

**RIESGO DE MODELO EN LA ESTIMACIÓN DEL VAR Y  
CVAR: APLICACIÓN A CARTERAS DE RENTA  
VARIABLE Y CARTERAS DE DEUDA**

**Ana Regina Heres Velasco**

Trabajo de investigación 017/013

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutores: Dr. Alfonso Novales

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

# Riesgo de Modelo en la estimación del VaR y el CVaR: aplicación a carteras de renta variable y carteras de deuda.

Ana Regina Heres Velasco

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

## Resumen

En los últimos años, ha incrementado la necesidad de la industria financiera por hacer uso de modelos más sofisticados, generando una mayor exposición al riesgo de modelo. Esto hace que cada vez sea más importante disponer de métodos que permitan cuantificar dicho riesgo, para lograr una adecuada gestión del mismo.

En el presente trabajo, se proponen metodologías y técnicas que nos permiten analizar y cuantificar el riesgo de modelo de la estimación del VaR y el CVaR de carteras de renta variable y deuda, específicamente el riesgo derivado de la elección incorrecta de la forma funcional del modelo y de la incertidumbre generada por la estimación de los parámetros de este. Las metodologías se basan en la estimación de desviaciones típicas e intervalos de confianza de las estimaciones del VaR y CVaR obtenidas con distintos modelos; posteriormente, se proponen como alternativa estimaciones del VaR y CVaR que incorporan el riesgo de modelo.

La normativa emitida por el Comité de Basilea aún no propone métodos para cuantificar el riesgo de modelo, por lo que este trabajo puede ser un paso importante, innovar y necesario para la gestión adecuada de dicho riesgo.

**Palabras clave:** riesgo de modelo, VaR, CVaR, CreditMetrics, incertidumbre paramétrica.

## Contenido

1.	Introducción .....	3
2.	Riesgo de modelo .....	5
3.	Regulación relativa al riesgo de modelo. ....	9
4.	Riesgo en la elección del modelo para la estimación del VaR y CVaR. ....	13
4.1.	Estimación del VaR y CVaR en algunos modelos habituales. ....	13
4.2.	Estimación del VaR y CVaR bajo dependencia no lineal: Cópulas.....	19
5.	Riesgo por la incertidumbre paramétrica. Estimación del VaR y CVaR.....	22
5.1.	Precisión en la estimación de la volatilidad y el $p$ –cuantil: Teoría estadística .....	22
5.2.	Simulación: Metodologías propuestas.....	25
5.2.1.	Estimación puntual: Incorporación de la incertidumbre paramétrica.....	25
5.2.2.	Distribución del estimador del VaR y CVaR: Incertidumbre paramétrica. ....	27
5.2.3.	Distribución del estimador del VaR y CVaR: Incertidumbre de las innovaciones	35
6.	Riesgo en CreditMetrics. ....	38
7.	Conclusiones.....	46
8.	Referencias .....	49
9.	Apéndice A: Preliminares. ....	51
9.1.	VaR y CVaR .....	52
9.2.	Cópulas. ....	62
9.3.	Metodología (riesgo de modelo).....	66
9.4.	CreditMetrics.....	67
10.	Apéndice B: Análisis de datos.....	74
11.	Apéndice C: Tablas de resultados. ....	76
11.1.	Riesgo por la elección del modelo.....	76
11.2.	Riesgo por incertidumbre paramétrica. ....	80
11.3.	Riesgo en CreditMetrics .....	83

## 1. Introducción

Los modelos son una versión simplificada de la realidad basados en la experiencia, siendo estos un medio para representar y anticipar situaciones o sucesos previsibles. En la industria financiera, los modelos juegan un papel muy importante, ya que nos permiten entender, valorar y predecir el comportamiento de los activos e instrumentos financieros, medir riesgos, detección de fraudes o lavado de dinero, etc.; es decir, son base para la toma de decisiones estratégicas.

Los modelos utilizan técnicas estadísticas, estocásticas, matemáticas y computacionales sofisticadas para representar la realidad, sin embargo ante la complejidad de capturarla adecuadamente, y al ser una simplificación de la misma, nos encontramos con el riesgo de modelo. Dicho riesgo, radica en una mala especificación del modelo o, el uso incorrecto del mismo, así como en sus aproximaciones y estimaciones. El uso de cualquier modelo está sujeto a un grado de incertidumbre en cuanto a su capacidad de representar el fenómeno en estudio; además, la estimación de sus parámetros incorpora un error muestral que añade incertidumbre a las valoraciones que resulten de dicho modelo. En definitiva, deberíamos evitar la práctica habitual de utilizar los valores numéricos de las medidas de riesgo tales como el VaR y CVaR, asumiendo que son sus valores conocidos con certeza.

El Comité de supervisión Bancaria de Basilea<sup>1</sup> en su segundo acuerdo, exige un requerimiento de capital, por riesgo de crédito, riesgo de mercado, y riesgo operacional. Para la medición de dichos riesgos, se emplean distintas medidas de riesgo, entre las que encontramos el Valor en Riesgo (VaR) y el Valor en Riesgo Condicional (CVaR), las cuales cuentan con distintas metodologías y técnicas para su estimación. El cálculo del VaR y CVaR, genera un gran impacto en las entidades financieras, ya que es una de las bases para la gestión del riesgo de mercado y de crédito, por esta razón, resulta interesante el análisis del riesgo de modelo existente en el cálculo de estas medidas.

Hoy en día, las instituciones tienen una mayor exposición al riesgo de modelo, ya que la dinámica reciente de los mercados financieros requiere la implementación de modelos cada vez más complejos. Convirtiéndose en uno de los principales temas de preocupación, ya que un error en los modelos puede suponer grandes pérdidas para la institución. Sin embargo, hoy en día se cuenta con muy pocas técnicas para su cuantificación.

El objetivo del presente trabajo, tras identificar las principales fuentes del riesgo de modelo del VaR y CVaR (de carteras de renta variable y deuda), es plantear una serie de estrategias para analizar y cuantificar dicho riesgo<sup>2</sup>, ya que tener conocimiento de la incertidumbre, así como de la inexactitud de los modelos, demuestra que se tiene una adecuada gestión del riesgo de modelo.

La estimación del Var y CVaR, está expuesto a distintos factores de riesgo, en los que encontramos carencia de los dato, estimación y uso. En concreto, se valorara el riesgo de modelo derivado de la elección del modelo para la estimación del VaR y CVaR, y de la incertidumbre generada por la estimación de los parámetros del modelo, empleando distintas metodologías para cada uno de ellos.

---

<sup>1</sup> El Comité de supervisión Bancaria de Basilea fue creado en 1975 por los Gobernadores de los bancos centrales del Grupo de los Diez, está compuesto por altos representantes de autoridades de supervisión bancaria y de bancos centrales de Alemania, Bélgica, Canadá, España, Estados Unidos, Francia, Italia, Japón, Luxemburgo, Suecia, Suiza, los Países Bajos y el Reino Unido.

<sup>2</sup> El análisis de los datos y la implementación de todas la metodologías expuestas se realizó con ayuda del software estadístico Matlab

La estimación del VaR y CVaR está sujeta a distintos modelos, ya que ésta depende de los supuestos que se hagan sobre la distribución de las rentabilidades, de la dinámica temporal de la volatilidad, así como de la dependencia entre las rentabilidades de los activos que conforman la cartera. Por tanto, dichas estimaciones pueden tener un elevado número de resultados, considerando como una primera aproximación al riesgo de modelo, la dispersión (desviación típica) de todas las posibles estimaciones; con la que se espera analizar la magnitud del riesgo de modelo para activos de distinta naturaleza (acciones, *commodities*, y tipo de cambio) así como los factores que generan dicha dispersión.

No todos los modelos de estimación son adecuados para representar el riesgo de mercado de cada activo, por tanto, estos no deben de ser considerados para la cuantificación del riesgo de modelo. En el presente trabajo, se hace una selección de los modelos de estimación adecuados, basándonos en resultados de validación de la estimación del VaR y CVaR obtenidos de la tesis doctoral de García Jorcano<sup>3</sup>, para realizar una correcta cuantificación del riesgo de modelo, del cual, se espera observar una reducción tras realizar la selección de modelos válidos.

La validación, al ser un modelo también supone un riesgo, de donde surge la cuestión de si la elección de modelo de estimación ha sido la adecuada; por lo que, se propone un método para estimar el VaR el cual considera todos los posibles modelos de estimación válidos. Este se basa en los resultados de validación para jerarquizar los modelos.

Independientemente de la selección del modelo, el riesgo de modelo se puede deber a la incertidumbre de la estimación de los parámetros. Para cuantificar lo anterior, se presentan dos metodologías de análisis; la primera de ellas, incorpora la incertidumbre paramétrica en la estimación del VaR y CVaR, analizando cómo dicha incertidumbre, puede llegar a modificar su estimación; lo anterior, plantea una mejor estimación del VaR y CVaR, ya que considera la incertidumbre paramétrica. La segunda metodología, consiste en obtener la distribución de la estimación del VaR y CVaR; a partir de esto, se estiman la desviación típica e intervalos de confianza, esperando observar qué modelos suponen más riesgo y el motivo de ello.

Además, se incluye el estudio del riesgo de modelo en CreditMetrics, el cual, se debe principalmente a la incertidumbre paramétrica de la matriz de probabilidades de transición; por lo que dicho riesgo será analizado y cuantificado diferenciando las estimaciones del VaR y CVaR utilizando una matriz de probabilidades original y una segunda matriz de probabilidades modificada (con la cual se busca representar la incertidumbre paramétrica). El análisis se realiza a carteras formadas por bonos con diferentes características y de distinto tamaño; esperando encontrar, cómo la incertidumbre de la matriz de probabilidades de transición afecta la estimación del VaR y CVaR de carteras de crédito, y que carteras tienen una mayor exposición al riesgo.

---

<sup>3</sup> García Jorcano Laura. *Sample size, skewness and leverage effects in Value at Risk and Expected Shortfall estimation*; chapter 2 and 3.

## 2. Riesgo de modelo

En esta sección se presentan aspectos generales del riesgo de modelo, así como una introducción al riesgo de modelo de la estimación del VaR y CVaR.

En los últimos años las entidades financieras han incrementado el uso de modelos para la toma de decisiones; entendiendo como modelo, aquel *“método cuantitativo, sistema o aproximación, que tiene como fin realizar una representación de la realidad mediante la aplicación de técnicas estadísticas, matemáticas, financieras, o de economía a través del procesamiento de datos, obteniendo como resultado un conjunto de supuestos con un cierto grado de incertidumbre”*<sup>4</sup>. Los modelos suelen ser utilizados como estrategia de negociación, medición de riesgos, valoración de instrumentos, gestión de activos, así como para medir el cumplimiento de límites internos para el cumplimiento de requisitos de la regulación, entre otros. A continuación algunos ejemplos de modelos que son utilizados por la industria: El CAPM, Black-Scholes, un algoritmo para el cálculo del valor en riesgo, un scoring para el cálculo de la probabilidad de del riesgo de crédito, CreditMetrics.

El uso de modelos genera grandes beneficios para las entidades financieras por ejemplo: la automatización de decisiones, mejorar la eficiencia, reducción de costes asociados al análisis y a la decisión manual. Además sintetiza cuestiones complejas y garantiza que el resultado de estimaciones sea el mismo ante circunstancias iguales. Sin embargo, el uso de modelos genera un riesgo por la incertidumbre que estos conllevan, siendo éste la principal consecuencia adversa de toma de decisiones basadas en los resultados o informes de modelos incorrectos o mal utilizados; generando en muchas ocasiones importantes pérdidas financieras.

A diferencia de este, en otros trabajos el riesgo de modelo únicamente es estudiado cualitativamente y únicamente centran el fracaso de los modelos en el mal uso de ellos y en las hipótesis erróneas. Como es el caso de Bertrand K. Hassani (2015), el cual sugiere que las principales causas de las fallas de los modelos se deben a: 1) Dogmas (la fe en el modelo); por los cuales, estos son utilizados sin cuestionarlos. 2) Cambio de paradigma; la cual, es una alteración del conjunto básico de suposiciones. Un cambio de paradigma no detectado generar; precios, medidas de riesgos o decisiones de inversión equivocadas. 3) Suposiciones erróneas o fuertes. 4) Dominio de definición; es decir, la zona en la que el modelo pueda comportarse de la manera más apropiada. 5) Uso incorrecto del modelo; el cual, es el típico riesgo operacional descrito por Basilea en la categoría 7.:

De acuerdo a la Fed y OCC, el riesgo de modelo se define como, *“el conjunto de consecuencias adversas, resultantes de las decisiones basadas en las salidas de los modelos, motivadas por errores en la definición, aplicación o uso de los modelos utilizados”*. Asociando dicha definición a la incertidumbre derivada de la imperfección del modelo utilizado, los principales factores que originan la incertidumbre son: (1) carencia de los datos; (2) estimación; y (3) uso del modelo.

---

<sup>4</sup> Definición del Consejo de Supervisión y Orientación sobre las Gestiones de Riesgo de la Reserva Federal de Estado Unidos; <https://www.federalreserve.gov/bankinfo/reg/srletters/sr1107.htm>

Datos	Estimación	Utilización
-Error en la definición	-Incertidumbre paramétrica	-Interpretación y/o aplicación errónea de los resultados del modelo
-Error en el mapeo de las fuentes	-El modelo no recoge adecuadamente la realidad	-Diseño incorrecto del modelo
-Datos incorrectos o insuficientes	-Asunciones e hipótesis inadecuada o equivocada	-Manejo del modelo por personas que no sean capaces de entender sus limitaciones, hipótesis y fundamentos
-Problemas de recopilación	-Simplificaciones y aproximaciones	-Uso del modelo con otros propósitos diferentes a los establecido en su diseño
-Uso de series de datos no recientes	-Diseño de procesos incorrectos.	-Diferencias entre las prácticas de gestión y supervisión
-Frecuencia insuficiente	-Sobre parametrización.	-El modelo no se integra en la gestión
-Histórico incompleto o inadecuado	-Ausencia de comparabilidad con el mercado	-El modelo no es actualizado o recalibrado periódicamente
-Problemas de migración	-Dificultados de Software	- Se introducen cambios en el modelo no aprobados o validados
-Falta de precisión (margen de error)	-No se utilizan intervalos de confianza	-Diferentes usos comerciales y de gestión de riesgo del modelo
-Ausencia de variables relevantes	-Falta de actualización periódica	-El modelo carece de Credibilidad por el usuario.
	-Inestabilidad del modelo y volatilidad de las estimaciones	
	-Deficiencia en la capacidad productiva	
	-Ausencia de documentación	
	-Ausencia de independencia en la validación	

Tabla 2.1: Principales fuentes de riesgo de un modelo. Fuente: Rodríguez Pardo del Castillo José Miguel y Ariza Rodríguez Fernando, “*El Riesgo de modelo en la industria bancaria y aseguradora: Propuesta para su evaluación, control y mitigación (CONCRECIÓN EN E RIESGO DE LONGEVIDAD)*”, Análisis Financiero n° 129, 2015, pág.: 52-66.

Por lo tanto, nos enfocaremos en un análisis cuantitativo del riesgo de modelo, con el que se complementaran las ideas cualitativas del mismo.

En el año 2002, el equipo de trabajo Risk Management Group del Comité de Basilea realizó un ejercicio en el cual se llevó a cabo una recopilación de datos sobre eventos de pérdidas operacionales de las entidades financieras referentes al ejercicio del 2001, con la participación de 89 bancos y recopilando 47,000 datos de pérdidas por riesgo operacional. Los resultados obtenidos (tabla 10.1 apéndice A) indican que la principal pérdida total (en importe) de los bancos por riesgo operacional se debe a la gestión de procesos, en los que de acuerdo a su definición y categorías secundarias encontramos el riesgo de modelo (tabla 10.2 apéndice A).

Como se observa en la tabla 2.1, existen muchas fuentes de riesgo de modelo; sin embargo, no todos los modelos están expuestos a las mismas, ni presentan la misma sensibilidad. Es importante identificar las fuentes de riesgo que originan la incertidumbre en la estimación de cada modelo, y de ser posible, cuantificar la sensibilidad de los modelos a las fuentes que están expuestos, para así, gestionar adecuadamente el riesgo.

En el contexto del Valor en Riesgo (VaR) y del Valor en Riesgo Condicional (CVaR), el riesgo de modelo puede ser definido como; “el conjunto de consecuencias adversas, asociado a la incertidumbre derivada de la imperfección del modelo utilizado”; generando un sesgo desconocido que produce una medida de riesgo menor o mayor a la que realmente se asume. En otras palabras, el riesgo del modelo en la estimación del VaR y del CVaR será el riesgo de no estimar con precisión dicha medida. (Si el lector lo considera necesario, en la sección 9.1 del apéndice A se describen aspectos relevantes; así como metodologías para la estimación del VaR y CVaR).

El riesgo de modelo en la estimación del VaR y CVaR, como es el caso de otros modelos, tiene presencia de las 3 fuentes de riesgo; carencia en los datos, estimaciones y uso. Sin embargo, como fue mencionado anteriormente; para una adecuada gestión del riesgo de modelo, así como, para su cuantificación, es indispensable conocer las limitaciones y las fuentes del riesgo específicas del modelo; las cuales son presentadas a continuación.

- Datos

Las principales fuentes de riesgos provenientes de los datos son: un tamaño muestral insuficiente y la ausencia de datos acerca de alguna variable crítica, lo que puede generar errores significativos en el cálculo del VaR y de CVaR, especialmente cuando se están utilizando modelos factoriales para la estimación del VaR y del CVaR.

El cálculo del VaR de una cartera de inversión con un elevado número de activos, se plantea en la práctica como un problema computacional; debido a la estimación de un conjunto de elementos de una matriz gigante de varianzas y covarianzas. Es aquí donde nos podemos dar cuenta de la importancia de la reducción de la dimensionalidad; donde se busca sintetizar la cartera en un número reducido de factores de riesgo o bien en una única cifra. Por tanto, la elección de dichos factores es importante para el cálculo de la estimación del VaR; así como para el riesgo de modelo. Por un lado, incluir tantos factores sean necesarios para captar en su totalidad el riesgo de mercado conduce a problemas de tiempo en el proceso, mantenimiento de un número excesivo de series históricas y problemas con la selección de parámetros independientes. Por otro lado, la ausencia de series de datos para los factores de riesgo también dificulta la medición del riesgo de mercado. Las siguientes variables son algunas para las que es frecuente no disponer de datos: Volatilidad Implícita de opciones OTC, Series de spreads de emisiones de renta fija privada, y variables procedentes de mercados emergentes.



- Estimación.

Las principales fuentes de riesgo de los modelos del VaR y CVaR las encontramos en esta categoría. El cálculo del VaR y CVaR está fuertemente condicionado a los supuestos que se hagan sobre las rentabilidades, ya sea en términos de la distribución de probabilidad de sus innovaciones o de la dinámica de los momentos de dicha distribución, y si a eso le añadimos la elección del método, el cálculo del VaR puede presentar un elevado número de estimaciones numéricas. Sin embargo, el riesgo de modelo derivado de la dispersión de las estimaciones puede ser reducido o controlado por la existencia de métodos de validación del VaR y CVaR.

El contexto de un solo modelo y método, la estimación del VaR y CVaR puede variar enormemente, según la selección de los datos, la metodología de estimación de los parámetros, y de la incertidumbre de los mismos. Cada método y modelo empleado para la estimación del VaR y CVaR presenta diferentes factores de riesgo y limitaciones. Inclusive, cuando se tiene una cartera formada por varios activos, un supuesto erróneo sobre la correlación de los factores puede suponer un riesgo de modelo.

Además de las distintas estimaciones numéricas que puedan surgir, cada una de ellas no deja de ser la estimación de un percentil poblacional, y esta por tanto sujeta a un error muestral, que depende de la precisión de la estimación. El tamaño del error muestral; que se manifiesta habitualmente en la desviación típica del estimador; solo es conocido bajo determinados supuestos.

En el caso del VaR y CVaR de una cartera de bonos de crédito, aplicado a CreditMetrics, la principal fuente de riesgo la encontramos en la incertidumbre paramétrica de la estimación de la matriz de transición, siendo esta el principal parámetro del método. Sin embargo también esta expuesto al riesgo por la estimación de las tasas de descuento, o de recuperación, así como a la incertidumbre de la estimación del percentil.

- Utilización

El principal factor de riesgo procedente del uso de los modelos de estimación del VaR y CVaR, es la falta de seguimiento en la estimación de los mismos; así como, su falta de actualización ante una evolución de la cartera en el tiempo. Es decir, el uso de modelos no reestimados o recalibrados. Por otro lado, el no dar seguimiento a las validaciones del VaR y del CVaR, también genera un riesgo en el modelo, ya que, el comportamiento de los factores de riesgo pudo experimentar cambios en el tiempo, generando que la estimación del VaR ya no sea la adecuada, lo que se proyectaría en la validación. Además, cual quiera que sea modelo óptimo para la estimación del VaR y CVaR puede variar en el tiempo. El utilizar el modelo para otros fines también supone un riesgo de modelo.

En general, son muchas las fuentes de riesgo que generan errores o falta de precisión en la estimación del VaR y CVaR. Por lo tanto, nos enfocamos en el riesgo de modelo derivado de la elección del modelo y de la incertidumbre paramétrica. Los cuales; de acuerdo a la tabla 2.1; los encontramos en las fuentes de riesgo derivadas de la estimación. Específicamente, el riesgo derivado de la elección del modelo lo asociamos con; el modelo no recoge adecuadamente la realidad y asunciones e hipótesis inadecuadas o equivocadas; mientras que el riesgo por incertidumbre lo asociamos; a la incertidumbre de los parámetros, a que no se utilizan intervalos de confianza y a la inestabilidad del modelo y la volatilidad de las estimaciones.

### 3. Regulación relativa al riesgo de modelo.

El riesgo de modelo se ha convertido en una de las grandes preocupaciones, tanto de las instituciones, como de los reguladores y supervisores; ya que aunque siempre ha existido, actualmente se manifiesta con mayor severidad, debido a que las instituciones hacen cada vez más uso de modelos; además de la creciente complejidad de los mismos. El Comité de Basilea, la Fed y OCC, la EBA, así como reguladores locales, han mostrado su preocupación por este riesgo y exteriorizado la importancia de su gestión y medición. En esta sección se presenta un resumen de las normativas donde se expone la preocupación de los reguladores sobre el riesgo de modelo.

#### El comité de Basilea

El Comité de supervisión Bancaria de Basilea, contempla el riesgo de modelo en el primer pilar de Basilea II; específicamente, en los requerimientos de capital por riesgo operacional. Entendiendo como riesgo operacional, *“el riesgo de sufrir pérdidas debido a la inadecuación o fallos de los procesos, el personal y los sistemas internos o bien a causa de acontecimientos externos...”*<sup>5</sup>, donde en la clasificación de las pérdidas en la categoría 7, encontramos el riesgo de modelo.

En este sentido, el comité de Basilea tiene contemplado el riesgo de modelo, sin embargo, aún no es valorado de forma específica. Los métodos, básico y estándar, no distinguen como tal el riesgo de modelo, es decir, engloban todos los riesgos considerados como operativos. Existe un tercer método; de medición avanzada; en el que las instituciones crean su propio método de medición de riesgo operacional. Por lo que, se podría crear una metodología específica del riesgo de modelo al que está expuesto la entidad y englobarlo en el riesgo operacional. Al tener las entidades un elevado número de modelos, estos se podrían clasificar, dándoles a los que generan mayores pérdidas una mayor importancia y ponderación

En Basilea III se reforzó el marco de capital a partir de los tres pilares del marco de Basilea II, donde las reformas aumentan y mejoran la calidad del capital. A lo que se suma un coeficiente de apalancamiento que actúa como respaldo de las medidas basadas en el riesgo, diseñado para prevenir el exceso de apalancamiento en el sistema bancario y proporciona mayor protección frente al riesgo de modelo y errores de medición. Dicho coeficiente, relaciona el capital con la exposición total de la entidad, con el que se pretende desarrollar una medida sencilla, transparente y ajena al riesgo, que complementa a la ratio de solvencia basada en este. El coeficiente tiene como objetivo limitar el apalancamiento excesivo en el sistema bancario y al ser una medida que no establece ponderaciones por riesgo, reduce el impacto del riesgo de modelo.

Referente a los requerimientos mínimos de Capital (Primer Pilar), las instituciones tienen el derecho de elegir la metodología con la que calcularan el riesgo de crédito, mercado y operacional. Sin embargo, deben de seguir unos estándares cualitativos, con los que de alguna manera se está monitoreando el riesgo de modelo. Las instituciones deben de tener un sistema adecuado de validación de sus modelos; para medir, tanto su precisión como la consistencia del mismo; además de documentar los procesos de modelización. También están sometidos a exámenes de vigilancia de las autoridades supervisoras del banco.

---

<sup>5</sup> (BCBS128)

Por parte del riesgo de mercado, en sus estándares cualitativos se debe de comprobar que los modelos cuentan con un sistema sólido conceptual para la gestión de riesgo de mercado. Donde, las autoridades supervisoras especifican una serie de criterios cualitativos, que las instituciones deberán cumplir. Dado el grado de cumplimiento de estos criterios, la autoridad supervisora determina el nivel del factor multiplicador (sujeto a un mínimo de tres), basándose también, en la calidad del sistema de gestión de riesgo del banco. Adicional, se le puede agregar a este factor un plus que puede ser entre 0 y 1; el cual, está relacionado con el funcionamiento de su modelo a posteriori. Siendo esto un incentivo para mantener la calidad del modelo.

Adicionalmente, tienen que someter su sistema de medición de riesgo de mercado a una revisión independiente; la cual, tiene los siguientes aspectos que son considerados factores del riesgo de modelo: exactitud y exhaustividad de los datos sobre posiciones, comprobación de la consistencia, oportunidad y fiabilidad de las fuentes de datos utilizadas en los modelos, exactitud y adecuación de los supuestos de volatilidad y correlación, y verificación de la exactitud a través de backtesting.

