$ .
- Modelo 4: se compone de los primeros 6 elementos del vector A y la matriz  $x_i$ .
- Modelo 5: corresponde a los primeros 8 elementos de las matrices.
- Modelo 6: está compuesto por los 10 primeros elementos de ambas matrices.

- Para el modelo 7 no se tendrá en cuenta los elementos 3 y 4 del vector  $A$  y la matriz  $x_i$ , pues corresponden a los *long-term swings*. Así, el modelo 7 tiene únicamente un componente estacional, es decir, se tiene en cuenta (además de los dos primeros elementos), los elementos 5 y 6 de las matrices.
- Modelo 8: tiene en cuenta los elementos del modelo 7 y también los elementos 7 y 8 de las matrices
- Modelo 9: corresponde al que incluye además los elementos 9 y 10 de las matrices.

Realizaremos el análisis de predicción para dos años diferentes. Primero, vamos a predecir el primer trimestre del año 2017. Para ello, utilizamos datos diarios de 2016 para calibrar cada modelo, excepto los parámetros de frecuencias, para los cuales usamos la muestra completa hasta el final de 2016. Una vez que el modelo está calibrado, obtenemos los precios de los futuros un día hacia adelante para el primer trimestre de 2017. A continuación, recalibramos los parámetros de cada modelo utilizando datos desde abril de 2016 hasta marzo de 2017. Para los parámetros de frecuencias utilizamos toda la muestra hasta finales de marzo de 2017. De este modo, predecimos el segundo trimestre de 2017. Este proceso se repite hasta obtener los precios de los futuros un día hacia adelante para los cuatro trimestres de 2017.

Realizamos el mismo procedimiento utilizando datos de 2015 y 2016 en lugar de solo datos de 2016. Así, predecimos el primer trimestre de 2017 utilizando datos de 2015 y 2016 para calibrar el modelo (y datos de toda la muestra hasta finales de 2016 para los parámetros de frecuencias). A continuación utilizamos datos desde abril de 2015 hasta marzo de 2017 y predecimos el segundo trimestre de 2017. Este proceso se continúa hasta obtener las predicciones para los cuatro trimestres de 2017.

Aplicamos el mismo procedimiento para predecir el año 2016, utilizando datos de 2015 y, luego, los de 2014 y 2015. Compararemos las estimaciones obtenidas con los datos reales y obtenemos así unos errores, que serán los que presentaremos en las tablas correspondientes.

### 3.2.3. Aplicación al modelo bifactorial

La dificultad de este modelo con respecto a los modelos unifactoriales reside en la existencia de variables no observables, en este caso el *convenience yield*. A los modelos en los que se constata la presencia de variables no observables se les aplicará el Filtro de Kalman para estimar los parámetros.

Para el modelo bifactorial en concreto que utilizaremos (Bacaicoa *et al.*, 2014), la representación en el espacio de los estados es la siguiente:

- La ecuación de estado es

$$d\delta_t = \kappa(f(t) - \delta_t)dt + \sigma_2 dW_t^2$$



La versión discreta de esta ecuación es

$$\delta_{t+\Delta t} - \delta_t = \kappa f(t)\Delta t - \kappa\delta_t\Delta t + \xi_t^2$$

o, de manera equivalente,

$$\delta_{t+\Delta t} = \kappa f(t)\Delta t + (1 - \kappa\Delta t)\delta_t + \xi_t^2$$

donde  $\xi_t^2$  sigue una distribución  $N(0, \sigma_1^2\Delta t)$ .

Por tanto, en forma matricial, la ecuación de estado es

$$\underbrace{\delta_t}_{\alpha_t} = \underbrace{\kappa f(t)\Delta t}_{c_t} + \underbrace{(1 - \kappa\Delta t)}_{Q_t} \underbrace{\delta_{t-\Delta t}}_{\alpha_{t-\Delta t}} + \xi_t^2$$

- Para el modelo específicamente, tenemos la ecuación de observación:

$$\begin{aligned} \ln(F(S_t, \tau)) &= -\frac{1 - e^{-\kappa(\tau)}}{\kappa}\delta_t + X_t + \left(r - \alpha + \frac{\sigma_2^2}{2\kappa^2} - \frac{1}{\kappa}\sigma_1\sigma_2\rho\right)\tau \\ &+ \frac{1 - e^{-2\kappa\tau}}{\kappa^3}\frac{\sigma_2^2}{4\kappa^3} + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}\left(\alpha + \frac{1}{\kappa}\sigma_1\sigma_2\rho - \frac{\sigma_2^2}{\kappa^2}\right) \\ &+ \sum_1^{\infty} Re \left[ \frac{A_n}{inw + \kappa} (e^{inw(t+\tau)} - e^{inwt - \kappa\tau}) \right] \\ &- \sum_1^{\infty} Re \left[ \frac{A_n}{inw} (e^{inw(t+\tau)} - e^{inwt}) \right] + \varepsilon_t \end{aligned}$$

que puede reescribirse como

$$Y_t = \underbrace{-\frac{1 - e^{-\kappa(\tau)}}{\kappa}}_{H'} \underbrace{\alpha_t}_{\xi_t} + \underbrace{d_t}_{A'x_t} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\omega_t}$$

siendo  $Y_t = \ln(F(S_t, \tau))$ ,  $\alpha_t = \delta_t$  y  $\varepsilon_t$  sigue una distribución  $N(0, h)$ .

Una vez que tenemos escrito el modelo en forma de espacio de los estados, aplicaremos el Filtro de Kalman para estimar los parámetros.

Como se ha explicado anteriormente, el filtro de Kalman es un algoritmo recursivo, que parte de unos valores iniciales de  $\hat{\alpha}_{ti} = c_t + Q_t\alpha_{ti-1}$  y de la matriz de varianzas y covarianzas del error de estimación  $\hat{P}_{ti} = Q_tP_{ti-1}Q_t' + V_t$ .

## 4. Datos

Como se ha mencionado anteriormente, se utilizarán datos de futuros sobre EUA (European Emission Allowances). Las principales características de estos contratos son las siguientes:

- Son futuros con vencimientos mensuales y en cada contrato se negocian 1000 permisos de emisiones de CO<sub>2</sub>. Cada permiso permite emitir una tonelada de dióxido de carbono. Se negocia en euros y céntimos por tonelada métrica. El tick mínimo es 0,01€ por tonelada o, de manera equivalente, 10€ por cada contrato futuro.
- El vencimiento es el último lunes del mes del contrato. Sin embargo, si ese día de vencimiento es un día no hábil o hay un día no hábil en los 4 días posteriores a dicho vencimiento, el último día de negociación será el penúltimo lunes del mes de entrega.
- El precio de cierre se calcula como el promedio de los precios cotizados durante el período de cierre diario (16:50:00 - 16:59:59 horas, hora local del Reino Unido) o con precios de liquidación cotizados si la liquidez es baja.
- Estos contratos se liquidan con entrega física del subyacente. Dicha entrega se realiza mediante la transferencia de los permisos de la UE de la cuenta del vendedor a la cuenta del comprador en el Registro de la Unión Europea. Todas las transferencias pasan a través de la cuenta de su miembro de compensación y de ICE Clear Europe. La entrega se realiza tres días después del último día de negociación.

Las series de datos han sido extraídas de Datastream y se utilizarán los futuros más cercanos a vencimiento. Para todos los vencimientos considerados, el período muestral finaliza el 9 de marzo de 2018. El comienzo del período muestral depende del vencimiento considerado en el contrato futuro. En concreto, tenemos:

- Precio *spot* y futuros con el vencimiento más próximo y el segundo más cercano: 27 de octubre del 2009.
- Tercer y cuarto vencimientos más cercanos: 30 de julio del 2010.
- Quinto vencimiento más cercano: 29 de diciembre del 2010.
- Sexto y séptimo más próximos: 3 de abril del 2012.

Comenzamos realizando un análisis descriptivo de estos datos. La tabla 1 muestra diversos estadísticos de los precios de los futuros y del precio *spot*. Observamos que la media de los precios de los futuros fluctúa entre 6,91 y 8,55 euros, incluyéndose en ese rango la media del precio *spot*. También se observa que la volatilidad de estos contratos ha aumentado en los primeros cinco vencimientos más próximos y es menor en los vencimientos 6 y 7. Este hecho puede venir explicado por la estacionalidad, que provoca que en los periodos con mayor cantidad de información relativa al nivel de producción coincida con la época de mayor volatilidad en todos los vencimientos. Así, en los contratos con vencimientos posterior a dicha época, se pueden observar tramos de volatilidad crecientes con el vencimiento.

También puede verse que, para todos los casos, la asimetría es positiva, lo que indica que es más probable encontrar valores altos extremos que valores bajos extremos. Esto puede comprobarse también en los valores máximos y mínimo, pues los valores máximos son más extremos que los valores mínimos. Los valores de la curtosis se sitúan entre 2,27 y 5,80 y este estadístico crece con el vencimiento del futuro, exceptuando los vencimientos 6 y 7.

La figura 1 incluye las series temporales de los futuros y del precio *spot* y muestra una evolución similar para todos los vencimientos. Cabe destacar que, a partir de mediados de 2015, la evolución de todas las series es tan similar que apenas se pueden diferenciar las series. También observamos que estos futuros alcanza sus precios máximos en torno a mayo de 2011 y sus valores mínimos en torno a abril de 2013. Además, podemos ver que el mercado está en *contango* en la mayor parte del período muestral.

Hemos estudiado también la estacionariedad de nuestros datos, tanto para los precios en niveles como para sus primeras diferencias, mediante el estadístico de Dickey-Fuller aumentado. Los resultados se presentan en la tabla 2. Se puede ver como los precios de los futuros y el precio *spot* tienen raíz unitaria para todos sus vencimientos. Sin embargo, para la primera diferencia de dichos precios, el estadístico Dickey-Fuller muestra evidencia de estacionariedad.

## 5. Análisis empírico e interpretación

Esta sección incluye el análisis empírico que se ha realizado y los resultados obtenidos al estimar los parámetros de los modelos descritos anteriormente. Comenzaremos con el análisis *in-sample* de los nueve modelos unifactoriales.

### 5.1. Análisis *in-sample* unifactorial

La tabla 3 muestra las estimaciones *in-sample* de los parámetros de cada modelo y tres medidas de bondad de ajuste: el mínimo de la suma de cuadrados de errores  $\sum_t \text{mín } SCR(\hat{\theta}_t) = \sum_t \hat{u}_t$ , su desviación típica,  $(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t)^{1/2}$ , y el error absoluto medio,  $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |\hat{u}_t|$ . Estas estimaciones se han obtenido utilizando toda la muestra disponible para cada futuro. Se puede ver que el modelo con menor suma de cuadrados de errores es el modelo 9, aunque la mejora más notable se produce cuando se pasa del modelo 2 al modelo 3. Esto sugiere que, para explicar el precio de los futuros, es necesario introducir un componente cíclico, bien sea a largo o a corto plazo. También puede comprobarse que los modelos que presentan oscilaciones a largo plazo proporcionan unos valores de *SCR* muy similares a los modelos que únicamente incorporan estacionalidad.

La tabla 6 incluye las sumas de cuadrados de errores para cada vencimiento y su comparativa para cada modelo. Observando esta tabla, se concluye que incluir los términos de Fourier en el proceso que sigue el logaritmo de los futuros mejora el

ajuste a los datos observados en el mercado, ya que la suma de errores al cuadrado se hace menor. También cabe resaltar que la mayor mejora se produce en los modelos 3 y 7, que incorporan oscilaciones a largo plazo y un componente cíclico respectivamente. Es decir, la inclusión de los componentes cíclicos adicionales de los modelos 4, 5, 8 y 9 mejoran el ajuste, pero dicha mejora no es muy elevada.

Los principales resultados obtenidos con cada modelo son los siguientes:

- El modelo 2 incorpora el componente estacional pero la mejora respecto al modelo 1 es marginal (0.83 %). Este hecho no indica que los precios de los futuros no presenten estacionalidad, sino que ésta ya está incorporada en el precio pues está presente en los precios *spot*.
- El modelo 3 incorpora oscilaciones en el nivel de reversión a la media mediante un término de Fourier. Esta incorporación conlleva una mejora de, respectivamente, 45 % y 44 % con respecto a los modelos 1 y 2. En este modelo, la frecuencia estimada de las fluctuaciones a largo plazo es de 20.5 años, aproximadamente.
- El modelo 4 incluye un componente estacional y un término de Fourier con una frecuencia para los componentes estacionales y cíclicos. Este modelo produce una mejora de 51.11 %, 50.71 % y 11.07 % con respecto a los modelos 1, 2 y 3, respectivamente. En este caso, la frecuencia de las oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media es de unos 13 años, aproximadamente, significativamente menor a la frecuencia obtenida en el modelo anterior.
- El modelo 5 incorpora una segunda frecuencia en la serie de Fourier y produce una mejora de 52.21 %, 51.81 %, 13.06 % y 2.25 % respecto a los modelos 1 a 4. En este caso, la frecuencia estimada para las oscilaciones a largo plazo es de 14 años. El componente periódico sugiere un periodo de entre 3.5 y 4.5 años, excepto el segundo vencimiento que presenta un periodo de 8.5 años. Finalmente, la segunda frecuencia oscila entre 4 y 10 años.
- El modelo 6 produce mejoras poco relevantes con respecto al modelo 5, lo que indica que el último componente estacional es marginal a la hora de explicar el precio de los futuros. La frecuencia estimada para las oscilaciones a largo plazo es 13.5 años y las frecuencias estacionales oscilan entre 1.5 y 7 años.
- El modelo 7 es similar al modelo 4, con la diferencia de que, en este modelo, no se incorporan oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media. Este modelo mejora un 47.48 %, 47.04 % y 4.45 % los resultados obtenidos en los modelos 1, 2 y 3, respectivamente. Respecto a los modelos 4 y 5, se produce un empeoramiento del 7.45 % y 9.90 %, respectivamente.
- El modelo 8 es similar al modelo 5 pero sin incorporar los *long-term swing*. Las mejoras producidas son, respectivamente, 52.29 %, 51.89 %, 13.21 %, 2.40 %, 0.17 %, 9.17 % respecto a los modelos 1 a 6.

- El modelo 9 es el modelo que proporciona la menor suma de cuadrado de errores aunque la mejora producida respecto al modelo 8 no es muy elevada.

Por tanto, podemos concluir que el *ranking* de modelos (de menos a más adecuado), es: 1 - 2 - 3 - 7 - 4 - 5 - 8 - 6 - 9. Aunque la mayor mejora relativa entre modelos se produce en los modelos 3 y 7, al incluir las oscilaciones a largo plazo, es el modelo 9 el que presenta una SCR menor, por lo que incluir la estacionalidad también ayuda en gran medida a estimar el precio de los futuros sobre emisiones de CO<sub>2</sub>.

La figura 2 muestra los precios ajustados para los nueve modelos estimados y el precio observado de dicho futuro. Para el quinto vencimiento (c5), se observa un ajuste muy razonable en todos los modelos, siendo especialmente bueno en los modelos 7, 4 y 6, y peor en los modelo 1 y 2. Aunque debemos destacar que el modelo con mejor ajuste no siempre es el mismo, sino que depende del periodo estudiado. Por esta razón se estudiarán varios periodos más adelante.

La figura 4 incluye la descomposición de los cuatro efectos del modelo 5 para el segundo vencimiento más cercano. Estos efectos son: efecto *spot*, efecto de la volatilidad, efecto del componente periódico y efecto de las oscilaciones a largo plazo. Para complementar esta información, la figura 3 ilustra que el efecto *spot* no reproduce exactamente el nivel del precio de los futuros pero si presenta un comportamiento muy similar. La figura 5 muestra el nivel de reversión a la media (*long-term swing*) en el modelo 5 para los 5 vencimientos de los futuros escogidos y proporciona evidencia de cierta sincronización entre los niveles obtenidos para los diferentes vencimientos.

Como se comentó en la introducción, el protocolo de Kyoto venció a finales de 2012 y se firmó su continuación en la cumbre de Doha. Entonces, puede ser interesante dividir nuestra muestra en dos subperíodos, separados por finales de 2012, y analizar nuestros modelos en ambos intervalos temporales.

La tabla 4 muestra las estimaciones de los parámetros y las medidas de bondad de ajuste para el primer subperíodo. Se comprueba que los modelos 5 y 9 presentan mejoras respecto al resto de modelos, siendo el modelo 9 el que produce una mayor mejora, un 31.9% con respecto al modelo 2. La tabla 7 muestra, para cada vencimiento, los valores de SCR, los periodos de estacionalidad y las mejoras de cada modelo respecto al modelo previo. Se puede observar que las mejoras respecto a los modelos 1 y 2 ya no son tan elevadas como cuando consideramos toda la muestra. Aún así, ciertos modelos, como los modelos 4 o 7, presentan mejoras notables. La frecuencia de las oscilaciones a largo plazo se sitúa alrededor de los 10 años para los modelos 3, 4 y 5, y en torno a los 17 años para el modelo 6. La figura 6 incluye el precio ajustado por los distintos modelos para el segundo vencimiento (ya que es del que disponemos de más datos) y el precio observado del futuro. Se comprueba que los modelos 5 y 9 son los que parecen producir un mejor ajuste.