También en el segundo pilar de Basilea II, encontramos la preocupación del riesgo de modelo; donde las autoridades supervisoras deberán examina y evaluar las estrategias internas para la suficiencia de capital, así como, la capacidad de estos para vigilar y garantizar el cumplimiento del capital de regulador. Además, se recoge la necesidad de dotar capital por los riesgos que la institución financiera considere relevantes en el proceso de evaluación del capital.

## Fed y OCC<sup>6</sup>

En 2011 la Fed y OCC, publicaron *Guidence on Modelo Risk Management*, la cual, es una orientación para la gestión de riesgo de modelo. De acuerdo a la guía, para llevar a cabo una buena gestión de riesgo de modelo, las entidades financieras deben desarrollar un marco de gestión de riesgo de modelo (*MGM framework*), el cual, es una política aprobada por el Consejo de Administración y está compuesto por los siguientes elementos:

- Desarrollo e implementación del modelo: el modelo debe tener claro su propósito, seguido de una documentación apoyada por investigación y teoría matemática; además, deben ser explicados con detalle sus méritos y limitaciones. Una parte muy importante del desarrollo del modelo es la prueba, donde se analizan el funcionamiento de este.
- Uso del Modelo: al poner en uso el modelo también se está probando el funcionamiento de este.
- Validación del modelo: es el conjunto de procesos para verificar que los modelos son realizados como se esperaba, de acuerdo a su definición y objetivo. En donde, se busca entre otras cosas, limitaciones e incertidumbre del modelo, para que pueda ser mitigada. Una buena validación ayuda a reducir el riesgo de modelo, ya que se están identificando errores.
- Gobierno, políticas y controles: el consejo administrativo es el responsable de la aprobación del marco de MRM y de recibir informes periódicos sobre este y sobre los riesgos de modelo a los que está expuesta la entidad financiera. En cuanto a la organización; la mayoría de las área de la entidad financiera está expuesta al riesgo de modelo, por lo que, cada una debe de gestionar el riesgo de modelo y se debe de definir los roles dentro de la gestión de riesgos. Por otro lado, los bancos deben de formalizar la gestión de riesgo de

---

<sup>6</sup> The Federal Reserve and Office of the Comptroller of the Currency (OCC).

modelo mediante políticas y procedimientos establecidos, donde deben de quedar claras las funciones y responsabilidades. Por lo tanto, el cumplimiento de las políticas va a ser responsabilidad de los propietarios del modelo y del personal que este asignado al control de este.

- Auditoria interna: es la encargada de evaluar que el marco de gestión del riesgo de modelo, ya sea para modelos individuales o colectivos.

### EBA RTS on prudent valuation.

El reglamento de requisitos de capital (CRR), exige a la EBA, realizar un proyecto de normas técnicas de reglamentación (RTS) para especificar los requisitos relativos a los ajustes prudentes de valoración de las posiciones. El cálculo del ajuste de valoración (AVA), puede ser calculado de forma total, o bien, agregando las AVA's individuales, las cuales están relacionadas con los precios de mercado y con el riesgo de modelo. En este documento se encuentra la propuesta de la EBA para el cálculo del Model Risk AVA, donde se propone una metodología para realizar el ajuste de valoración por riesgo de modelo y las especificaciones para realizar su cálculo.

Se especifican 2 métodos posibles para el cálculo de la AVA por riesgo de modelo. El primero es mediante la determinación de un rango de valoraciones plausibles, producidas a partir de una modelización alternativa y enfoques calibrados. En el supuesto de que las entidades no puedan realizar el primer método podrán utilizar el segundo; el cual está basado en expertos y tiene en cuenta la complejidad de los productos, la diversidad de los posibles enfoques matemáticos y parámetros del modelo, y el grado en el que mercado es importante para el producto.

### Reguladores locales.

Por su parte, el Banco de España en la circular sobre la determinación y control de los recursos propios mínimos, externa la necesidad que las entidades deben de mantener procedimientos para considerar el ajustes de valoración; donde se reflejará, entre otros, el riesgo de modelo asociado al uso de métodos de valoración que pudieran resultar incorrectos y al uso de parámetros de calibración inobservables e/o incorrectos. Por otro lado, expone que las entidades evaluarán la magnitud del riesgo de modelo derivado de la valoración y estimación de los riesgos de precios de los productos de derivados.

### Otros trabajos.

Otros trabajos han realizado la labor de analizar y cuantificar el riesgo en modelos que miden el riesgo de crédito, como es el caso de *Model risk management: Aspectos cuantitativos y cualitativos del riesgo de modelo*. Este trabajo está basado en la guía publicada por la Fed y OCC y expone la necesidad de crear un marco de gestión del riesgo de modelo, el cual está formado por 4 elementos principales: 1) Organización y gobierno; 2) Gestión de modelos; 3) Validación y gestión de cambios en los modelos y 4) Cuantificación.

A diferencia de las normativas, este trabajo propone una metodología para cuantificar el riesgo de modelo, la cual consta de tres fases: 1) identificación de las fuentes de riesgo de modelo, 2) cuantificación de riesgo de modelo asociado a cada una las fuentes; donde emplea una

metodología basada en la sensibilidad de los outputs del modelo a las posibles fluctuaciones de los inputs o estimadores y 3) mitigación del riesgo de modelo. Tras la identificación de las fuentes de riesgo, hace la cuantificación de las mismas. En primer lugar analiza el impacto de la ausencia de información de las variables más relevantes de modelo de scoring; a continuación, analiza la incertidumbre de los estimadores mediante intervalos de confianza de los mismo, de acuerdo a las distribuciones de los estimadores, las cuales son simuladas por Monte Carlo, para posteriormente recalculer el capital y obtener una distribución de dicho capital, para así, obtener su volatilidad que será la incertidumbre de los estimadores. Y por último se analiza el riesgo por falta de seguimiento y mantenimiento del modelo.

### Resumen de la normativa.

Las normativas presentadas externalan la preocupación por el riesgo de modelo al que están expuestas las entidades por los procesos que dependen del uso de modelos, y que un error en estos suponga un desequilibrio en la situación financiera de la entidad. Sin embargo, ninguna de estas, con excepción de la EBA, propone metodologías concretas en las que se pueda cuantificar el riesgo de modelo. Por lo tanto, en los siguientes capítulos se analiza y cuantifica el riesgo de modelo de la estimación del VaR y CVaR, para carteras de renta variables y deuda, lo que supondrá ser un paso importante, innovador y necesario, para una buena gestión del riesgo de modelo; complementando así, la gestión del riesgo de modelo cualitativa expuesta por las normativas.

Por otro lado, ya se han realizado estudios en los que se proponen métodos de cuantificación del riesgo de modelo en el cálculo del riesgo de crédito (*Model risk management*) y en el cálculo de las AVA's, por lo que en el resto del trabajo, nos centraremos en el riesgo de modelo en la estimación del VaR y CVaR; para así en estudios posteriores, contando con metodologías para cuantificar el riesgo de diferentes modelos utilizados por las instituciones, proponer una metodología para contar con una reserva de capital enfocada al riesgo de modelo, o incluir esta en la medición avanzada del riesgo operacional, o bien que sea un requerimiento de capital independiente del riesgo operacional.

## 4. Riesgo en la elección del modelo para la estimación del VaR y CVaR.

La estimación del VaR y del CVaR puede tener un elevado número de resultados, ya que sabiendo que la estimación depende, entre otras cosas, del supuesto que se haga sobre el comportamiento de las rentabilidades de los factores de riesgo, de la especificación de la dinámica temporal de volatilidad, y la dependencias entre rentabilidades de una cartera; a lo que también le añadimos la elección del método de estimación. Utilizar un modelo de estimación incorrecto genera un error en el VaR y CVaR, y por consiguiente en la asignación del capital. En esta sección se analiza y cuantifica el riesgo derivado de la elección del modelo de estimación del VaR y CVaR, empleando distintas metodologías y estimaciones del VaR y CVaR para su cuantificación y análisis.

Para llevar a cabo el análisis, se seleccionaron valores diarios de 4 activos de distinta naturaleza, durante el periodo muestral 01/04/2011 a 30/12/2016 (1501 observaciones). Los activos son los siguientes: índice IBEX35 (euros), Banco Santander (SAN) (euros), oro (\$ por onza) y tipo de cambio EUR/USD (euros). El análisis descriptivo de los datos se encuentra en el apéndice B. Los datos fueron obtenidos en Datastream. Se utilizó el software estadístico Matlab para implementar todas las metodologías.

Para fines prácticos del análisis, la estimación del VaR y CVaR de cada una de las metodologías se realizara sobre un nivel de confianza de  $1 - p = 99\%$  y un horizonte de  $h = 1$ . Cabría esperar que para un intervalo de confianza menor (95% por ejemplo), el riesgo de modelo sea similar, y para horizontes temporales mayores se esperaría que el riesgo de modelo fuera mayor, en especial cuando el VaR y CVaR es estimado con modelos donde no se aplica o no es posible aplicar la extrapolación temporal (métodos no paramétricos, por simulación Monte Carlo, o cuando se supone volatilidad condicional). Sin embargo resultaría interesante analizar estos aspectos, los cuales complementarían el presente estudio; dejando estos abiertos a futuros análisis.

### 4.1. Estimación del VaR y CVaR en algunos modelos habituales.

Una primera aproximación al riesgo de modelo derivado de la elección del modelo será a través de la estimación del VaR y CVaR utilizando las diferentes metodologías descritas en la sección 9.1 del apéndice A y donde se hacen diferentes supuestos sobre las rentabilidades y la volatilidad de las innovaciones, los cuales se presentan en la tabla 4.1.

Supuesto	Descripción
1	$r_t = \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ <p>Las rentabilidades siguen una distribución normal <math>(0, \sigma^2)</math>, las cuales son independientes e idénticamente distribuidas, con volatilidad constante en el tiempo.</p>
2	$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim N(\mu, \sigma^2)$ <p>Las rentabilidades tiene un comportamiento auto regresivo de orden 1, donde las innovaciones <math>(\varepsilon_t)</math> tienen una distribución normal <math>(0, \sigma^2)</math>, las cuales son independientes e idénticamente distribuidas, con volatilidad constante en el tiempo</p>
3	$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim N(\mu, \sigma_t^2)$ $\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \delta_2 \varepsilon_{t-1}^2 \text{ (GARCH)}$ <p>Las rentabilidades siguen un comportamiento auto regresivo de orden 1, donde las innovaciones <math>(\varepsilon_t)</math> tiene una distribución normal <math>(0, \sigma_t^2)</math>, con volatilidad condicional simétricas, la cual sigue un movimiento GARCH(1,1,)</p>
4	$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim N(\mu, \sigma_t^2)$ $\ln(\sigma_t^2) = \delta_0 + \delta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + \delta_2 \left[ \frac{ \varepsilon_{t-1} }{\sigma_{t-1}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] + \delta_3 \left( \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right)$ $E(\sigma_t^2) \geq \exp(E(\ln(\sigma_t^2))) \text{ (EGARCH)}$ <p>Las rentabilidades siguen un comportamiento auto regresivo de orden 1, donde las innovaciones <math>(\varepsilon_t)</math> tiene una distribución normal <math>(0, \sigma_t^2)</math>, con volatilidad condicional asimétricas, la cual sigue un movimiento EGARCH(1,1,).</p>
5	$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t$ $\varepsilon_t \sim N(\mu, \sigma_t^2)$ $\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \delta_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_3 I[\varepsilon_{t-1} < 0] \varepsilon_{t-1}^2 \text{ (GJR)}$ <p>Las rentabilidades siguen un comportamiento auto regresivo de orden 1, donde las innovaciones <math>(\varepsilon_t)</math> tiene una distribución normal <math>(0, \sigma_t^2)</math>, con volatilidad condicional asimétricas, la cual sigue un movimiento GJR (1,1,) el cual toma en cuenta el apalancamiento.</p>

Tabla 4.1: Describe los diferentes supuestos sobre las rentabilidades y la dinámica temporal de la volatilidad de las innovaciones que se utilizaran para la medición y cuantificación del riesgo de modelo.

Donde  $r_t$  hace referencia a los rendimientos logarítmicos el cual es calculado de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right).$$

Con estas metodologías se analiza el riesgo de modelo derivado de hacer supuestos incorrectos sobre la volatilidad de los factores de riesgo, así como de la elección del método de estimación del VaR y CVaR, permitiéndonos observar el impacto que genera una mala modelización o la elección de la metodología errónea. Obteniendo también, una medida de dispersión (desviación típica y coeficiente de variación) de todas las estimaciones obtenidas con los distintos supuestos y metodologías. También se espera observar, cuales son los principales factores que generan dicho riesgo.

En la tabla 4.2, se presentan las estimaciones del VaR y CVaR de acuerdo a los diferentes métodos y supuestos de la tabla 4.1, las cuales como era de esperarse son diferentes. De acuerdo a los coeficientes de variación, la estimación del CVaR presenta un mayor riesgo de modelo, ya que esta estimación depende del VaR; y en relación a los activos, el IBEX y SAN tiene presencia de un mayor riesgo.

Independientemente de la elección del método de estimación, el principal factor que hace que las estimaciones difieran es la modelización de la varianza, ya que el hacer un supuesto erróneo sobre la volatilidad ocasiona que se subestime o sobreestime riesgo. Por ejemplo, en el caso de IBEX y SAN, el suponer que la volatilidad es incondicional cuando en realidad es condicional sobre estima el riesgo; por tanto, el capital sería mayor ocasionando que el banco no

obtenga beneficios por ese capital extra que estaría sin moverse. En el caso de los Oro y EUR/USD, también se presenta este tipo de análisis, sin embargo, las diferencias entre las estimaciones son menores. En general, el que se sobreestime o subestime el riesgo dependerá de si en un momento concreto la volatilidad condicional está por encima o por debajo de la volatilidad incondicional. También en el caso del método histórico, si no se hace el ajuste de volatilidad; siendo la volatilidad actual menor que la histórica; el riesgo se sobreestimara en comparación del VaR aplicando ajuste de volatilidad; caso contrario ocurre cuando la volatilidad actual es mayor a la histórica.

Comparando los resultados obtenidos entre las distintas metodologías con un mismo supuesto, también encontramos diferencias, siendo estas mayores (como era de esperarse) entre métodos que no requieren de un supuesto (simulación histórica) y menor en métodos que si requieren de supuestos sobre la distribución (paramétrico y simulación por Monte Carlo).

Método	Supuesto	IBEX35		SAN		Oro		EUR/USD	
		VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Paramétrico	1	3.47%	3.97%	5.04%	5.77%	5.70%	6.54%	1.36%	1.56%
	2	3.46%	3.97%	5.04%	5.77%	5.70%	6.53%	1.36%	1.56%
	3	2.24%	2.57%	3.75%	4.30%	5.81%	6.66%	1.42%	1.62%
	4	2.06%	2.36%	3.53%	4.04%	5.65%	6.47%	1.35%	1.55%
	5	2.08%	2.38%	3.47%	3.98%	5.81%	6.66%	1.47%	1.68%
Histórico	Sin Ajuste	4.00%	5.38%	5.23%	8.14%	6.12%	8.07%	1.46%	1.84%
	Ajuste	2.49%	3.27%	4.04%	5.90%	6.07%	8.25%	1.71%	2.12%
Histórico Filtrado	2	3.68%	5.22%	5.36%	9.01%	6.30%	8.45%	1.45%	1.88%
	3	2.46%	3.13%	4.09%	6.07%	6.05%	8.29%	1.56%	1.95%
	4	2.30%	2.90%	3.66%	5.55%	5.92%	7.91%	1.28%	1.60%
	5	2.15%	2.78%	3.52%	5.07%	6.25%	9.46%	1.47%	1.94%
Monte Carlo	2	3.44%	4.00%	5.08%	5.90%	5.30%	6.23%	1.32%	1.48%
	3	2.12%	2.51%	3.74%	4.20%	5.72%	6.53%	1.35%	1.53%
	4	2.03%	2.31%	3.37%	3.84%	5.83%	6.67%	1.34%	1.53%
	5	2.10%	2.41%	3.43%	4.01%	5.77%	6.89%	1.36%	1.54%
Teoría de Valores extremos (DGP)	2	4.13%	5.45%	5.60%	8.03%	6.25%	8.12%	1.57%	1.88%
	3	2.59%	3.31%	4.28%	5.85%	6.41%	8.40%	1.49%	1.87%
	4	2.35%	3.08%	3.93%	5.59%	6.07%	7.96%	1.41%	1.74%
	5	2.37%	3.08%	3.97%	5.43%	6.41%	8.40%	1.55%	1.95%
<b>Desv. Típica</b>		<b>0.0072</b>	<b>0.0103</b>	<b>0.0075</b>	<b>0.0148</b>	<b>0.0029</b>	<b>0.0096</b>	<b>0.0011</b>	<b>0.0019</b>
<b>Coef. de variación</b>		<b>0.2658</b>	<b>0.3061</b>	<b>0.1781</b>	<b>0.2633</b>	<b>0.0492</b>	<b>0.1280</b>	<b>0.0747</b>	<b>0.1115</b>

Tabla 4.2: Resultados de las estimaciones del VaR y CVaR, utilizando distintos métodos y supuesto (tabla 4.1) para cada uno de los activos, así como la desviación típica y coeficiente de variación de las diferentes estimaciones de acuerdo los distintos métodos y modelos .

Siguiendo esta línea, se analizan los resultados obtenidos en la tesis doctoral de García Jorcano Laura; *Sample size, skewness and leverage effects in Value at Risk and Expected Shortfall estimation*, capítulo 2 y 3; en la cual se estima el VaR paramétrico utilizando 4 modelos distintos de la dinámica temporal de la volatilidad: GARCH, GJR-GARCH, APARCH y FGARCH; para los cuales, se utilizan distintos supuestos sobre la distribución de las innovaciones: Normal, t- Student, sesgada t-Student, error generalizada sesgada, imparcial Johnson, sesgada-t generalizada y generalizadas hiperbólicas. La estimación del CVaR (ES) la hace utilizando el modelo de dinámica temporal de la volatilidad APARCH, igualmente, con distintos supuestos de distribución de las innovaciones: Normal, t- Student, sesgada t- Student, sesgada error generalizado y Johnson. Esto con el fin de analizar la dispersión de las estimaciones del VaR y CVaR utilizando distintos supuestos tanto en la distribución de las innovaciones como en la dinámica temporal de la



volatilidad; así como para concluir sobre cuáles son los principales factores de riesgo que ocasionan que las estimaciones varíen, es decir, se analiza que supuestos tienen una mayor influencia en los resultados de las estimaciones; si los supuestos sobre la distribución de las innovaciones o bien los supuestos sobre la modelización de la volatilidad.

De los resultados obtenidos en el capítulo 2 en la tesis doctoral de García Jorcano Laura; los cuales encontramos en la tabla 11.1.1 del apéndice C; en primer lugar, comparando las estimaciones entre los diferentes supuestos de distribución de las innovaciones (dejando fijo el supuesto de la volatilidad), y las estimaciones entre las diferentes especificaciones sobre la dinámica temporal de la volatilidad (dejando fijo el supuesto de distribución de las innovaciones), observamos que las mayores diferencias y la mayor dispersión entre las estimaciones es debida a los supuestos que se han sobre la distribución de las innovaciones, y no a los supuestos que se realice sobre dinámica temporal de la volatilidad. Dicha conclusión se confirma con los resultados de validación de las estimaciones; presentes en la tabla 11.1.2 del apéndice C; observando esto en el número de excepciones de las estimaciones; por ejemplo, el número de excepciones de la estimación del VaR del IBEX cuando se supone Normalidad-GARCH son 27, mientras que el número de excepciones cuando se asume una distribución t-Student-GARCH son 19 y 16 en el caso de la distribución Johnson. Así mismo, tenemos la comparación entre modelos de la volatilidad, donde la diferencia de excepciones de un modelo está alrededor de 2 y 3 en la mayoría de los casos. Lo que supone un mayor error en el modelo hacer un supuesto incorrecto sobre la distribución de las innovaciones.

Por otro lado, contamos con la desviación típica de todas las estimaciones del VaR (con todas las posibles combinaciones entre los supuestos de distribución y la dinámica temporal de la volatilidad) las cuales son: .0026 para IBEX, .0040 para SAN, .0017 para Oro y .0008 para EUR/USD, con un coeficiente de variación: .0648 para IBEX, .0687 para SAN, .0722 para Oro y .0486 para EUR/USD; donde se observa que el oro presenta un mayor riesgo de modelo. Dichas medidas suponen ser una primera aproximación a la cuantificación del riesgo de modelo derivado de los distintos modelos que se pudieran utilizar para estimar el VaR. De acuerdo a los resultados anteriores, dichas desviaciones típicas son principalmente ocasionadas por la dispersión de las estimaciones entre los diferentes supuestos de distribución de las rentabilidades

Tras observar todas las posibles estimaciones del VaR y CVaR en función de los distintos supuestos, se llega a la conclusión de que no todos los modelos de estimación miden correctamente el riesgo de mercado. Debido a que cada activo presenta comportamientos distintos, no es correcto considerar los mismos modelos de estimación del VaR y CVaR para todos los activo. Por tanto, para una apropiada valoración del riesgo de modelo, se deben de considerar únicamente aquellos modelos de estimación que representen adecuadamente el riesgo de mercado.

La validación del VaR y CVaR permite analizar si la estimación es apropiada, por tanto, para fines del estudio, se utiliza como herramienta para hacer una selección de los modelos que representan adecuadamente el riesgo de mercado. A demás, como se ha mencionado en la sección 3, Basilea exige a las instituciones tener un capital adecuado y suficiente control en sus cálculos, por tanto con la validación del VaR y CVaR, se estaría contemplando y reduciendo el riesgo de modelo.

De acuerdo a lo anterior, para realizar una adecuada valoración del riesgo por la elección del modelo, conviene hacer una selección de modelos válidos para cada activo. La gama de posibles modelos para estimación del riesgo es enorme, y no parece conveniente afirmar que la dispersión que pueda existir entre las estimaciones resultantes de todos estos modelos pueda

considerarse como riesgo de modelo. Para ello, nos hemos apoyado en los resultados de la tesis doctoral de García Jorcano (2017) (tabla 11.1.2 apéndice C), en la que se realizan validaciones de las estimaciones utilizando cuatro pruebas (contraste de cobertura incondicional de Kupiec (1995), de independencia, de cobertura condicional de Christoffersen (1998), y de cuantil dinámico de Engel y Manganelli). Parece importante definir un criterio de selección de acuerdo a los resultados de validación, ya que de este dependerá la cuantificación del riesgo de modelo. El criterio de selección de los modelos para fines del análisis que hemos realizado en este trabajo ha consistido en considerar las estimaciones que han pasado las pruebas del contraste de cobertura incondicional (LR\_uc) y el contraste del cuantil dinámico (DQT)

Tras realizar la selección de modelos válidos, presente en la tabla 11.1.3 apéndice C obtenemos los siguientes coeficientes de variación de las estimaciones del VaR para cada activo: .0499 para el IBEX, .0337 para SAN, .0357 para el Oro y .0280 para EUR/USD. Estos valores de dispersión son claramente inferiores a los calculados a partir de todas las estimaciones.

En los resultados del capítulo 3 de la tesis doctoral de García Jorcano, presentes en la tabla 11.1.4 apéndice C, de los cuales se cuenta con estimaciones del CVaR calculadas mediante el método paramétrico y EVT, se observa el mismo resultado; donde el coeficiente de variación de las estimaciones antes de realizar la validación es .1340 y una vez que se seleccionan los modelos válidos (estimaciones que presentan un ratio de violaciones menor), el coeficiente de variación se reduce a .0040.

En todo caso, conviene apuntar que los propios criterios de validación del VaR y CVaR también constituyen un riesgo, pues hay diversos contrastes, y la elección de contrastes va a quedar a juicio del analista. Por tanto, tras el riesgo que genera la validación del VaR y CVaR, queda la incertidumbre de no saber si los resultados de la validación son los correctos para seleccionar una estimación

En este sentido, resulta interesante plantearse el tomar un promedio de las estimaciones del VaR y CVaR que se consideren válidas, en lugar de una única estimación. A continuación, proponemos un método que incorpora el riesgo por la elección del modelo en la estimación del VaR y CVaR, al que llamaremos VaR ponderado. Este método contempla todos los modelos que son considerados válidos; puede ser el conjunto inicial de modelos, o los seleccionados tras aplicar los contrastes de validación que se hayan considerado adecuados. Por tanto, no se incurre en el riesgo de basar esta estimación en un único modelo. Se obtiene la media de la estimación del VaR de dichos modelos, a los cuales se les asigna una ponderación de acuerdo a los resultados de validación. Es decir, los pesos que se asigna a cada estimación del VaR y CVaR están relacionados con el p-value del contraste realizado para la validación. Un modelo que haya pasado un contraste con un p-value muy alto proporciona muy poca evidencia en contra del criterio de validación, por lo que puede recibir una ponderación importante en este cálculo promedio; por el contrario, un modelo que haya superado pero con un p-value reducido, próximo al nivel de significación del contraste, recibirá una ponderación baja, reflejando que, si bien ha superado el contraste, la evidencia que arroja acerca de la hipótesis nula del mismo (que habitualmente es que el porcentaje de excesos sea el esperado) es muy débil. Mediante esta metodología también se estima la desviación típica de las distintas estimaciones del VaR y CVaR válidas, la que consideraremos la mejor forma de medir el riesgo de modelo, ya que considera los resultados de la validación, los cuales nos permiten jerarquizar los modelos de estimación.

$$\overline{VaR} = \sum_{i=1}^n w_i * VaR_i$$

$$w_i = \frac{pvalue_i}{\sum_{j=1}^n pvalue_j}$$

$$DT(VaR) = \sum_{i=1}^n w_i * (VaR_i - \overline{VaR})^2$$

(El procedimiento es el mismo para el CVaR)

Donde

- $VaR_i$   $i=1,2,\dots,n$ , (con  $n$  número de estimaciones validas) estimación del VaR con el modelo  $i$ .
- $pvalue_i$   $i=1,2,\dots,n$ , (con  $n$  número de estimaciones validas), p-value del contraste de validación de la estimación del VaR con el modelo  $i$

Para llevar a cabo la metodología propuesta anteriormente, nos hemos basado en los resultados de las estimaciones del VaR y del contraste de cobertura incondicional (tabla 11.1.1 y 11.1.2 apéndice C, respectivamente) de la tesis doctoral de García Jorcano, considerando como modelos validos aquellos que pasaran dicha prueba ( $p\text{-value} > .01$ ).

De forma habitual, se hubiera considerado como estimación del VaR aquella que obtuvo el p-value mayor, que para el caso del IBEX es 4.26% (GHST-GARCH), para SAN 5.14% (GHST-GARCH), para el Oro 2.50% (JSU-GARCH) y para EUR/USD 1.81% (GHST-GJRGARCH); sin embargo, en la tabla 4.3 se presentan los resultados obtenidos del VaR ponderado, observado que son adecuados, y los cuales resultaría conveniente considerar como estimación del VaR para la asignación del capital, ya que de esta forma se estaría considerando el riesgo por la elección del modelo. La desviación típica y el coeficiente de variación, al igual que en los otros análisis que hemos presentado, representan la medida de cuantificación del riesgo de modelo que consideramos ser la más adecuada.

	IBEX	SAN	Oro	EUR/USD
VaR Ponderado	4.15%	5.98%	2.49%	1.64%
Desv. Típica	0.0021	0.0036	0.0011	0.0010
Coef. de variación	0.0517	0.0598	0.0453	0.0584

Tabla 4.3: VaR ponderado (media), desviación típica y coeficiente de variación de las estimaciones del VaR consideradas validas, donde cada estimación tiene asignada una ponderación relacionada con el p-value del contraste de cobertura incondicional. El criterio de selección es de acuerdo a las estimaciones que han pasado la prueba del contraste de cobertura incondicional (LR\_uc).

Como fue mencionado anteriormente, la validación de VaR y CVaR también supone un riesgo de modelo, en el que se incluye la incertidumbre en las estimaciones del p-value de los contrastes de validación. Por tanto, para hacer una adecuada implementación de la metodología anteriormente descrita, sería necesario analizar: ¿Qué contrastes son los más adecuados?, ¿A qué nivel de significación deben ejecutarse?, ¿Cómo debemos proceder cuando utilizamos varios contrastes de validación? De igual modo, es claro que en los cálculos propuestos puede utilizarse

como ponderación cualquier función del p-value monótona y acotada, que habría que investigar todas estas son cuestiones que dejamos abiertas para futuros estudios.

## 4.2. Estimación del VaR y CVaR bajo dependencia no lineal: Cópulas

En muchas ocasiones, las distribuciones de las rentabilidades de los activos son diferentes y asimétricas, y por otro lado, al tener una cartera conformada por distintos activos la dependencia entre ellos no es lineal, ni posiblemente simétrica. El hacer un supuesto equivocado sobre la dependencia de las rentabilidades genera un error en la estimación y probablemente pérdidas económicas en la institución. En este sentido, el riesgo de modelo surge de la incertidumbre sobre la modelización de la estructura de dependencia de los activos. Las cópulas permiten representar la relación de los activos, por tanto de acuerdo a la cópula utilizada la estructura de la dependencia entre ellas va a suponer ser distinta. En esta subsección se analiza el impacto que genera la incertidumbre sobre el tipo de cópula en la estimación del VaR y CVaR.

Para efectos del análisis, se forma una cartera equiponderada de dos activos, Santander y Repsol, así como dos carteras compuesta por dos activos de distinta naturaleza, SAN-Oro y SAN-EUR/USD, durante un periodo muestral de 01/04/2011 a 30/12/2016 (1501 observaciones). Se utilizan las cópulas Gaussiana, t-Student y Clayton, con las cuales modelizamos la estructura de dependencia entre los activos de la cartera, y con la simulación de las rentabilidades conjuntas mediante la cópula estimada (por Monte Carlo) estimaremos el VaR y CVaR de la cartera por medio del  $p$  –cuantil de dicha distribución simulada. Para ello es necesario también especificar las distribuciones marginales de las rentabilidades de los activos, que para efectos prácticos, se utiliza una distribución marginal Normal para las rentabilidades de los activos. Sin embargo, la incertidumbre sobre la distribución de las rentabilidades también genera un riesgo de modelo; análisis que dejamos abierto para futuros trabajos (Para más detalle sobre la metodología utilizada para la estimación del VaR y CVaR mediante cópulas ir ver la sección 9.2 apéndice A).

La Tabla 4.3 presenta las estimaciones del VaR y CVaR utilizando las diferentes cópulas, mientras que la Tabla 4.4 muestra las diferencias porcentuales de la estimación del VaR y CVaR de la cópula t-Student y Clayton en relación a la cópula Gaussiana (la cual representa la dependencia lineal). Se puede comprobar, como era de esperarse, que el VaR y CVaR estimado utilizando la cópula de Clayton son mayores debido a que esta cópula modeliza la dependencia asimétrica en la cola izquierda. Por tanto, si se hace el supuesto de que la dependencia entre las rentabilidades de los activos es lineal, cuando en realidad es asimétrica en la cola izquierda se estaría subestimando el riesgo un 3.59% y 9.27% para el caso del VaR y CVaR de la cartera SAN-REP respectivamente. En el caso de la cópula t-Student se estaría sobreestimando el riesgo un 0.18% en el caso del VaR, lo que no implica gran cambio, sin embargo el CVaR se estaría subestimando un 6.56%. Este mismo análisis se puede realizar con cada uno de los supuestos de dependencia y con cada cartera de acuerdo a la tabla 4.4. Además, se observa que la estimación que más riesgo de modelo presenta, es decir una mayor diferencia entre sus estimaciones es el CVaR.

Por otro lado se observa que la magnitud del riesgo de modelo está relacionado con la correlación de los activos, es decir entre mayor correlación presenten los activos mayor riesgo de

modelo, lo que podemos comprobar en la tabla 11.2.3 apéndice C, donde se presentan las estimaciones de los parámetros de las copulas.

	SAN-REP	SAN-Oro	SAN-EUR/USD
<b>Gaussina</b>			
VaR	4.53%	3.69%	2.36%
CVaR	5.00%	4.30%	2.65%
<b>T-student</b>			
VaR	4.52%	3.69%	2.34%
CVaR	5.35%	4.29%	2.61%
<b>Clayton</b>			
VaR	4.70%	3.76%	2.45%
CVaR	5.51%	4.36%	2.75%

Tabla 4.3: Resultados de la estimación del VaR y CVaR, de acuerdo a la cópula Gaussiana, t-Student, Clayton, para cada cartera compuesta por dos activos (SAN-REP, SAN-Oro, SAN-EUR/USD).

	SAN-REP	SAN-Oro	SAN-EUR/USD
<b>T-student</b>			
VaR	0.18%	-0.02%	1.01%
CVaR	-6.56%	0.22%	1.46%
<b>Clayton</b>			
VaR	-3.58%	-1.91%	-3.70%
CVaR	-9.27%	-1.37%	-3.65%

Tabla 4.4: Diferencias porcentuales entre las estimaciones del VaR y CVaR, de t-Student, Clayton, en relación con la cópula Gaussiana, para cada cartera.

En esta sección hemos analizado el impacto que genera en la estimación del VaR y CVaR el hacer un supuesto equivocado sobre la distribución de la de las rentabilidades, la dinámica temporal de la volatilidad y sobre la estructura de dependencia de las rentabilidades; en la cual, se ha propuesto como medida de riesgo de modelo la desviación típica de las posibles estimaciones. Hemos mostrado, en primer lugar, que todos los posibles resultados de las estimaciones generan un riesgo de modelo, ya que seleccionar un supuesto incorrecto produce un error en la estimación que puede originar pérdidas económicas en la institución, en especial el hacer un supuesto equivocado sobre la distribución de las rentabilidades. Sin embargo, para cuantificar adecuadamente el riesgo por selección del modelo, se deben considerar únicamente aquellos modelos de estimación que representen adecuadamente el riesgo de mercado. El riesgo de modelo se reduce tras realizar validaciones de las estimaciones inicialmente obtenidas, ya que permite hacer una selección de modelos adecuados, reduciendo así el número de supuestos posibles y con ello la posibilidad de elegir el supuesto incorrecto.

Por otro lado, tras la incertidumbre que genera la validación del VaR y CVaR de no saber si los resultados de esta son del todo correctos para seleccionar un único modelo de estimación,

se ha propuesto una metodología que permite obtener una estimación alternativa del VaR, la cual contempla todos los modelos seleccionados y los resultados de la validación; eliminado así el riesgo de seleccionar un único modelo de estimación.

También se ha mostrado, que la estimación del CVaR tiene un mayor riesgo de modelo que la estimación del VaR, presentando en todos los resultados un mayor coeficiente de variación y mayores diferencias entre las posibles estimaciones.

## 5. Riesgo por la incertidumbre paramétrica. Estimación del VaR y CVaR

Es importante hacer una elección adecuada del modelo, así como de los métodos de estimación; sin embargo, incluso si un modelo fuese correcto, existiría un riesgo de modelo debido a la incertidumbre producida por la estimación de sus parámetros. En esta sección cuantificamos y analizamos el riesgo de modelo derivado de la incertidumbre paramétrica, para el cual, se proponen dos enfoques. En el primero de ellos (sección 5.1), obtenemos la distribución del VaR y CVaR (paramétrico e histórico) de acuerdo a la teoría estadística de la volatilidad y del  $p$  –cuantil. En el segundo enfoque (sección 5.2) proponemos 3 metodologías, las cuales se basan en la simulación de los parámetros de distintos modelos y en la simulación de las innovaciones. En la primera metodología obtenemos una estimación puntual del VaR y CVaR a la cual se le incorpora la incertidumbre paramétrica. Con el segundo método obtenemos la distribución del VaR y CVaR en función de la incertidumbre de la estimación de los parámetros de distintos modelos (GARCH, EVT, y cópulas). Y con el tercer método obtenemos la distribución del VaR y CVaR en función de la incertidumbre de las innovaciones.

El objetivo de obtener la distribución de probabilidad del estimador del VaR y CVaR es que su desviación típica nos proporciona una medida de riesgo asociada a la incertidumbre generada por la estimación de los parámetros de diferentes métodos y modelos. Los intervalos de confianza que podamos construir basados en dicha distribución de probabilidad, nos permitirán analizar cuanto puede llegar a cambiar la estimación del riesgo de la cartera (VaR y CVaR) por causa de la incertidumbre paramétrica o de la precisión de la estimación de la volatilidad y  $p$  –cuantil. Además, resulta interesante proporcionar un intervalo de confianza de la estimación del VaR en lugar de una estimación puntual. Por otro lado, será posible comparar el riesgo de modelo de los distintos métodos y modelos.

### 5.1. Precisión en la estimación de la volatilidad y el $p$ –cuantil: Teoría estadística

En esta sección se obtiene la distribución del VaR y CVaR (paramétrico e histórico) en función de la precisión con la que se estima la volatilidad incondicional y el  $p$  –cuantil de la distribución de probabilidad de las innovaciones. Para ello nos basamos en la teoría estadística que presentamos en los puntos I y II

Los resultados que se presentan en los puntos I y II fueron obtenidos de Alexander (2008)<sup>7</sup> y Novales (2016)<sup>8</sup>. Nos referiremos a la distribución de estimador del VaR y CVaR obtenida en esta sección como *Distribución teórica*.

---

<sup>7</sup> Alexander, Carol. *Market Risk Analysis IV: Value at Risk Models*, WILEY, 2008.

<sup>8</sup> Novales, Alfonso. *Valor en Riesgo*, Departamento de Economía Cuantitativa Universidad Complutense, 2016

I. Distribución teórica (VaR paramétrico)

La estimación del VaR y CVaR por el método paramétrico suponiendo que la volatilidad de las innovaciones es incondicional está expuesta a la precisión de la estimación de la volatilidad de las innovaciones. Por lo que se obtendrá la distribución de las estimaciones del VaR y CVaR de acuerdo a las propiedades estadísticas de esta:

$$DT(\hat{\sigma}_h) = \frac{\hat{\sigma}_h}{\sqrt{2T}}$$

$$VaR_{h,p} = \Phi^{-1}(p)\sqrt{h\sigma^2},$$

$$CVaR_{h,p} = \frac{\Phi(\Phi^{-1}(p))}{p}\sqrt{h\sigma^2}.$$

Ya que  $p$  y  $h$  son constantes tenemos,

$$DT(\widehat{VaR}) = \frac{\widehat{VaR}_{h,p}}{\sqrt{2T}},$$

$$DT(\widehat{CVaR}) = \frac{\widehat{CVaR}_{h,p}}{\sqrt{2T}},$$

$$IC_{1-\alpha}(\widehat{VaR}) = \left[ \frac{\sqrt{(T-1)}(\widehat{VaR})}{\sqrt{X^2_{n-1,1-\frac{.05}{2}}}}, \frac{\sqrt{(T-1)}(\widehat{VaR})}{\sqrt{X^2_{n-1,\frac{.05}{2}}}} \right],$$

$$IC_{1-\alpha}(\widehat{CVaR}) = \left[ \frac{\sqrt{(T-1)}(\widehat{CVaR})}{\sqrt{X^2_{n-1,1-\frac{.05}{2}}}}, \frac{\sqrt{(T-1)}(\widehat{CVaR})}{\sqrt{X^2_{n-1,\frac{.05}{2}}}} \right].$$

II. Distribución teórica (VaR histórico)

La estimación VaR y CVaR mediante el método histórico está expuesta al riesgo generado por la precisión de la estimación del  $p$ -cuantil, por lo que es posible obtener la distribución del VaR y CVaR mediante la desviación típica del cuantil poblacional, de acuerdo al argumento que a continuación se presenta.

Supongamos que la función de distribución de las rentabilidades es  $F$ . Si  $F$  fuera conocida y el nivel de significación es  $p$ , se puede calcular el cuantil poblacional  $\alpha = F^{-1}(p)$ . Si se toma una serie temporal de dicha distribución, podemos obtener la función indicatriz  $I_t(p)$ . Esta función toma valor 1 cuando la observación  $t$  está por debajo de  $\alpha$  y toma el valor 0 en caso contrario, siguiendo una distribución Bernoulli  $B(p)$ . Sea ahora  $X(T, p)$  la suma de la función indicatriz a lo largo de toda la muestra. Dicha suma sigue una distribución binomial  $Bi(T, p)$ , por lo que su esperanza matemática es  $Tp$  y su varianza  $Tp(1-p)$ .

Permitiendo tender  $T$  a infinito, se puede aplicar la aproximación Normal, con lo que tenemos:



$$\frac{X(T, P) - Tp}{\sqrt{Tp(1-p)}} \sim N(0,1).$$

Obteniendo a partir de esta un intervalo de confianza al  $(1 - \varepsilon)\%$  de confianza, para el número de observaciones que quedan por debajo  $\alpha$ , es decir  $X(T, p)$ :

$$\left[ Tp - \Phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{Tp(1-p)}; Tp + \Phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{Tp(1-p)} \right].$$

Si ahora se utiliza la información que se tiene de  $F$ , dividiendo la expresión de la aproximación de la distribución Normal por  $T$ , obtenemos:

$$\frac{\varphi(T, P) - p}{\sqrt{p(1-p)/T}} \sim N(0,1).$$

Donde  $\varphi(T, P)$  es el porcentaje de observaciones que están por debajo de  $p$ .

A partir de ahora denotaremos por  $q(T, p)$  el estimador del  $p$ -cuantil de  $F$ , en una muestra concreta de rentabilidades, el cual mantiene una relación con el porcentaje de observaciones que están por debajo de  $q(T, p)$  mediante:  $q(T, p) = F^{-1}(\varphi(T, P))$ . Por lo tanto obtenemos:

$$F(q(T, p)) \sim N(p, T^{-1}p(1-p)).$$

Si ahora suponemos, que la función de densidad  $f(q(T, p))$  es lineal en la región de la cola de distribución que estamos considerando (dicho supuesto propuesto por Kendall (1940), es muy estricto y condiciona la validez rigurosa de los resultados siguientes), podemos expresar:

$$F(q(T, p)) \cong q(T, p)f(q(T, p)).$$

Combinando las expresiones anteriores llegamos a:

$$q(T, p)f(q(T, p)) \sim N(p, T^{-1}p(1-p)),$$

$$q(T, p) \sim N\left(\frac{p}{f(q(T, p))}, \frac{T^{-1}p(1-p)}{[f(q(T, p))]^2}\right).$$

De acuerdo a la expresión anterior, la desviación típica para el estimador del cuantil  $p$  es:

$$DT(q(T, p)) \cong \frac{\sqrt{T^{-1}p(1-p)}}{[f(q(T, p))]}.$$

Para efectos de nuestro análisis, supondremos que las rentabilidades se distribuyen como una Normal  $(0, \sigma^2)$ , por lo que  $f(q(T, p))$ , será la función de densidad de una Normal  $(0, \sigma^2)$ .

Las metodologías que acabamos de presentar nos permitieron cuantificar el riesgo de modelo de la estimación del VaR y CVaR asociado a la precisión (desviación típica) de la estimación de la volatilidad incondicional de las innovaciones y de la estimación del  $p$ -cuantil.

En las tablas 5.1 se presentan los resultados de la distribución teórica, en los cuales se observa que el coeficiente de variación de la estimación del VaR y CVaR paramétrico es menor, lo que significa que la estimación de la volatilidad incondicional de las innovaciones presenta una mayor precisión en comparación de la estimación del  $p$ -cuantil, lo que supone que la estimación de VaR y CVaR por el método paramétrico presenta menor riesgo de modelo.

También se observa en el caso del VaR y CVaR paramétrico el riesgo de modelo es el mismo para todos los activos y en el caso del VaR histórico que es muy similar, por lo tanto en el contexto de la distribución teórica del VaR y CVaR el riesgo de modelo no depende del comportamiento de los activos, sino del tamaño de la muestra.

	Distribución teórica					
	Paramétrico (I)			Histórico (II)		
	Desv. Típica	Coef. De variación	Intervalos de confianza	Desv. Típica	Coef. De variación	Intervalos de confianza
<b>IBEX35</b>						
VaR	0.0006	0.0183	[3.34% ; 3.59%]	0.0014	0.0360	[3.72% ; 4.28%]
CVaR	0.0007	0.0183	[3.83% ; 4.12%]			
<b>SAN</b>						
VaR	0.0009	0.0183	[4.87% ; 5.23%]	0.0021	0.0399	[4.82% ; 5.64%]
CVaR	0.0011	0.0183	[5.57% ; 5.99%]			
<b>Oro</b>						
VaR	0.0010	0.0183	[5.50% ; 5.91%]	0.0024	0.0386	[5.66% ; 6.58%]
CVaR	0.0012	0.0183	[6.30% ; 6.77%]			
<b>EUR/USD</b>						
VaR	0.0002	0.0183	[1.31% ; 1.41%]	0.0006	0.0386	[1.35% ; 1.57%]
CVaR	0.0003	0.0183	[1.50% ; 1.62%]			

Tabla 5.1: Desviación típica, coeficientes de variación<sup>9</sup> e intervalos de confianza al 95% de la estimación del VaR y CVaR por medio del método paramétrico e histórico, utilizando la distribución teórica de la estimación (I y II).

## 5.2. Simulación: Metodologías propuestas

En esta sección se proponen tres metodologías basadas en la simulación de los parámetros de distintos modelos (sección 5.2.1 y 5.2.2) y en la simulación (bootstrap) de las innovaciones de las rentabilidades (sección 5.2.3). Las cuales nos permitirán valorar el riesgo de la incertidumbre de la estimación de los parámetros y de las innovaciones.

### 5.2.1. Estimación puntual: Incorporación de la incertidumbre paramétrica

Este método consiste en estimar el VaR y CVaR por el método de simulación por Monte Carlo, en el que de acuerdo a los supuestos que se realicen sobre el comportamiento de las rentabilidades, se incorpora la incertidumbre de la estimación de los parámetros a dicha estimación, con la que posteriormente se mide el efecto de la incertidumbre diferenciando dicho

<sup>9</sup> El coeficiente de variación de la distribución teórica del método paramétrico, resulta ser el mismo tanto para el VaR y CVaR y para todos los activos, ya que:  $\frac{DT(\bar{VaR})}{\bar{VaR}_{h,p}} = \frac{1}{\sqrt{2T}}$ , mismo caso ocurre con el CVaR.

resultado con la estimación original (sin incertidumbre). Para el desarrollo de nuestro análisis, se utilizan los supuestos 2 y 3 (presentados en la sección 4 tabla 4.1), por lo que se medirá el efecto de la incertidumbre de la estimación de los parámetros del modelo AR (1) y del GARCH (1,1).

Para una mejor comprensión del método se presenta el siguiente algoritmo basándonos en el supuesto 2, donde la incertidumbre paramétrica está presente en la estimación de los parámetros del modelo AR (1); al ser estimados mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios, se conocen las propiedades de su distribución:

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2),$$

$$\widehat{\beta}_1 \sim N(\widehat{\beta}_1, \widehat{\sigma}_\beta^2),$$

$$\widehat{\sigma}_\beta^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{nS_x^2},$$

$$\widehat{\beta}_0 \approx \mu_r(1 - \widehat{\beta}_1).$$

Por lo tanto para incorporar la incertidumbre de dichos estimadores en el cálculo del VaR y CVaR, se aplica el siguiente algoritmo.

$$\widehat{\beta}_{1,j} = z_j^1 \widehat{\sigma}_\beta + \widehat{\beta}_1,$$

$$\widehat{\beta}_{0,j} = \widehat{\mu}_r(1 - \widehat{\beta}_{1,j}),$$

$$\widehat{\varepsilon}_{T+1,j} = z_{T+1,j}^2 \widehat{\sigma}_\varepsilon,$$

$$\widehat{r}_{T+1,j} = \widehat{\beta}_{0,j} + (\widehat{\beta}_{1,j})r_T + \widehat{\varepsilon}_{T+1,j},$$

...

$$\widehat{\varepsilon}_{T+10,j} = z_{T+10,j}^2 \widehat{\sigma}_\varepsilon,$$

$$\widehat{r}_{T+10,j} = \widehat{\beta}_{0,T+10,j} + (\widehat{\beta}_{1,T+10,j})r_T + \widehat{\varepsilon}_{T+10,j},$$

Donde:

- $(z_j^1, z_j^1 \dots z_j^1)$  y  $(z_{T+1,j}^2, z_{T+2,j}^2 \dots z_{T+10,j}^2)$  con  $j=1,2,\dots,M$  (con  $M$  número de simulaciones) son variables aleatorias independientes que siguen una distribución Normal (0,1).
- $\widehat{\beta}_{i,j}$ ,  $i=0,1$  y  $j=1,2,\dots,M$ . es una simulación de los parámetros del modelo AR (1).
- $\mu_r$  es la media de las rentabilidades,
- $\widehat{\varepsilon}_{T+i,j}$ , con  $i=1,2,\dots,10$  y  $j=1,2,\dots,M$  es una simulación de las innovaciones.
- $\widehat{r}_{T+i,j}$ , con  $i=1,2,\dots,10$  y  $j=1,2,\dots,M$  es la predicción de las rentabilidades.

Obteniendo así una distribución de las rentabilidades para cada  $T + i$ , en la cuales ya se ha incorporado la incertidumbre paramétrica de la estimación del modelo. Finalmente, para la estimación del VaR, se calcula el  $p$ -cuantil de la distribución de rentabilidades simuladas a 1 día, y para la estimación del CVaR, se promedian las rentabilidades (negativas) que están por encima del VaR. El algoritmo del supuesto 3 (tabla 4.1 sección 4) se encuentra en la sección 9.3 apéndice A.

Diferenciando la estimación puntual del VaR y CVaR del método de Monte Carlo (obtenida en la sección 4) y la estimación obtenida con la metodología descrita anteriormente, se observa en la tabla 5.2.1, que la incertidumbre paramétrica derivada de la estimación del modelo AR(1) y GARCH(1,1) no genera un cambio significativo en la estimación del VaR y CVaR; podemos atribuir este resultado, a que por un lado, el parámetro auto-regresivo del modelo AR(1) en rentabilidad es muy reducido, y en segundo lugar, a que los parámetros del modelo GARCH(1,1) se estiman con bastante precisión, es decir, con una desviación típica reducida (tabla 11.2.1 apéndice C)

Por otro lado, las estimaciones del VaR y CVaR que incorporan la incertidumbre de la estimación de los parámetros, podrían ser una estimación alternativa del VaR y CVaR la cual contempla el riesgo de modelo, lo que podría resultar atractivo para las instituciones financieras y los reguladores.

La incertidumbre afecta más a la distribución del VaR y CVaR que a su estimación puntual, la cual, como se ha comprobado, a penas se ve afectada por este tipo de incertidumbre, especialmente si las distribuciones de probabilidad de los parámetros estimados son simétricas.

Método	Supuesto	IBEX35		SAN		Oro		EUR/USD	
		VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR	VaR	CVaR
Monte Carlo	2	3.44%	4.00%	5.08%	5.90%	5.30%	6.23%	1.32%	1.48%
	3	2.12%	2.51%	3.74%	4.20%	5.72%	6.53%	1.35%	1.53%
Monte Carlo Incertidumbre	2	3.42%	3.99%	5.09%	5.89%	5.31%	6.22%	1.34%	1.51%
	3	2.13%	2.50%	3.72%	4.18%	5.75%	6.53%	1.35%	1.53%
Diferencias	2	-0.019%	-0.009%	0.006%	-0.008%	0.007%	-0.012%	0.022%	0.025%
	3	0.006%	-0.010%	-0.024%	-0.024%	0.022%	0.002%	0.000%	0.000%
Diferencias %	2	-0.56%	-0.23%	0.12%	-0.13%	0.13%	-0.20%	1.67%	1.71%
	3	0.29%	-0.39%	-0.65%	-0.57%	0.39%	0.04%	0.00%	0.00%

Tabla 5.2.1: Resultados de la estimación del VaR y de CVaR mediante el método de Monte Carlo incorporando incertidumbre paramétrica, las diferencias numéricas y diferencias porcentuales entre la estimación del VaR y CVaR, sin incorporar incertidumbre paramétrica e incorporando la incertidumbre paramétrica

### 5.2.2. Distribución del estimador del VaR y CVaR: Incertidumbre paramétrica.

En esta sección se obtendrá la distribución del VaR y CVaR en función de la incertidumbre paramétrica generada de la estimación de los parámetros del modelo GARCH (1,1), del método EVT y de las cópulas (Gaussiana, t-Student y Clayton) para las cuales se emplea la siguiente metodología.