De manera similar, la tabla 5 muestra las estimaciones de los parámetros y las medidas de bondad de ajuste para el segundo subperíodo. El modelo 9 es el que tiene un menor SCR y mejora un 41.07% los resultados del modelo 1. Adicionalmente, los modelos 4, 5, 6 y 8 tienen una SCR muy similar y, por tanto, todos estos modelos

pueden ser razonables a la hora de estimar el precio de los futuros analizados. En este subperiodo, la mayor mejora se produce al pasar del modelo 2 al modelo 3, con una mejora del 39.69%. La tabla 8 muestra las mejoras y los periodos de estacionalidad de cada modelo para cada vencimiento. Vemos que la frecuencia de las oscilaciones a largo plazo fluctúa entre 10 y 13.5 años dependiendo del modelo. Los modelos 3 y 7 son los que producen mayores mejoras respecto al modelo 2. Finalmente, la figura 7 refleja que el modelo 6 es el que peor ajusta al principio de la muestra pero no es el que tiene una mayor suma de cuadrados de errores. Esto se debe a que, aunque ajuste mal al principio, después ajusta bastante bien. Por tanto, otros modelos con un ajuste medio durante toda la muestra acaban teniendo un *SCR* mayor.

La tabla 9 muestra un ranking global de los modelos junto al ranking de los modelos estimados anualmente. Se puede ver que el modelo 9 es el que tiene menor SCR, aunque la mayor mejoría se produce en otros modelos, como el 4, 8 o 3.

Por tanto, se concluye que, para todos los periodos analizados, el modelo 9 es el que presenta una SCR menor. Sin embargo, en muchos casos esta SCR es similar a la de otros modelos. Por tanto, dado el coste de añadir una frecuencia más, podría pensarse que alguno de los otros modelos sería también adecuado. Hay que resaltar el hecho de que, en todos los casos, los modelos 1 y 2 sí presentan sumas de cuadrados de errores significativamente mayores al resto de modelos, por lo que incluir los componentes estacionales sí mejora de manera significativa las estimaciones.

## 5.2. Análisis de predicción unifactorial

Esta sección analiza la capacidad predictiva de los modelos presentados para anticipar cambios en el mercado de futuros sobre emisiones de CO<sub>2</sub>. Las tablas 10 a 13 incluyen los resultados obtenidos. Podemos indicar los siguientes comentarios:

- La tabla 10 muestra los resultados obtenidos para 2016 utilizando datos de 2015. El modelo 7 es el que presenta menores errores de predicción, modelo que no se corresponde con el que presenta mejor ajuste *in-sample* (modelo 9). Analizando las predicciones por trimestres, los modelos con menores errores son, respectivamente, los modelos 7, 6 y el modelo 9 para el segundo semestre de este año. El modelo 3 es el que presenta un mayor error total.
- La tabla 11 presenta los resultados para 2016 utilizando la información de los años 2014 y 2015. En este caso, el modelo 3 es el que presenta un menor error. Al utilizar la información de estos dos años, se comprueba que los errores suben considerablemente. Los modelos con mayor capacidad predictiva en cada trimestre son, respectivamente, los modelos 5, 3, 4 y 9. Finalmente, el modelo 8 genera el mayor error global.
- La tabla 12 muestra los resultados obtenidos para 2017 utilizando datos de 2016. El modelo 4 es el que tiene mayor poder predictivo. Por tanto, el modelo

que mejor estima *in-sample* (modelo 9) no es el que tiene mejor comportamiento predictivo. Los mayores errores de predicción se producen durante el primer y el último cuatrimestre. Analizando los diferentes trimestres, los mejores modelos son el 3 (primer y segundo semestre), 4 y 1 para el tercer trimestre y el 4 para el último trimestre. En términos globales, el modelo 8 es el que presenta un peor comportamiento.

- La tabla 13 presenta los resultados para 2017 utilizando la información de los dos años previos. En este caso, el modelo 5 es el que presenta un menor error aunque el modelo 3 también tiene un error similar. Para todos los modelos, el mejor comportamiento se da en el último cuatrimestre. Los modelos con mayor capacidad predictiva en cada trimestre son, respectivamente, los modelo 5, 6, 3 y 5. Como en el caso previo, el modelo 8 presenta el peor comportamiento.

Por tanto, podemos concluir que el modelo con mejor comportamiento *in-sample* no es necesariamente el que tiene una mayor capacidad predictiva. También podemos señalar que ningún modelo tiene un comportamiento predictivo superior al resto.

### 5.3. Análisis *in-sample* bifactorial

Finalmente, se analiza el comportamiento *in-sample* del modelo de Bacaicoa *et al.* (2014), que introduce el *convenience yield* como segundo factor. La tabla 14 presenta las estimaciones obtenidas y la suma de los cuadrados de los errores de estimación. Se concluye que este modelo presenta un ajuste razonable para el segundo vencimiento más cercano, mientras que sus peores resultados se dan para el tercer vencimiento más cercano. La figura 8 incluye los precios ajustados para este modelo y el precio observado del futuro. Se comprueba que el ajuste es muy bueno, superando el ajuste de cualquiera de los modelos unifactoriales. La figura 9 muestra el precio del futuro para el quinto vencimiento más próximo, el precio *spot* y el *convenience yield*. Esta figura refleja que el mercado de futuros está en *contango* hasta 2015 pero, a partir de ese momento, el *convenience yield* se acerca al tipo de interés y, por tanto, la cotización del futuro se acerca al precio *spot*.

## 6. Conclusiones

Las emisiones de CO<sub>2</sub> son un tema muy actual y que tienen gran relevancia en el contexto global, debido a los efectos perniciosos que dichas emisiones ocasionan sobre la atmósfera y el calentamiento global. Por ello, este trabajo se centra en el estudio de los futuros sobre los permisos de emisión de CO<sub>2</sub>. Se ha tratado de averiguar cuál es el modelo más adecuado a la hora de realizar estimaciones, tanto *in-sample* como *out-of-sample*. Para ello, se han comparado diferentes especificaciones del modelo de Moreno *et al.* (2018) con los modelos de Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002). Además, se ha analizado el modelo bifactorial presentado en Bacaicoa *et al.* (2014).

El modelo de Moreno *et al.* (2018) fue propuesto para modelizar los precios de los futuros sobre subyacentes energéticos. Este modelo presenta fluctuaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media y estacionalidad, utilizando las series de Fourier con el objetivo de representar estos componentes estacionales y cíclicos. La posible mejora de este modelo viene de su flexibilidad para permitir oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media sin imponer ninguna restricción sobre las frecuencias a estimar en la serie de Fourier. También presenta la ventaja de proporcionar fórmulas cerradas para los precios de diferentes activos derivados y, concretamente, para el precio de los futuros.

En este trabajo se han utilizado datos de EUA desde 2009 hasta la actualidad y se han estimado los modelos de Schwartz (1997), Lucía y Schwartz (2002), siete versiones del modelo de Moreno *et al.* (2018) y un modelo bifactorial que también utiliza series de Fourier para estimar componentes cíclicos (Bacaicoa *et al.*, 2014).

Las estimaciones de los modelos unifactoriales se han realizado mediante mínimos cuadrados no lineales. Se ha realizado estimaciones considerando diferentes alternativas: a) para la muestra completa, b) desde las fechas en que tenemos datos disponibles hasta finales del 2012 (momento final del protocolo de Kyoto), c) desde 2013 hasta marzo de 2018, periodo en el que se prolonga el protocolo, gracias a la cumbre de Doha en 2012 y d) estimaciones anuales.

El análisis empírico *in-sample* muestra que el modelo 9 (con tres componentes estacionales y ninguna frecuencia de las oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media) es el más adecuado en todos los periodos. Sin embargo, en numerosos casos, la diferencia con respecto a los modelos 3 a 8 no es muy notable. Se comprueba que todas las versiones del modelo de Moreno *et al.* (2018) mejoran a los modelos de Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002). Por tanto, se concluye que introducir estacionalidad mediante series de Fourier mejora la estimación *in-sample*.

El análisis de predicción unifactorial se ha realizado para 2016 y 2017 utilizando el filtro de Kalman. Las diferentes especificaciones del modelo de Moreno *et al.* (2018) parecen no ser tan adecuadas como en la estimación *in-sample*, pues los errores no difieren significativamente con respecto a los obtenidos para los modelos de Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002). Para 2016 y 2017, los modelos que mejor predicen son, respectivamente, los modelos 7 y 4. Por tanto, concluimos que las diferentes versiones del modelo de Moreno *et al.* (2018) son adecuadas para realizar estimaciones *in-sample* pero no lo son tanto para realizar predicciones.

Finalmente, el modelo bifactorial se ha estimado utilizando también el filtro de Kalman, siendo el *convenience yield* la variable no observable. Se ha comprobado que este modelo mejora el comportamiento de todos los modelos unifactoriales.

Como futuras líneas de investigación se puede ampliar el modelo bifactorial a cada una de las versiones del modelo de Moreno *et al.* (2018). También se puede analizar el comportamiento empírico de los modelos utilizados en este trabajo para explicar los precios en el mercado eléctrico. Finalmente, podría analizarse el comportamiento predictivo del modelo bifactorial.



## Referencias

- [1] BACAICOA, D. , MORENO, M. y PLATANIA, F. (2018). Valoración de activos derivados sobre mercancías cuando el rendimientos por conveniencia converge a una media cíclica. *Trabajo de investigación 005/014 Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas*.
- [2] BENZ, E. y TRÜCK, S. (2008). Modeling the price dynamics of CO<sub>2</sub> emission allowances. *Energy Economics* 31, 1, 4–15.
- [3] BORAK, S., HÄRDLE, W. K., TRÜCK, S. y WERON, R. (2006). Convenience yields for CO<sub>2</sub> emission allowance futures contracts. *Working Paper, Humboldt-University of Berlin*.
- [4] BREDIN, D. y MUCKLEY, C. (2011). An emerging equilibrium in the EU emissions trading scheme. *Energy Economics*, 33, 353–362.
- [5] CHEVALLIER, J. (2009A). Carbon futures and macroeconomic risk factors: A view from the EU ets. *Energy Economics*, 31, 4, 614–625.
- [6] CONRAD, C., RITTLER, D. y ROTFUSS, W. (2012). Modeling and explaining the dynamics of European Union Allowance prices at high-frequency. *Energy Economics*, 34, 1, 316-326.
- [7] DEL CAMPO, N. y MORENO, M. (2018). Pricing of agricultural derivatives: an approach based on models with mean reversion and seasonality. Presentado en el *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance (MAF 2018)*, Universidad Carlos III de Madrid, Madrid, 4-6, Abril, 2018.
- [8] DELL, M., JONES, B. F. y OLKEN, B. A. (2009). Temperature and income: reconciling new cross-sectional and panel estimates. *American Economic Review*, 99, 2, 198-204.
- [9] DELL, M., JONES, B. F. y OLKEN, B. A. (2012). Temperature shocks and economic growth: Evidence from the last half century. *American Economic Journal: Macroeconomics*, 4, 3, 66-95.
- [10] FAMA, E.F. y FRENCH, K.R. (1987). Commodity futures prices: some evidence on forecast power, premiums, and the theory of storage. *Journal of Business*, 60, 1, 55–73.
- [11] GIBSON, R. y SCHWARTZ, E. (1989). Valuation of long term oil-linked assets, Anderson Graduate School of Management, UCLA, *Working Paper*, 6-89.
- [12] GIBSON, R. y SCHWARTZ, E.S. (1990) Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *Journal of Finance*, 45, 3, 959-976.

- [13] HAMBEL, C., KRAFT, H. y SCHWARTZ, E. (2015). Optimal Carbon Abatement in a Stochastic Equilibrium Model with Climate Change. *SAFE working paper series N°92*
- [14] HAMBEL, C., KRAFT, H., y SCHWARTZ, E. (2018). The Carbon Abatement Game. *National Bureau of Economic Research*. (No. w24604).
- [15] HARVEY, A. C. (1989). Forecasting, structural time series models and the Kalman filter. *Princeton University Press*.
- [16] INTERNATIONAL PANEL OF CLIMATE CHANGE (2014) Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. *Cambridge University Press*.
- [17] KARA, M., SYRI, S., LEHTILÄ, A., HELYNEN, S., KEKKONEN, V., RUSKA, M. y FORSTRÖM, J. (2008). The impacts of EU CO<sub>2</sub> emissions trading on electricity markets and electricity consumers in Finland. *Energy Economics*, 30, 2, 193–211.
- [18] LUCÍA, J. y SCHWARTZ, E.S. (2002). Electricity prices and power derivatives: evidence from the nordic power exchange. *Review of Derivatives Research*, 5, 1, 5-50.
- [19] MORENO, M., NOVALES, A. y PLATANIA, F. (2018). Long-term swings and seasonality in energy markets, mimeo.
- [20] PAOLELLA, M. y TASCHINI, L. (2008). An econometric analysis of emission trading allowances. *Journal of Banking and Finance*, 32, 10, 2022–2032
- [21] Protocolo de Kyoto de la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático (1998). Recuperado de <http://unfccc.int/resource/docs/convkp/kpspan.pdf>
- [22] SCHWARTZ, E.S. (1997). The stochastic behaviour of commodity prices: implications for valuation and hedging. *Journal of Finance*, 52, 3, 923-973.
- [23] SCHWARTZ, E.S. y SMITH, J. (2000). Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, 46, 7, 893-911.
- [24] SEIFERT, J., UHRIG-HOMBURG, M. y WAGNER, M. (2008). Dynamic behavior of CO<sub>2</sub> spot prices - a stochastic equilibrium model. *Journal of Environmental Economics and Management*, 56, 2, 180–194.
- [25] SØRENSEN, C. (2002). Modeling seasonality in agricultural commodity futures. *Journal of Futures Markets*, 22, 5, 393-426.

## Apéndice de Tablas

| Estadísticos descriptivos de los contratos de futuros sobre emisiones de CO <sub>2</sub> |                         |       |                   |                 |           |          |        |        |  |  |
|--|-------------------------|-------|-------------------|-----------------|-----------|----------|--------|--------|--|--|
|  | Inicio de muestra       | Media | Desviación típica | C. de variación | Asimetría | Curtosis | Máximo | Mínimo |  |  |
| spot   | 27 de octubre de 2009   | 8.13  | 3.64              | 0.45            | 0.95      | 2.58     | 16.8   | 2.7    |  |  |
| c1   | 27 de octubre de 2009   | 8.29  | 3.84              | 0.46            | 0.97      | 2.60     | 17.4   | 2.79   |  |  |
| c2   | 27 de octubre de 2009   | 8.55  | 4.04              | 0.47            | 0.98      | 2.58     | 18.25  | 2.89   |  |  |
| c3   | 30 de julio de 2010     | 8.21  | 3.96              | 0.48            | 1.44      | 4.04     | 19.67  | 3.01   |  |  |
| c4   | 30 de julio de 2010     | 8.52  | 4.24              | 0.50            | 1.45      | 4.03     | 20.9   | 3.16   |  |  |
| c5   | 29 de diciembre de 2010 | 8.28  | 4.00              | 0.48            | 1.81      | 5.80     | 22.01  | 3.28   |  |  |
| c6   | 3 de abril del 2012     | 6.91  | 1.67              | 0.24            | 0.34      | 2.27     | 11.39  | 3.48   |  |  |
| c7   | 3 de abril del 2012     | 7.05  | 1.82              | 0.26            | 0.53      | 2.49     | 11.93  | 3.71   |  |  |

Tabla 1: Análisis descriptivo de los precios del *spot* y de los contratos futuros sobre permisos de emisiones de CO<sub>2</sub>. Los estadísticos mostrados son media, desviación típica, coeficientes de variación, asimetría, curtosis y los valores máximo y mínimo. La muestra termina el 9 de marzo de 2018 para todos los precios .

| Estadístico Dickey-Fuller |             |                   |             |
|---------------------------|-------------|-------------------|-------------|
| ADF (niveles)             |             | ADF (diferencias) |             |
| Valor                     | Estadístico | Valor             | Estadístico |
| spot                      | -0.83       | -3.99             | -45.61      |
| c1                        | -2.53       | -3.99             | -49.42      |
| c2                        | -2.54       | -3.99             | -49.31      |
| c3                        | -2.29       | -3.99             | -48.41      |
| c4                        | -2.14       | -3.99             | -46.49      |
| c5                        | -2.03       | -3.99             | -45.36      |
| c6                        | -3.21       | -3.99             | -41.12      |
| c7                        | -3.19       | -3.99             | -40.72      |

Tabla 2: Estadístico Dickey-Fuller aumentado (para niveles y primeras diferencias) para el precio *spot* y los futuros *c1* a *c7*.