#### III. Distribución empírica (Incertidumbre bajo distintas especificaciones)

La metodología que se presenta a continuación tiene como objetivo obtener las distribuciones de probabilidad del estimador del VaR y CVaR en función de la incertidumbre generada de la estimación de los parámetros de distintos modelos. Obteniendo de dicha distribución la desviación típica e intervalos de confianza. Específicamente para fines del presente trabajo se analizará la incertidumbre generada por la estimación de los parámetros de los modelos GARCH (1,1), EVT y cópulas.

En términos generales el método consiste en realizar M simulaciones por el método de Monte Carlo de los parámetros del modelo (que se desea analizar), de los que se suponen conocida su distribución (media y varianza). A partir de cada una de las simulaciones de los parámetros, se estima el VaR y CVaR aplicando las metodologías de estimación correspondiente (paramétrica, EVT y cópulas), con lo que se obtendrán M posibles estimaciones del VaR y CVaR y por consiguiente la distribución de dichas estimaciones en función de la incertidumbre paramétrica. Finalmente se calcula la desviación típica, coeficiente de variación y los intervalos de confianza de la distribución de estimación del VaR y CVaR, los cuales medirán el riesgo por la incertidumbre generada de la estimación de los parámetros de cada modelo. Para fines del análisis se realizan M=5000 simulaciones de los parámetros de cada uno de los modelos.

a. GARCH (1,1)

La estimación del VaR y CVaR por el método paramétrico suponiendo que la varianza de las innovaciones es condicional GARCH (1,1) está expuesta a la incertidumbre generada por la estimación de los parámetros de dicho modelo. Para obtener la distribución de la estimación del VaR y CVaR en función de la incertidumbre paramétrica generada por el modelo GARCH (1,1) se aplica el siguiente algoritmo:

Partiendo de la estimación de los parámetros del modelo GARCH y su distribución se tiene:

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{\varepsilon,t}^2),$$

$$\sigma_{\varepsilon,t}^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_2 \sigma_{\varepsilon,t-1}^2,$$

$$\hat{\theta} \sim N(\hat{\theta}, Var(\hat{\theta})),$$

$$Var(\hat{\theta}) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta) |_{\theta=\hat{\theta}}.$$

Una vez que se obtienen los parámetros así como su matriz de varianza y covarianza, se procede a la simulación de los parámetros del modelo; con los que se obtienen simulaciones de la serie temporal de la varianza de acuerdo a la estructura GARCH (1,1).

$$\widehat{\delta}_{1,J} = z_j^1 + \widehat{\delta}_1,$$

$$\widehat{\delta}_{2,J} = z_j^2 + \widehat{\delta}_2,$$

$$\widehat{\delta}_{0,J} = \widehat{\sigma}_{\varepsilon}^2 (1 - \widehat{\delta}_{1,J} - \widehat{\delta}_{2,J}),$$

$$\widehat{\sigma}_{\varepsilon,t,J}^2 = \widehat{\delta}_{0,J} + \widehat{\delta}_{1,J} \varepsilon_{t-1}^2 + \widehat{\delta}_{2,J} \widehat{\sigma}_{\varepsilon,t-1,J}^2,$$

Donde:

- $(z_j^i, z_j^i \dots z_j^i)$  con  $i= 1,2$  y  $j=1,2\dots M$  (M número de simulaciones) son variables aleatorias que siguen una distribución normal con media 0, a las que por medio de la matriz triangular de Cholesky se les ha impuesto la varianza y covarianza de los parámetros estimados del modelo GARCH.
- $\delta_{i,j}$ ,  $i=0, 1,2$  y  $j=1,2\dots M$  es una simulación de los parámetros del modelo GARCH
- $\sigma_\varepsilon^2$  es la varianza a largo plazo de las innovaciones ,
- $\varepsilon_{t-1}$ , son las innovaciones
- $\sigma_{\varepsilon,t}^2$  con  $i=1,2\dots 10$ , es la estimación de la varianza diaria.

Una vez que se han simulado los M posibles escenarios de la serie temporal de la varianza (en función de la incertidumbre de los parámetros del modelo) se toman las simulaciones del último día y se estima el VaR y CVaR paramétrico. Por tanto, para cada posible valor de la varianza que se ha simulado se obtienen M posibles escenarios del VaR y CVaR, y por consiguiente su distribución en función de la incertidumbre paramétrica. De la cual se estima su desviación típica, coeficiente de variación e intervalos de confianza.

$$VaR_{h,p}^j = \Phi^{-1}(p) \sqrt{h\sigma_{T,j}^2},$$

$$CVaR_{h,p}^j = \frac{\Phi(\Phi^{-1}(p))}{.01} \sqrt{h\sigma_{T,j}^2}.$$

Donde  $\sigma_{T,j}^2$ ,  $j=1,2\dots M$ , es una simulación del último día de la serie temporal de la varianza.

#### b. EVT

El método EVT permite valorar, modelar y administrar valores extremos y el cual consiste en los siguientes pasos: elegir un umbral “u”, ajustar la distribución General de Pareto (GPD) a las innovaciones estandarizadas que exceden el umbral, para luego calcular el VaR y CVaR de acuerdo a los parámetros de la GPD. La estimación del VaR y CVaR mediante este método está expuesto a la incertidumbre generada por la estimación de los parámetros de la GDP (tail index y parámetro de escala). Para más detalle del método EVT ver la sección 9.1 apéndice A

Para obtener la distribución de la estimación del VaR y CVaR del método EVT en función de la incertidumbre producida por dichos parámetros se aplica el siguiente algoritmo, para el cual se han utilizado los supuestos 2 y 3 (sección 4 tabla 4.1) para la estandarización de las innovaciones y un umbral que deja el 5% de las innovaciones estandarizadas como observaciones extremas.

Partiendo de la estimación de los parámetros por el método de máxima verosimilitud (estimados en la sección 4), se sabe que los parámetros se distribuyen de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\hat{\theta} \sim N(\hat{\theta}, Var(\hat{\theta})),$$

$$Var(\hat{\theta}) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta} l(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}},$$

Una vez que se tiene la distribución de los parámetros se procede con la simulación de estos, para posteriormente calcular el VaR y CVaR para cada posible escenario simulado de los parámetros, obteniendo así la distribución de la estimación del VaR y CVaR en función de la incertidumbre paramétrica del modelo:

$$\hat{\varepsilon}_j = z_j^1 + \hat{\varepsilon},$$

$$\hat{\beta}_j = z_j^2 + \hat{\beta},$$

$$VaR_{p,j} = \left( u + \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\varepsilon}_j} \left( \frac{T}{T_u} p \right)^{-\hat{\varepsilon}_j} - 1 \right) \sqrt{h\sigma_T^2},$$

$$CVaR_{p,j} = \frac{VaR_{p,j} + \hat{\beta}_j - \hat{\varepsilon}_j u}{1 - \hat{\varepsilon}_j},$$

Donde:

- $(z_j^i, z_j^i \dots z_j^i)$  con  $i= 1,2$  y  $j=1,2\dots M$  ( $M$  número de simulaciones) son variables aleatorias que siguen una distribución normal con media 0, a las que por medio de la matriz triangular de Cholesky se les ha impuesto la varianza y covarianza de los parámetros tail index y de escala.
- $\hat{\varepsilon}_j$ ,  $i=0, 1,2$  y  $j=1,2\dots M$ . es una simulación del parámetro tail index
- $\hat{\beta}_j$ ,  $i=0, 1,2$  y  $j=1,2\dots M$ . es una simulación del parámetro de escala
- $\sigma_T^2$  es la varianza que fue utilizada para estandarizar las innovaciones, suponiendo volatilidad incondicional y volatilidad condicional GARCH (supuestos 2 y 3 de la tabla 4.1 de la sección 4, respectivamente)
- $u$  es un umbral que deja el  $\alpha\%$  de las observaciones como observaciones extremas.

De la distribución simulada del VaR y CVaR en función de la incertidumbre paramétrica del modelo EVT, se estima la desviación típica, coeficiente de variación e intervalos de confianza.

### c. Cópulas

En el caso de la estimación del VaR y CVaR empleando cópulas, el riesgo de modelo es generado por la incertidumbre de la estimación de sus parámetros. Mediante esta metodología, se obtiene la distribución de la estimación del VaR y CVaR empleando las cópulas Gaussiana, t-Student y Clayton, en función de la incertidumbre generada por la estimación de los parámetros de cada una de ellas.

Partiendo de la estimación de los parámetros de las cópulas por el método de máxima verosimilitud (los cuales se estimaron en la sección 4), se sabe que los parámetros se distribuyen de acuerdo a una Normal:

$$\hat{\alpha} \sim N(\hat{\alpha}, \sigma_{\hat{\alpha}}).$$

Ya que la distribución de los parámetros es conocida (media y varianza), se realizan M simulaciones por el método Monte Carlo de los parámetros de las cópulas, con lo que se obtiene un matriz MxN posibles valores de los parámetros (N hace referencia la numero de parámetros de la cópula). Posteriormente con cada parámetro simulado se realizar el algoritmo para el cálculo del VaR y CVaR de acuerdo a cada cópula (sección 9.2 apéndice A), con lo que se obtienen M posibles valores del VaR y CVaR y por consiguiente su distribución en función de la incertidumbre paramétrica, de la que se estima la desviación típica, coeficiente de variación e intervalos de confianza.

Los intervalos de confianza de cada una de las distribuciones simuladas del VaR y CVaR se obtienen al 95% de nivel de significación, suponiendo Normalidad:

$$IC = \left[ \mu - \Phi^{-1}\left(\frac{.05}{2}\right)\sigma, \mu + \Phi^{-1}\left(\frac{.05}{2}\right)\sigma \right].$$

Donde  $\mu$  y  $\sigma$  representan la media y desviación típica, respectivamente, de la distribución simulada de la estimación del VaR y CVaR.

De la distribución del estimador VaR y CVaR paramétrico en función de la incertidumbre paramétrica generada por la estimación de los parámetros del modelo GARCH (1,1) y la estimación de los parámetros del modelo EVT, se observa mediante el coeficiente de variación presente en la tabla 5.2.2 y 5.2.3, que la incertidumbre paramétrica del modelo EVT suponen un mayor riesgo de modelo.

El riesgo de modelo por la incertidumbre paramétrica, puede ser asociado a la precisión de la estimación de los parámetros, es decir mientras más precisa sea la estimación (menor desviación típica y coeficiente de variación), menor riesgo se presentara en la estimación del VaR y CVaR. Lo que es posible comprobar en las tablas 11.2.1 y 11.2.2 apéndice C, ya que se observa (por medio del coeficiente de variación de la estimación) que los parámetros del modelo GARCH se estiman con mayor precisión que los parámetros del modelo EVT (suponiendo volatilidad incondicional y condicional).

Continuando con el análisis de los resultados de la incertidumbre paramétrica generada por la estimación de los modelos GARCH (1,1) y EVT (tabla 5.2.2 y tabla 5.2.3), es posible comparar el riesgo de modelo de cada activo, los cuales presentan diferencias de acuerdo a su comportamiento en relación al modelo. Los activos IBEX y SAN, presentan el mayor coeficiente de variación, lo que implica que la estimación del VaR y CVaR de estos activos presenta mayor riesgo de modelo por la incertidumbre de la estimación de los parámetros del modelo GARCH. Por otro lado, observamos en los resultados del método EVT que el mayor coeficiente de variación lo tiene SAN, seguido del Oro cuando se supone una volatilidad condicional GARCH. En el caso del método EVT cuando se supone volatilidad incondicional, SAN también es el activo que más riesgo de modelo presenta, sin embargo en esta ocasión se observa que para la estimación del VaR el segundo activo que más riesgo de modelo presenta es IBEX y para el caso de la estimación del CVaR es el Oro.



Comparando los resultados de la distribución de las dos estimaciones del VaR y CVaR en función de la incertidumbre paramétrica del método EVT (en donde se supone volatilidad incondicional y volatilidad condicional GARCH), se puede concluir que el hacer un supuesto adecuado de la dinámica de la volatilidad puede reducir el riesgo de modelo; por ejemplo, IBEX y SAN presentan un mayor riesgo de modelo cuando se supone volatilidad condicional; situación contraria ocurre con el ORO y EUR/USD. En este sentido, el riesgo por lo la elección del modelo también puede tener implicaciones sobre el riesgo por incertidumbre paramétrica.

De la distribución de la estimación del VaR y CVaR en función de los parámetros de las cópulas presentes en la tabla 5.2.4, se observa que la desviación típica es baja, lo que supone un riesgo de modelo reducido. Dado los resultados, la cópula que más riesgo presenta es la de t-Student para el caso de las cartera SAN-REP y SAN- EUR/USD, y Clayton para la cartera SAN-Oro lo que atribuimos principalmente a la precisión con que son estimados sus parámetros; lo que es posible de comprobar en la tabla 11.2.3 apéndice C. Que la estimación del VaR y CVaR empleando cópulas presente un menor riesgo de modelo que la estimación del VaR y CVaR por el método paramétrico (GARCH) y el método EVT, se debe a que dicha estimación no depende directamente de los parámetros de la copula, como es el caso del método paramétrico y EVT.

	GARCH		
	Desv. Típica	Coef. De variación	Intervalos de confianza
<b>IBEX35</b>			
VaR	0.0010	0.0479	[1.96% ; 2.37%]
CVaR	0.0012	0.0479	[2.25% ; 2.71%]
<b>SAN</b>			
VaR	0.0010	0.0272	[3.35% ; 3.73%]
CVaR	0.0011	0.0272	[3.84% ; 4.28%]
<b>Oro</b>			
VaR	0.0004	0.0073	[5.75% ; 5.91%]
CVaR	0.0005	0.0073	[6.59% ; 6.78%]
<b>EUR/USD</b>			
VaR	0.0002	0.0143	[1.37% ; 1.45%]
CVaR	0.0002	0.0143	[1.58% ; 1.67%]

Tabla 5.2.2: Desviación típica, coeficiente de variación e intervalos de confianza al 95% de significación de las estimaciones del VaR y CVaR mediante el método paramétrico utilizando el supuesto 3 (tabla 4.1 sección 4). Donde las estimaciones están en función de la incertidumbre de los parámetros del modelo GARCH (1,1).

	EVT Vol. Constante			EVT GARCH		
	Desv. Típica	Coef. De variación	Intervalos de confianza	Desv. Típica	Coef. De variación	Intervalos de confianza
<b>IBEX35</b>						
VaR	0.0022	0.0538	[3.70% ; 4.58%]	0.0012	0.0488	[2.26% ; 2.74%]
CVaR	0.0048	0.0876	[4.56% ; 6.43%]	0.0025	0.0781	[2.72% ; 3.71%]
<b>SAN</b>						
VaR	0.0032	0.0568	[4.97% ; 6.22%]	0.0024	0.0552	[3.81% ; 4.73%]
CVaR	0.0121	0.1483	[5.82% ; 10.54%]	0.0065	0.1092	[4.63% ; 7.19%]
<b>Oro</b>						
VaR	0.0032	0.0512	[5.61% ; 6.85%]	0.0034	0.0519	[5.80% ; 7.12%]
CVaR	0.0074	0.0918	[6.71% ; 9.57%]	0.0078	0.0913	[7.01% ; 10.04%]
<b>EUR/USD</b>						
VaR	0.0007	0.0431	[1.44% ; 1.70%]	0.0007	0.0446	[1.35% ; 1.61%]
CVaR	0.0009	0.0503	[1.69% ; 2.07%]	0.0015	0.0820	[1.57% ; 2.18%]

Tabla 5.2.3: Desviación típica, coeficiente de variación e intervalos de confianza al 95% de significación de la distribución del estimador VaR y CVaR mediante el método EVT, para el cual se realiza el supuesto de volatilidad incondicional (panel izquierdo) y volatilidad condicional GARCH (panel derecho) para la estandarización de las innovaciones. La distribución de las estimaciones está en función de los parámetros del modelo EVT (tail index y escala).

SAN-REP			
	Desv. Típica	Coef. de variación	Intervalos de confianza
<b>Gaussina</b>			
VaR	0.0000	0.0008	[4.53% ; 4.54%]
CVaR	0.0001	0.0015	[4.98% ; 5.01%]
<b>T-student</b>			
VaR	0.0001	0.0031	[4.50% ; 4.56%]
CVaR	0.0003	0.0051	[5.30% ; 5.40%]
<b>Clayton</b>			
VaR	0.0000	0.0003	[4.70% ; 4.70%]
CVaR	0.0001	0.0012	[5.49% ; 5.52%]

SAN-Oro			
	Desv. Típica	Coef. de variación	Intervalos de confianza
<b>Gaussina</b>			
VaR	0.0007	0.0181	[3.57% ; 3.83%]
CVaR	0.0005	0.0124	[4.20% ; 4.41%]
<b>T-student</b>			
VaR	0.0007	0.0197	[3.56% ; 3.84%]
CVaR	0.0006	0.0129	[4.19% ; 4.40%]
<b>Clayton</b>			
VaR	0.0011	0.0301	[3.54% ; 3.99%]
CVaR	0.0011	0.0249	[4.15% ; 4.58%]

SAN-EUR/USD			
	Desv. Típica	Coef. de variación	Intervalos de confianza
<b>Gaussina</b>			
VaR	0.0002	0.0069	[2.33% ; 2.39%]
CVaR	0.0002	0.0068	[2.61% ; 2.68%]
<b>T-student</b>			
VaR	0.0003	0.0137	[2.27% ; 2.40%]
CVaR	0.0003	0.0128	[2.54% ; 2.67%]
<b>Clayton</b>			
VaR	0.0002	0.0074	[2.41% ; 2.48%]
CVaR	0.0002	0.0080	[2.71% ; 2.79%]

Tabla 5.2.4: Presenta la desviación típica, coeficiente de variación e intervalos de confianza al 95% de significación del estimador del VaR y CVaR en función de la incertidumbre de los parámetros de las cópulas.

### 5.2.3. Distribución del estimador del VaR y CVaR: Incertidumbre de las innovaciones

#### IV. Distribución empírica (Incertidumbre de las innovaciones)

A continuación proponemos una metodología a partir de las rentabilidades observadas, la cual nos permitirá obtener la distribución de la estimación del VaR y CVaR (paramétrico e histórico) en función de los valores que toma la estimación de la volatilidad incondicional y  $p$ -cuantil de acuerdo a distintas realizaciones experimentales de la serie de rentabilidades que comparten la misma estructura estocástica.

A partir de las innovaciones no estandarizadas obtenidas de la estructura AR (1) estimada para las rentabilidades se utiliza el método bootstrap<sup>10</sup>, con el cual se obtiene una muestra correspondiente a extracciones aleatorias (de longitud igual al tamaño de la muestra) de dichas innovaciones. A partir de ella se simula la serie de rentabilidades aplicando la estructura AR (1). Una vez que se tiene la muestra de rentabilidades simuladas se estiman el VaR y CVaR por el método paramétrico e histórico. El procedimiento se repite 5000 veces, obteniendo así 5000 estimaciones del VaR y CVaR (por cada método) y por consiguiente, la distribución empírica de dichas estimaciones, de la cual se estima su desviación típica, coeficiente de variación e intervalos de confianza al 95% de nivel de significación, suponiendo Normalidad:

$$IC = \left[ \mu - \Phi^{-1}\left(\frac{.05}{2}\right)\sigma, \mu + \Phi^{-1}\left(\frac{.05}{2}\right)\sigma \right].$$

Donde  $\mu$  y  $\sigma$  representan la media y desviación típica, respectivamente de la distribución empírica de la estimación del VaR y CVaR.

En la tabla 5.2.5 presenta la distribución empírica (incertidumbre de las innovaciones) del VaR y CVaR, donde observamos que de igual manera que la distribución teórica el VaR y CVaR histórico presenta un mayor riesgo de modelo, ya que la estimación del  $p$ -cuantil de las distintas simulaciones experimentales de la serie de rentabilidades presenta una mayor desviación típica y coeficiente de variación.

Este método específicamente no mide la incertidumbre en la estimación de la volatilidad incondicional y del  $p$ -cuantil, sin embargo nos permite observar cuánto pueden llegar a variar dichas estimaciones en función de la incertidumbre de las innovaciones, con lo que también es una forma de representar el riesgo en la estimación del VaR y CVaR paramétrico e histórico.

Comparando los resultados de la distribución empírica (tabla 5.2.5) y de la distribución teórica (tabla 5.1), se observa que los intervalos de confianza de la distribución empírica son mayores, con lo que se podrían presentar comportamientos más conservadores en relación al riesgo de modelo de la estimación del VaR y CVaR (paramétrico e histórico). Sin embargo, la elección de la distribución (teórica o empírica) de la estimación del VaR y CVaR paramétrico e histórico para medir el riesgo de modelo debería depender del enfoque que se le quiera dar a este.

---

<sup>10</sup> El bootstrap es un método de remuestreo, utilizado para aproximar la distribución de una muestra.

Distribución empírica (Incertidumbre de las innovaciones)						
Paramétrico (IV)				Histórico (IV)		
	Desv. Típica	Coef. De variación	Intervalos de confianza	Desv. Típica	Coef. De variación	Intervalos de confianza
<b>IBEX35</b>						
VaR	0.0012	0.0352	[3.23% ; 3.70%]	0.0032	0.0773	[3.46% ; 4.69%]
CVaR	0.0014	0.0352	[3.70% ; 4.24%]	0.0066	0.1237	[4.06% ; 6.66%]
<b>SAN</b>						
VaR	0.0022	0.0438	[4.60% ; 5.47%]	0.0039	0.0742	[4.52% ; 6.05%]
CVaR	0.0025	0.0438	[5.27% ; 6.26%]	0.0136	0.1676	[5.45% ; 10.78%]
<b>Oro</b>						
VaR	0.0015	0.0256	[5.41% ; 5.99%]	0.0038	0.0622	[5.38% ; 6.87%]
CVaR	0.0017	0.0256	[6.20% ; 6.86%]	0.0074	0.0917	[6.62% ; 9.53%]
<b>EUR/USD</b>						
VaR	0.0003	0.0248	[1.29% ; 1.42%]	0.0006	0.0412	[1.32% ; 1.56%]
CVaR	0.0004	0.0248	[1.48% ; 1.63%]	0.0013	0.0738	[1.55% ; 2.07%]

Tabla 5.2.5: Desviación típica, coeficientes de variación e intervalos de confianza al 95% del estimador VaR y CVaR por medio del método paramétrico e histórico, utilizando la distribución empírica (incertidumbre de las innovaciones (IV)).

En esta sección hemos analizado el riesgo de modelo derivado de la incertidumbre paramétrica de distintos modelos (GARCH, EVT y cópulas) y de la precisión de la estimación de la volatilidad incondicional y del  $p$  –cuantil, ya que independientemente del modelo que se elija, la estimación del VaR y CVaR está expuesta a la incertidumbre generada por la estimación de los parámetros del modelo o método. Hemos mostrado que no en todas las estimaciones del VaR y CVaR, la incertidumbre de sus parámetros supone un gran riesgo de modelo.

Se ha mostrado que la estimación del VaR y CVaR históricos presenta un mayor riesgo de modelo en relación a la estimación del VaR y CVaR por el método paramétrico, ya que la estimación del  $p$  –cuantil de acuerdo a los resultados es estimada con menor precisión que la estimación de la volatilidad incondicional.

En la estimación puntual del VaR y CVaR por simulación Monte Carlo, a la cual se le ha incorporado la incertidumbre de los parámetros del modelo GARCH (1,1), el riesgo de modelo por la incertidumbre paramétrica es bajo, debido a que los parámetros son estimados con bastante precisión.

De todos los modelos analizados podemos concluir que el modelo EVT, es el que mayor riesgo de modelo presenta debido a la incertidumbre derivada de la estimación de los parámetros del modelo, lo que podemos atribuir a que al ser un modelo más sofisticado sus parámetros se estiman con menor precisión y a que la estimación del VaR y CVaR depende directamente de los parámetros.

Con respecto a la estimación del VaR y CVaR, en general el CVaR supone un mayor riesgo de modelo; sin embargo, en el método paramétrico donde la estimación del VaR y CVaR depende igual manera de los parámetros del modelo, el riesgo de ambas estimaciones es el mismo.

Hemos propuesto medidas para cuantificar dicho riesgo, asociadas a la desviación típica coeficiente de variación e intervalos de confianza de la estimación del VaR y CVaR, en función de la incertidumbre paramétrica de distintos modelos y de la precisión de la estimación de la

volatilidad incondicional y el  $p$  –cuantil. Los intervalos de confianza nos permiten observar cual es el valor máximo o mínimo que podría alcanzar el VaR y CVaR referente a la incertidumbre de la estimación de los parámetros del modelo o método (volatilidad,  $p$  –cuantil, GARCH, EVT, Cópulas, etc). Así mismo es posible saber en qué medida el VaR y CVaR y por consiguiente el capital, podrían llegar a incrementar o disminuir (porcentualmente) debido a la incertidumbre paramétrica. Por ejemplo, la estimación puntual del VaR del IBEX por el método paramétrico con volatilidad condicional GARCH (2.2%); de acuerdo a los intervalos de confianza (tabla 5.2.3); puede incrementar a 2.4% o disminuir a 2%, por lo tanto, la incertidumbre de la estimación de los parámetros del modelo GARCH (1,1) podría llegar a mover el capital un 12.4%. Resulta interesante hacer este tipo de análisis para todos los activos y todos los intervalos de confianza obtenidos a lo largo de esta sección, por lo que en las tablas 11.2.4 a 11.2.6 apéndice C se presentan las diferencias porcentuales entre todos los intervalos de confianza y las estimaciones puntuales (obtenidas en la sección 4), las cuales representan el porcentaje que podría llegar a incrementar o disminuir el capital debido a la incertidumbre paramétrica o al riesgo que genera la estimación de los parámetros.