Estimaciones paramétricas *in-sample*, toda la muestra

| Parámetros               | Modelo 1         | Modelo 2         | Modelo 3               | Modelo 4               | Modelo 5               | Modelo 6               | Modelo 7             | Modelo 8               | Modelo 9               |
|--------------------------|------------------|------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|----------------------|------------------------|------------------------|
| PARAMETROS ESTRUCTURALES |                  |                  |                        |                        |                        |                        |                      |                        |                        |
| $\alpha$                 | 46.7172 (6.0092) | 45.3954 (2.9647) | 3.2672 (18.3025)       | 2.7662 (0.0232)        | 2.1292 (0.3073)        | 5.0486 (0.2162)        | -1.0545 (0.5854)     | 1.1762 (0.4426)        | -0.0574 (0.1888)       |
| $\sigma^2$               | 0.5770 (0.0057)  | 0.5787 (0.8948)  | 0.0000 (0.0000)        | 0.0000 (0.0000)        | 1.1931 (0.4097)        | 0.0006 (0.0037)        | 1.8230 (0.2498)      | 2.0574 (0.6252)        | 4.2494 (0.3059)        |
| $\kappa$                 | 0.0000 (0.0000)  | 0.000 (0.0012)   | 0.5252 (4.9997)        | 0.5852 (0.0154)        | 0.6314 (0.0411)        | 0.6718 (0.0142)        | 0.1843 (0.0081)      | 0.6621 (0.0195)        | 0.7309 (0.0146)        |
| $\gamma$                 | -                | 0.0098 (0.0009)  | -                      | -                      | -                      | -                      | -                    | -                      | -                      |
| $\phi$                   | -                | 3.1416 (0.0509)  | -                      | -                      | -                      | -                      | -                    | -                      | -                      |
| $B_x$                    | -                | -                | 1.0 (3.7954)           | 0.9026 (0.0342)        | 1.0243 (0.0332)        | -1.0647 (0.1989)       | -                    | -                      | -                      |
| $B_y$                    | -                | -                | 1.0 (23.6158)          | -0.1937 (0.0341)       | 0.3711 (0.2333)        | 2.8779 (0.1574)        | -                    | -                      | -                      |
| $\omega_z$               | -                | -                | $2\pi 0.0487$ (1.8681) | $2\pi 0.0763$ (0.0124) | $2\pi 0.0715$ (0.0330) | $2\pi 0.0258$ (0.0072) | -                    | -                      | -                      |
| Período                  | -                | -                | 20.5 años              | 13 años                | 14 años                | 39 años                | -                    | -                      | -                      |
| PARAMETROS ESTACIONALES  |                  |                  |                        |                        |                        |                        |                      |                        |                        |
| C2                       |                  |                  |                        |                        |                        |                        |                      |                        |                        |
| $A_{x,1}$                | -                | -                | -                      | -0.0341 (0.0181)       | -3.1482 (1.8135)       | -21.1646 (1.1073)      | -0.2725 (0.0337)     | 0.2171 (0.0929)        | -2.3336 (1.7732)       |
| $A_{y,1}$                | -                | -                | -                      | -0.0893 (0.0158)       | 9.9710 (0.7681)        | -2.7597 (0.4128)       | -0.4517 (0.0417)     | -0.1056 (0.0575)       | -6.7373 (0.8488)       |
| $\omega_{f,1}$           | -                | -                | -                      | $2\pi 0.2270$ (0.0459) | $2\pi 0.1175$ (0.0303) | $2\pi 0.2928$ (0.0141) | $2\pi 0.10$ (0.0147) | $2\pi 0.1787$ (0.0697) | $2\pi 0.1473$ (0.0304) |
| Período                  | -                | -                | -                      | 5 años                 | 8.5 años               | 3.5 años               | 10 años              | 5.5 años               | 7 años                 |
| $A_{x,2}$                | -                | -                | -                      | -                      | 3.7254 (1.7041)        | 0.0145 (0.0048)        | -                    | 0.2649 (0.1055)        | 13.0661 (2.2216)       |
| $A_{y,2}$                | -                | -                | -                      | -                      | -9.8436 (0.8479)       | -0.0233 (0.0034)       | -                    | -0.7122 (0.0953)       | 16.6759 (4.0166)       |
| $\omega_{f,2}$           | -                | -                | -                      | -                      | $2\pi 0.1160$ (0.0423) | $2\pi 0.7075$ (0.0465) | -                    | $2\pi 0.10$ (0.0331)   | $2\pi 0.1647$ (0.0184) |
| Período                  | -                | -                | -                      | -                      | 8.5 años               | 1.3 años               | -                    | 10 años                | 6 años                 |
| $A_{x,3}$                | -                | -                | -                      | -                      | -                      | 21.1372 (1.1082)       | -                    | -                      | -10.1273 (0.7493)      |
| $A_{y,3}$                | -                | -                | -                      | -                      | -                      | 2.7031 (0.4123)        | -                    | -                      | -10.6108 (4.6234)      |
| $\omega_{f,3}$           | -                | -                | -                      | -                      | -                      | $2\pi 0.2930$ (0.0141) | -                    | -                      | $2\pi 0.1704$ (0.0285) |
| Período                  | -                | -                | -                      | -                      | -                      | 3.5 años               | -                    | -                      | 6 años                 |

| Parámetros     | Modelo 1 | Modelo 2 | Modelo 3 | Modelo 4               | Modelo 5               | Modelo 6               | Modelo 7             | Modelo 8               | Modelo 9               |
|----------------|----------|----------|----------|------------------------|------------------------|------------------------|----------------------|------------------------|------------------------|
| C3             |          |          |          |                        |                        |                        |                      |                        |                        |
| $A_{x,1}$      | -        | -        | -        | -0.1011 (0.0100)       | -0.8144 (0.5527)       | 4.9540 (0.2063)        | -0.3908 (0.0271)     | 0.0920 (0.0755)        | -3.9286 (0.2467)       |
| $A_{y,1}$      | -        | -        | -        | 0.0033 (0.0151)        | 3.3231 (0.5955)        | 7.8659 (0.4444)        | -0.3923 (0.0437)     | -0.6183 (0.0210)       | -3.8063 (0.3533)       |
| $\omega_{f,1}$ | -        | -        | -        | $2\pi 0.2616$ (0.0282) | $2\pi 0.2472$ (0.0291) | $2\pi 0.1402$ (0.0200) | $2\pi 0.10$ (0.0102) | $2\pi 0.10$ (0.0218)   | $2\pi 0.1342$ (0.0129) |
| Periodo        | -        | -        | -        | 4 años                 | 4 años                 | 7 años                 | 10 años              | 10 años                | 7.5 años               |
| $A_{x,2}$      | -        | -        | -        | -                      | 0.8135 (0.5541)        | -4.7483 (0.1924)       | -                    | -0.10 (0.0309)         | 4.2508 (0.1781)        |
| $A_{y,2}$      | -        | -        | -        | -                      | -3.3595 (0.5829)       | -8.0998 (0.4536)       | -                    | -0.1330 (0.0365)       | 2.5631 (0.3664)        |
| $\omega_{f,2}$ | -        | -        | -        | -                      | $2\pi 0.2461$ (0.0451) | $2\pi 0.1392$ (0.0198) | -                    | $2\pi 0.2270$ (0.0466) | $2\pi 0.1414$ (0.0137) |
| Periodo        | -        | -        | -        | -                      | 4 años                 | 7 años                 | -                    | 4.5 años               | 7 años                 |
| $A_{x,3}$      | -        | -        | -        | -                      | -                      | 0.0008 (0.0148)        | -                    | -                      | 0.0468 (0.0059)        |
| $A_{y,3}$      | -        | -        | -        | -                      | -                      | 0.0747 (0.0051)        | -                    | -                      | -0.0116 (0.0132)       |
| $\omega_{f,3}$ | -        | -        | -        | -                      | -                      | $2\pi 0.3033$ (0.0438) | -                    | -                      | $2\pi 0.3596$ (0.0607) |
| Periodo        | -        | -        | -        | -                      | -                      | 3 años                 | -                    | -                      | 3 años                 |
| C4             |          |          |          |                        |                        |                        |                      |                        |                        |
| $A_{x,1}$      | -        | -        | -        | -0.0628 (0.0260)       | 3.1510 (0.2851)        | 0.1112 (0.0145)        | -0.4650 (0.0191)     | -0.1409 (0.0141)       | -0.1453 (0.0091)       |
| $A_{y,1}$      | -        | -        | -        | 0.0629 (0.0342)        | 0.6634 (0.4589)        | -0.0312 (0.0315)       | -0.5121 (0.0441)     | -0.0147 (0.0384)       | -0.0025 (0.0227)       |
| $\omega_{f,1}$ | -        | -        | -        | $2\pi 0.2761$ (0.0236) | $2\pi 0.2207$ (0.1191) | $2\pi 0.1399$ (0.0576) | $2\pi 0.10$ (0.0134) | $2\pi 0.2442$ (0.0576) | $2\pi 0.2478$ (0.0298) |
| Periodo        | -        | -        | -        | 4 años                 | 4.5 años               | 7 años                 | 10 años              | 4 años                 | 4 años                 |
| $A_{x,2}$      | -        | -        | -        | -                      | -3.2104 (0.2875)       | -1.3032 (0.1339)       | -                    | -0.0739 (0.1005)       | 0.0378 (0.0763)        |
| $A_{y,2}$      | -        | -        | -        | -                      | -0.5431 (0.4256)       | -2.6795 (0.0998)       | -                    | -0.5807 (0.0204)       | -0.5884 (0.0082)       |
| $\omega_{f,2}$ | -        | -        | -        | -                      | $2\pi 0.2227$ (0.0346) | $2\pi 0.2667$ (0.0219) | -                    | $2\pi 0.1629$ (0.0310) | $2\pi 0.1000$ (0.0231) |
| Periodo        | -        | -        | -        | -                      | 4.5 años               | 4 años                 | -                    | 10 años                | 10 años                |
| $A_{x,3}$      | -        | -        | -        | -                      | -                      | 1.2502 (0.1261)        | -                    | -                      | -0.0114 (0.0011)       |
| $A_{y,3}$      | -        | -        | -        | -                      | -                      | 2.7106 (0.1019)        | -                    | -                      | 0.0053 (0.0016)        |
| $\omega_{f,3}$ | -        | -        | -        | -                      | -                      | $2\pi 0.2673$ (0.0217) | -                    | -                      | $2\pi 1.4294$ (0.0354) |
| Periodo        | -        | -        | -        | -                      | -                      | 4 años                 | -                    | -                      | 1 año                  |

| Parámetros                                       | Modelo 1 | Modelo 2 | Modelo 3 | Modelo 4                     | Modelo 5                     | Modelo 6                     | Modelo 7                   | Modelo 8                     | Modelo 9                     |
|--|----------|----------|----------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| C5   |          |          |          |                              |                              |                              |                            |                              |                              |
| $A_{\pi,1}$                                      | -        | -        | -        | -0.0160 (0.0580)             | -0.0417 (0.0138)             | 0.9022 (1.2219)              | -0.5121 (0.0186)           | -0.2062 (0.0257)             | -5.8394 (0.8724)             |
| $A_{\eta,1}$                                     | -        | -        | -        | 0.0902 (0.0095)              | 0.0872 (0.0158)              | 43.9179 (2.9767)             | -0.3103 (0.0331)           | -0.0861 (0.0912)             | 7.5718 (1.1985)              |
| $\omega_{f,1}$                                   | -        | -        | -        | $2\pi \cdot 0.2877$ (0.0282) | $2\pi \cdot 0.2786$ (0.0455) | $2\pi \cdot 0.2000$ (0.0193) | $2\pi \cdot 0.10$ (0.0086) | $2\pi \cdot 0.2277$ (0.0714) | $2\pi \cdot 0.1721$ (0.0080) |
| Periodo  | -        | -        | -        | 3.5 años                     | 3.5 años                     | 5 años                       | 10 años                    | 4.5 años                     | 6 años                       |
| $A_{\pi,2}$                                      | -        | -        | -        | -                            | -0.1617 (0.0544)             | -3.8639 (0.4296)             | -                          | -0.5195 (0.1228)             | 4.7467 (0.8774)              |
| $A_{\eta,2}$                                     | -        | -        | -        | -                            | -0.0074 (0.0659)             | -21.8634 (1.5149)            | -                          | -0.2867 (0.1569)             | -7.9246 (1.1865)             |
| $\omega_{f,2}$                                   | -        | -        | -        | -                            | $2\pi \cdot 0.10$ (0.0403)   | $2\pi \cdot 0.2039$ (0.0184) | -                          | $2\pi \cdot 0.1270$ (0.0587) | $2\pi \cdot 0.1757$ (0.0080) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                            | 10 años                      | 5 años                       | -                          | 8 años                       | 6 años                       |
| $A_{\pi,3}$                                      | -        | -        | -        | -                            | -                            | 2.6764 (0.8056)              | -                          | -                            | 0.0011 (0.0020)              |
| $A_{\eta,3}$                                     | -        | -        | -        | -                            | -                            | -21.5944 (1.4597)            | -                          | -                            | 0.0114 (0.0009)              |
| $\omega_{f,3}$                                   | -        | -        | -        | -                            | -                            | $2\pi \cdot 0.1964$ (0.0202) | -                          | -                            | $2\pi \cdot 1.4448$ (0.0390) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                            | -                            | 5 años                       | -                          | -                            | 1 año                        |
| C6   |          |          |          |                              |                              |                              |                            |                              |                              |
| $A_{\pi,1}$                                      | -        | -        | -        | 0.0215 (0.0126)              | 0.0234 (0.0315)              | 0.5844 (0.2212)              | -0.5033 (0.0112)           | 0.0055 (0.0230)              | -0.1831 (0.0523)             |
| $A_{\eta,1}$                                     | -        | -        | -        | 0.0816 (0.0210)              | 0.0893 (0.0102)              | -1.8668 (0.1094)             | -0.2266 (0.0611)           | 0.1055 (0.0101)              | -0.4224 (0.0337)             |
| $\omega_{f,1}$                                   | -        | -        | -        | $2\pi \cdot 0.2975$ (0.0274) | $2\pi \cdot 0.2972$ (0.0459) | $2\pi \cdot 0.3346$ (0.0200) | $2\pi \cdot 0.10$ (0.0184) | $2\pi \cdot 0.2885$ (0.0430) | $2\pi \cdot 0.1015$ (0.0251) |
| Periodo  | -        | -        | -        | 3.5 años                     | 3.5 años                     | 3 años                       | 10 años                    | 4 años                       | 10 años                      |
| $A_{\pi,2}$                                      | -        | -        | -        | -                            | -0.2252 (0.0357)             | 0.2477 (0.1625)              | -                          | -0.1731 (0.0599)             | 0.0381 (0.0153)              |
| $A_{\eta,2}$                                     | -        | -        | -        | -                            | -0.0305 (0.0460)             | 1.4975 (0.1126)              | -                          | -0.4760 (0.0401)             | 0.1014 (0.0110)              |
| $\omega_{f,2}$                                   | -        | -        | -        | -                            | $2\pi \cdot 0.10$ (0.0304)   | $2\pi \cdot 0.3476$ (0.0205) | -                          | $2\pi \cdot 0.10$ (0.0210)   | $2\pi \cdot 0.2973$ (0.0342) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                            | 10 años                      | 3 años                       | -                          | 10 años                      | 3.5 años                     |
| $A_{\pi,3}$                                      | -        | -        | -        | -                            | -                            | -0.4568 (0.0293)             | -                          | -                            | 0.0086 (0.0029)              |
| $A_{\eta,3}$                                     | -        | -        | -        | -                            | -                            | -0.2293 (0.0597)             | -                          | -                            | 0.0078 (0.0030)              |
| $\omega_{f,3}$                                   | -        | -        | -        | -                            | -                            | $2\pi \cdot 0.2810$ (0.0204) | -                          | -                            | $2\pi \cdot 1.4546$ (0.0636) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                            | -                            | 3.5 años                     | -                          | -                            | 1 año                        |
| $\sum \min SCR(\hat{\theta}_t) = \sum \hat{u}_t$ | 122.26   | 121.24   | 67.21    | 59.7646                      | 58.4287                      | 57.8309                      | 64.2147                    | 58.3276                      | 57.0128                      |
| $(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t)^{1/2}$     | 0.1280   | 0.1274   | 0.0949   | 0.0895                       | 0.0885                       | 0.0880                       | 0.0927                     | 0.0884                       | 0.0874                       |
| $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n  \hat{u}_t $           | 0.0887   | 0.0886   | 0.0561   | 0.0499                       | 0.0495                       | 0.0495                       | 0.0499                     | 0.0494                       | 0.0490                       |

Tabla 3: Parámetros de las estimaciones *in-sample* de los 9 modelos unifactoriales, periodos, y medidas de bondad de ajuste para todo el periodo muestral. Entre paréntesis se muestran las desviaciones típicas de las estimaciones.