Otro uso interesante que se le puede dar a los intervalos de confianza es presentarlo como estimación del VaR y CVaR, en lugar de dar una estimación puntual, o bien proporcionar el intervalo superior, con lo que se estaría adoptando una estrategia conservadora justificada por la presencia de incertidumbre paramétrica.

## 6. Riesgo en CreditMetrics.

CreditMetrics es un modelo utilizado para medir el riesgo de una cartera de crédito, por medio del VaR y CVaR de los cambios en el valor de deuda debido a variaciones en la calificación crediticia de la contraparte. Por lo tanto, CreditMetrics no toma en cuenta únicamente la posibilidad de incumplimiento, sino también la posibilidad de cambios en la calidad crediticia del emisor. El modelo se basa en matrices de transición y elementos que son obtenidos en el mercado (como la tasa de descuento y la tasa de recuperación) para obtener la distribución del valor de un activo con riesgo de crédito o bien de una cartera. Para más detalle del modelo de CreditMetrics, descripción de los elementos, metodologías de cálculo, etc. ver anexo 9.5.

De acuerdo a lo anterior, la estimación del VaR y CVaR está condicionada a los 3 elementos principales del modelo (matrices de transición, tasas de descuento y tasas de recuperación) considerando como principal fuente de riesgo de modelo la matriz de transición, ya que al ser una estimación de probabilidades genera incertidumbre en el modelo. En la presente sección, se analiza el riesgo de modelo derivado de la incertidumbre paramétrica de la matriz de transición, empleando los aspectos que se describe a continuación. Este análisis considera únicamente un aspecto del riesgo de modelo de CreditMetrics, ya que está expuesto a otros riesgos como son la incertidumbre derivada de la curva de tasas de rendimiento o a la tasas de recuperación.

Para llevar a cabo el análisis se estima el VaR y CVaR para tres posibles casos: 1) cartera formada por 1 bono, 2) cartera formada por 2 bonos, y 3) cartera formada por 4 bonos. Para cada uno de los casos se estima el VaR y CVaR utilizando la matriz de transición original y una segunda estimación se realizara modificando la matriz de transición, con lo que se comparara las dos estimaciones para analizar la existencia y magnitud del riesgo de modelo.

Por otro lado, el objetivo de tener 3 casos diferentes es analizar si el tamaño de la cartera o las características de los bonos influyen de alguna manera en el riesgo de modelo. En el caso de la cartera de dos bonos se estima el VaR y CVaR utilizando el método teórico y el método por simulación Monte Carlo (descritos en la sección 9.4 apéndice A), con lo que también será posible analizar en qué medida la elección del método de estimación interviene en el riesgo de modelo.

Para la estimación del Credit VaR y CVaR, se consideraran un horizonte temporal  $h = 1$  año, y un nivel de significación  $\alpha = 99\%$ , así como los elementos del modelo presentes en las tablas 6.2 a 6.5. Las carteras de cada uno de los casos están formadas por los bonos de la tabla 6.1, de los cuales en el caso 1) se forman 4 carteras con cada uno de los bonos, en el caso 2) se forma una cartera con los bonos 1 y 2, y en el caso 3) la cartera está formada por los 4 bonos. Ya que se estimara el VaR y CVaR a un año, se obtiene el perfil de riesgo de las distintas carteras a un año, para el cual se utiliza una matriz de transición con  $n=1$ , es decir, una matriz que refleje las probabilidades de migrar de una calificación  $i$  a la  $j$  al cabo de un año.

Bono	Calificación	Cupón	Vencimiento (T años)	Prelación	V. Nominal
1	A	5%	3	Senior sin Garantía	100
2	BBB	6%	5	Senior sin Garantía	100
3	AA	4%	5	Senior Subordinada	100
4	B	7%	4	Subordinada	100

Tabla 6.1: Características de los diferentes bonos que serán utilizados para la creación de las carteras.

Calificación inicial (T=0)	Calificación después de un año (T=1)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81%	8.33%	0.68%	0.06%	0.12%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.70%	90.65%	7.79%	0.64%	0.06%	0.14%	0.02%	0.00%
A	0.09%	2.27%	91.05%	5.52%	0.74%	0.26%	0.01%	<b>0.06%</b>
BBB	0.02%	0.33%	5.95%	86.93%	5.30%	1.17%	0.12%	0.18%
BB	0.03%	0.14%	0.67%	7.73%	80.53%	8.84%	1.00%	1.06%
B	0.00%	0.11%	0.24%	0.43%	6.48%	83.46%	4.07%	5.20%
CCC	0.22%	0.00%	0.22%	1.30%	2.38%	11.24%	64.86%	19.79%
Default	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

Tabla 6.2: Matriz de probabilidades de transición a un año de acuerdo a la calificación inicial.  
Fuente: J.P Morgan, manual de CreditMetrics (1997).

Calificación inicial (T=0)	Calificación después de un año (T=1)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.31%	8.23%	0.78%	0.16%	0.22%	0.10%	0.10%	0.10%
AA	0.80%	90.15%	7.69%	0.74%	0.16%	0.24%	0.12%	0.10%
A	0.19%	2.37%	90.55%	5.42%	0.84%	0.36%	0.11%	0.16%
BBB	0.12%	0.43%	5.85%	86.43%	5.40%	1.27%	0.22%	0.28%
BB	0.13%	0.24%	0.77%	7.83%	80.03%	8.74%	1.10%	1.16%
B	0.10%	0.21%	0.34%	0.53%	6.38%	82.96%	4.17%	5.31%
CCC	0.32%	0.10%	0.32%	1.40%	2.48%	11.34%	64.36%	19.68%
Default	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

Tabla 6.3: Probabilidades de transición modificadas a un año de acuerdo a la calificación inicial.  
Fuente propia.

La matriz de transición modificada fue calculada a partir de la matriz de transición original, la cual se generó de la siguiente manera: (1) Se restó .005 a las probabilidades de la diagonal, es decir la probabilidad de no cambiar de calificación, (2) Se restó .001, a la segunda probabilidad más grande (de cada calificación inicial) y (3) Se sumó .001 al resto de probabilidades. El método para el cálculo de la matriz de transición modificada fue de acuerdo al criterio del analista, por lo que el análisis es una primera manera abordar el riesgo de modelo.

Para valorar los distintos bonos se ha utilizado el precio forward, el cual es el valor presente del bono tomando en cuenta un año hacia delante, este se obtuvo considerando como



tasa de descuento los tipos de la curva forward obtenida a partir de tipos cupón cero correspondiente a cada rating. Dicha curva se obtuvo de J.P Morgan (1997).

De acuerdo al objetivo del ejercicio, que es ilustrar una determinada manera de analizar el riesgo de modelo y por simplicidad, se consideran tipos cupón cero fijos, por lo que se cuenta con una única curva forward. Sin embargo para un análisis más robusto cabría utilizar tipos cambiantes para la estimación de la curva forward.

Calificación	Año1	Año2	Año3	Año4
AAA	3.6	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.72	4.32	4.93	5.32
BBB	4.1	4.67	5.25	5.63
BB	5.55	6.02	6.78	7.27
B	6.05	7.02	8.03	8.52
CCC	15.05	15.02	14.03	13.52

Tabla 6.4: Curva cupón cero forward anual, para diferentes plazos y calificaciones. Fuente: J.P Morgan, manual de CreditMetrics (1997).

Prelación	Media	DT
Senior Garantizada	53.8	26.86
Senior sin Garantía	51.13	25.45
Senior Subordinada	38.52	23.81
Subordinada	32.74	20.18
Junior Subordinada	17.09	10.9

Tabla 6.5: Tasas de recuperación en porcentaje sobre el nivel nominal, de acuerdo a la prelación de los créditos. Fuente: J.P Morgan, manual de CreditMetrics (1997).

Para la estimación del VaR y CVaR de una cartera de dos bonos por el método teórico es necesario contar con la matriz de probabilidades conjuntas, las cuales se encuentran en las tablas 11.3.2 a 11.2.5 apéndice C. Para dichas estimaciones se consideraron dos situaciones: a) independencia entre los ratings de ambos bonos, y b) correlación  $\rho = .3$  entre ambos ratings, un nivel de correlación que se asocia normalmente con los rendimientos de las acciones de las empresas que emitieron dichos bonos. En la sección 9.4 apéndice A se especifica la metodología de estimación utilizada según el nivel de correlación. En la aplicación del método de simulación Monte Carlo, es necesario contar con una matriz de rentabilidades estandarizadas que podamos asociar a los distintos niveles de rating. Tal matriz, que se presenta en las tablas 11.3.6 y 11.3.7 del apéndice C, se construye invirtiendo la función de distribución que se obtiene al acumular las probabilidades de cambios de rating. Utilizaremos para ello una función de distribución Normal. Para la estimación por el método de simulación Monte Carlo, se utilizaron  $M = 1000, 5000, 10000$  trayectorias.

Para fines del presente análisis se obtiene la desviación típica de la distribución de probabilidad de las rentabilidades de la cartera, y con ella, la estimación del VaR y CVaR a un año por el método paramétrico. Para dicho cálculo hacemos el supuesto de que las rentabilidades siguen una distribución Normal (VaR y CVaR (Normal)) y estimamos el VaR y CVaR a un año utilizando el  $p$ -cuantil de la distribución de rentabilidades (VaR y CVaR (Percentil)).

### Caso 1: Cartera formada por un bono.

De acuerdo a la modificación de la matriz inicial de probabilidades de transición las probabilidades de cambiar a una calificación peor son mayores, lo que supone que la estimación del VaR y CVaR utilizando dicha matriz son mayores, resultado que se observa en la tabla 6.6. Por otro lado únicamente se observan cambios en el VaR (percentil) del bono con calificación AA. Esto se debe a que el VaR (percentil) se obtiene acumulando las probabilidades empezando por la calificación más baja (D) a la más alta (AAA), de tal manera que el primer percentil será la probabilidad acumulada que sea igual o mayor al 1%, por lo tanto de acuerdo a la modificación de la matriz de probabilidades de transición, todas las probabilidades acumuladas presentan incremento, (especialmente en la cola izquierda), sin embargo este aumento solo fue suficiente en el caso del bono AA para conseguir que el percentil cambiara, ya que este bono es el que mayores diferencias porcentuales presenta en sus probabilidades de migrar a una calificación más baja.

Las estimaciones que mayor diferencia presentan son la desviación típica y el VaR y CVaR (Normal), ya que la estimación de estas depende directamente de la probabilidad de transición. El CVaR (percentil), al ser este un promedio de la cola izquierda, también depende directamente de las probabilidades de transición, en especial de las probabilidades de cambiar a una calificación menor.

De acuerdo a la diferencia porcentual entre las estimaciones del VaR y CVaR con la matriz original y las estimaciones del VaR y CVaR con la matriz modificada (tabla 6.7) los bonos que más riesgo de modelo presentan son los bonos con calificaciones más altas. Dichos resultados los atribuimos principalmente a que de acuerdo al criterio de modificación de la matriz de transición que hemos utilizado, las diferencias porcentuales entre las probabilidades de transición entre la matriz original y la matriz modificada son mayores en los bonos con calificaciones elevadas, especialmente en las probabilidades de pasar a una calificación baja (C, Default). Dichas diferencias porcentuales se encuentran en la tabla 11.3.7 apéndice C.

Bono	A		BBB		AA		B	
	M. original	M. modificada	M. original	M. modificada	M. original	M. modificada	M. original	M. modificada
Desv. Típica	0.0133	0.0218	0.0278	0.0332	0.0058	0.0220	0.1547	0.1562
VaR (Normal)	3.20%	5.24%	6.90%	8.23%	1.42%	5.29%	39.85%	40.26%
VaR (Percentil)	2.97%	2.97%	8.78%	8.78%	0.51%	1.57%	68.69%	68.69%
CVaR(Normal)	3.65%	5.98%	7.84%	9.36%	1.61%	6.04%	45.09%	45.55%
CVaR(Percentil)	6.24%	9.71%	15.23%	17.36%	3.93%	10.18%	68.69%	68.69%

Tabla 6.6: Desviación típica, estimación del VaR y CVaR a un año de las rentabilidades de una cartera formada por un bono con calificación inicial A, BBB, AA, B de acuerdo a la matriz original y modificada. VaR y CVaR (Normal) hacen referencia a la estimación del VaR y CVaR utilizando el método paramétrico, para el que se hace el supuesto que las rentabilidades siguen una distribución Normal. VaR y CVaR (Percentil) hacen referencia a las estimaciones del VaR y CVaR mediante el p-cuantil.

Cada cartera está expuesta a diferentes riesgo de crédito, cuanto menor sea la calificación del bono el riesgo de crédito será mayor, lo que se observa en la tabla anterior. Los bonos con calificaciones más bajas (BBB, B) presentan un mayor valor en la estimación del VaR ya que sus probabilidades de hacer default son mayores.

Bono	A	BBB	AA	B
Dif (%)				
Desv. Típica	63.57%	19.29%	280.90%	0.98%
VaR (Normal)	63.99%	19.34%	273.93%	1.02%
VaR (Percentil)	0.00%	0.00%	208.35%	0.00%
CVaR(Normal)	63.93%	19.33%	274.77%	1.02%
CVaR(Percentil)	55.69%	14.02%	159.08%	0.00%

Tabla 6.7: Diferencias porcentuales de las estimaciones de la desviación típica, VaR y CVaR con la matriz original y las estimaciones de la desviación típica, VaR y CVaR con la matriz modificada. VaR y CVaR (Normal) hacen referencia a la estimación del VaR y CVaR utilizando el método paramétrico, para el que se hace el supuesto que las rentabilidades siguen una distribución Normal. VaR y CVaR (Percentil) hacen referencia a las estimaciones del VaR y CVaR mediante el p-cuantil.

### Caso 2: Cartera formada por dos bonos.

Para el caso de una cartera formada por dos bonos (A y BBB), nuevamente se presenta un mayor valor del VaR y CVaR estimados con la matriz de transición modificada, resultados que encontramos en la tabla 6.8; observando también, que en esta ocasión todas las estimaciones (VaR, CVaR y desviación típica) con la matriz modificada presentaron cambios en relación a las estimaciones con la matriz original.

Para complementar lo anterior, en la tabla 6.9 observamos, mediante las diferencias porcentuales entre las estimación del VaR y CVaR con la matriz original y la modificada, que la mayor diferencia la encontramos en la estimación del CVaR (percentil), lo que se debe a que las probabilidades conjuntas de la cola izquierda de la distribución de rentabilidades de la cartera han presentado mayores diferencias porcentuales.

Por otro lado, se observa que las estimaciones donde se ha especificado independencia entre los bonos presentan un menor riesgo de modelo, es decir, una menor diferencia porcentual, ya que al suponer una cierta correlación, la diferencia porcentual entre las probabilidades conjuntas de la matriz original y la matriz modificada son mayores, especialmente en la cola izquierda.

Se observa también que el riesgo de modelo es posible reducirlo diversificando la cartera, por ejemplo, de acuerdo a los resultados de la tabla 6.7 el bonos A tiene presencia de mayor riesgo de modelo, por tanto, si a la cartera compuesta únicamente por el bono A la diversificamos añadiendo el bono BBB (los cuales deben estar incorrelacionados), el riesgo de modelo se reduce; lo que se puede comprobar en la tabla 6.9. Sin embargo, esto ocasiona que el riesgo de crédito incremente ya que se está incorporando un bono con calificación más baja, el cual presenta un mayor riesgo de crédito.

Matriz original	Método Teórico		Monte Carlo M=1000		Monte Carlo M= 5000		Monte Carlo M=10000	
	$\rho=.3$	$\rho=0$	$\rho=.3$	$\rho=0$	$\rho=.3$	$\rho=0$	$\rho=.3$	$\rho=0$
Desv. Típica	0.0158	0.0155	0.0122	0.0141	0.0149	0.0145	0.0157	0.0163
VaR (Normal)	3.93%	3.86%	3.03%	3.49%	3.71%	3.61%	3.92%	4.08%
VaR (Percentil)	4.42%	4.42%	4.24%	4.24%	4.42%	4.42%	4.42%	4.42%
CVaR(Normal)	4.47%	4.39%	3.45%	3.97%	4.22%	4.10%	4.46%	4.63%
CVaR(Percentil)	8.47%	8.45%	7.64%	9.43%	10.30%	9.53%	10.81%	11.45%
Matriz modificada								
Desv. Típica	0.0204	0.0199	0.0178	0.0186	0.0205	0.0187	0.0212	0.0209
VaR (Normal)	5.09%	4.97%	4.43%	4.60%	5.10%	4.67%	5.29%	5.24%
VaR (Percentil)	4.73%	4.73%	4.42%	4.42%	4.88%	4.42%	4.73%	4.42%
CVaR(Normal)	5.78%	5.65%	5.03%	5.23%	5.79%	5.30%	6.01%	5.94%
CVaR(Percentil)	18.11%	17.72%	13.37%	14.42%	17.12%	14.40%	17.78%	17.29%

Tabla 6.8: Desviación típica y estimaciones del VaR y CVaR (con la matriz original y modificada), de una cartera de dos bonos con calificación inicial A y BBB; en donde se supone independencia y correlación igual a .3 entre los ratings de los bonos. Método teórico y por simulación Monte Carlo con M=1000, 5000,10000 hacen referencia al método por el cual fue obtenida la distribución de rentabilidades de la cartera. VaR y CVaR (Normal) hacen referencia a la estimación del VaR y CVaR utilizando el método paramétrico, para el que se hace el supuesto que las rentabilidades siguen una distribución Normal. VaR y CVaR (Percentil) hacen referencia a las estimaciones del VaR y CVaR mediante el p-cuantil.

Dif %	Método Teórico		Monte Carlo M=1000		Monte Carlo M= 5000		Monte Carlo M=10000	
	$\rho=.3$	$\rho=0$	$\rho=.3$	$\rho=0$	$\rho=.3$	$\rho=0$	$\rho=.3$	$\rho=0$
Desv. Típica	29.29%	28.55%	45.98%	31.62%	37.35%	29.26%	34.83%	28.17%
VaR (Normal)	29.37%	28.69%	46.01%	31.83%	37.36%	29.30%	34.84%	28.35%
VaR (Percentil)	7.01%	7.01%	4.24%	4.24%	10.51%	0.00%	7.01%	0.00%
CVaR(Normal)	29.36%	28.68%	46.00%	31.80%	37.36%	29.30%	34.84%	28.33%
CVaR(Percentil)	113.84%	109.65%	75.08%	52.95%	66.17%	51.08%	64.41%	51.04%

Tabla 6.9: Diferencias porcentuales entre la estimación de la desviación típica, VaR y CVaR con la matriz original y la estimación de la desviación típica, VaR y CVaR con la matriz modificada. Método teórico y por simulación Monte Carlo con M=1000, 5000,10000 hacen referencia al método por el cual fue obtenida la distribución de rentabilidades de la cartera. VaR y CVaR (Normal) hacen referencia a la estimación del VaR y CVaR utilizando el método paramétrico, para el que se hace el supuesto que las rentabilidades siguen una distribución Normal. VaR y CVaR (Percentil) hacen referencia a las estimaciones del VaR y CVaR mediante el p-cuantil.

### Caso 3: Cartera formada por cuatro bonos.

Para el caso de la cartera formada por los 4 bonos, de acuerdo a la tabla 6.10, la estimación del VaR y CVaR con la matriz modificada también sufrió un incremento. Sin embargo, en esta ocasión observamos que las diferencias porcentuales de las estimaciones del VaR y CVaR con la matriz original y la modificada (tabla 6.11) no son grandes; ya que el bono B (calificación más baja) es el que genera principalmente las rentabilidades negativas de la cartera, y es precisamente este bono el que menos es afectado por la incertidumbre paramétrica de la matriz de transición. Por otro lado, confirmamos las conclusiones anteriores de que la estimación el VaR (percentil) es el que presenta las menores diferencias, debido a que la cola izquierda de las rentabilidades de la cartera es principalmente generada por la existencia del bono B, en específico de los defaults que ocurre en dicho bono ; además si de acuerdo a la matriz original el bono presenta default, entonces al usar la matriz modificada también se va a presentar el default, es por ello que el percentil no cambia.

Entre las dos formas de estimar el Var y el CVaR (Normal y percentil), también encontramos diferencias significativas, sin embargo esto no lo consideramos riesgo de modelo ya

que, “los rendimientos del valor de una cartera de crédito son sesgados y la curva presenta alta curtosis en la cola izquierda; por tanto, no basta la media y la desviación estándar para entender la distribución de probabilidad”<sup>11</sup>, por lo que la estimación del VaR mediante el método paramétrico no es del todo correcta.

	M=1000		M=5000		M= 10000	
	M. original	M. modificada	M. original	M. modificada	M. original	M. modificada
Desv. Típica	0.0386	0.0395	0.0391	0.0401	0.0398	0.0409
VaR (Normal)	10.06%	10.32%	10.21%	10.49%	10.40%	10.73%
VaR (Percentil)	17.17%	17.17%	17.23%	17.29%	17.29%	17.29%
CVaR(Normal)	11.36%	11.65%	11.53%	11.85%	11.75%	12.11%
CVaR(Percentil)	17.72%	17.81%	18.05%	18.25%	18.20%	18.49%

Tabla 6.10: Desviación típica y estimaciones del VaR y CVaR de la rentabilidades de una cartera formada por 4 bonos, utilizando la matriz de transición original y la matriz de transición modificada. VaR y CVaR (Normal) hacen referencia a la estimación del VaR y CVaR utilizando el método paramétrico, para el que se hace el supuesto que las rentabilidades siguen una distribución Normal. VaR y CVaR (Percentil) hacen referencia a las estimaciones del VaR y CVaR mediante el p-cuantil. Se consideró independencia entre los ratings de los bonos.

	M=1000	M=5000	M= 10000
	Dif.	Dif.	Dif.
Desv. Típica	2.1%	2.4%	2.7%
VaR (Normal)	2.6%	2.8%	3.1%
VaR (Percentil)	0.0%	0.4%	0.0%
CVaR(Normal)	2.5%	2.8%	3.1%
CVaR(Percentil)	0.5%	1.1%	1.6%

Tabla 6.11: Diferencias porcentuales entre la desviación típica, VaR y CVaR con la matriz original y la desviación típica, VaR y CVaR con la matriz modificada VaR y CVaR (Normal) hacen referencia a la estimación del VaR y CVaR utilizando el método paramétrico, para el que se hace el supuesto que las rentabilidades siguen una distribución Normal. VaR y CVaR (Percentil) hacen referencia a las estimaciones del VaR y CVaR mediante el p-cuantil.

En esta sección se ha analizado el riesgo de modelo en la aplicación de CreditMetrics derivado de la incertidumbre de la estimación de la matriz de probabilidades de transición, considerando que esta es el elemento fundamental del modelo. Al no conocer la incertidumbre o la precisión con la cual se ha estimado dicha matriz, hemos propuesto una matriz de probabilidades de transición modificada. De acuerdo al criterio de modificación propuesto, las diferencias netas entre las probabilidades de la matriz de transición original y modificada son las mismas para todos los bonos, sin embargo, esto ocasiona que las diferencias porcentuales no sean las mismas, teniendo como resultado de dicha modificación, que los bonos con calificaciones más altas presente mayores diferencias porcentuales en las probabilidades de migrar a una calificación más baja. Además para fines del análisis se han considerado diferentes carteras de deuda con el fin de analizar el comportamiento del riesgo de modelo de acuerdo a la composición de la cartera y si este es muy diferente entre las mismas.

Hemos mostrado que la existencia de incertidumbre en la matriz de probabilidad de transición ocasiona cambios en las estimaciones del VaR y CVaR de una cartera de deuda, que

<sup>11</sup> De Lara Haro, Alfonso. *Medición y control de riesgos financieros*, LIMUSA, 3ª edición, 2008.

para el caso particular del análisis, los cambios fueron incrementos ya que las probabilidades de migrar a una calificación menor incrementaron de acuerdo a la modificación. Las diferencias entre las estimaciones del VaR y CVaR con la matriz modificada y la original, pusieron en evidencia que los bonos que experimenten una mayor incertidumbre en las probabilidades de migrar a calificaciones bajas, especialmente default, experimentan un mayor riesgo de modelo, que para nuestro análisis fueron los bonos con calificaciones iniciales más altas (A, AA).

En concreto el riesgo de modelo por la incertidumbre paramétrica de la matriz de probabilidades de transición en la estimación del VaR y CVaR de una cartera de crédito, está condicionado a la composición de la cartera, (la calificación inicial de los bonos) y de qué manera la incertidumbre de la matriz altera sus probabilidades, especialmente la de migrar a una calificación menor.

De acuerdo a los resultados de las distintas carteras hemos comprobado que el riesgo de crédito, el cual es mayor en bonos con calificaciones más altas, es posible reducirlo con la diversificación de la cartera; lo mismo sucede con el riesgo de modelo, el cual también se reduce diversificando la cartera, es decir, el incorporar a la cartera un bono que tenga una menor exposición al riesgo de modelo lo reducirá. Para el caso particular del análisis, el riesgo de modelo es reducido si a una cartera compuesta por un bono con calificación elevada se diversifica incorporando un bono con calificación inicial más baja. Que para el caso del presente análisis, el riesgo de crédito y el riesgo de mercado presentan comportamientos contrarios, es decir para diversificar el riesgo de mercado se debe incluir en la cartera un bono que presente una calificación más elevada, sin embargo para reducir el riesgo de modelo se debe diversificar la cartera incluyendo bonos con calificaciones más bajas, por lo que en el caso de que la incertidumbre en la matriz de transacción realmente fuera como la representamos, resultaría interesante, encontrar una cartera que equilibrara los dos riesgos, sin embargo para confirmar lo antes dicho es necesario de un análisis más robusto.

Por otro lado, también se ha mostrado que las estimaciones que mayor riesgo de modelo presentan son aquellas que dependen directamente de las probabilidades, como es el caso del CVaR (percentil) y del VaR y CVaR (Normal)

El análisis presentado es un primer tratamiento al riesgo de modelo por la incertidumbre que genera la matriz de probabilidades de transición. Para que el análisis sea más robusto y se pueda proporcionar una medida por riesgo de modelo (como ha sido en el VaR y CVaR de carteras de renta variable), se tendrían que considerar distintas matrices de probabilidades de transición y sobre estas calcular el VaR y CVaR, para así estimar la desviación típica (media que representa el riesgo de modelo). Sin embargo se tendría que pensar en una estrategia para construir las matrices de probabilidades de transición, con la cual sea posible representar la incertidumbre paramétrica de la manera más adecuada; por lo que dejamos este análisis para futuros trabajos.

También resultaría interesante analizar el riesgo de modelo derivado de la incertidumbre de la estimación de las tasas de rendimiento o de recuperación, así como analizar, como la interacción de la incertidumbre de los tres elementos afecta a la estimación del VaR y CVaR.

## 7. Conclusiones

Como se ha estudiado a lo largo de este trabajo, las instituciones financieras están expuestas al riesgo de modelo, que es el generado por la incertidumbre derivada del uso de modelos matemáticos, estadísticos y econométricos. Tanto las instituciones financieras como las reguladoras, están conscientes de lo que supone y de la importancia de tener una adecuada gestión del mismo; sin embargo, hoy en día la normativa no exige a las instituciones gestionar el riesgo de modelo, contando con muy pocas técnicas para su cuantificación. En este sentido, en el presente trabajo se propone una serie de estrategias para valorar el riesgo de modelo de la estimación del VaR y CVaR de carteras de renta variable y deuda.

Como todo modelo, el VaR y CVaR están expuestos a 3 factores de riesgo (datos, estimación y utilización), de los cuales se han analizado las principales fuentes derivadas de la estimación del modelo, en concreto, los errores en los supuestos (elección del modelo) y la incertidumbre paramétrica.

El riesgo por la elección de modelo, se deriva de todos los posibles supuestos que se pudieran presentar para la estimación del VaR y CVaR. Para su análisis y cuantificación se estimó el VaR y CVaR realizando distintos supuestos sobre la modelización de la rentabilidad y la dinámica temporal de la volatilidad, y empleando distintas metodologías, entre las cuales se utilizaron las estimaciones del VaR y CVaR de la tesis doctoral de García Jorcano, obtenidas a partir de diferentes supuestos sobre la distribución de las rentabilidades y de la dinámica temporal de la volatilidad. Y por último se estimó el VaR y CVaR mediante el uso de diferentes cópulas, para modelar la estructura de dependencia entre las rentabilidades de los activos.

Una primera aproximación al riesgo por la elección del modelo fue a través de la dispersión de los distintos modelos de estimación, considerando esta como una medida de riesgo de modelo; en primer lugar se comprueba la existencia del riesgo de modelo, y se concluye que el principal factor que hace que el riesgo de modelo sea mayor son los distintos supuestos sobre la distribución de las rentabilidades. Los supuestos sobre los modelos de la dinámica temporal de la volatilidad también suponen un riesgo, sin embargo este es menor.

Otro resultado importante que se pone de manifiesto, es que no todos los modelos de estimación (dependiendo del comportamiento de los activos) representan adecuadamente el riesgo de mercado. Por lo tanto, para una correcta cuantificación del riesgo de modelo, se debe hacer una selección de modelos válidos; obteniendo de esta una reducción del riesgo de modelo.

La validación de las estimaciones, al ser un modelo también supone un riesgo, pues hay diversos contrastes y la elección de estos contrastes queda a juicio del analista, generando una incertidumbre de no saber si los resultados de la validación son los correctos para seleccionar una estimación, por lo que considerar un único modelo para la estimación del VaR y CVaR podría resultar no ser lo más conveniente. Por ello, se propuso una metodología la cual considera los resultados de validación, mismos que permiten jerarquizar los modelos; lo anterior para obtener una estimación del VaR y CVaR que considere todos los modelos de estimación válidos, y una medida adecuada de riesgo de modelo. Para que la metodología se precise, es importante abordar el riesgo de modelo de la validación en el sentido de contestar: ¿Qué contrastes son los más adecuados?, ¿A qué nivel de significación deben ejecutarse?, ¿Cómo debemos proceder cuando utilizamos varios contrastes de validación?, además se debería investigar si es posible considerar cualquier función acotada del  $p$  valor (por ejemplo la raíz cuadrada) dejando dichas cuestiones abiertas para futuros estudios.

Como análisis del riesgo específico por incertidumbre paramétrica se han utilizados dos enfoques. En el primero se aplicó teoría estadística de la estimación de la volatilidad y del  $p$ -cuantil. En el segundo se propusieron tres metodologías que permitieron incorporar la incertidumbre de la estimación de parámetros de distintos modelos y la incertidumbre de las innovaciones. Con los dos enfoques se estimó la distribución del estimador VaR y CVaR en la incertidumbre de distintos parámetros (volatilidad incondicional,  $p$ -cuantil, GARCH, EVT y cópulas). Se obtuvo la desviación típica e intervalos de confianza, medidas que nos permitieron cuantificar el riesgo de modelo. Con los intervalos de confianza fue posible observar, con un cierto nivel de confianza, cuanto puede aumentar o disminuir el VaR y CVaR y por consiguiente el capital regulatorio.

Se comprobó que la estimación del  $p$ -cuantil, presenta menor precisión en comparación con la estimación de la varianza incondicional, lo que ocasiona que el riesgo de modelo en la estimación del VaR y CVaR por el método histórico experimente un mayor riesgo de modelo, que el VaR y CVaR estimado por el método paramétrico

De los distintos modelos analizados GARCH (1,1), EVT y cópulas, el que mayor riesgo de modelo genera en la estimación del VaR y CVaR es el EVT, ya que al ser un modelo más sofisticado los parámetros son estimados con menor precisión, además estos influyen directamente en la estimación. En general el riesgo de modelo lo podemos asociar con la precisión con la que se estiman los parámetros y a la interacción de los parámetros en la estimación del VaR y CVaR.

También se observó que el hacer una adecuada modelización de la dinámica temporal de la volatilidad, se puede reducir el riesgo de modelo en la estimación del VaR y CVaR por el método EVT, de lo que podemos concluir que el riesgo por la elección de modelo, también puede influir en el riesgo derivado de la incertidumbre paramétrica.

La estimación del VaR y CVaR incorporando incertidumbre paramétrica, al igual que la media de la distribución del VaR y CVaR en función de la incertidumbre de la estimación de los parámetros de los distintos modelos, se pueden considerar como una versión alternativa de la estimación VaR y CVaR, la cuales contemplan el riesgo de modelo; lo que podría resultar atractivo para las instituciones financieras y los reguladores.

En el caso del modelo de CreditMetrics, se valoró el riesgo de modelo derivado de la incertidumbre paramétrica de la matriz de transición, para lo cual se estimó el VaR y CVaR utilizando la matriz de probabilidad de transición (original) y una segunda matriz de probabilidades de transición modificada, con la que se representó la incertidumbre paramétrica.

Los resultados revelan una clara existencia del riesgo generado por la incertidumbre de la matriz de transición propuesta, siendo este mayor y más evidente, en bonos que presentan calificaciones más elevadas, ya que las mayores diferencias porcentuales entre las dos matrices están presentes en dichos bonos. Se concluye que de forma general, que el mayor riesgo de modelo lo presentan las estimaciones de aquellos bonos que experimenten mayores diferencias en sus probabilidades, especialmente en las probabilidades de cambiar a un calificación baja, lo cual depende de la incertidumbre de la matriz de transición. Además de que la magnitud del riesgo de modelo está relacionado con la magnitud de dicha incertidumbre

Otro resultado importante es que el riesgo de modelo al igual que el riesgo de crédito, es posible reducirlo mediante la diversificación de la cartera, es decir, para reducir el riesgo de modelo de una cartera, se debe diversificar incluyendo bonos con un riesgo de modelo menor (especialmente si están incorrelacionados).



El ejercicio expuesto es una primera aproximación al riesgo de modelo por la incertidumbre paramétrica de la matriz de probabilidades de transición, donde dicha incertidumbre fue representada a juicio del analista. Por tanto, para seguir con la analogía del análisis y cuantificación del riesgo de modelo del VaR y CVaR de carteras de renta variables, se propone crear distintas matrices de transición, con las que se obtendría una distribución del VaR y CVaR, para así obtener la desviación típica e intervalos de confianza con los que se cuantificaría el riesgo de modelo. Para crear las distintas matrices, se tendría que plantear una estrategia que tratara de representar la incertidumbre paramétrica de la mejor manera, dejando esta cuestión a futuros estudios.

El presente trabajo es una propuesta ante la carencia de una metodología para cuantificar el riesgo de modelo del VaR y CVaR dentro de la industria, ya que establece técnicas para cuantificarlo, y en algunos de los casos proporciona alternativas de estimación del VaR y CVaR que contemplan el riesgo de modelo. Sin embargo, aún quedan varias cuestiones por resolver, como el profundizar en el análisis del riesgo de modelo de CreditMetrics y analizar el riesgo de modelo en la validación del VaR y CVaR, el riesgo por la calidad de los datos, por la falta de seguimiento tanto en la estimación como en la validación, y por la reducción de la dimensionalidad, es decir riesgo de dejar algún factor relevante fuera del modelo factorial y la incertidumbre de los parámetros del modelo factorial, las cuales quedan abiertas para estudios posteriores.

## 8. Referencias

- [1] Alexander, Carol. *Market Risk Analysis IV: Value at risk Models*, WILEY, 2008.
- [2] Banco de España. *Circular 4/2011*, I. Disposiciones Generales, Boletín Oficial del Estado.
- [3] Board of Governors of the Federal Reserve System Office of the Comptroller of the Currency. *SUPERVISORY GUIDANCE ON MODEL RISK MANAGEMENT*, 2011. <https://www.federalreserve.gov/supervisionreg/srletters/sr1107.htm>
- [4] Claro E. Felipe, Contador A. Sebastián, Quiroga P. Cristóbal. *Teoría del Valor Extremo: Aplicación de la teoría al Índice NASDAQ*, Facultad de Economía, Universidad de Chile, 2006.
- [5] Comité de Supervisión Bancaria de Basilea. *Convergencia internacional de medida y normas de capital*, Marco revisado 2006, Revisión integral. (bcbc128).
- [6] Comité de Supervisión Bancaria de Basilea, “*Basilea III: Marco regulador global para reforzar los bancos y sistemas bancarios*”, Marco revisado 2011. (bcbc189).
- [7] EBA. *FINAL draft Regulatory Technical Standards on prudent valuation under Article 105(14) of Regulation (EU) No 575/2013 (Capital Requirements Regulation — CRR)*, 2015.
- [8] García Jorcano Laura. *Sample size, skewness and leverage effects in Value at Risk and Expected Shortfall estimation*; chapter 2 and 3.
- [9] Hassani, Bertran K. *Model Risk- From Epistemology to Management Ipse se nihil scire id unum sciat. (Socrates’ Plato)*, CES, 2015.
- [10] Herrero Mallol, Carlos. *Una aproximación al riesgo de los modelos financieros*, Agencia Estatal de Administración Tributaria.
- [11] Izquierdo, A. Javier. *Modelos Estadísticos del Riesgo y Riesgo de los Modelos Estadísticos*, EMPIRA, N° 3, 2000, págs.: 101-129.
- [12] Management Solutions. *Model Risk Management, Aspectos cuantitativos y cualitativos de la gestión del riesgo de modelo*, 2014.
- [13] Rodríguez- Pardo del Castillo, José Miguel y Ariza Rodríguez, Fernando. *El riesgo de modelo en la industria bancaria y aseguradora: Propuesta para su evaluación control y mitigación (CONCRECIÓN EN EL RIESGO DE LONGEVIDAD)*, Análisis financiero, N°129. 2015, págs.: 52-66.
- [14] J.P Morgan. *CreditMetrics, Technical Document*, 1997.
- [15] de Lara Haro, Alfonso. *Medición y control de riesgos financieros*, LIMUSA, 3ª edición, 2008.
- [16] Novales, Alfonso. *Valor en Riesgo*, Departamento de Economía Cuantitativa Universidad Complutense, 2016.
- [17] Novales, Alfonso. *Cópulas*, Departamento de Economía Cuantitativa Universidad Complutense, 2017.

[18] Shi, Yan, Young, H. Walter and Cao, Ran. *On aggregate model risk management: Focus on stress testing*, Journal of Risk Management in Financial Institutions, Vol. 8, págs. 171-195, 2015.

[19] Téllez Cabrera, Marco Ricardo. *Medición del riesgo en crédito: Implementación y cálculo del VaR y CVaR en tres modelos de incumplimiento*, Universidad Autónoma Metropolitana, 2010.

## 9. Apéndice A: Preliminares.

	FRAUDE INTERNO	FRAUDE EXTERNO	RELACIONES LABORALES	PRÁCTICAS CON CLIENTES	DAÑOS MATERIALES	FALLOS EN LOS SISTEMAS	GESTIÓN DE PROCESOS	SIN DESGLOSAR	TOTAL
<b>NÚMERO DE PÉRDIDAS POR LÍNEA DE NEGOCIO Y TIPO DE EVENTO</b>									
Finanzas corporativas	17 0,04%	20 0,04%	73 0,15%	73 0,15%	16 0,03%	6 0,01%	214 0,45%	2 0,00%	423 0,89%
Negociación y ventas	47 0,10%	95 0,20%	101 0,21%	108 0,23%	33 0,07%	137 0,29%	4.603 9,74%	8 0,02%	5.132 10,86%
Banca minorista	1.268 2,68%	17.107 36,19%	2.063 4,36%	2.125 4,50%	520 1,10%	163 0,34%	5.289 11,19%	347 0,73%	28.882 61,10%
Banca comercial	84 0,18%	1.799 3,81%	82 0,17%	308 0,65%	50 0,11%	47 0,10%	1.012 2,14%	32 0,07%	3.414 7,22%
Liquidación y pagos	23 0,05%	322 0,68%	54 0,11%	25 0,05%	9 0,02%	82 0,17%	1.334 2,82%	3 0,01%	1.852 3,92%
Servicios de agencia	3 0,01%	15 0,03%	19 0,04%	27 0,06%	8 0,02%	32 0,07%	1.381 2,92%	5 0,01%	1.490 3,15%
Administración de activos	28 0,06%	44 0,09%	39 0,08%	131 0,28%	6 0,01%	16 0,03%	837 1,77%	8 0,02%	1.109 2,35%
Intermediación minorista	59 0,12%	20 0,04%	794 1,68%	539 1,14%	7 0,01%	50 0,11%	1.773 3,75%	26 0,06%	3.268 6,91%
Sin desglosar	35 0,07%	617 1,31%	803 1,70%	54 0,11%	13 0,03%	6 0,01%	135 0,29%	36 0,08%	1.699 3,59%
<b>Total</b>	<b>1.564 3,31%</b>	<b>20.039 42,39%</b>	<b>4.028 8,52%</b>	<b>3.390 7,17%</b>	<b>662 1,40%</b>	<b>541 1,14%</b>	<b>16.578 35,07%</b>	<b>467 0,99%</b>	<b>47.269 100,00%</b>
<b>IMPORTE DE PÉRDIDAS POR LÍNEA DE NEGOCIO Y TIPO DE EVENTO (millones de euros)</b>									
Finanzas corporativas	49,4 0,63%	5,0 0,06%	2,5 0,03%	157,9 2,03%	8,0 0,10%	0,5 0,01%	49,6 0,64%	0,6 0,01%	273,5 3,51%
Negociación y ventas	59,5 0,76%	40,4 0,52%	64,8 0,83%	193,4 2,48%	87,9 1,13%	17,6 0,23%	698,4 8,96%	1,1 0,10%	1.163,1 14,92%
Banca minorista	331,9 4,26%	787,1 10,10%	340,0 4,36%	254,1 3,26%	87,5 1,12%	26,5 0,34%	424,5 5,45%	87,4 0,48%	2.280,0 29,36%
Banca comercial	21,2 0,27%	324,9 4,17%	20,4 0,26%	156,4 2,01%	1.072,9 13,76%	18,2 0,23%	619,4 7,95%	23,2 0,30%	2.256,8 28,95%
Liquidación y pagos	23,0 0,29%	21,0 0,27%	11,6 0,15%	10,5 0,13%	15,0 0,19%	78,6 1,01%	93,5 1,20%	0,3 0,00%	253,4 3,25%
Servicios de agencia	0,2 0,00%	3,9 0,05%	7,6 0,10%	5,0 0,06%	100,0 1,28%	40,1 0,51%	174,1 2,23%	0,8 0,01%	331,6 4,25%
Administración de activos	6,4 0,08%	4,6 0,06%	10,2 0,13%	77,0 0,99%	2,3 0,03%	2,3 0,03%	113,2 1,45%	0,1 0,01%	216,5 2,78%
Intermediación minorista	61,5 0,79%	1,2 0,02%	50,7 0,65%	158,6 2,03%	513,0 6,58%	28,0 0,36%	97,1 1,25%	3,4 0,04%	913,7 11,72%
Sin desglosar	10,5 0,13%	23,4 0,30%	18,7 0,24%	11,5 0,15%	6,7 0,09%	0,7 0,01%	22,7 0,29%	3,8 0,05%	97,9 1,26%
<b>Total</b>	<b>563,5 7,23%</b>	<b>1.211,3 15,54%</b>	<b>526,6 6,76%</b>	<b>1.024,5 13,14%</b>	<b>1.893,4 24,29%</b>	<b>212,5 2,73%</b>	<b>2.292,6 29,41%</b>	<b>71,1 0,91%</b>	<b>7.795,5 100,00%</b>

Tabla 9.1: Resultados del ejercicio de recopilación de datos de pérdidas por riesgo operacional de 89 bancos participantes, realizada por el equipo de trabajo Risk Management Group del comité de Basilea (2002). Fuente: [www.bis.org](http://www.bis.org).

Categoría primaria de tipos de eventos	Definición	Categoría secundaria	Ejemplos de actividades (Nivel 3)
Ejecución, entrega y gestión de procesos	Pérdidas derivadas de errores en el procesamiento de operaciones o en la gestión de procesos, así como de relaciones con contrapartes comerciales y proveedores	Recepción, ejecución y mantenimiento de operaciones	Comunicación defectuosa Errores de introducción de datos, mantenimiento o descarga Incumplimiento de plazos o de responsabilidades Ejecución errónea de modelos / sistemas Error contable / atribución a entidades erróneas Errores en otras tareas Fallo en la entrega Fallo en la gestión del colateral Mantenimiento de datos de referencia
		Seguimiento y presentación de informes	Incumplimiento de la obligación de informar Inexactitud de informes externos (con generación de pérdidas)
		Aceptación de clientes y documentación	Inexistencia de autorizaciones / rechazos de clientes Documentos jurídicos inexistentes / incompletos
		Gestión de cuentas de clientes	Acceso no autorizado a cuentas Registros incorrectos de clientes (con generación de pérdidas) Pérdida o daño de activos de clientes por negligencia
		Contrapartes comerciales	Fallos de contrapartes distintas de clientes Otros litigios con contrapartes distintas de clientes
		Distribuidores y proveedores	Subcontratación Litigios con distribuidores

Tabla 9.2: Categoría 7 de la clasificación de tipos de eventos que ocasionan pérdidas, descrita por Basilea, del riesgo operacional. Fuente: BCBS128

## 9.1. VaR y CVaR

El VaR es una medida con la que se evalúa el riesgo de una determina posición o cartera de activos financieros. Dicho esto una de las principales funciones del VaR es medir el riesgo de mercado; que se define como *“la posibilidad de sufrir pérdidas en posiciones dentro y fuera de balance a raíz de oscilaciones en los precios de mercado”*<sup>12</sup>. Sin embargo, también es utilizado para medir riesgo de crédito.

El VaR se puede definir como un determinado percentil de la función de probabilidad de las rentabilidades de la cartera, sobre en un horizonte de tiempo escogido; por tanto, con el VaR se puede abordar el problema de: cómo determinar la cantidad máxima de pérdidas financieras esperadas que podría llegar a sufrir una cartera a lo largo de un de un periodo temporal  $h$ , con una probabilidad significativa  $p$  y para un nivel de confianza  $1 - p$ , como consecuencia de un movimiento adverso en los precios.

Dicho lo anterior analíticamente el VaR se define por el límite superior de la integral de la función de retornos esperados:

$$\int_{-\infty}^{E[r]-VaR} r(s)ds = p.$$

Es decir la cantidad que satisface:

<sup>12</sup> Definición obtenida del Marco de Basilea II

$$p = P[R_{t,t+h} \leq VaR] = F_h(VaR).$$

Donde:

- $p$  es la probabilidad,
- $h$  el horizonte,
- $R_{t,t+h}$  es la rentabilidad de la cartera o activo entre  $t$  y  $t + h$  y
- $F_h(x)$  es la función de distribución de las rentabilidades.

Ya que el VaR es un valor que representa pérdidas y  $p$  es un valor pequeño, el VaR será negativo, por lo tanto este se cambiara de signo, para que concuerde con su definición.

En el caso de que la distribución de las variaciones de la cartera fueran conocidas el VaR de dicha cartera sería el  $p$ -cuantil de  $F_h(x)$ , el cual se define de la siguiente forma:

$$x_p = \inf\{x | F_h(x) \geq p\}.$$

Donde inf es la menor de las cantidades que satisface la desigualdad. Sin embargo como la función normalmente no es conocida, para el cálculo de VaR se tendrá que estimar dicha función de distribución o su  $p$ -cuantil.

El Valor en Riesgo Condicional (CVaR), se deriva de tomar el promedio de las observaciones de las cuales la pérdida excede el VaR. Por tanto el CVaR supera la estimación del VaR, ya que puede cuantificar situaciones más arriesgadas, complementando así la información que brinda el VaR. A demás es una medida coherente de riesgo<sup>13</sup>, con lo que es considerada una mejor forma de representar el riesgo

Dicho lo anterior, el CVaR se define como el tamaño esperado de una pérdida que excede al VaR.

$$CVaR = E(R_{t,t+h} | R_{t,t+h} > VaR).$$

Siendo  $R_{t,t+h}$ , negativas, (cambiadas de signo) ya que se está hablando de perdidas.

En otras palabras, es el cociente entre un promedio ponderado de los valores que exceden al VaR, dividido por la probabilidad a la derecha del mismo:

$$CVaR = E(R_{t,t+h} | R_{t,t+h} > VaR) = \frac{\int_{VaR}^{-\infty} R_{t+h} f(R_{t+h}) dR_{t+h}}{P(R_{t+h} > VaR_{t+h})}.$$

De acuerdo al pilar II del marco regulatorio de Basilea II, los bancos están sometidos a los requerimientos de capital de acuerdo a los riesgos de mercado a los que están expuestos. Para la medición de sus riesgos de mercado, los bancos pueden elegir entre dos metodologías, la estándar y la metodología alternativa. La primera, estima los riesgos utilizando marcos descritos. Mientras que la segunda alternativa, está sujeta al cumplimiento de ciertas condiciones, permitiendo a los banco estimar sus riesgos utilizando modelos internos.

<sup>13</sup> Se dice que una medida es coherente de riesgo cuando cumple con las siguientes características:

1) Monotonía no creciente, 2) Subaditividad, 3) Homogeneidad positiva e 4) Invarianza bajo Traslaciones. Para más detalle ver Novales Alfonso, Valor en Riesgo.

Las instituciones financieras tienen la oportunidad de diseñar características precisas de sus modelos; sin embargo, deben de seguir los siguientes estándares mínimos<sup>14</sup> para calcular su requerimiento de capital:

- El VaR deberá calcularse con periodicidad diaria.
- Al calcular el VaR, se utilizará un intervalo de confianza asimétrico del percentil 99.
- Al calcular el VaR, se aplicara un shock instantáneo equivalente a una oscilación de precios de 10 días, es decir, el periodo de mantenimiento mínimo será de 10 días hábiles.
- El periodo de la muestra para el cálculo del VaR será como mínimo de 1 año.
- Los bancos deberán de actualizar sus datos al menos una vez cada tres meses y cada vez que los precios de mercado hayan sufrido cambios considerables.
- No se prescribe ningún tipo de modelo especial. Siempre que cada uno de los modelos utilizados capte todos los riesgos materiales a los que el banco está expuesto, los bancos podrán utilizar por ejemplo modelos basados en matrices de varianzas-covarianza, simulación histórica o simulación de Monte Carlo.
- Los bancos podrán reconocer correlaciones empíricas dentro de las categorías amplias (por ejemplo, riesgos de tipos de interés, tipos de cambio, precio de acciones y de los productos básicos, incluyendo la volatilidad de las opciones relacionadas en cada tipo de factor de riesgo)
- Los modelos de los bancos deben de recoger con precisión los riesgos específicos asociados a las opciones dentro de cada categoría de riesgo amplia.
- Cada banco deberá de cubrir diariamente sus requerimientos de capital, expresado como el valor más alto entre (i) el valor en riesgo del día anterior, calculado según los parámetros especificados y (ii) el promedio del cálculo diario de valor en riesgo durante los 60 días hábiles anteriores, al que se le aplicara un factor multiplicador.
- El factor multiplicador lo determinara cada autoridad supervisora en base a su evaluación de la calidad del sistema de gestión de riesgo del banco, sujeto al mínimo absoluto de 3.
- Los bancos que utilicen modelos internos también están sujetos a un requerimiento de capital para cubrir el riesgo específico de instrumentos relacionados con tipos de interés y acciones.

De acuerdo a lo anterior, el VaR calculado por los bancos, determinara la pérdida esperada máxima, con una probabilidad de 1% y para un nivel de confianza del 99%, que podría llegar a sufrir una cartera a lo largo de un periodo de 10 días.

### Metodología para el cálculo del VaR y CVaR.

A lo largo de esta subsección se hará una descripción de 5 metodologías para el cálculo del VaR, y del CVaR las cuales tienen enfoques e hipótesis diferentes: (1) Paramétrico, (2)

---

<sup>14</sup> Estándares mínimos expuestos por la Supervisión Bancaria de Basilea, en "Convergencia internacional de medidas y normas de capital", 718(LXXV).