### Estimaciones paramétricas, desde datos disponible hasta 2013

| Parámetros                      | Modelo 1        | Modelo 2        | Modelo 3             | Modelo 4             | Modelo 5             | Modelo 6             | Modelo 7           | Modelo 8             | Modelo 9             |
|---------------------------------|-----------------|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| <b>PARAMETROS ESTRUCTURALES</b> |                 |                 |                      |                      |                      |                      |                    |                      |                      |
| $\alpha$                        | 6.0620 (0.2158) | 5.7335 (0.1734) | 3.0212 (98.7288)     | -0.5866 (0.3431)     | 3.9163 (0.0698)      | 9.3757 (0.1526)      | 0.23141 (0.1828)   | 1.7790 (0.0296)      | 1.8559 (0.0239)      |
| $\sigma^2$                      | 0.0000 (0.0000) | 0.0000 (0.0000) | 0.0000 (0.0000)      | 6.8079 (0.4039)      | 6.9084 (0.3060)      | 7.2207 (0.2662)      | 7.8655 (0.4547)    | 5.0078 (0.2306)      | 7.3708 (0.2201)      |
| $\kappa$                        | 0.1663 (0.0102) | 0.1871 (0.0086) | 0.8251 (16.7225)     | 2.0768 (0.0360)      | 3.3624 (0.0696)      | 3.4368 (0.0606)      | 1.2271 (0.0214)    | 2.6670 (0.0398)      | 3.3863 (0.0552)      |
| $\gamma$                        | -               | 0.0312 (0.0007) | -                    | -                    | -                    | -                    | -                  | -                    | -                    |
| $\phi$                          | -               | 0.2046 (0.0041) | -                    | -                    | -                    | -                    | -                  | -                    | -                    |
| $B_x$                           | -               | -               | 0.7297 (219.8136)    | 0.9948 (0.3417)      | -6.0768 (0.1347)     | 1.1014 (0.0425)      | -                  | -                    | -                    |
| $B_y$                           | -               | -               | -0.0093 (145.8114)   | -2.1419 (0.2154)     | 5.1709 (0.1056)      | 1.7244 (0.1202)      | -                  | -                    | -                    |
| $\omega_z$                      | -               | -               | 2\pi 0.10 (186.7926) | 2\pi 0.10 (0.0496)   | 2\pi 0.0582 (0.0021) | 2\pi 0.0522 (0.0064) | -                  | -                    | -                    |
| Periodo                         | -               | -               | 10 años              | 10 años              | 10 años              | 17 años              | -                  | -                    | -                    |
| <b>PARAMETROS ESTACIONALES</b>  |                 |                 |                      |                      |                      |                      |                    |                      |                      |
| <b>C2</b>                       |                 |                 |                      |                      |                      |                      |                    |                      |                      |
| $A_{x,1}$                       | -               | -               | -                    | 0.4686 (0.0237)      | -0.0727 (0.0024)     | 2.3601 (0.2590)      | 0.5857 (0.0153)    | 14.4101 (0.6657)     | -1.6247 (0.0581)     |
| $A_{y,1}$                       | -               | -               | -                    | -0.3636 (0.0253)     | -0.0032 (0.0058)     | 1.3521 (0.1210)      | 0.3429 (0.0578)    | -4.2427 (1.8977)     | -0.4881 (0.1704)     |
| $\omega_{f,1}$                  | -               | -               | -                    | 2\pi 0.2245 (0.0171) | 2\pi 0.8649 (0.0429) | 2\pi 0.5024 (0.0184) | 2\pi 0.10 (0.0361) | 2\pi 0.2244 (0.0245) | 2\pi 0.2542 (0.0303) |
| Periodo                         | -               | -               | -                    | 4.5 años             | 1 año                | 2 años               | 10 años            | 4.5 años             | 4 años               |
| $A_{x,2}$                       | -               | -               | -                    | -                    | 0.2662 (0.1637)      | -0.1674 (0.0097)     | -                  | -14.4283 (0.6657)    | 1.5856 (0.0740)      |
| $A_{y,2}$                       | -               | -               | -                    | -                    | -2.0712 (0.0697)     | -0.2328 (0.0327)     | -                  | 3.8628 (1.8979)      | 0.5516 (0.1655)      |
| $\omega_{f,2}$                  | -               | -               | -                    | -                    | 2\pi 0.1729 (0.0222) | 2\pi 0.7508 (0.0494) | -                  | 2\pi 0.2243 (0.0246) | 2\pi 0.2332 (0.0300) |
| Periodo                         | -               | -               | -                    | -                    | 6 años               | 1.5 años             | -                  | 4.5 años             | 4 años               |
| $A_{x,3}$                       | -               | -               | -                    | -                    | -                    | -2.5456 (0.2874)     | -                  | -                    | -0.0665 (0.0026)     |
| $A_{y,3}$                       | -               | -               | -                    | -                    | -                    | -0.0817 (0.0827)     | -                  | -                    | 0.0189 (0.0051)      |
| $\omega_{f,3}$                  | -               | -               | -                    | -                    | -                    | 2\pi 0.5441 (0.0165) | -                  | -                    | 2\pi 0.8928 (0.0416) |
| Periodo                         | -               | -               | -                    | -                    | -                    | 2 años               | -                  | -                    | 1 año                |



| Parámetros     | Modelo 1 | Modelo 2 | Modelo 3 | Modelo 4                     | Modelo 5                     | Modelo 6                     | Modelo 7                     | Modelo 8                     | Modelo 9                     |
|----------------|----------|----------|----------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| C3             |          |          |          |                              |                              |                              |                              |                              |                              |
| $A_{x,1}$      | -        | -        | -        | 0.0059 (0.0206)              | 0.5384 (0.1674)              | 0.0961 (0.0165)              | 0.5661 (0.0907)              | 8.1621 (0.1650)              | -2.0323 (0.1795)             |
| $A_{y,1}$      | -        | -        | -        | -0.3946 (0.0184)             | -2.2191 (0.0619)             | -0.1842 (0.0346)             | -0.1633 (0.0850)             | 19.2284 (0.6285)             | 4.5440 (0.4813)              |
| $\omega_{f,1}$ | -        | -        | -        | $2\pi \cdot 0.2736$ (0.0211) | $2\pi \cdot 0.1626$ (0.0196) | $2\pi \cdot 0.4176$ (0.0221) | $2\pi \cdot 0.2145$ (0.0816) | $2\pi \cdot 0.3949$ (0.0161) | $2\pi \cdot 0.4448$ (0.0327) |
| Periodo        | -        | -        | -        | 4 años                       | 6 años                       | 2.5 años                     | 8 años                       | 2.5 años                     | 2 años                       |
| $A_{x,2}$      | -        | -        | -        | -                            | -0.0749 (0.0033)             | -0.7442 (0.0415)             | -                            | -8.7701 (0.1634)             | 0.9065 (0.2272)              |
| $A_{y,2}$      | -        | -        | -        | -                            | 0.0313 (0.0057)              | -0.0840 (0.0568)             | -                            | -18.6820 (0.6356)            | -4.6988 (0.4403)             |
| $\omega_{f,2}$ | -        | -        | -        | -                            | $2\pi \cdot 0.8747$ (0.0379) | $2\pi \cdot 0.2869$ (0.0357) | -                            | $2\pi \cdot 0.3968$ (0.0161) | $2\pi \cdot 0.4631$ (0.0289) |
| Periodo        | -        | -        | -        | 1 año                        | 3.5 años                     | 3.5 años                     | -                            | 2.5 años                     | 2 años                       |
| $A_{x,3}$      | -        | -        | -        | -                            | -                            | -0.0965 (0.029)              | -                            | -                            | -0.0337 (0.0162)             |
| $A_{y,3}$      | -        | -        | -        | -                            | -                            | -0.0509 (0.0101)             | -                            | -                            | -0.2298 (0.0201)             |
| $\omega_{f,3}$ | -        | -        | -        | -                            | -                            | $2\pi \cdot 0.8072$ (0.0466) | -                            | -                            | $2\pi \cdot 0.7322$ (0.0407) |
| Periodo        | -        | -        | -        | -                            | -                            | 1.5 años                     | -                            | -                            | 1.5 años                     |
| C4             |          |          |          |                              |                              |                              |                              |                              |                              |
| $A_{x,1}$      | -        | -        | -        | -0.2399 (0.0114)             | 0.3621 (0.1581)              | 20.8899 (0.7646)             | -0.2264 (0.0110)             | 0.8159 (0.0329)              | -0.2213 (0.0139)             |
| $A_{y,1}$      | -        | -        | -        | 0.0065 (0.0185)              | -2.3290 (0.0643)             | 1.0828 (0.1518)              | 0.6999 (0.0281)              | -0.2218 (0.0366)             | -0.0464 (0.0162)             |
| $\omega_{f,1}$ | -        | -        | -        | $2\pi \cdot 0.3678$ (0.0296) | $2\pi \cdot 0.1639$ (0.0175) | $2\pi \cdot 0.2867$ (0.0199) | $2\pi \cdot 0.2462$ (0.0474) | $2\pi \cdot 0.1014$ (0.0186) | $2\pi \cdot 0.3177$ (0.0327) |
| Periodo        | -        | -        | -        | 3 años                       | 6 años                       | 3.5 años                     | 4 años                       | 10 años                      | 3 años                       |
| $A_{x,2}$      | -        | -        | -        | -                            | -0.0402 (0.0589)             | -21.5728 (0.7637)            | -                            | -0.0695 (0.0036)             | -0.0563 (0.0115)             |
| $A_{y,2}$      | -        | -        | -        | -                            | 0.0589 (0.0032)              | -1.4009 (0.1432)             | -                            | -0.0447 (0.0051)             | -0.1959 (0.0162)             |
| $\omega_{f,2}$ | -        | -        | -        | -                            | $2\pi \cdot 0.8766$ (0.0395) | $2\pi \cdot 0.2851$ (0.0186) | -                            | $2\pi \cdot 0.7463$ (0.0310) | $2\pi \cdot 0.2034$ (0.0213) |
| Periodo        | -        | -        | -        | 1 año                        | 1 año                        | 3.5 años                     | -                            | 1.5 años                     | 5 años                       |
| $A_{x,3}$      | -        | -        | -        | -                            | -                            | -0.0709 (0.0063)             | -                            | -                            | -0.0086 (0.0063)             |
| $A_{y,3}$      | -        | -        | -        | -                            | -                            | 0.0397 (0.0074)              | -                            | -                            | 0.0627 (0.0014)              |
| $\omega_{f,3}$ | -        | -        | -        | -                            | -                            | $2\pi \cdot 0.8459$ (0.0555) | -                            | -                            | $2\pi \cdot 0.9111$ (0.0506) |
| Periodo        | -        | -        | -        | -                            | -                            | 1 año                        | -                            | -                            | 1 año                        |

| Parámetros   | Modelo 1 | Modelo 2 | Modelo 3 | Modelo 4               | Modelo 5               | Modelo 6               | Modelo 7               | Modelo 8               | Modelo 9               |
|--|----------|----------|----------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| C5   |          |          |          |                        |                        |                        |                        |                        |                        |
| $A_{x,1}$  | -        | -        | -        | 0.1331 (0.0074)        | 10.4344 (0.1880)       | 20.1130 (0.1466)       | 0.6999 (0.1213)        | 1.5904 (0.0618)        | 0.5213 (0.0102)        |
| $A_{y,1}$  | -        | -        | -        | -0.0520 (0.0136)       | 11.9826 (0.2923)       | -10.8276 (0.3661)      | -0.3858 (0.0755)       | -0.2047 (0.0748)       | -0.1495 (0.0274)       |
| $\omega_{f,1}$                                     | -        | -        | -        | $2\pi 0.5753$ (0.0386) | $2\pi 0.3822$ (0.0087) | $2\pi 0.4696$ (0.0196) | $2\pi 0.10$ (0.0493)   | $2\pi 0.4146$ (0.0189) | $2\pi 0.4786$ (0.0257) |
| Periodo  | -        | -        | -        | 2 años                 | 2.5 años               | 2 años                 | 10 años                | 2.5 años               | 2 años                 |
| $A_{x,2}$  | -        | -        | -        | -                      | -12.0126 (0.2186)      | -19.3101 (0.2432)      | -                      | -0.6532 (0.0741)       | 0.3258 (0.0074)        |
| $A_{y,2}$  | -        | -        | -        | -                      | -7.9467 (0.2230)       | 12.3856 (0.1674)       | -                      | 1.2013 (0.0498)        | 0.0804 (0.0189)        |
| $\omega_{f,2}$                                     | -        | -        | -        | -                      | $2\pi 0.3974$ (0.0089) | $2\pi 0.4759$ (0.0231) | -                      | $2\pi 0.4652$ (0.0187) | $2\pi 0.6208$ (0.0290) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                      | 2.5 años               | 2 años                 | -                      | 2 años                 | 1.5 años               |
| $A_{x,3}$  | -        | -        | -        | -                      | -                      | 0.8929 (0.3621)        | -                      | -                      | 0.0271 (0.0015)        |
| $A_{y,3}$  | -        | -        | -        | -                      | -                      | -0.2606 (0.2314)       | -                      | -                      | 0.0029 (0.0065)        |
| $\omega_{f,3}$                                     | -        | -        | -        | -                      | -                      | $2\pi 0.5033$ (0.0196) | -                      | -                      | $2\pi 1.5269$ (0.0915) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                      | -                      | 2 años                 | -                      | -                      | 1 año                  |
| C6   |          |          |          |                        |                        |                        |                        |                        |                        |
| $A_{x,1}$  | -        | -        | -        | 0.2384 (0.2921)        | -14.0722 (0.3386)      | -7.9319 (0.7617)       | 0.3214 (0.6993)        | 0.0346 (0.0169)        | 4.4377 (0.1740)        |
| $A_{y,1}$  | -        | -        | -        | -0.3562 (0.1160)       | 0.7565 (0.01857)       | -29.6918 (0.8623)      | -0.2158 (0.3670)       | -0.0214 (0.0224)       | 1.9128 (0.0470)        |
| $\omega_{f,1}$                                     | -        | -        | -        | $2\pi 0.2843$ (0.2345) | $2\pi 0.5769$ (0.0104) | $2\pi 0.4693$ (0.0164) | $2\pi 0.1001$ (0.5373) | $2\pi 1.0404$ (0.1816) | $2\pi 0.6923$ (0.0116) |
| Periodo  | -        | -        | -        | 3.5 años               | 1 año                  | 2 años                 | 10 años                | 1 año                  | 1.5 años               |
| $A_{x,2}$  | -        | -        | -        | -                      | 11.1213 (0.1925)       | 8.7426 (0.4560)        | -                      | 0.0288 (0.0480)        | 1.2792 (0.0190)        |
| $A_{y,2}$  | -        | -        | -        | -                      | -6.5650 (0.3163)       | 11.9233 (0.8693)       | -                      | -0.0516 (0.0259)       | -3.6162 (0.1550)       |
| $\omega_{f,2}$                                     | -        | -        | -        | -                      | $2\pi 0.6017$ (0.0112) | $2\pi 0.4645$ (0.0161) | -                      | $2\pi 1.5764$ (0.2810) | $2\pi 0.6115$ (0.0103) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                      | 1.5 años               | 2 años                 | -                      | 1 año                  | 1.5 años               |
| $A_{x,3}$  | -        | -        | -        | -                      | -                      | 3.5817 (0.2012)        | -                      | -                      | 1.0357 (0.0166)        |
| $A_{y,3}$  | -        | -        | -        | -                      | -                      | 17.5365 (0.0884)       | -                      | -                      | -0.5751 (0.0563)       |
| $\omega_{f,3}$                                     | -        | -        | -        | -                      | -                      | $2\pi 0.4843$ (0.0136) | -                      | -                      | $2\pi 0.9078$ (0.0164) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                      | -                      | 2 años                 | -                      | -                      | 1 año                  |
| $\sum \min SCR(\hat{\theta}_t) = \sum_t \hat{u}_t$ | 24.2634  | 21.8772  | 21.8082  | 18.1176                | 15.1486                | 15.1911                | 19.5338                | 16.9416                | 14.8985                |
| $(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t)^{1/2}$       | 0.1607   | 0.1526   | 0.1523   | 0.1388                 | 0.1264                 | 0.1271                 | 0.1442                 | 0.1342                 | 0.1259                 |
| $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n  \hat{u}_t $             | 0.0656   | 0.0652   | 0.0608   | 0.0574                 | 0.0578                 | 0.0582                 | 0.0593                 | 0.0565                 | 0.0566                 |

Tabla 4: Parámetros de las estimaciones *in-sample* de los 9 modelos unifactoriales, periodos, y medidas de bondad de ajuste. La muestra considerada es desde el dato disponible hasta 2013. Entre paréntesis se muestran las desviaciones típicas de las estimaciones.