Histórico, (3) Simulación Monte Carlo, (4) Simulación histórica filtrada y (5) Teoría de Valores Extremos

### Método paramétrico

El método paramétrico para el cálculo del VaR, supone una distribución de probabilidad de las rentabilidades de los factores de riesgo de la cartera, la cual puede ser Normal multivariante, t-Student, o mixtura de Normales, y que las rentabilidades son independientes e idénticamente distribuidas. Este modelo únicamente se puede aplicar a carteras que sean una función lineal de sus factores de riesgo.

Esta metodología está basada en el cálculo de la volatilidad de las innovaciones de los factores de riesgo. La estimación del VaR y del CVaR son calculados de la siguiente forma; suponiendo que las innovaciones de los factores de riesgo de la cartera sigan una distribución Normal con media  $\mu$  y matriz de varianza y covarianza  $\sigma_T^2$  :

$$VaR_{h,p} = \Phi^{-1}(p) \sqrt{\sigma_{T,h}^2} - \mu_h,$$

$$CVaR_{h,p} = \frac{\Phi(\Phi^{-1}(p))}{.01} \sqrt{\sigma_{T,h}^2} - \mu_h.$$

Donde:

- $\sigma_{T,h}^2$  es la matriz de varianza y covarianza, la cual puede ser estimada de acuerdo a diferentes supuestos, es decir, varianza constante o varianza condicional, modelada mediante un EWMA, GARCH (1,1), etc.
- $\mu_h$  es la media de las innovaciones de los factores de riesgo de la cartera,
- $h$ , el horizonte temporal,
- $\Phi^{-1}(p)$ , la inversa de la distribución normal estándar, con una probabilidad  $p$ .

En los supuestos donde la volatilidad es condicional, se toma el último valor de la serie temporal de la varianza para el cálculo del VaR y CVaR. En el caso del VaR y CVaR a  $h$  días la extrapolación de la volatilidad no es adecuada, ya que las innovaciones presentan autocorrelación por sus segundos momentos. Por tanto, la volatilidad condicional a un horizonte de  $h$  días se estima utilizando rentabilidades sobre dicho horizonte.

### Histórico

El método histórico, al contrario del paramétrico, no hace ningún supuesto acerca de la distribución de probabilidad de las rentabilidades, únicamente supone que las rentabilidades futuras de la cartera ya se han observado en el pasado. Por lo que la estimación del VaR está dada por el  $p$ - cuantil empírico de la distribución de las rentabilidades.

La estimación del VaR y del CVaR mediante el método histórico se puede realizar de dos formas:

En la primera, se obtiene el  $p$ - cuantil de la distribución empírica de las rentabilidades de la cartera, el cual se cambia de signo para obtener el VaR a 1 día.



$$VaR_p = -x_{1p}.$$

Donde  $x_{1p}$  representa el  $p$ - cuantil, de la distribución de las rentabilidades diarias.

Al no hacerse ningún supuesto acerca de la distribución de probabilidad no se puede realizar la extrapolación de la volatilidad para el cálculo del VaR a  $h$  días; sin embargo se supone que las rentabilidades siguen una distribución estable<sup>15</sup>, por lo que van a ser invariantes a un factor de escala, por tanto se obtiene el  $p$ -cuantil a  $h$  días de la siguiente forma:

$$x_{hp} = h^{1/\xi} x_{1p}.$$

Donde  $h$  corresponde al horizonte temporal,  $p$  la probabilidad y  $\xi$  el factor de escala que tiene la siguiente forma:

$$\xi = \frac{\ln(h)}{\ln(x_{hp}) - \ln(x_{1p})}.$$

Donde,  $x_{hp}$  es el  $p$ -cuantil a  $h$  días, el cual se obtiene agregando las rentabilidades cada  $h$  días (sin que estas estén solapadas).

El CVaR a 1 día se calcula promediando rentabilidades (con signo negativo) que superan el VaR, y al multiplicar el CVaR 1 día por el factor de escala estimado previamente se obtuvo el CVaR a  $h$  días.

El segundo procedimiento para estimar el VaR y el CVaR con el método histórico hace un ajuste en la volatilidad, ya que, nos podemos encontrar con que la evolución a lo largo de la muestra no se representativa de la situación actual.

El ajuste de volatilidad de la serie histórica de las rentabilidades se realiza de la siguiente forma:

$$r_{t,T} = \frac{\widehat{\sigma}_T}{\widehat{\sigma}_t} r_t.$$

Donde  $\sigma_t$  es la estimación temporal de la volatilidad en el día  $t$  de la muestra y  $\sigma_T$  es la estimación para el último día de la muestra, para la cual se debe hacer un supuesto sobre la modelización de esta. Por ejemplo si la volatilidad se modela mediante un GARCH (1,1) y suponiendo que las rentabilidades siguen una distribución Normal  $(0, \sigma_t)$ , tenemos:

$$r_t = \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \delta_2 \varepsilon_{t-1}^2.$$

Una vez que se realiza el ajuste de volatilidad, se calcula el  $p$ -cuantil para el VaR a 1 día y se estima el factor de escala para el VaR a  $h$  días. El CVaR a 1 día se calcula promediando las rentabilidades ajustadas (con signo negativo) que excedan al VaR, y al multiplicar el CVaR 1 día por el factor de escala se obtiene el CVaR a  $h$  días.

---

<sup>15</sup> Sea  $X_1$  y  $X_2$  copias independientes de una variable aleatoria  $X$ . Se dice que  $Z$  es estable si para cualquier para de constantes  $a > 0$  y  $b > 0$  la variables aleatoria  $aX_1 + bX_2$  tiene la mismas distribución que  $cX + d$ , para determinada constante  $c > 0$  y  $d$ . Lo anterior es estrictamente estable si lo anterior sucede con  $d=0$ . Novales, Alfonso "Valor en Riesgo".

## Simulación por Monte Carlo

El método por simulación Monte Carlo hace supuestos similares a los del modelo paramétrico, sin embargo, éste se puede aplicar a carteras que no sean una relación lineal de los factores. A partir de los supuestos sobre la distribución de las rentabilidades y el comportamiento de las volatilidades se simulan, mediante números aleatorios, series en relación a las rentabilidades sus volatilidades.

Una vez que se estime la varianza de las innovaciones (de acuerdo al supuesto que se haga sobre esta) se generan de manera aleatoria M realización de la predicción de la varianza condicional y de las rentabilidades a un horizonte de  $h$  días, para ello se genera una matriz de  $h \times M$  variables aleatorias que siguen una distribución Normal (0,1).

A continuación se presentan los algoritmos seguidos para la predicción de la varianza y de las rentabilidades tomando como ejemplo diferentes supuestos presentados en la sección 4 tabla 4.1.

Supuesto 1:

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \text{ AR (1),}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2),$$

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+1} \hat{\sigma},$$

$$\dots$$

$$\hat{r}_{T+10} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+10} \hat{\sigma}.$$

Supuesto 2:

$$r_t = \mu + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_2 \sigma_{t-1}^2 \text{ GARCH (1, 1),}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_{T+1}^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_T^2 + \delta_2 \sigma_T^2,$$

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+1} \hat{\sigma}_{T+1},$$

$$\dots$$

$$\sigma_{T+10}^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{T+9}^2 + \delta_2 \sigma_{T+9}^2,$$

$$\hat{r}_{T+10} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_T \hat{\sigma}_{T+10}.$$

Supuesto 3:

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \delta_0 + \delta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + \delta_2 \left[ \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] + \delta_3 \left( \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right) \text{EGARCH}(1, 1),$$

$$E(\sigma_t^2) \geq \exp(E(\ln(\sigma_t^2))),$$

$$\ln(\sigma_{T+1}^2) = \delta_0 + \delta_1 \ln(\sigma_T^2) + \delta_2 \left[ \frac{|\varepsilon_T|}{\sigma_T} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] + \delta_3 \left( \frac{\varepsilon_T}{\sigma_T} \right),$$

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+1} \hat{\sigma}_{T+1},$$

...

$$\ln(\sigma_{T+10}^2) = \delta_0 + \delta_1 \ln(\sigma_{T+9}^2) + \delta_2 \left[ \frac{|\varepsilon_{T+9}|}{\sigma_{T+9}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] + \delta_3 \left( \frac{\varepsilon_{T+9}}{\sigma_{T+9}} \right),$$

$$\hat{r}_{T+10} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+10} \hat{\sigma}_{T+10}.$$

Supuesto 4:

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \delta_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_3 I[\varepsilon_{t-1} < 0] \varepsilon_{t-1}^2 \text{GJR}(1,1),$$

$$\sigma_{T+1}^2 = \delta_0 + \delta_1 \sigma_T^2 + \delta_2 \varepsilon_T^2 + \delta_3 I[\varepsilon_T < 0] \varepsilon_T^2,$$

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+1} \hat{\sigma}_{T+1},$$

...

$$\sigma_{T+10}^2 = \delta_0 + \delta_1 \sigma_{T+9}^2 + \delta_2 \varepsilon_{T+9}^2 + \delta_3 I[\varepsilon_{T+9} < 0] \varepsilon_{T+9}^2,$$

$$\hat{r}_{T+10} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+10} \hat{\sigma}_{T+10}.$$

Donde  $\hat{z}_{T+1}, \hat{z}_{T+2}, \dots$  son variables aleatorias que se distribuyen Normal (0,1).

Finalmente se calcula el  $p$ -cuantil de la distribución de rentabilidades simuladas a 1 día para el cálculo del VaR y el promedio de las rentabilidades (negativas) que están por encima del VaR para el cálculo del CVaR. Para calcular el VaR y el CVaR a  $h$  días se agregan las rentabilidades simuladas sobre dicho periodo, obteniendo  $M$  escenarios de ocurrencia de rentabilidades a  $h$  días y se realiza el mismo procedimiento que el VaR y CVaR a un día.

### Simulación Histórica Filtrada

El método por simulación histórica filtrada es una combinación entre el método histórico y por simulación Monte Carlo, en el que utilizan extracciones aleatorias de las rentabilidades pasadas para simular las rentabilidades futuras.

El VaR y CVaR estimado por el método de simulación histórica filtrada, responde a los requerimientos de colas pesadas y a la actualización de la varianza. Para su estimación al igual que el método de Monte Carlo se deben de hacer supuestos sobre el comportamiento de las

rentabilidades así como sobre la dinámica temporal de la volatilidad, y de acuerdo a estos se realizar el siguiente algoritmo:

Supuesto 1:

$$r_t = \mu + \beta r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_2 \sigma_{t-1}^2 \text{ GARCH (1, 1),}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$z_t = \frac{\widehat{\varepsilon}_t}{\widehat{\sigma}_t} = \frac{r_t - \hat{\mu} - \hat{\beta} r_{t-1}}{\widehat{\sigma}_t},$$

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+1} \hat{\sigma}_{T+1},$$

...

$$\hat{r}_{T+10} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+10} \hat{\sigma}_{T+10}.$$

Supuesto 2:

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \delta_0 + \delta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + \delta_2 \left[ \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] + \delta_3 \left( \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right) \text{ EGARCH (1, 1),}$$

$$E(\sigma_t^2) \geq \exp(E(\ln(\sigma_t^2))),$$

$$z_t = \frac{\widehat{\varepsilon}_t}{\widehat{\sigma}_t} = \frac{r_t - \hat{\mu} - \hat{\beta} r_{t-1}}{\widehat{\sigma}_t},$$

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+1} \hat{\sigma}_{T+1},$$

...

$$\hat{r}_{T+10} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+10} \hat{\sigma}_{T+10}.$$

Supuesto 3:

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2),$$

$$\sigma_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 + \delta_2 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_3 I[\varepsilon_{t-1} < 0] \varepsilon_{t-1}^2, \text{ GJR (1,1),}$$

$$z_t = \frac{\widehat{\varepsilon}_t}{\widehat{\sigma}_t} = \frac{r_t - \hat{\mu} - \hat{\beta} r_{t-1}}{\widehat{\sigma}_t},$$

$$\hat{r}_{T+1} = \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \hat{z}_{T+1} \hat{\sigma}_{T+1},$$

...

$$\hat{r}_{T+10} = \hat{\mu} + \hat{\beta}r_T + \hat{z}_T\hat{\sigma}_{T+10}.$$

Donde  $\hat{z}_{T+1}, \hat{z}_{T+2}...$  son extracciones aleatorias de la muestra de innovaciones estandarizadas (de cada supuesto).

Se generan M realizaciones de los tres procesos y se calcula el  $p$ -cuantil de la distribución de rentabilidades simuladas a 1 día para el cálculo del VaR, y el promedio de las rentabilidades que superan el VaR para el cálculo del CVaR. Para calcular el VaR y el CVaR a  $h$  días se agregan las rentabilidades simuladas sobre dicho periodo y se realiza el mismo procedimiento que el VaR y CVaR a un día, pero esta vez con las distribuciones de rentabilidades a  $h$  días.

### Teoría de Valores Extremos

Teoría de Valores Extremos es una metodología estadística que sirve para valorar, modelar, y administrar eventos extremos. La cual al tener presencia de asimetría y curtosis; es decir, colas pesadas; resulta ser adecuada.

Para empezar se hace el supuesto de que las observaciones sobre el umbral; es decir, la cola de las innovaciones estandarizadas del activo; siguen una distribución General de Pareto (GPD). Este método consiste en los siguientes pasos: elegir un umbral "u", ajustar la distribución General de Pareto a los puntos que exceden el umbral, para luego calcular el VaR de acuerdo a los parámetros de la GPD. El umbral que es seleccionado debe captar los eventos extremos, pero este no puede ser muy alto ya que entre más alto, menor serán el número de datos que sobrepasen este.

Por lo tanto la distribución de los valores que sobre pasan el umbral tiene la siguiente forma:

$$F_u(x) = p(z - u < x | z < u) \approx 1 - \left(1 + \frac{\varepsilon r_i}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \varepsilon \neq 0,$$

$$F_u(x) \approx 1 - \exp\left(-\frac{r_i}{\beta}\right), \varepsilon = 0.$$

Donde  $\varepsilon$ , es el tail index,  $\beta$  es el parámetro de escala,  $r_i$  es el exceso de las rentabilidades estandarizadas (con signo contrario) que sobrepasan el umbral u, respecto a dicho umbral.

La función de densidad es:

$$f_u(x) \approx \beta^{-1} \left(1 + \frac{\varepsilon r_i}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}, \varepsilon \neq 0,$$

$$f_u(x) \approx \beta^{-1} \exp\left(-\frac{r_i}{\beta}\right), \varepsilon = 0.$$

Para estimar los parámetros de la distribución general de Pareto, se utiliza el método por máxima verosimilitud; es decir son aquellos parámetros que maximicen la siguiente función:

$$L(\varepsilon, \beta) = \begin{cases} -T \ln \sigma - \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1\right) \sum_{i=1}^{T_u} \log\left(1 + \frac{\varepsilon}{\beta}(r_i - u)\right) & , \varepsilon \neq 0, \\ -T \ln \sigma - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{T_u} (r_i - u) & , \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Una vez que se tienen los parámetros estimados se calcula el VaR y el CVaR con la siguiente formula:

$$VaR_p = \left( u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\epsilon}} \left( \frac{T}{T_u} p \right)^{-\hat{\epsilon}} - 1 \right) \sqrt{h\sigma_T^2},$$

$$CVaR_p = \frac{VaR_p + \hat{\beta} - \hat{\epsilon}u}{1 - \hat{\epsilon}}.$$

La estandarización de las innovaciones se hace de acuerdo al supuesto que se haga sobre la dinámica temporal de la volatilidad.

Claro E. Felipe, Contador A. Sebastián, et al, en su trabajo de Teoría de valores extremos, comparan el VaR estimado de forma paramétrica con el VaR estimado mediante la teoría de valores extremos, de los cuales se obtienen los intervalos de confianza. Las dos estimaciones son comparadas llegando a la conclusión que el VaR estimado suponiendo normalidad cuando no la hay subestima el riesgo; sin embargo, para llegar a una conclusión más específica es necesario hacer un análisis sobre la distribución de las rentabilidades para saber si hay colas gruesas y que dicha implicación sea correcta.

Los supuestos presentados en las metodologías son ejemplos, las innovaciones pueden seguir otra distribución como t-Student, mixtura de normales, t-Student sesgada, error generalizado sesgada, entre otras. Al igual que la dinámica temporal de volatilidad puede ser modelada de otra manera.

### Validación del VaR y CVaR

La validación del VaR y del CVaR se puede hacer mediante un backtesting, el cual es un conjunto de procedimientos estadísticos para comprobar que las pérdidas reales están en línea con la previsiones del VaR; es decir, se basa en el resultado obtenido de una cartera determinada, comparándola con el pronóstico del VaR, obteniendo el número de excepciones (número de veces que las pérdidas y ganancias exceden en riesgo estimado)

Ya que el backtesting permite analizar si se está midiendo el VaR correctamente, el comité de Basilea recomienda el uso de este como herramienta de regulación, en el que, se considera un VaR al 1% a horizonte de 1 día, utilizando 250 observaciones en su estimación, y de acuerdo al desempeño de esta, se le agrega el plus entre 0 y 1 al factor de 3. A continuación se presentan el factor multiplicador de acuerdo de al número de excepciones.

No. De excepciones	Factor multiplicativo
0-4	3
5	3.4
6	3.5
7	3.65
8	3.75

9	3.85
10 o más	4

Por otro lado, se puede realizar contrastes, los cuales están basados en el número de excepciones, otros en la ocurrencia temporal de la excepción y otros en la combinación de ambos. Si el VaR es adecuado, entonces la función indicatriz<sup>16</sup> seguirá una distribución Bernoulli con probabilidad  $1 - p$ . En este sentido, si denotamos  $X_{n,1-p}$  como el número total de excepciones, esta variable sigue una distribución Binomial  $B(n, 1 - p)$ . Entonces el número de excepciones que se esperarían sería  $n(1 - p)$  y su varianza sería  $n(1 - p)(p)$ , por lo tanto, si  $n$  es suficientemente grande,  $X_{n,1-p}$  se va a aproximar a un Normal, con los que se podrían obtener los intervalos de confianza para el número de excepciones.

Existen contrastes los cuales se basan en el número de excepciones; el primero de ellos es el de cobertura incondicional propuesto por Kupiec (1995), donde la hipótesis nula de dicho contraste es que la función indicatriz sigue una distribución de Bernoulli, con una probabilidad constante de observar igual al nivel de significación del VaR. El segundo contraste es el de independencia temporal; en donde se observa que las excepciones no están distribuidas de manera aleatoria, sino que ocurren con mayor frecuencia en determinados intervalos de tiempo. El tercer contraste es el de cobertura condicional; con el cual se contrasta la cobertura incondicional combinada con la independencia de las excepciones. Y por último, el contraste basado en regresión; el cual trata de explicar la ocurrencia de las excepciones por algún factor conocido en el momento de estimar el VaR para el periodo  $t$ , como la volatilidad del mercado, tipos de interés, etc.

## 9.2. Cópulas.

A lo largo de la sección nos referiremos al uso de cópulas bivariantes, sin embargo los conceptos que se presentan se pueden extender al uso de cópulas multivariantes. La teoría que a continuación se presenta se obtuvo de Novales, Alfonso. *Cópulas*, Departamento de Economía Cuantitativa Universidad Complutense, 2017.

Una cópula es una función de distribución bivalente definida sobre el cuadro  $[0,1] \times [0,1]$  con distribuciones marginales Uniformes  $U(0,1)$ .

### Gaussiana.

La función de distribución de la cópula Gaussiana tiene la siguiente forma:

$$C(u_1, u_2) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2)) = \int_0^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_0^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx_1 dx_2.$$

De la cual mediante diferencias obtenemos la densidad de cópula Gaussiana:

$$c(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{\rho^2 \varepsilon_1^2 - 2\rho \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \rho^2 \varepsilon_2^2}{2(1-\rho^2)}\right).$$

<sup>16</sup>  $I_{1-p,t+1} = 1$  si  $R_{t+1} < VaR_{1,1-p,t}$ ,  $I_{1-p,t+1} = 0$  en caso contrario

Donde  $\varepsilon_1 = \Phi^{-1}(u_1)$  y  $\varepsilon_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ , son cuantiles de variables Normales estandar.

### T-Student.

La función de distribución cópula de t-Student tiene la siguiente forma:

$$C(u_1, u_2) = t_\nu(t_\nu^{-1}(u_1), t_\nu^{-1}(u_2)).$$

De la cual mediante diferencias se obtiene su función de densidad

$$c(u_1, u_2, \rho) = K(\nu) * \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[ 1 + \frac{\xi_1^2 - 2\rho\xi_1\xi_2 + \xi_2^2}{\nu * (1-\rho^2)} \right]^{-\frac{\nu+2}{2}} \\ * [(1 + \nu^{-1}\xi_1^2) * (1 + \nu^{-1}\xi_2^2)]^{\frac{\nu+1}{2}},$$

$$K(\nu) = \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{-2} * \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right).$$

Donde  $\xi_i = t_\nu^{-1}(u_i)$  (con grados de libertad estimados de la marginal de las rentabilidades estandarizadas);  $\nu$  son los grados de libertad de la cópula y  $\rho$  el coeficiente de correlación, el cual mide la dependencia de las rentabilidades estandarizadas.

### Clayton

La cópula de Clayton mide la dependencia de las rentabilidades estandarizadas en la cola inferior, la cual tiene la siguiente función de distribución:

$$C(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}.$$

Cuya función de densidad es:

$$c(u_1, u_2, \alpha) = (\alpha + 1) * (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-2-\frac{1}{\alpha}} * u_1^{-\alpha-1} * u_2^{-\alpha-1}.$$

Donde  $u_1, u_2$  se obtienen a partir de las funciones marginales de cada rentabilidad,  $u_i = F(x_i)$ ,  $F(x_i)$  función de distribución t-Student, Normal, etc.

La estimación de los parámetros de las cópulas se obtiene mediante el método de máxima verosimilitud, donde la función de verosimilitud tiene la siguiente forma:

$$L(u_M, u_i, \theta) = \prod_{t=1}^T c(u_1, u_2, \theta).$$

Tomando logaritmos obtenemos:

$$\text{Log}L(u_M, u_i, \theta) = \sum_{t=1}^T c(u_1, u_2, \theta).$$



Del logaritmo de la función de verosimilitud se buscan  $\theta$  que la maximice.

## Estimación del VaR y CVaR mediante cópulas

A continuación se describe el procedimiento para la estimación del VaR y CVaR utilizando cópulas, con las cuales buscamos representar la dependencia de las rentabilidades. Una vez que se han estimado los parámetros de las cópulas así como la distribución marginal de las rentabilidades (media y desviación típica) se realizan los siguientes algoritmos de acuerdo a la cópula para la estimación del Var y CVaR:

### Cópula Gaussiana

$$\begin{aligned}
 & (u_{1,t}, u_{2,t}), \\
 & (x_{1,t}, x_{2,t}) = \left( \Phi^{-1}(u_{1,t}), \Phi^{-1}(u_{2,t}) \right), \\
 & (x_{1,t}^*, x_{2,t}^*) = (x_{1,t}, x_{2,t}) * \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} (\text{Cholesky}), \\
 & (u_{1,t}^*, u_{2,t}^*) = \left( \Phi(x_{1,t}^*), \Phi(x_{2,t}^*) \right), \\
 & (x_{1,t}^{**}, x_{2,t}^{**}) = \left( \Phi^{-1}(u_{1,t}^*), \Phi^{-1}(u_{2,t}^*) \right), \\
 & (x_{1,t}^{**}, x_{2,t}^{**}) = (x_{1,t}^* * \sigma_1, x_{2,t}^* * \sigma_2), \\
 & x_{c,t} = x_{1,t}^{**} * w_1 + x_{2,t}^{**} * w_2.
 \end{aligned}$$

Donde:

- $u_{i,t}$   $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$ ,  $T$  son simulaciones de uniformes independientes.
- $\Phi^{-1}$  es la inversa de las funciones marginales  $N(0,1)$ , independiente.
- $x_{i,t}^*$   $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$  son variables  $N(0,1)$  dependientes de acuerdo a  $\rho$  (correlación previamente estimada de la cópula)
  - $x_{i,t}^{**}$   $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$  son variables  $N(0, \sigma_i)$  dependientes (desviación típica previamente estimada de las distribuciones marginales de las rentabilidades de los activos de la cartera)
- $x_{c,t}$ ,  $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$ , son observaciones de la rentabilidad de la cartera.

### Cópula t-Student

$$\begin{aligned}
 & (u_{1,t}, u_{2,t}), \\
 & (x_{1,t}, x_{2,t}) = \left( T_v^{-1}(u_{1,t}), T_v^{-1}(u_{2,t}) \right), \\
 & (x_{1,t}^*, x_{2,t}^*) = (x_{1,t}, x_{2,t}) * \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} (\text{Cholesky}), \\
 & (u_{1,t}^*, u_{2,t}^*) = \left( T_v(x_{1,t}^*), T_v(x_{2,t}^*) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_{1,t}^{**}, x_{2,t}^{**}) &= (\Phi^{-1}(u_{1,t}^*), \Phi^{-1}(u_{2,t}^*)), \\ (x_{1,t}^{***}, x_{2,t}^{***}) &= (x_{1,t}^{**} * \sigma_1, x_{2,t}^{**} * \sigma_2), \\ x_{c,t} &= x_{1,t}^{**} * w_1 + x_{2,t}^{**} * w_2.\end{aligned}$$

Donde:

- $u_{i,t}$   $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$ ,  $T$  son simulaciones de uniformes independientes.
- $T_v^{-1}$  es la inversa de las funciones marginales  $T(v)$ , independientes. (grados de libertad  $v$  estimados previamente de la cópula)
- $x_{i,t}^*$   $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$ , son variables  $T(v)$ , dependientes de acuerdo a  $\rho$  (correlación previamente estimada de la cópula)
- $x_{i,t}^{***}$   $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$ , son variables  $N(0, \sigma_i)$  dependientes (desviación típica previamente estimada de las distribuciones marginales de las rentabilidades de los activos de la cartera)
- $x_{c,t}$ ,  $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$ . son observaciones de la rentabilidad de la cartera.