### Estimaciones paramétricas para el periodo 2013-2018

| Parámetros                      | Modelo 1        | Modelo 2         | Modelo 3              | Modelo 4                | Modelo 5                | Modelo 6                | Modelo 7                | Modelo 8                | Modelo 9                |
|---------------------------------|-----------------|------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| <b>PARAMETROS ESTRUCTURALES</b> |                 |                  |                       |                         |                         |                         |                         |                         |                         |
| $\alpha$                        | 2.1024 (0.0063) | 2.0919 (0.0566)  | 2.7194 (0.0360)       | 2.0465 (0.7347)         | 2.9701 (0.2013)         | 11.1717 (0.1213)        | 2.1345 (0.0078)         | 0.7396 (0.1845)         | 1.2160 (0.1501)         |
| $\sigma^2$                      | 0.0000 (0.0000) | 0.0000 (0.0000)  | 0.0000 (0.0000)       | 2.6722 (0.5054)         | 1.7800 (0.1989)         | 1.0584 (0.1069)         | 0.0000 (0.0000)         | 2.8723 (0.3173)         | 2.5383 (0.2796)         |
| $\kappa$                        | 0.6061 (0.0101) | 0.6276 (0.0824)  | 0.2834 (0.0084)       | 0.7233 (0.0154)         | 0.7746 (0.0174)         | 0.7600 (0.0143)         | 0.5509 (0.0601)         | 0.7553 (0.0142)         | 0.8299 (0.0497)         |
| $\gamma$                        | -               | -0.0048 (0.0007) | -                     | -                       | -                       | -                       | -                       | -                       | -                       |
| $\phi$                          | -               | 1.0962 (0.0241)  | -                     | -                       | -                       | -                       | -                       | -                       | -                       |
| $B_x$                           | -               | -                | -0.0668 (0.0760)      | 3.1648 (0.9031)         | 2.1618 (0.1353)         | -2.3127 (0.1557)        | -                       | -                       | -                       |
| $B_y$                           | -               | -                | -1.0 (0.0398)         | 1.7277 (1.7081)         | 1.5273 (0.1846)         | 10.0570 (0.1334)        | -                       | -                       | -                       |
| $\omega_z$                      | -               | -                | 2 $\pi$ 0.10 (0.0119) | 2 $\pi$ 0.0856 (0.1020) | 2 $\pi$ 0.0737 (0.0062) | 2 $\pi$ 0.0370 (0.0028) | -                       | -                       | -                       |
| Periodo                         | -               | -                | 10 años               | 12 años                 | 13.5 años               | 27 años                 | -                       | -                       | -                       |
| <b>PARAMETROS ESTACIONALES</b>  |                 |                  |                       |                         |                         |                         |                         |                         |                         |
| <b>C2</b>                       |                 |                  |                       |                         |                         |                         |                         |                         |                         |
| $A_{x,1}$                       | -               | -                | -                     | 0.5837 (0.1920)         | 24.4853 (0.1721)        | 2.1935 (0.4392)         | 0.0822 (0.0299)         | -16.2817 (1.0068)       | 9.9040 (1.1590)         |
| $A_{y,1}$                       | -               | -                | -                     | 1.1918 (0.4895)         | 1.3200 (2.5632)         | -5.2457 (0.5131)        | -0.1473 (0.0494)        | 26.3427 (1.2936)        | -21.1874 (0.3571)       |
| $\omega_{f,1}$                  | -               | -                | -                     | 2 $\pi$ 0.1408 (0.0398) | 2 $\pi$ 0.2475 (0.0305) | 2 $\pi$ 0.2930 (0.0212) | 2 $\pi$ 0.2162 (0.0703) | 2 $\pi$ 0.1209 (0.0048) | 2 $\pi$ 0.1896 (0.0119) |
| Periodo                         | -               | -                | -                     | 7 años                  | 4 años                  | 3.5 años                | 4.5 años                | 8 años                  | 5 años                  |
| $A_{x,2}$                       | -               | -                | -                     | -                       | -24.8286 (0.2350)       | 11.6159 (0.6748)        | -                       | 18.1015 (1.0364)        | -13.8954 (1.0497)       |
| $A_{y,2}$                       | -               | -                | -                     | -                       | -2.1523 (2.6005)        | 15.5812 (0.9319)        | -                       | -25.6476 (1.2769)       | 16.1317 (0.4269)        |
| $\omega_{f,2}$                  | -               | -                | -                     | -                       | 2 $\pi$ 0.2467 (0.0149) | 2 $\pi$ 0.2908 (0.0219) | -                       | 2 $\pi$ 0.1191 (0.0045) | 2 $\pi$ 0.1820 (0.0125) |
| Periodo                         | -               | -                | -                     | 4 años                  | 4 años                  | 3.5 años                | -                       | 8 años                  | 5.5 años                |
| $A_{x,3}$                       | -               | -                | -                     | -                       | -                       | -14.5431 (0.4272)       | -                       | -                       | 2.0090 (0.1254)         |
| $A_{y,3}$                       | -               | -                | -                     | -                       | -                       | -9.7698 (0.4871)        | -                       | -                       | 1.7248 (0.1096)         |
| $\omega_{f,3}$                  | -               | -                | -                     | -                       | -                       | 2 $\pi$ 0.2917 (0.0226) | -                       | -                       | 2 $\pi$ 0.2244 (0.0203) |
| Periodo                         | -               | -                | -                     | -                       | -                       | 3.5 años                | -                       | -                       | 4.5 años                |

| Parámetros     | Modelo 1 | Modelo 2 | Modelo 3 | Modelo 4               | Modelo 5               | Modelo 6               | Modelo 7               | Modelo 8               | Modelo 9               |
|----------------|----------|----------|----------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| C3             |          |          |          |                        |                        |                        |                        |                        |                        |
| $A_{x,1}$      | -        | -        | -        | 0.5187 (0.2103)        | -36.4487 (1.1556)      | -19.9361 (0.4335)      | 0.0818 (0.0205)        | -19.2686 (0.9964)      | -26.0575 (1.6385)      |
| $A_{y,1}$      | -        | -        | -        | 1.3027 (0.4964)        | -6.6253 (3.0065)       | 0.6519 (0.1372)        | -0.1867 (0.1355)       | 8.8366 (0.2377)        | 15.3824 (1.2162)       |
| $\omega_{f,1}$ | -        | -        | -        | $2\pi 0.1386$ (0.0374) | $2\pi 0.2411$ (0.0089) | $2\pi 0.3235$ (0.0055) | $2\pi 0.2182$ (0.0588) | $2\pi 0.1121$ (0.0033) | $2\pi 0.1185$ (0.0099) |
| Periodo        | -        | -        | -        | 7 años                 | 4 años                 | 3 años                 | 4.5 años               | 9 años                 | 8.5 años               |
| $A_{x,2}$      | -        | -        | -        | -                      | 36.1834 (1.1509)       | 19.1923 (0.3961)       | -                      | 20.7021 (1.0037)       | 28.4936 (1.5290)       |
| $A_{y,2}$      | -        | -        | -        | -                      | 5.5568 (3.0099)        | 2.3764 (0.1526)        | -                      | -6.4771 (0.1802)       | -8.2194 (1.3070)       |
| $\omega_{f,2}$ | -        | -        | -        | -                      | $2\pi 0.2418$ (0.0075) | $2\pi 0.3195$ (0.0054) | -                      | $2\pi 0.1086$ (0.0027) | $2\pi 0.1118$ (0.0096) |
| Periodo        | -        | -        | -        | -                      | 4 años                 | 3 años                 | -                      | 9 años                 | 9 años                 |
| $A_{x,3}$      | -        | -        | -        | -                      | -                      | -0.4267 (0.0323)       | -                      | -                      | -1.0141 (0.1214)       |
| $A_{y,3}$      | -        | -        | -        | -                      | -                      | -0.8069 (0.0363)       | -                      | -                      | -1.1894 (0.1688)       |
| $\omega_{f,3}$ | -        | -        | -        | -                      | -                      | $2\pi 0.3756$ (0.0102) | -                      | -                      | $2\pi 0.1647$ (0.0178) |
| Periodo        | -        | -        | -        | -                      | -                      | 2.5 años               | -                      | -                      | 6 años                 |
| C4             |          |          |          |                        |                        |                        |                        |                        |                        |
| $A_{x,1}$      | -        | -        | -        | 0.2683 (0.2457)        | 6.8861 (0.5925)        | 4.0336 (0.1149)        | 0.1744 (0.0110)        | 1.3028 (0.1847)        | 16.1787 (1.6827)       |
| $A_{y,1}$      | -        | -        | -        | 1.4576 (0.4713)        | 8.3156 (0.9931)        | 12.3560 (0.0947)       | 0.2052 (0.1419)        | 1.3076 (0.0288)        | 27.6922 (2.0443)       |
| $\omega_{f,1}$ | -        | -        | -        | $2\pi 0.1333$ (0.0309) | $2\pi 0.2226$ (0.0147) | $2\pi 0.2864$ (0.0058) | $2\pi 0.2023$ (0.0249) | $2\pi 0.1502$ (0.0075) | $2\pi 0.1398$ (0.0216) |
| Periodo        | -        | -        | -        | 7 años                 | 4.5 años               | 3.5 años               | 5 años                 | 7 años                 | 7 años                 |
| $A_{x,2}$      | -        | -        | -        | -                      | -6.4906 (0.6108)       | -16.5140 (0.2285)      | -                      | -0.3434 (0.2789)       | -14.9998 (1.7860)      |
| $A_{y,2}$      | -        | -        | -        | -                      | -9.2355 (0.9613)       | -19.4722 (0.2143)      | -                      | -2.0313 (0.0893)       | -28.7678 (2.0816)      |
| $\omega_{f,2}$ | -        | -        | -        | -                      | $2\pi 0.2207$ (0.0122) | $2\pi 0.2952$ (0.0068) | -                      | $2\pi 0.1306$ (0.0175) | $2\pi 0.1383$ (0.0218) |
| Periodo        | -        | -        | -        | -                      | 4.5 años               | 3.5 años               | -                      | 7.5 años               | 7 años                 |
| $A_{x,3}$      | -        | -        | -        | -                      | -                      | 10.8037 (0.2816)       | -                      | -                      | 0.0063 (0.0025)        |
| $A_{y,3}$      | -        | -        | -        | -                      | -                      | 6.9909 (0.27865)       | -                      | -                      | 0.0054 (0.0076)        |
| $\omega_{f,3}$ | -        | -        | -        | -                      | -                      | $2\pi 0.3031$ (0.0069) | -                      | -                      | $2\pi 1.4830$ (0.0629) |
| Periodo        | -        | -        | -        | -                      | -                      | 3 años                 | -                      | -                      | 1 año                  |

| Parámetros                                       | Modelo 1 | Modelo 2 | Modelo 3 | Modelo 4               | Modelo 5               | Modelo 6               | Modelo 7               | Modelo 8               | Modelo 9               |
|--|----------|----------|----------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| C5   |          |          |          |                        |                        |                        |                        |                        |                        |
| $A_{x,1}$  | -        | -        | -        | 0.0881 (0.2804)        | -0.0129 (0.0042)       | 0.0558 (0.0209)        | 0.2052 (0.0063)        | 6.7533 (0.4439)        | 36.6138 (0.6541)       |
| $A_{y,1}$  | -        | -        | -        | 1.5548 (0.4494)        | 0.0024 (0.0045)        | -0.4175 (0.0116)       | -0.0540 (0.0462)       | -1.3413 (0.03134)      | 12.6518 (2.5441)       |
| $\omega_{f,1}$                                   | -        | -        | -        | $2\pi 0.1299$ (0.0338) | $2\pi 0.7366$ (0.0651) | $2\pi 0.1979$ (0.0084) | $2\pi 0.1938$ (0.0621) | $2\pi 0.1639$ (0.0081) | $2\pi 0.1520$ (0.0219) |
| Periodo  | -        | -        | -        | 7.5 años               | 1.5 años               | 5 años                 | 5 años                 | 6 años                 | 6.5 años               |
| $A_{x,2}$  | -        | -        | -        | -                      | 0.5798 (0.0307)        | 4.9736 (0.0875)        | -                      | -7.0598 (0.4111)       | -36.4593 (0.6516)      |
| $A_{y,2}$  | -        | -        | -        | -                      | -0.0320 (0.0325)       | 1.7154 (0.0634)        | -                      | 0.4823 (0.3448)        | -14.0639 (2.4403)      |
| $\omega_{f,2}$                                   | -        | -        | -        | -                      | $2\pi 0.1678$ (0.0116) | $2\pi 0.4628$ (0.0168) | -                      | $2\pi 0.1597$ (0.0073) | $2\pi 0.1509$ (0.0209) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                      | 6 años                 | 2 años                 | -                      | 6 años                 | 6.5 años               |
| $A_{x,3}$  | -        | -        | -        | -                      | -                      | -4.9573 (0.0886)       | -                      | -                      | -0.0023 (0.0093)       |
| $A_{y,3}$  | -        | -        | -        | -                      | -                      | -1.8226 (0.0618)       | -                      | -                      | -0.0100 (0.0014)       |
| $\omega_{f,3}$                                   | -        | -        | -        | -                      | -                      | $2\pi 0.4623$ (0.0167) | -                      | -                      | $2\pi 1.5254$ (0.0527) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                      | -                      | 2 años                 | -                      | -                      | 1 año                  |
| C6   |          |          |          |                        |                        |                        |                        |                        |                        |
| $A_{x,1}$  | -        | -        | -        | -0.0351 (0.2888)       | -7.6119 (2.6628)       | -25.9863 (0.4326)      | 0.2182 (0.0056)        | -2.6361 (0.2078)       | -4.7098 (0.1766)       |
| $A_{y,1}$  | -        | -        | -        | 1.6271 (0.4729)        | -14.7730 (0.1025)      | 4.9824 (0.3952)        | -0.0602 (0.0507)       | 0.7075 (0.0979)        | -1.1071 (0.3393)       |
| $\omega_{f,1}$                                   | -        | -        | -        | $2\pi 0.1276$ (0.0283) | $2\pi 0.1615$ (0.0098) | $2\pi 0.2523$ (0.0133) | $2\pi 0.1929$ (0.0492) | $2\pi 0.1625$ (0.0045) | $2\pi 0.1521$ (0.0164) |
| Periodo  | -        | -        | -        | 7.5 años               | 6 años                 | 4 años                 | 5 años                 | 6 años                 | 6.5 años               |
| $A_{x,2}$  | -        | -        | -        | -                      | 8.2707 (2.6590)        | 27.7239 (0.4595)       | -                      | 2.2381 (0.1880)        | 4.5605 (0.2079)        |
| $A_{y,2}$  | -        | -        | -        | -                      | 14.8580 (0.1139)       | -4.6863 (0.3952)       | -                      | -1.3165 (0.1044)       | -0.1282 (0.2376)       |
| $\omega_{f,2}$                                   | -        | -        | -        | -                      | $2\pi 0.1615$ (0.0081) | $2\pi 0.2523$ (0.0130) | -                      | $2\pi 0.1719$ (0.0041) | $2\pi 0.1602$ (0.0147) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                      | 6 años                 | 4 años                 | -                      | 6 años                 | 6 años                 |
| $A_{x,3}$  | -        | -        | -        | -                      | -                      | -1.7794 (0.0462)       | -                      | -                      | -0.0079 (0.0041)       |
| $A_{y,3}$  | -        | -        | -        | -                      | -                      | -1.1611 (0.0561)       | -                      | -                      | -0.0118 (0.0024)       |
| $\omega_{f,3}$                                   | -        | -        | -        | -                      | -                      | $2\pi 0.2282$ (0.0085) | -                      | -                      | $2\pi 1.5250$ (0.0491) |
| Periodo  | -        | -        | -        | -                      | -                      | 4.5 años               | -                      | -                      | 1 año                  |
| $\sum \min SCR(\hat{\theta}_i) = \sum \hat{u}_i$ | 57.4106  | 57.2739  | 39.7311  | 34.5377                | 34.1768                | 34.1694                | 35.1739                | 34.2873                | 33.753                 |
| $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i)^{1/2}$     | 0.0938   | 0.0937   | 0.0780   | 0.0727                 | 0.0723                 | 0.0723                 | 0.0734                 | 0.0725                 | 0.0719                 |
| $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n  \hat{u}_i $           | 0.0680   | 0.0679   | 0.0489   | 0.0459                 | 0.0460                 | 0.0461                 | 0.0463                 | 0.0460                 | 0.0451                 |

Tabla 5: Parámetros de las estimaciones *in-sample* de los 9 modelos unifactoriales, periodos, y medidas de bondad de ajuste para el periodo 2013-2018. Entre paréntesis se muestran las desviaciones típicas de las estimaciones.

SCR, estacionalidad y oscilaciones a largo plazo. Toda la muestra.

| $\sum_t \text{mín } SCR(\hat{\theta}_t)$ | C2    | C3    | C4    | C5    | C6    |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>Modelo 1</b>                          | 8.15  | 18.92 | 17.51 | 18.89 | 29.46 |
| <b>Modelo 2</b>                          | 8.08  | 18.72 | 17.40 | 18.83 | 29.42 |
| Estacionalidad (años)                    | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| Mejora (%)                               | 0.83  | 1.08  | 0.63  | 0.33  | 0.14  |
| <b>Modelo 3</b>                          | 7.00  | 14.70 | 10.00 | 7.33  | 11.34 |
| Long-Term Swing (años)                   | 20.5  | 20.5  | 20.5  | 20.5  | 20.5  |
| Mejora (%)                               | 13.39 | 21.42 | 42.53 | 61.08 | 61.47 |
| <b>Modelo 4</b>                          | 6.95  | 13.85 | 8.77  | 5.59  | 8.79  |
| Long-Term Swing (años)                   | 13    | 13    | 13    | 13    | 13    |
| Estacionalidad (años)                    | 4.5   | 4     | 4     | 3.5   | 3.5   |
| Mejora (%)                               | 0.74  | 5.78  | 12.30 | 23.74 | 22.49 |
| <b>Modelo 5</b>                          | 6.69  | 13.63 | 8.80  | 5.62  | 8.46  |
| Long-Term Swing (años)                   | 14    | 14    | 14    | 14    | 14    |
| Estacionalidad (años)                    | 8.5   | 4     | 4.5   | 3.5   | 3.5   |
| Estacionalidad (años)                    | 8.5   | 4     | 4.5   | 10    | 10    |
| Mejora (%)                               | 3.74  | 1.59  | -0.34 | -0.54 | 3.75  |
| <b>Modelo 6</b>                          | 6.67  | 13.41 | 8.72  | 5.74  | 8.09  |
| Long-Term Swing (años)                   | 13.5  | 13.5  | 13.5  | 13.5  | 13.5  |
| Estacionalidad (años)                    | 3.5   | 7     | 7     | 5     | 3     |
| Estacionalidad (años)                    | 1.5   | 7     | 4     | 5     | 3     |
| Estacionalidad (años)                    | 3.5   | 3     | 4     | 5     | 3.5   |
| Mejora (%)                               | 0.30  | 1.61  | 0.91  | 2.14  | 4.37  |
| <b>Modelo 7</b>                          | 6.92  | 14.84 | 9.53  | 6.04  | 9.53  |
| Estacionalidad (años)                    | 10    | 10    | 10    | 10    | 10    |
| Mejora (%) s/Modelo 2                    | 14.36 | 20.73 | 45.23 | 67.93 | 67.61 |
| <b>Modelo 8</b>                          | 6.62  | 13.57 | 8.74  | 5.74  | 8.56  |
| Estacionalidad (años)                    | 5.5   | 10    | 5     | 4.5   | 3.5   |
| Estacionalidad (años)                    | 10    | 5     | 10    | 8     | 10    |
| Mejora (%)                               | 4.34  | 8.56  | 8.29  | 4.97  | 10.18 |
| <b>Modelo 9</b>                          | 6.51  | 13.27 | 8.61  | 5.80  | 8.46  |
| Estacionalidad (años)                    | 7     | 7.5   | 4     | 6     | 10    |
| Estacionalidad (años)                    | 6     | 7     | 10    | 6     | 3.5   |
| Estacionalidad (años)                    | 6     | 3     | 1     | 1     | 1     |
| Mejora (%)                               | 1.66  | 2.21  | 1.49  | -1.05 | 1.17  |

Tabla 6: Suma cuadrática de errores, periodos de estacionalidad y de las oscilaciones a largo plazo del nivel de reversión a la media, y mejoras estadísticas de cada modelo para cada futuro. Se utiliza la muestra completa.

SCR, estacionalidad y oscilaciones a largo plazo. Periodo disponible-2013

| $\sum_t \text{mín } SCR(\hat{\theta}_t)$ | C2    | C3    | C4     | C5     | C6    |
|--|-------|-------|--------|--------|-------|
| <b>Modelo 1</b>                          | 1.13  | 2.20  | 1.36   | 1.04   | 1.25  |
| <b>Modelo 2</b>                          | 1.08  | 1.99  | 1.24   | 0.99   | 1.20  |
| Estacionalidad (años)                    | 1     | 1     | 1      | 1      | 1     |
| Mejora (%)                               | 4.9   | 9.46  | 8.53   | 5.26   | 4.05  |
| <b>Modelo 3</b>                          | 1.06  | 1.82  | 1.03   | 0.74   | 0.94  |
| Long-Term Swing (años)                   | 10    | 10    | 10     | 10     | 10    |
| Mejora (%)                               | 1.61  | 8.51  | 17.49  | 25.11  | 22.29 |
| <b>Modelo 4</b>                          | 0.88  | 1.48  | 0.93   | 0.72   | 0.74  |
| Long-Term Swing (años)                   | 10    | 10    | 10     | 10     | 10    |
| Estacionalidad (años)                    | 4.5   | 4     | 3      | 2      | 3.5   |
| Mejora (%)                               | 16.75 | 18.51 | 6.54   | 3.17   | 21.11 |
| <b>Modelo 5</b>                          | 0.84  | 1.30  | 0.99   | 0.84   | 0.65  |
| Long-Term Swing (años)                   | 10    | 10    | 10     | 10     | 10    |
| Estacionalidad (años)                    | 1     | 6     | 6      | 2.5    | 2     |
| Estacionalidad (años)                    | 6     | 1     | 1      | 2.5    | 1     |
| Mejora (%)                               | 4.54  | 12.34 | -6.29  | -16.70 | 11.29 |
| <b>Modelo 6</b>                          | 0.84  | 1.26  | 0.98   | 0.87   | 0.69  |
| Long-Term Swing (años)                   | 17    | 17    | 17     | 17     | 17    |
| Estacionalidad (años)                    | 2     | 2.5   | 3.5    | 2      | 2     |
| Estacionalidad (años)                    | 1.5   | 3.5   | 3.5    | 2      | 2     |
| Estacionalidad (años)                    | 2     | 1.5   | 1      | 2      | 2     |
| Mejora(%)                                | 0.02  | 2.88  | 0.84   | -3.93  | -6.13 |
| <b>Modelo 7</b>                          | 0.93  | 1.67  | 1.05   | 0.77   | 0.79  |
| Estacionalidad (años)                    | 10    | 8     | 4      | 10     | 10    |
| Mejora (%) s/Modelo 2                    | 13.13 | 16.28 | 15.77  | 21.87  | 34.66 |
| <b>Modelo 8</b>                          | 0.89  | 1.41  | 0.89   | 0.75   | 0.64  |
| Estacionalidad (años)                    | 4.5   | 2.5   | 10     | 2.5    | 1     |
| Estacionalidad (años)                    | 4.5   | 2.5   | 1.5    | 2      | 1     |
| Mejora (%)                               | 4.81  | 15.51 | 15.33  | 3.36   | 19.09 |
| <b>Modelo 9</b>                          | 0.85  | 1.25  | 1.01   | 0.72   | 0.64  |
| Estacionalidad (años)                    | 4     | 2     | 3      | 2      | 1.5   |
| Estacionalidad (años)                    | 4     | 2     | 5      | 1.5    | 1.5   |
| Estacionalidad (años)                    | 1     | 1.5   | 1      | 1      | 1.5   |
| Mejora (%)                               | 3.85  | 10.85 | -13.82 | 2.93   | 0.31  |

Tabla 7: Suma cuadrática de errores, periodos de estacionalidad y de las oscilaciones a largo plazo del nivel de reversión a la media, y mejoras estadísticas de cada modelo para cada futuro. La muestra considerada es desde el dato disponible hasta 2013.

SCR, estacionalidad y oscilaciones a largo plazo. Periodo 2013-2018

| $\sum_t \text{mín } SCR(\hat{\theta}_t)$ | C2    | C3    | C4    | C5    | C6    |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|
| <b>Modelo 1</b>                          | 5.98  | 13.17 | 10.76 | 10.56 | 16.95 |
| <b>Modelo 2</b>                          | 5.99  | 13.19 | 10.72 | 10.50 | 16.87 |
| Estacionalidad (años)                    | 1     | 1     | 1     | 1     | 1     |
| Mejora (%)                               | -0.21 | -0.16 | 0.32  | 0.53  | 0.47  |
| <b>Modelo 3</b>                          | 5.79  | 12.47 | 8.04  | 4.96  | 8.47  |
| Long-Term Swing (años)                   | 10    | 10    | 10    | 10    | 10    |
| Mejora (%)                               | 3.35  | 5.45  | 25.05 | 52.75 | 49.79 |
| <b>Modelo 4</b>                          | 5.30  | 10.84 | 6.92  | 4.45  | 7.03  |
| Long-Term Swing (años)                   | 11.5  | 11.5  | 11.5  | 11.5  | 11.5  |
| Estacionalidad (años)                    | 7     | 7     | 7.5   | 7.5   | 8     |
| Mejora (%)                               | 8.46  | 13.09 | 13.92 | 10.23 | 17.07 |
| <b>Modelo 5</b>                          | 5.29  | 10.70 | 6.91  | 4.28  | 7.00  |
| Long-Term Swing (años)                   | 13.5  | 13.5  | 13.5  | 13.5  | 13.5  |
| Estacionalidad (años)                    | 4     | 4     | 4.5   | 1.5   | 6     |
| Estacionalidad (años)                    | 4     | 4     | 4.5   | 6     | 6     |
| Mejora (%)                               | 0.22  | 1.30  | 0.14  | 3.85  | 0.38  |
| <b>Modelo 6</b>                          | 5.37  | 10.65 | 6.90  | 4.32  | 6.92  |
| Long-Term Swing (años)                   | 13.5  | 13.5  | 13.5  | 13.5  | 13.5  |
| Estacionalidad (años)                    | 3.5   | 3     | 3.5   | 5     | 4     |
| Estacionalidad (años)                    | 3.5   | 3     | 3.5   | 2     | 4     |
| Estacionalidad (años)                    | 3.5   | 2.5   | 3     | 2     | 4.5   |
| Mejora (%)                               | -1.51 | 0.47  | 0.14  | -0.93 | 1.14  |
| <b>Modelo 7</b>                          | 5.44  | 11.14 | 7.05  | 4.38  | 7.17  |
| Estacionalidad (años)                    | 4.5   | 4.5   | 5     | 5     | 5     |
| Mejora (%) s/Modelo2                     | 9.18  | 15.54 | 34.24 | 58.29 | 57.50 |
| <b>Modelo 8</b>                          | 5.29  | 10.67 | 6.91  | 4.45  | 6.98  |
| Estacionalidad (años)                    | 8     | 9     | 6.5   | 6     | 6     |
| Estacionalidad (años)                    | 8     | 9     | 7.5   | 6     | 6     |
| Mejora (%)                               | 2.76  | 4.22  | 1.99  | -1.60 | 2.65  |
| <b>Modelo 9</b>                          | 5.27  | 10.55 | 6.77  | 4.35  | 6.79  |
| Estacionalidad (años)                    | 5     | 8.5   | 7     | 6.5   | 6.5   |
| Estacionalidad (años)                    | 5.5   | 9     | 7     | 6.5   | 6     |
| Estacionalidad (años)                    | 4.5   | 6     | 1     | 1     | 1     |
| Mejora (%)                               | 0.38  | 1.12  | 2.03  | 2.25  | 2.72  |

Tabla 8: Suma cuadrática de errores, periodos de estacionalidad y de las oscilaciones a largo plazo del nivel de reversión a la media, y mejoras estadísticas de cada modelo para cada futuro. La muestra considerada es desde 2013 a 2018.



|                              |  | Ranking de Modelos |            |           |           |           |           |           |  |  |  |
|------------------------------|--|--------------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--|--|--|
| Años                         |  | Toda la muestra    | Hasta 2013 | 2013-2018 | 2013-2014 | 2014-2015 | 2015-2016 | 2016-2017 |  |  |  |
| Modelos de menor a mayor SCR |  | 9 (57.01)          | 9 (14.90)  | 9 (33.75) | 9 (13.60) | 9 (4.73)  | 9 (0.94)  | 9 (4.28)  |  |  |  |
|                              |  | 6 (57.83)          | 5 (15.15)  | 6 (34.17) | 8 (13.71) | 6 (5.01)  | 8 (0.97)  | 8 (4.41)  |  |  |  |
|                              |  | 8 (58.33)          | 6 (15.19)  | 5 (34.18) | 6 (13.73) | 8 (5.09)  | 5 (0.97)  | 4 (4.69)  |  |  |  |
|                              |  | 5 (58.43)          | 8 (16.94)  | 8 (34.29) | 5 (13.91) | 5 (5.09)  | 6 (0.97)  | 6 (4.75)  |  |  |  |
|                              |  | 4 (59.76)          | 4 (18.12)  | 4 (34.54) | 4 (14.29) | 4 (5.14)  | 4 (0.99)  | 5 (4.86)  |  |  |  |
|                              |  | 7 (64.21)          | 7 (19.53)  | 7 (35.17) | 7 (15.75) | 7 (5.15)  | 7 (1.02)  | 7 (4.86)  |  |  |  |
|                              |  | 3 (67.21)          | 1 (24.26)  | 3 (39.73) | 2 (18.07) | 3 (5.61)  | 3 (1.50)  | 3 (5.44)  |  |  |  |
|                              |  | 2 (121.24)         | 3 (21.81)  | 2 (57.27) | 3 (18.34) | 2 (5.62)  | 2 (1.39)  | 2 (5.51)  |  |  |  |
|                              |  | 1 (122.26)         | 2 (21.88)  | 1 (57.41) | 1 (18.77) | 1 (5.98)  | 1 (1.63)  | 1 (5.54)  |  |  |  |

Tabla 9: Ranking de modelos de menor a mayor suma cuadrática de errores, para los periodos señalados en la tabla

Estimación *out-of-sample*. 2016

|                 |        |        |        |            |            |        |               |        |        |            |            |               |        |               |               |             |
|-----------------|--------|--------|--------|------------|------------|--------|---------------|--------|--------|------------|------------|---------------|--------|---------------|---------------|-------------|
| <b>Modelo 1</b> |        |        |        |            |            |        |               |        |        |            |            |               |        |               |               |             |
| Q1              | Q2     | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ | Modelo 4   | Q1     | Q2            | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ | Modelo 7   | Q1            | Q2     | Q3            | Q4            | $\sum u^2$  |
| 0.3095          | 0.5047 | 0.1808 | 0.1637 | 1.1587     | c2         | 0.1918 | 0.6008        | 0.0640 | 0.1681 | 1.0247     | c2         | 0.1839        | 0.5080 | 0.1647        | 0.1729        | 1.0295      |
| 0.2628          | 0.2761 | 0.1503 | 0.2105 | 0.8997     | c3         | 0.2302 | 0.3643        | 0.0838 | 0.3209 | 0.9992     | c3         | 0.1946        | 0.2803 | 0.1494        | 0.2069        | 0.8312      |
| 0.1139          | 0.0419 | 0.0364 | 0.1088 | 0.3010     | c4         | 0.1478 | 0.1305        | 0.0554 | 0.1822 | 0.5159     | c4         | 0.1028        | 0.0464 | 0.0373        | 0.1125        | 0.299       |
| 0.1471          | 0.0270 | 0.0356 | 0.0870 | 0.2967     | c5         | 0.2178 | 0.0581        | 0.0629 | 0.1792 | 0.5180     | c5         | 0.1580        | 0.0356 | 0.0354        | 0.0895        | 0.3185      |
| 0.1022          | 0.0865 | 0.0750 | 0.1248 | 0.3885     | c6         | 0.1487 | 0.0222        | 0.0881 | 0.2023 | 0.4613     | c6         | 0.0999        | 0.0807 | 0.0711        | 0.1199        | 0.3716      |
| $\sum u^2$      | 0.9355 | 0.9362 | 0.4781 | 3.0446     | $\sum u^2$ | 0.9363 | 1.1759        | 0.3542 | 1.0526 | 3.519      | $\sum u^2$ | <b>0.7392</b> | 0.9511 | 0.4579        | 0.7018        | <b>2.85</b> |
| <b>Modelo 2</b> |        |        |        |            |            |        |               |        |        |            |            |               |        |               |               |             |
| Q1              | Q2     | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ | Modelo 5   | Q1     | Q2            | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ | Modelo 8   | Q1            | Q2     | Q3            | Q4            | $\sum u^2$  |
| 0.4351          | 0.7105 | 0.1991 | 0.2249 | 1.5696     | c2         | 0.1803 | 0.4125        | 0.0815 | 0.1878 | 0.8621     | c2         | 0.3138        | 0.7404 | 0.2277        | 0.2080        | 1.4899      |
| 0.3443          | 0.4176 | 0.1731 | 0.2020 | 1.1370     | c3         | 0.2201 | 0.1190        | 0.1091 | 0.3981 | 0.8463     | c3         | 0.2699        | 0.4543 | 0.1377        | 0.1559        | 1.0178      |
| 0.1600          | 0.0867 | 0.0483 | 0.1101 | 0.4051     | c4         | 0.1449 | 0.0557        | 0.0733 | 0.1869 | 0.4608     | c4         | 0.1396        | 0.1128 | 0.0222        | 0.0986        | 0.3732      |
| 0.1640          | 0.0256 | 0.0327 | 0.0789 | 0.3012     | c5         | 0.2077 | 0.0412        | 0.0831 | 0.1829 | 0.5149     | c5         | 0.1796        | 0.0404 | 0.0562        | 0.1137        | 0.3899      |
| 0.0945          | 0.0907 | 0.1006 | 0.1857 | 0.4715     | c6         | 0.1443 | 0.0113        | 0.0984 | 0.2069 | 0.4609     | c6         | 0.1009        | 0.0247 | 0.0195        | 0.1157        | 0.2608      |
| $\sum u^2$      | 1.1980 | 1.3311 | 0.5538 | 3.8845     | $\sum u^2$ | 0.8974 | 0.6397        | 0.4455 | 1.1626 | 3.1452     | $\sum u^2$ | 1.0038        | 1.3726 | 0.4632        | 0.6918        | 3.5314      |
| <b>Modelo 3</b> |        |        |        |            |            |        |               |        |        |            |            |               |        |               |               |             |
| Q1              | Q2     | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ | Modelo 6   | Q1     | Q2            | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ | Modelo 9   | Q1            | Q2     | Q3            | Q4            | $\sum u^2$  |
| 0.1775          | 0.5466 | 0.0959 | 0.2135 | 1.0355     | c2         | 0.2114 | 0.2513        | 0.2351 | 0.1617 | 0.8595     | c2         | 0.74298       | 0.7263 | 0.0564        | 0.0954        | 1.3079      |
| 0.2166          | 0.3964 | 0.1334 | 0.3707 | 1.1171     | c3         | 0.2583 | 0.1432        | 0.3787 | 0.3307 | 1.1109     | c3         | 0.3256        | 0.4842 | 0.0687        | 0.1986        | 1.0771      |
| 0.1309          | 0.1586 | 0.0810 | 0.2630 | 0.6341     | c4         | 0.1799 | 0.1366        | 0.0308 | 0.1689 | 0.5162     | c4         | 0.2249        | 0.1692 | 0.0371        | 0.0944        | 0.5256      |
| 0.1873          | 0.0789 | 0.0796 | 0.3116 | 0.6574     | c5         | 0.2603 | 0.0674        | 0.0409 | 0.1966 | 0.5652     | c5         | 0.2059        | 0.0417 | 0.0444        | 0.1355        | 0.4275      |
| 0.1292          | 0.0290 | 0.0802 | 0.3477 | 0.5861     | c6         | 0.1741 | 0.0297        | 0.0560 | 0.1797 | 0.4395     | c6         | 0.1050        | 0.0140 | 0.0387        | 0.1065        | 0.2642      |
| $\sum u^2$      | 0.8414 | 1.2095 | 0.4702 | 1.5085     | $\sum u^2$ | 1.0840 | <b>0.6282</b> | 0.7415 | 1.0377 | 3.4914     | $\sum u^2$ | 1.2912        | 1.4355 | <b>0.2453</b> | <b>0.6304</b> | 3.6024      |

Tabla 10: Suma al cuadrado de errores de la estimación *out-of-sample* de cada modelo para el año 2016, utilizando los datos del año 2015. Los números en rojo son los errores cuadráticos menores.

Estimación *out-of-sample* 2016 usando datos de dos años.

|                 |        |               |        |        |               |                 |               |        |               |        |            |                 |         |        |        |               |            |
|-----------------|--------|---------------|--------|--------|---------------|-----------------|---------------|--------|---------------|--------|------------|-----------------|---------|--------|--------|---------------|------------|
| <b>Modelo 1</b> | Q1     | Q2            | Q3     | Q4     | $\sum u^2$    | <b>Modelo 4</b> | Q1            | Q2     | Q3            | Q4     | $\sum u^2$ | <b>Modelo 7</b> | Q1      | Q2     | Q3     | Q4            | $\sum u^2$ |
| c2              | 0.3369 | 1.1168        | 0.5984 | 0.3756 | 2.4277        | c2              | 0.1609        | 0.8292 | 0.2212        | 0.2532 | 1.4545     | c2              | 0.4077  | 1.0941 | 0.4959 | 0.3470        | 2.3447     |
| c3              | 0.2604 | 0.6553        | 0.4397 | 0.2749 | 1.6303        | c3              | 0.1769        | 0.5729 | 0.2286        | 0.3537 | 1.3321     | c3              | 0.2778  | 0.6529 | 0.4795 | 0.2643        | 1.6745     |
| c4              | 0.0729 | 0.3036        | 0.1923 | 0.1255 | 0.6943        | c4              | 0.0749        | 0.3539 | 0.1879        | 0.2519 | 0.8686     | c4              | 0.0647  | 0.3154 | 0.1940 | 0.1316        | 0.7057     |
| c5              | 0.0636 | 0.2347        | 0.1625 | 0.1003 | 0.5611        | c5              | 0.1169        | 0.3048 | 0.1921        | 0.2384 | 0.8522     | c5              | 0.08550 | 0.2285 | 0.1720 | 0.1027        | 0.5882     |
| c6              | 0.0638 | 0.2496        | 0.2379 | 0.2216 | 0.7729        | c6              | 0.0622        | 0.2483 | 0.1919        | 0.2452 | 0.7476     | c6              | 0.0485  | 0.2314 | 0.2913 | 0.2316        | 0.8028     |
| $\sum u^2$      | 0.7976 | 2.5600        | 1.6309 | 1.0979 | 6.0864        | $\sum u^2$      | 0.5919        | 2.3091 | <b>1.0111</b> | 1.3424 | 5.2545     | $\sum u^2$      | 0.8837  | 2.5222 | 1.6327 | 1.0772        | 6.1158     |
| <b>Modelo 2</b> | Q1     | Q2            | Q3     | Q4     | $\sum u^2$    | <b>Modelo 5</b> | Q1            | Q2     | Q3            | Q4     | $\sum u^2$ | <b>Modelo 8</b> | Q1      | Q2     | Q3     | Q4            | $\sum u^2$ |
| c2              | 0.5661 | 1.2537        | 0.5574 | 0.3953 | 2.7825        | c2              | 0.0936        | 0.7738 | 0.2254        | 0.2889 | 1.3817     | c2              | 0.3895  | 1.4258 | 0.6547 | 0.8427        | 3.3127     |
| c3              | 0.4180 | 0.7388        | 0.4257 | 0.2226 | 1.8551        | c3              | 0.1511        | 0.5703 | 0.2289        | 0.4654 | 1.4157     | c3              | 0.3561  | 0.8740 | 0.5166 | 0.4591        | 2.2058     |
| c4              | 0.1430 | 0.3274        | 0.1931 | 0.1305 | 0.7940        | c4              | 0.0711        | 0.4693 | 0.2021        | 0.2244 | 0.9660     | c4              | 0.0614  | 0.2984 | 0.1788 | 0.0679        | 0.6065     |
| c5              | 0.0850 | 0.2336        | 0.1593 | 0.1022 | 0.5801        | c5              | 0.1115        | 0.4314 | 0.2287        | 0.2095 | 0.9811     | c5              | 0.1222  | 0.2990 | 0.1397 | 0.1367        | 0.6976     |
| c6              | 0.0662 | 0.2547        | 0.2457 | 0.2900 | 0.8566        | c6              | 0.0670        | 0.3382 | 0.2055        | 0.2271 | 0.8378     | c6              | 0.0490  | 0.1649 | 0.2083 | 0.0681        | 0.4903     |
| $\sum u^2$      | 1.2884 | 2.8082        | 1.5812 | 1.1906 | 6.8684        | $\sum u^2$      | <b>0.4944</b> | 2.5830 | 1.0897        | 1.4154 | 5.5825     | $\sum u^2$      | 0.9781  | 3.0620 | 1.6980 | 1.5745        | 7.3126     |
| <b>Modelo 3</b> | Q1     | Q2            | Q3     | Q4     | $\sum u^2$    | <b>Modelo 6</b> | Q1            | Q2     | Q3            | Q4     | $\sum u^2$ | <b>Modelo 9</b> | Q1      | Q2     | Q3     | Q4            | $\sum u^2$ |
| c2              | 0.2007 | 0.7673        | 0.2147 | 0.2496 | 1.4323        | c2              | 0.2242        | 1.2140 | 0.4545        | 0.1872 | 2.0799     | c2              | 0.4089  | 1.4193 | 0.4629 | 0.3802        | 2.6713     |
| c3              | 0.1958 | 0.5393        | 0.2394 | 0.3600 | 1.3345        | c3              | 0.1774        | 0.7588 | 0.4973        | 0.2751 | 1.7086     | c3              | 0.2343  | 0.9294 | 0.3524 | 0.2240        | 1.7401     |
| c4              | 0.0777 | 0.3424        | 0.1887 | 0.2511 | 0.8599        | c4              | 0.0674        | 0.5031 | 0.1363        | 0.1984 | 0.9052     | c4              | 0.1817  | 0.3486 | 0.2109 | 0.1001        | 0.8413     |
| c5              | 0.1064 | 0.3052        | 0.1934 | 0.2395 | 0.8445        | c5              | 0.1147        | 0.3650 | 0.1638        | 0.1872 | 0.8307     | c5              | 0.1734  | 0.2254 | 0.1425 | 0.0894        | 0.6307     |
| c6              | 0.0570 | 0.2476        | 0.1903 | 0.2467 | 0.7416        | c6              | 0.0510        | 0.3181 | 0.1333        | 0.1985 | 0.7009     | c6              | 0.0492  | 0.1747 | 0.1733 | 0.1016        | 0.4988     |
| $\sum u^2$      | 0.6376 | <b>2.2017</b> | 1.0265 | 1.3469 | <b>5.2127</b> | $\sum u^2$      | 0.6348        | 3.1591 | 1.3852        | 1.0465 | 6.2256     | $\sum u^2$      | 1.0475  | 3.0974 | 1.3421 | <b>0.8953</b> | 6.3823     |

Tabla 11: Suma al cuadrado de errores de la estimación *out-of-sample* de cada modelo para el año 2016, utilizando los datos de los años 2014 y 2015. Los números en rojo son los errores cuadráticos menores.

Estimación *out-of-sample*. 2017

|                 |               |               |               |        |            |                 |        |        |               |               |               |                 |        |        |        |        |            |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|--------|------------|-----------------|--------|--------|---------------|---------------|---------------|-----------------|--------|--------|--------|--------|------------|
| <b>Modelo 1</b> | Q1            | Q2            | Q3            | Q4     | $\sum u^2$ | <b>Modelo 4</b> | Q1     | Q2     | Q3            | Q4            | $\sum u^2$    | <b>Modelo 7</b> | Q1     | Q2     | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ |
| c2              | 0.3018        | 0.0304        | 0.0640        | 0.2668 | 0.6630     | c2              | 0.3009 | 0.0304 | 0.0673        | 0.1063        | 0.5049        | c2              | 0.3012 | 0.0304 | 0.0594 | 0.2594 | 0.6506     |
| c3              | 0.2993        | 0.0302        | 0.0634        | 0.2663 | 0.6592     | c3              | 0.3004 | 0.0303 | 0.0648        | 0.1084        | 0.5039        | c3              | 0.2982 | 0.0304 | 0.0646 | 0.2645 | 0.6571     |
| c4              | 0.3006        | 0.0308        | 0.0637        | 0.2689 | 0.6640     | c4              | 0.2993 | 0.0306 | 0.0645        | 0.1126        | 0.5070        | c4              | 0.3044 | 0.0307 | 0.0668 | 0.2693 | 0.6712     |
| c5              | 0.3029        | 0.0309        | 0.0662        | 0.2687 | 0.6687     | c5              | 0.2987 | 0.0310 | 0.0633        | 0.1078        | 0.5008        | c5              | 0.3038 | 0.0310 | 0.0710 | 0.2684 | 0.6742     |
| c6              | 0.3041        | 0.0311        | 0.0673        | 0.2685 | 0.6710     | c6              | 0.3199 | 0.0312 | 0.0648        | 0.1116        | 0.5275        | c6              | 0.3060 | 0.0310 | 0.0702 | 0.2655 | 0.6727     |
| $\sum u^2$      | 1.5087        | 0.1535        | <b>0.3246</b> | 1.3392 | 3.3260     | $\sum u^2$      | 1.5193 | 0.1535 | <b>0.3246</b> | <b>0.5468</b> | <b>2.5442</b> | $\sum u^2$      | 1.5137 | 0.1536 | 0.3315 | 1.3273 | 3.3261     |
| <b>Modelo 2</b> | Q1            | Q2            | Q3            | Q4     | $\sum u^2$ | <b>Modelo 5</b> | Q1     | Q2     | Q3            | Q4            | $\sum u^2$    | <b>Modelo 8</b> | Q1     | Q2     | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ |
| c2              | 0.3019        | 0.0302        | 0.0638        | 0.2682 | 0.6641     | c2              | 0.3032 | 0.0314 | 0.0642        | 0.2387        | 0.6375        | c2              | 0.3018 | 0.0303 | 0.0573 | 0.2661 | 0.6555     |
| c3              | 0.2994        | 0.0301        | 0.0634        | 0.2670 | 0.6599     | c3              | 0.2935 | 0.0334 | 0.0652        | 0.3044        | 0.6965        | c3              | 0.2966 | 0.0374 | 0.0592 | 0.2659 | 0.6591     |
| c4              | 0.3005        | 0.0308        | 0.0638        | 0.2688 | 0.6639     | c4              | 0.2997 | 0.0324 | 0.0614        | 0.2488        | 0.6423        | c4              | 0.3032 | 0.0306 | 0.0612 | 0.2729 | 0.6679     |
| c5              | 0.3028        | 0.0311        | 0.0664        | 0.2682 | 0.6685     | c5              | 0.3005 | 0.0324 | 0.0667        | 0.2485        | 0.6481        | c5              | 0.3122 | 0.0309 | 0.0908 | 0.2800 | 0.7139     |
| c6              | 0.3040        | 0.0313        | 0.0675        | 0.2680 | 0.6708     | c6              | 0.3226 | 0.0335 | 0.0787        | 0.2619        | 0.6867        | c6              | 0.3115 | 0.0314 | 0.1148 | 0.2712 | 0.7294     |
| $\sum u^2$      | 1.5086        | 0.1535        | 0.3249        | 1.3402 | 3.3272     | $\sum u^2$      | 1.5195 | 0.1631 | 0.3362        | 1.2924        | 3.3112        | $\sum u^2$      | 1.5253 | 0.1611 | 0.3833 | 1.3561 | 3.4258     |
| <b>Modelo 3</b> | Q1            | Q2            | Q3            | Q4     | $\sum u^2$ | <b>Modelo 6</b> | Q1     | Q2     | Q3            | Q4            | $\sum u^2$    | <b>Modelo 9</b> | Q1     | Q2     | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ |
| c2              | 0.2958        | 0.0304        | 0.0577        | 0.2679 | 0.6518     | c2              | 0.3064 | 0.0321 | 0.0639        | 0.2653        | 0.6677        | c2              | 0.3031 | 0.0312 | 0.0630 | 0.1934 | 0.5907     |
| c3              | 0.2950        | 0.0302        | 0.0638        | 0.2673 | 0.6563     | c3              | 0.3217 | 0.0340 | 0.0564        | 0.2664        | 0.6785        | c3              | 0.2995 | 0.0377 | 0.0657 | 0.1918 | 0.5947     |
| c4              | 0.2979        | 0.0308        | 0.0718        | 0.2696 | 0.6701     | c4              | 0.3050 | 0.0320 | 0.0575        | 0.2719        | 0.6664        | c4              | 0.3004 | 0.0307 | 0.0635 | 0.1977 | 0.5923     |
| c5              | 0.3021        | 0.0309        | 0.0882        | 0.2691 | 0.6903     | c5              | 0.3078 | 0.0317 | 0.0906        | 0.2732        | 0.7033        | c5              | 0.2966 | 0.0351 | 0.0725 | 0.1987 | 0.6029     |
| c6              | 0.3048        | 0.0311        | 0.1048        | 0.2685 | 0.7092     | c6              | 0.3085 | 0.0366 | 0.0870        | 0.2737        | 0.7058        | c6              | 0.3144 | 0.0469 | 0.0639 | 0.1993 | 0.6245     |
| $\sum u^2$      | <b>1.4956</b> | <b>0.1534</b> | 0.3862        | 1.3423 | 3.3775     | $\sum u^2$      | 1.5495 | 0.1663 | 0.3555        | 1.3505        | 3.4218        | $\sum u^2$      | 1.5139 | 0.1816 | 0.3286 | 0.9810 | 3.0051     |

Tabla 12: Suma al cuadrado de errores de la estimación *out-of-sample* de cada modelo para el año 2017, utilizando los datos del año 2016. Los números en rojo son los errores cuadráticos menores.

Estimación *out-of-sample* 2017 con datos de dos años

|                 |        |        |               |        |            |                 |               |               |        |               |               |                 |        |        |        |        |            |
|-----------------|--------|--------|---------------|--------|------------|-----------------|---------------|---------------|--------|---------------|---------------|-----------------|--------|--------|--------|--------|------------|
| <b>Modelo 1</b> | Q1     | Q2     | Q3            | Q4     | $\sum u^2$ | <b>Modelo 4</b> | Q1            | Q2            | Q3     | Q4            | $\sum u^2$    | <b>Modelo 7</b> | Q1     | Q2     | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ |
| c2              | 0.1996 | 0.1612 | 0.1791        | 0.0605 | 0.6004     | c2              | 0.1700        | 0.1502        | 0.1832 | 0.0610        | 0.5644        | c2              | 0.2042 | 0.1589 | 0.1818 | 0.0609 | 0.6058     |
| c3              | 0.2025 | 0.1622 | 0.1799        | 0.0613 | 0.6059     | c3              | 0.1605        | 0.1476        | 0.1838 | 0.0612        | 0.5531        | c3              | 0.2034 | 0.1645 | 0.1820 | 0.0618 | 0.6117     |
| c4              | 0.2085 | 0.1638 | 0.1796        | 0.0610 | 0.6129     | c4              | 0.1599        | 0.1464        | 0.1842 | 0.0605        | 0.551         | c4              | 0.2070 | 0.1612 | 0.1807 | 0.0611 | 0.6100     |
| c5              | 0.2172 | 0.1660 | 0.1797        | 0.0610 | 0.6239     | c5              | 0.1591        | 0.1469        | 0.1846 | 0.0607        | 0.5513        | c5              | 0.2140 | 0.1622 | 0.1795 | 0.0628 | 0.6185     |
| c6              | 0.2232 | 0.1694 | 0.1773        | 0.0616 | 0.6315     | c6              | 0.1612        | 0.1481        | 0.1830 | 0.0621        | 0.5544        | c6              | 0.2288 | 0.1642 | 0.1761 | 0.0608 | 0.6299     |
| $\sum u^2$      | 1.0510 | 0.8226 | 0.8956        | 0.3054 | 3.074      | $\sum u^2$      | 0.8106        | 0.7393        | 0.9188 | 0.3055        | 2.7742        | $\sum u^2$      | 1.0574 | 0.8111 | 0.9001 | 0.3074 | 3.076      |
| <b>Modelo 2</b> | Q1     | Q2     | Q3            | Q4     | $\sum u^2$ | <b>Modelo 5</b> | Q1            | Q2            | Q3     | Q4            | $\sum u^2$    | <b>Modelo 8</b> | Q1     | Q2     | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ |
| c2              | 0.2157 | 0.1574 | 0.1805        | 0.0607 | 0.6148     | c2              | 0.1623        | 0.1465        | 0.1797 | 0.0571        | 0.5456        | c2              | 0.2165 | 0.1629 | 0.1817 | 0.0609 | 0.6220     |
| c3              | 0.2046 | 0.1596 | 0.1807        | 0.0608 | 0.6057     | c3              | 0.1500        | 0.1511        | 0.1803 | 0.0576        | 0.5390        | c3              | 0.2054 | 0.1649 | 0.1818 | 0.0609 | 0.6130     |
| c4              | 0.2047 | 0.1634 | 0.1797        | 0.0605 | 0.6083     | c4              | 0.1491        | 0.1443        | 0.1793 | 0.0573        | 0.5300        | c4              | 0.2165 | 0.1680 | 0.1811 | 0.0604 | 0.6260     |
| c5              | 0.2270 | 0.1682 | 0.1787        | 0.0608 | 0.6347     | c5              | 0.1601        | 0.1435        | 0.1778 | 0.0608        | 0.5422        | c5              | 0.2158 | 0.1677 | 0.1807 | 0.0616 | 0.6258     |
| e c6            | 0.2543 | 0.1740 | 0.1764        | 0.0611 | 0.6658     | c6              | 0.1831        | 0.1501        | 0.1772 | 0.0604        | 0.5708        | c6              | 0.2328 | 0.1728 | 0.1779 | 0.0625 | 0.6460     |
| $\sum u^2$      | 1.1063 | 0.8231 | 0.8960        | 0.3038 | 3.1292     | $\sum u^2$      | <b>0.8046</b> | 0.7355        | 0.8942 | <b>0.2932</b> | <b>2.7275</b> | $\sum u^2$      | 1.0869 | 0.8363 | 0.9031 | 0.3063 | 3.1326     |
| <b>Modelo 3</b> | Q1     | Q2     | Q3            | Q4     | $\sum u^2$ | <b>Modelo 6</b> | Q1            | Q2            | Q3     | Q4            | $\sum u^2$    | <b>Modelo 9</b> | Q1     | Q2     | Q3     | Q4     | $\sum u^2$ |
| c2              | 0.1583 | 0.1435 | 0.1778        | 0.0613 | 0.5409     | c2              | 0.1942        | 0.1359        | 0.1771 | 0.0607        | 0.5679        | c2              | 0.2001 | 0.1636 | 0.1802 | 0.0622 | 0.6061     |
| c3              | 0.1492 | 0.1425 | 0.1776        | 0.0609 | 0.5302     | c3              | 0.1924        | 0.1441        | 0.1799 | 0.0607        | 0.5771        | c3              | 0.2006 | 0.1640 | 0.1816 | 0.0603 | 0.6065     |
| c4              | 0.1462 | 0.1435 | 0.1766        | 0.0604 | 0.5267     | c4              | 0.1917        | 0.1368        | 0.1757 | 0.0599        | 0.5641        | c4              | 0.2100 | 0.1660 | 0.1809 | 0.0598 | 0.6167     |
| c5              | 0.1637 | 0.1457 | 0.1755        | 0.0605 | 0.5454     | c5              | 0.1952        | 0.1442        | 0.1748 | 0.0614        | 0.5756        | c5              | 0.2079 | 0.1754 | 0.1802 | 0.0612 | 0.6247     |
| c6              | 0.2002 | 0.1505 | 0.1728        | 0.0608 | 0.5843     | c6              | 0.2802        | 0.1431        | 0.1733 | 0.0628        | 0.6594        | c6              | 0.1994 | 0.1750 | 0.1776 | 0.0607 | 0.6127     |
| $\sum u^2$      | 0.8178 | 0.7256 | <b>0.8803</b> | 0.3039 | 2.7276     | $\sum u^2$      | 1.0537        | <b>0.7041</b> | 0.8807 | 0.3054        | 2.9439        | $\sum u^2$      | 1.0180 | 0.8439 | 0.9005 | 0.3042 | 3.0666     |

Tabla 13: Suma al cuadrado de errores de la estimación *out-of-sample* de cada modelo para el año 2017, utilizando los datos de los años 2015 y 2016. Los números en rojo son los errores cuadráticos menores.

| Modelo bifactorial       |          |          |               |             |        |         |        |        |
|--------------------------|----------|----------|---------------|-------------|--------|---------|--------|--------|
| Estimación de parámetros |          |          |               |             |        |         |        |        |
| $\alpha$                 | $\kappa$ | $\sigma$ | $2\pi\omega$  | correlación | Ax     | Ay      | Ax2    | Ay2    |
| 3.2262                   | 0.0018   | 0.0000   | $2\pi 0.1316$ | -0.0776     | 0.9728 | 0.9623  | 1.0910 | 1.0146 |
| $\sum u^2$               | C2       | C3       | C4            | C5          | C6     | TOTAL   |        |        |
|                          | 0.0009   | 11.0571  | 0.0034        | 0.0056      | 0.0078 | 11.0748 |        |        |

Tabla 14: Estimación de los parámetros del modelo bifactorial y los errores cuadráticos para cada futuro. El período muestral es desde 2013 hasta 2018.

## Apéndice de Figuras

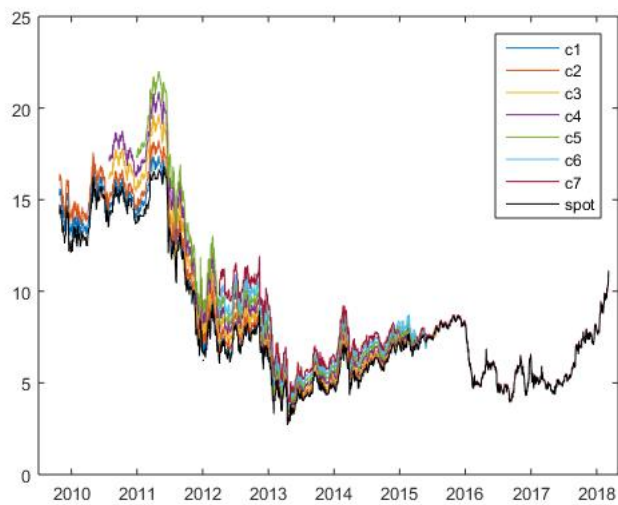


Figura 1: Serie temporal de los precios de los futuros  $c1$  a  $c7$  y precio *spot* para toda la muestra disponible.

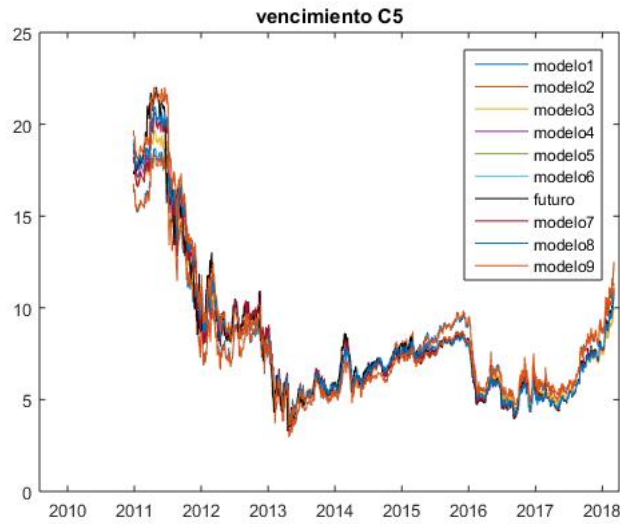


Figura 2: Precios ajustados del futuro c5 para los 9 modelos y precio observado del futuro en el mercado. La muestra disponible para este futuro está comprendida entre el 29 de diciembre de 2010 y el 9 de marzo de 2018.

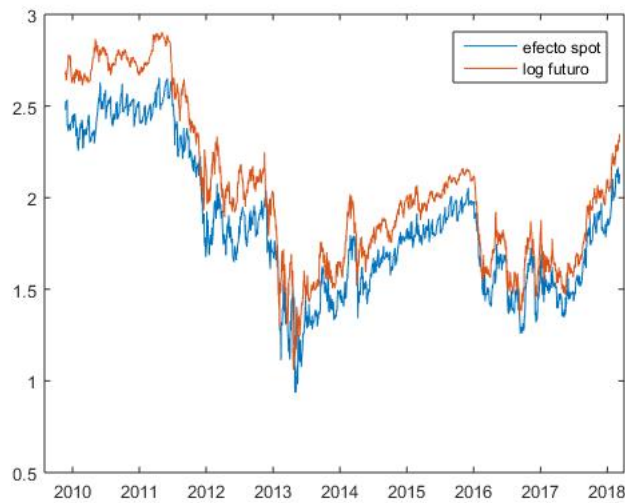


Figura 3: Efecto *spot* y logaritmo del precio futuro observado para c2. La muestra disponible es desde el 27 de octubre de 2009 hasta el 9 de marzo de 2018.



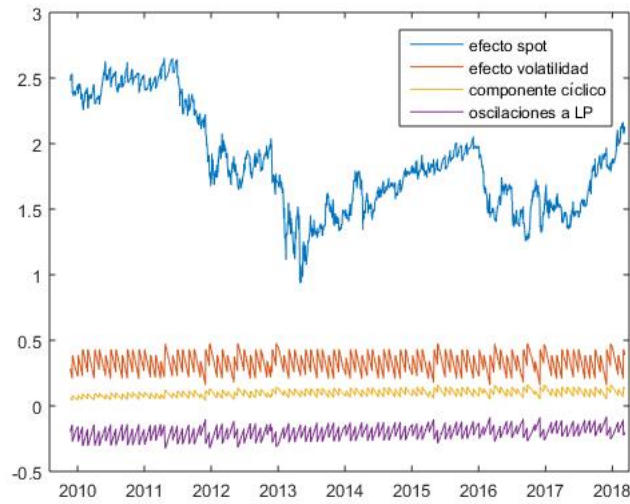


Figura 4: Descomposición de los cuatro efectos del modelo 5 para el futuro c2. La muestra disponible se comprende entre el 27 de octubre de 2009 y el 9 de Marzo de 2018.

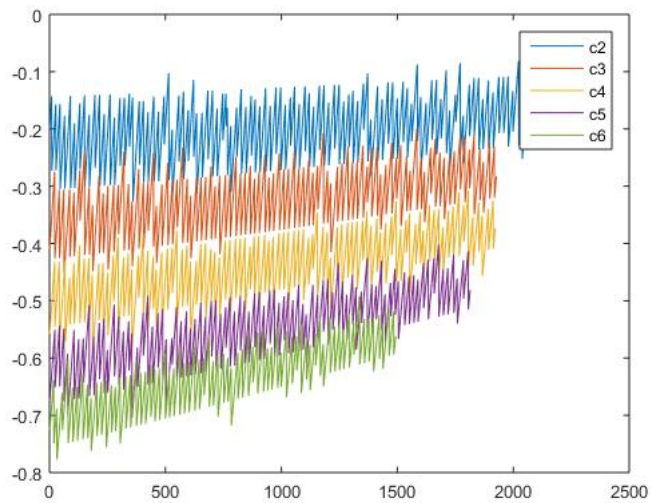


Figura 5: Estimación del nivel de reversión a la media (*long-term swings*) para los precios de los futuros c2 a c6.

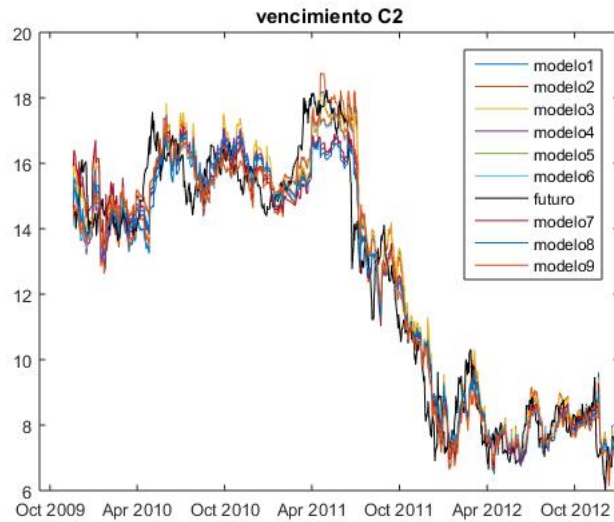


Figura 6: Precios ajustados para el futuro c2 para los 9 modelos y precio observado del futuro en el mercado. La muestra está comprendida entre el 27 de octubre de 2009 y el 9 de Marzo de 2018.

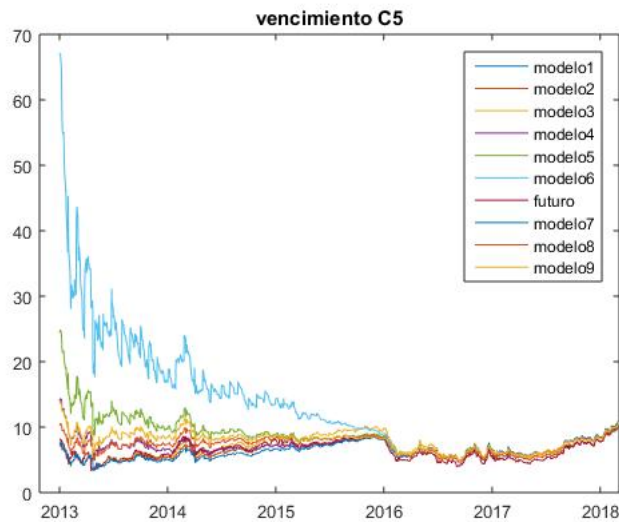


Figura 7: Precios ajustados para el futuro c5 para los 9 modelos y precio observado del futuro en el mercado. La muestra va desde principios de 2013 hasta 9 de Marzo de 2018.

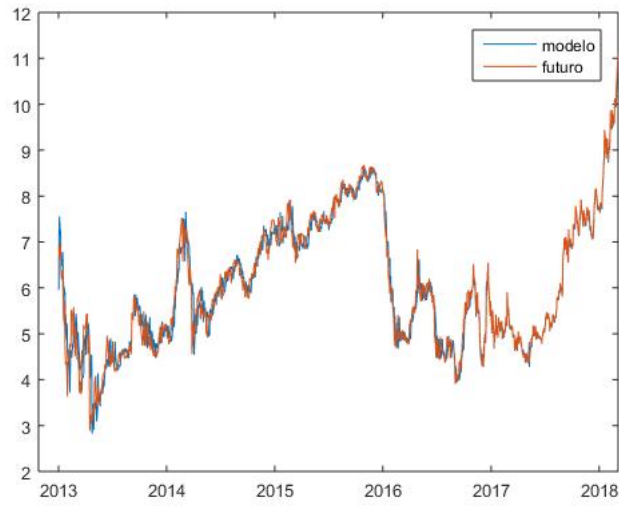


Figura 8: Precio ajustado para el futuro c5 para el modelo bifactorial y precio observado del futuro en el mercado. La muestra va desde el inicio de 2013 hasta 9 de Marzo de 2018.

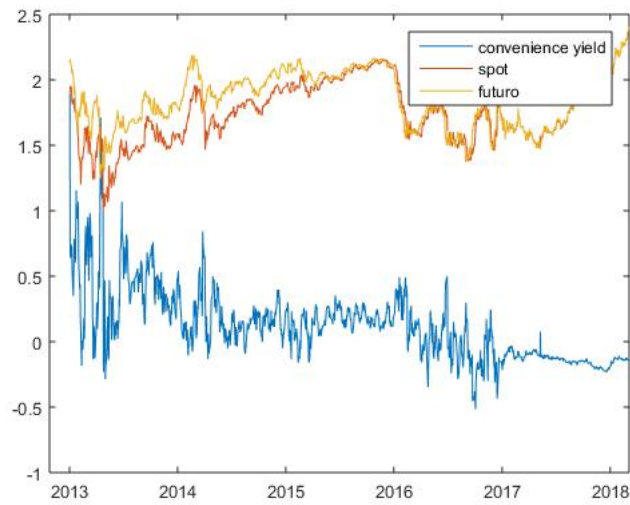


Figura 9: Precio del futuro c5, precio *spot* y *convenience yield* desde inicios de 2013 hasta el 9 de Marzo de 2018.