### Cópula t-Student

$$\begin{aligned}(u_{1,t}, u_{2,t}), \\ v_{1,m} = u_{1,m}, \\ v_{2,t} = C_{2|1}^{-1}(u_{2,t}|u_{1,t}) = \left[ 1 + u_{1,t}^{-\alpha} \left( u_{2,t}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} - 1 \right) \right]^{-1/\alpha}, \\ (x_{1,t}, x_{2,t}) = (\Phi^{-1}(v_{1,t}), \Phi^{-1}(v_{2,t})), \\ (x_{1,t}^*, x_{2,t}^*) = (x_{1,t} * \sigma_1, x_{2,t} * \sigma_2), \\ x_{c,t} = x_{1,t}^* * w_1 + x_{2,t}^* * w_2.\end{aligned}$$

Donde:

- $u_{i,t}$   $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$ ,  $T$  son simulaciones de uniformes independientes.
- $C_{2|1}^{-1}(u_{2,t}|u_{1,t})$ , es la densidad condicional de la cópula de Clayton ( $\alpha$  estimado previamente)
- $v_{i,t}$   $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$ , son realizaciones de una cópula Clayton con marginales uniformes.
- $x_{i,t}^{***}$   $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$ , son variables  $N(0, \sigma_i)$  dependientes (desviación típica previamente estimada de las distribuciones marginales de las rentabilidades de los activos de la cartera). Estas variables no tiene una distribución conjunta bivalente ya que la dependencia en la cola izquierda es mayor por la realización de la cópula.
- $x_{c,t}$ ,  $i=1,2$  y  $t=1,2\dots T$ , son observaciones de la rentabilidad de la cartera.

Finalmente calculamos el VaR y CVaR paramétrico sobre la distribución de las rentabilidades de la cartera  $x_{c,m}$ , simulada con cada cópula.

### 9.3. Metodología (riesgo de modelo).

#### Incorporación de la incertidumbre paramétrica

A continuación se presenta el algoritmo utilizado para la estimación del VaR y CVaR mediante el método Monte Carlo, a la cual se le incorpora la incertidumbre paramétrica. Para ello se utilizara el supuesto 3 (sección 4 tabla 4.1), donde se incorporara la incertidumbre paramétrica derivada de las estimaciones de los parámetros del modelo GARCH; los cuales al ser estimados por máxima verosimilitud tienen las siguientes propiedades.

$$\begin{aligned}
 r_t &= \beta_0 + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \\
 \varepsilon_t &\sim N(0, \sigma_{\varepsilon,t}^2), \\
 \sigma_{\varepsilon,t}^2 &= \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_2 \sigma_{\varepsilon,t-1}^2, \\
 \hat{\theta} &\sim N(\hat{\theta}, Var(\hat{\theta})), \\
 Var(\hat{\theta}) &= -\frac{\partial^2}{\partial \theta} l(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}}.
 \end{aligned}$$

Donde,  $Var(\hat{\theta})$  es una matriz de varianza y covarianza de los parámetros estimados.

Una vez que se tiene los parámetros así como los momentos de sus distribuciones, se realiza el siguiente algoritmo para obtener 5000 posibles escenarios de las rentabilidades en un horizonte de  $h$  días, los cuales tendrán incorporada la incertidumbre paramétrica:

$$\begin{aligned}
 \widehat{\delta}_{1,j} &= z_{T+1}^1 + \widehat{\delta}_1 \\
 \widehat{\delta}_{2,j} &= z_{T+1}^2 + \widehat{\delta}_2, \\
 \widehat{\delta}_{0,T+1} &= \sigma_{\varepsilon}^2 (1 - \widehat{\delta}_{1,j} - \widehat{\delta}_{2,j}), \\
 \widehat{\sigma}_{\varepsilon,T+1,j}^2 &= \widehat{\delta}_{0,j} + \widehat{\delta}_{1,j} \varepsilon_T^2 + \widehat{\delta}_{2,j} \sigma_{\varepsilon,T}^2, \\
 \widehat{\varepsilon}_{T+1,j} &= z_{T+1,j}^3 \widehat{\sigma}_{\varepsilon,T+1,j}, \\
 \widehat{r}_{T+1,j} &= \hat{\mu} + \hat{\beta} r_T + \widehat{\varepsilon}_{T+1,j}, \\
 &\dots \\
 \widehat{\delta}_{1,j} &= z_j^1 + \widehat{\delta}_1, \\
 \widehat{\delta}_{2,j} &= z_j^2 + \widehat{\delta}_2, \\
 \widehat{\delta}_{0,j} &= \sigma_{\varepsilon}^2 (1 - \widehat{\delta}_{1,j} - \widehat{\delta}_{2,j}), \\
 \widehat{\sigma}_{\varepsilon,t+10,j}^2 &= \widehat{\delta}_{0,j} + \widehat{\delta}_{1,j} \varepsilon_{T+9,j}^2 + \widehat{\delta}_{2,j} \sigma_{\varepsilon,T+9,j}^2, \\
 \widehat{\varepsilon}_{T+10,j} &= z_{T+10,j}^3 \widehat{\sigma}_{\varepsilon,T+10,j}, \\
 \widehat{r}_{T+10,j} &= \hat{\mu} + \hat{\beta} \widehat{r}_{T+9,j} + \widehat{\varepsilon}_{T+10}.
 \end{aligned}$$

Donde:

- $(z_j^i, z_j^i \dots z_j^i)$  con  $i=1,2$  y  $j=1,2,\dots,5000$  son variables aleatorias que siguen una distribución normal con media 0, a las que por medio de la matriz triangular de Cholesky se les ha impuesto la varianza y covarianza de los parámetros estimados del modelo GARCH.
- $\delta_{i,j}$ ,  $i=0,1, 2$  y  $j=1,2,\dots,5000$ . Es una simulación de los parámetros del modelo GARCH
- $(z_{T+1,j}^3, z_{T+2,j}^3 \dots z_{T+10,j}^3)$ , con  $j=1,2,\dots,5000$  son variables aleatorias que siguen una distribución Normal  $(0,1)$ .
- $\sigma_\varepsilon^2$  es la varianza a largo plazo de las innovaciones ,
- $\varepsilon_{T+i,j}$ , con  $i=1,2,\dots,10$  y  $j=1,2,\dots,5000$  es una simulación de las innovaciones.
- $\sigma_{\varepsilon,T+i,j}^2$  con  $i=1,2,\dots,10$ , y  $j=1,2,\dots,5000$  es la predicción de la varianza de las innovaciones.
- $r_{T+i,j}$ , con  $i=1,2,\dots,10$  y  $j=1,2,\dots,5000$  es la predicción de las rentabilidades.

Una vez que se tienen las 5000 simulación de las rentabilidades, se calcula el  $p$ -cuantil de la distribución de rentabilidades simuladas a 1 día para el cálculo del VaR y el promedio de las rentabilidades (negativas) que están por encima del VaR para el cálculo del CVaR.

#### 9.4. CreditMetrics.

CreditMetrics es un modelo propuesto por JP Morgan (1997), el cual es utilizado para medir el riesgo de crédito de una cartera, como un Valor en Riesgo por cambios en el valor de la deuda debido a variaciones en la calificación crediticia de la contraparte. Por lo tanto CreditMetrics, no toma en cuenta únicamente la posibilidad de incumplimiento, sino también la posibilidad de cambios en la calidad crediticia del emisor. El modelo se basa en matrices de transición y elementos que son obtenidos en el mercado para obtener la distribución del valor de un activo con riesgo de crédito o bien de una cartera. Los elementos del modelo son los siguientes:

##### Matriz de transición

La matriz de transición refleja las probabilidades de que un instrumento de deuda cambie de una calificación  $i$  a una calificación  $j$  en un horizonte de tiempo  $t$  (generalmente 1 año). El modelo asume que las probabilidades de migrar de una calificación a otra siguen una cadena de Markov estacionaria, por lo que se puede obtener las probabilidades de un periodo diferente ha  $t$ , se tendría que descomponer la matriz de probabilidades de la siguiente manera:

$$P^n = X \Lambda^n X^{-1}$$

Donde:

- $n$ , proporción de tiempo en relación al horizonte de la matriz original (por ejemplo, si el horizonte de la matriz  $P$  es de 1 año y se desea obtener una matriz trimestral entonces  $n = \frac{1}{4}$ )
- $X$ , vectores propios de la matriz de transición  $P$ .

- $\Lambda$  valores propios de la matriz  $P$ .

Para periodos menores a un año se debe de verificar que la matriz se definida no negativa.

### Tasa de descuento

Las tasas de descuento son la curva de tasas correspondiente a cada nivel de calificación, por lo que en el caso de contar con 8 niveles de calificación, es necesario contar con 8 curvas de tasas. Estas son necesarias para valorar los bonos, trayéndolos a valor presente, descontándolo con una tasa calculada a partir de instrumentos con características similares. Las tasas deben de reflejar el riesgo de crédito, por lo que todos los instrumentos que tengan la misma calificación deben de ser valorados con la misma curva.

### Tasa de recuperación

La tasa de recuperación en el caso de que el instrumento de deuda cambie al estado de incumplimiento, las cuales dependen del grado de prelación de la deuda. A mayor garantía, mayor tasa de recuperación.

## Metodología

Para llevar a cabo el método de CreditMetrics es necesario conocer la calificación actual, la fecha de vencimiento, el nivel de prelación, el valor nominal, el valor de los cupones, y la periodicidad de cada instrumento de deuda que compone la cartera, así como los elementos descritos anteriormente, para así, estimar la distribución de probabilidades de posibles valores que pudiera tomar la cartera en un año, dependiendo de si los activos de duda migraron de calificación o no.

Para el caso de que la cartera esté formada por un único instrumento de deuda, se debe obtener la distribución de probabilidad de los posibles valores de mercado del bono (el cual tiene actualmente una calificación conocida  $i$ ) que puede tomar al finalizar un año, dependiendo si éste migro o no de calificación.

La distribución de probabilidad del bono con calificación  $i$ , es considerada como el perfil de riesgo a un año del bono, dicho con otras palabras, es la masa de probabilidad para los  $J$  posibles valores del bono.

Para empezar se deben obtener los posibles valores liquidativos al cabo de un año, del bono que actualmente tiene calificación  $i$  y el cual tendrá una calificación  $j$  en un año, se aplica la siguiente formula.

$$B_{i,j} = c_i F + \sum_{t=1}^{T-2} \frac{C_i F}{(1 + \delta_t^j)^t} + \frac{(1 + c_i) F}{(1 + \delta_{T-1}^j)^{T-1}}$$

Donde:

- $c_i$  es el porcentaje del cupón del bono con calificación actual  $i$
- $\delta_t^j$  tasa de descuento, de un bono que tiene calificación  $j = A, AA, AAA, etc$
- $T$  tiempo de vencimiento del bono

- $F$  valor nominal del bono

A partir del cálculo de la distribución de probabilidad del valor del bono (donde cada valor está asociado a una probabilidad de acuerdo a la matriz de transición) y considerando que la cartera solo está compuesta de este, se obtiene el VaR y el CVaR mediante el  $p$  –cuantil o el método paramétrico.

En el caso de que la cartera esté conformada por dos bonos, se realiza el mismo procedimiento para obtener los posibles valores de los dos bonos referentes a cada calificación que pudiera presentar al cabo de un año. En este caso para obtener el valor de la cartera se generan todas las combinaciones de rating que pudieran tener los dos bonos, generando así  $J^2$  posibles valores de la cartera (siendo  $J$  el número calificaciones posibles), los cuales están asociados a una probabilidad conjunta, pudiendo estar correlacionadas o no las probabilidades migraciones de rating de ambos bonos. De este modo obtenemos la distribución de probabilidad de los valores liquidativos de la cartera. La estimación del VaR y CVaR, se realiza de la misma manera.

Las probabilidades conjuntas de migración entre ratings en el caso de que los bonos estén incorrelacionados se calcula multiplicando los vectores de probabilidades de transición de cada uno de ellos. Cuando los bonos tienen una correlación  $\rho$ , las probabilidades conjuntas se calculan de la siguiente forma:

$$prob(B_{i,j}^1, B_{k,l}^2) = \int_{z_1^i}^{z_1^j} \int_{z_2^k}^{z_2^l} f(z_1, z_2) dz_1 dz_2,$$

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\left(\frac{z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2}{2(1-\rho^2)}\right)\right].$$

Donde:

- $z_1, z_2$  son los rendimientos estandarizados de los activos de las empresas que emiten los bonos, los cuales son estimados a partir de la matriz de transición.

Dicho lo anterior, se obtendrá la probabilidad conjunta de que el bono 1 pase de la calificación  $i$  a la  $j$  a la vez que el bono 2 pasa de la calificación  $k$  a la calificación  $l$ , obteniendo una matriz de  $J \times J$ .

Cuando la cartera está formada por más de dos bonos, el número de probabilidades conjuntas es  $J^n$  (siendo  $J$  el número posible de calificaciones y  $n$  el número de bonos en la cartera), generando en el caso de que la cartera tuviera un número muy elevado de bonos una explosión combinatoria y una gran complejidad para calcular esta, necesitando recurrir a la simulación por Monte Carlo. Esta consiste en simular  $M$  posibles valores al cabo de un año de cada uno de los bonos, los cuales son mapeados de acuerdo a la matriz de transición; para obtener así  $M$  posibles valores de la cartera para luego obtener el  $\alpha$  – cuantil para la estimación del Var y del CVaR (nominal o porcentual). Para ello se aplica el siguiente algoritmo:

- A partir de la matriz de probabilidades de transición se obtienen umbrales  $z$ . Para delimitar cada categoría de la matriz de transición en función de rendimientos estandarizados

Matriz de umbrales para la rentabilidad estandarizada

Calificación inicial (T=0)	Calificación despues de un año (T=1)						
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
AAA	$\Phi^{-1}(P_{AAA,AAA})$	$\Phi^{-1}(P_{AAA,AA})$	$\Phi^{-1}(P_{AAA,A})$	.	.	.	
AA	$\Phi^{-1}(P_{AA,AAA})$						
A	.	.					
BBB	.		.				
BB	.			.			
B							
CCC							$\Phi^{-1}(P_{CCC,CCC})$

Donde cada  $P_{i,j}$  son probabilidades acumuladas a lo largo de cada fila, obtenidas a partir de la matriz de transición.  $\Phi^{-1}$  es la inversa de la función de distribución Normal estándar.

II. Se estima la matriz de correlaciones de los rendimientos de los activos de las empresas que han emitido los bonos. Si la correlación entre el rendimiento del valor de los instrumentos financieros de cada empresa no es observable, se estima o usa la correlación entre los rendimientos del valor de las acciones de dichas empresas.

III. Se generan M escenarios de los posibles rendimientos estandarizados anuales del valor de mercado de cada uno de los bonos, utilizando una distribución normal multivariada en donde se toma en cuenta la correlación estimada en II, utilizando la matriz triangular de Cholesky. Para cada escenario simulado se comprueba en qué intervalo de la matriz de umbrales z, obtenida a partir de las probabilidades de transición, caen los valores numéricos de las rentabilidades simuladas (cada una en su respectiva fila de umbrales) y así definir cuál será la calificación al cabo de un año de los bonos para cada escenario simulado.

$$\begin{bmatrix} z_{1,1} & \cdots & z_{N,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{1,M} & \cdots & z_{N,M} \end{bmatrix}$$

Donde  $z_{n,m}$   $n=1,2\dots N$  y  $m=1,2\dots M$ , (siendo N el número de activos y M el números de posibles escenarios) son números aleatorios que siguen un distribución Normal estándar, a los cuales se les ha impuesto la correlación obtenida en el punto II.

IV. Cada escenario simulado de la rentabilidad estandarizada anual para cada bono ( $z_{n,m}$ ) obtenido en III se mapea en la matriz de umbrales z (obtenida en I), en la respectiva fila de acuerdo con el rating inicial del bono. De este modo obtenemos la calificación crediticia que obtendrá el bono al cabo de un año para cada escenario simulado. Por ejemplo, el activo 1 corresponde a un Bono con calificación actual AA. Si tomamos la primera rentabilidad (anual) simulada  $z_{1,1} = -2.87$ , al ubicar dicho rendimiento en la matriz Z (generada en el punto I), en su fila respectiva, ésta se encuentra en el intervalo  $[-2.95, -2.85)$  correspondiente a las calificaciones [BB, BBB), lo que significa que el bono pasará de la calificación AA a BB al cabo de un año, en el escenario 1.

V. De acuerdo a las tasas de rendimiento de la curva cupón cero forward y las tasas de recuperación, se obtiene el valor de la cartera a partir del valor de los  $n$  bonos, para cada escenario.

$$B_{ij}^{(n)} = c_i V + \sum_{t=1}^{T-2} \frac{C_i V}{(1 + \delta_t^j)^t} + \frac{(1 + c_i) V}{(1 + \delta_{T-1}^j)^{T-1}},$$

$$\begin{bmatrix} B_{ij}^{(1,1)} & \dots & B_{ij}^{(N,1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{ij}^{(1,M)} & \dots & B_{ij}^{(N,M)} \end{bmatrix},$$

$$\Pi^m = B_{ij}^{(1,1)} + \dots + B_{ij}^{(N,1)}.$$

- $B_{ij}^{(n,m)}$   $n=1,2,\dots,N$  y  $m=1,2,\dots,M$ , es el valor del bono siendo  $n$  el número de bono,  $i$  la calificación actual del bono  $n$  y  $j$  la calificación a la que migra el bono de acuerdo al mapping realizado en el punto IV en el escenario  $m$ .

- $c_i$  es el porcentaje del cupón del bono  $n$  con calificación actual  $i$ ,
- $\delta_t^j$  tasa de descuento, de un bono que tiene calificación  $j = A, AA, AAA, etc$
- $T$  tiempo de vencimiento del bono  $n$
- $V$  valor nominal del bono  $n$
- $\Pi^m$   $m=1,2,\dots,M$  Valor de la cartera en el escenario  $m$ .

VI. Ya que se ha obtenido el valor de la cartera de crédito para  $M$  posibles escenarios, se obtiene la función de distribución empírica de dicho valor y se estima el VaR y CVaR.

$$F_{\Pi} = \begin{bmatrix} \Pi^1 \\ \vdots \\ \Pi^M \end{bmatrix},$$

$$VaR_{\alpha,h} = \Pi_0 - \Pi_{1-\alpha},$$

$$\Pi_0 = B_{ii}^{(1,1)} + \dots + B_{ii}^{(N,1)},$$

$$\Pi_{1-\alpha} = \max\{x \mid F_{\Pi}(x) \leq 1 - \alpha\},$$

$$ES_{\alpha} = \Pi_0 - E[\Pi \mid \Pi \leq \Pi_{1-\alpha}].$$

Donde:

- $F_{\Pi}$  es la función de distribución de los valores de la cartera,
- $\Pi_0$  es el valor de referencia de la cartera, el valor de la cartera en el caso de que todos los bonos conserven su calificación actual.



## Estimación del Credit VaR y CVaR

### Credit VaR

De acuerdo a la definición dada en la sección 9.1 apéndice A, el VaR es el nivel de pérdidas en la cartera de crédito, que será excedido sólo el  $(1 - \alpha)\%$  de las veces en promedio en un horizonte temporal  $h$ . Por lo tanto se representa de acuerdo a la siguiente expresión:

$$VaR_{\alpha,h} = \inf\{x | F_{L_\pi}(x) \geq \alpha\}.$$

Donde  $F_{L_\pi}$  es la función de distribución de las rentabilidades o valores de la cartera.

Cuando se tiene la distribución del valor de la cartera de crédito, la distribución de las rentabilidades se obtiene de restar a cada valor de la cartera un valor de referencia  $\Pi_0$  y dividir dicha diferencia por el mismo valor de referencia. Por tanto, partiendo de la distribución del valor de la cartera, el VaR porcentual (o de rentabilidades) tiene la siguiente forma:

$$VaR_{\alpha,h} = \frac{\Pi_0 - \Pi_{1-\alpha}}{\Pi_0},$$

$$\Pi_{1-\alpha} = \max\{x | F_\pi(x) \leq 1 - \alpha\}.$$

Donde  $F_\pi$  es la función de distribución de los valores de la cartera.

### Credit CVaR

El CVaR es el valor esperado de las pérdidas que exceden el valor del VaR, lo que queda representado en la siguiente ecuación:

$$ES_\alpha = E[L_\pi | L_\pi > VaR_\alpha].$$

El cual puede ser calculado como un promedio de las pérdidas de la cartera que exceden la VaR.

Siguiendo la analogía del VaR, cuando se tiene la función de distribución del valor de la cartera, el CVaR porcentual se representa de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$ES_\alpha = \frac{\Pi_0 - E[\Pi | \Pi \leq \Pi_{1-\alpha}]}{\Pi_0}.$$

El VaR y CVaR también pueden ser estimados por el método paramétrico, donde se hace el supuesto que las rentabilidades de la cartera siguen una distribución Normal. Los cuales se obtienen de acuerdo a las siguientes ecuaciones:

$$r\pi_j = \frac{\Pi_j - \Pi_0}{\Pi_0}$$

$$\mu_{r\pi} = \sum_{j=1}^J r\pi_j * p_j,$$

$$\sigma_{r\pi}^2 = \sum_{j=1}^J (r\pi_j - \mu_{r\pi})^2 p_j,$$

$$VaR(Normal) = \Phi^{-1}(1 - \alpha) \sqrt{\sigma_{r_{\Pi}}^2} - \mu_{r_{\Pi}},$$

$$ES(Normal) = \frac{\Phi(\Phi^{-1}(1 - \alpha))}{1 - \alpha} \sqrt{\sigma_{r_{\Pi}}^2} - \mu_{r_{\Pi}},$$

Donde:

- $\Pi_j$  es el valor de la cartera
- $\Pi_0$  es el valor de referencia
- $r_{\Pi_j}$ , son las rentabilidades de la cartera, de acuerdo a los posibles valores que pudiera presentar en función de cómo cambie o cambien de calificación (en el caso de una cartera formada por 2 bonos o más las rentabilidades están en función de cómo cambien todos los bonos, formando combinaciones de ello)
- $p_j$  es la probabilidad de migrar de calificación crediticia. En el caso de una cartera de un bono, es la probabilidad de que el bono con calificación inicial  $i$  migre a la  $j$ . En el caso de una cartera formada por dos bonos es la probabilidad conjunta.

## 10. Apéndice B: Análisis de datos.

En esta sección se presentan un análisis descriptivo de los 4 activos (IBEX, Santander, Oro y tipo de cambio EUR/USD), que han sido utilizados para el análisis del riesgo del modelo de la sección 4 y 5.

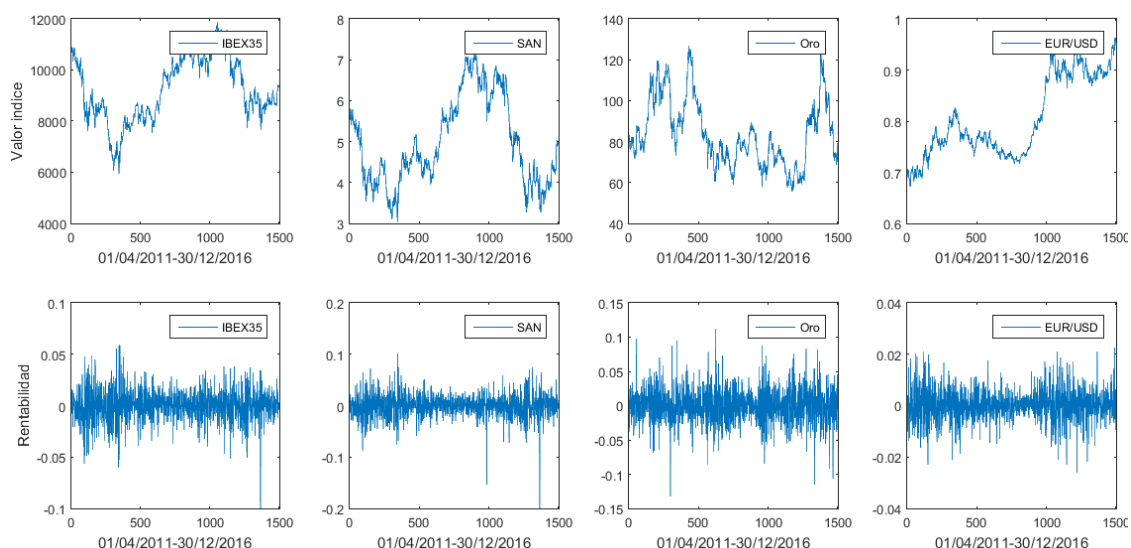


Gráfico 10.1: Evolución del valor de los 4 activos y sus respectivos rendimientos logarítmicos obtenidos a partir de la siguiente ecuación  $r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$ , sobre una muestra comprendida entre 01/04/2011 hasta 30/12/2016

El gráfico 10.1 ilustra la evolución del valor y los rendimientos logarítmicos de los distintos activos, donde se puede apreciar que el valor no sigue un movimiento estacionario, por otro lado, se observa que los activos presentan movimientos muy diferentes con excepción del IBEX35 y SAN los cuales tiene un comportamiento similar.

Se observa que los rendimientos presentan estacionariedad con respecto a la media, y en los periodos donde el valor del índice desciende hay mayor volatilidad. Se aprecia que el Oro tiene más picos lo que supone una mayor volatilidad, también se observa que donde hubo caídas bruscas del valor del índice hay presencia de mayor volatilidad. La serie de los rendimientos del EUR/USD son más estables, esperando que el riesgo de modelo sea menor.

	IBEX35	SAN	Oro	EUR/USD
<b>Media</b>	-0.000	-0.000	-0.000	0.000
<b>Mediana</b>	0.000	0.000	-0.001	0.000
<b>Máximo</b>	0.059	0.101	0.112	0.023
<b>Mínimo</b>	-0.132	-0.222	-0.132	-0.026
<b>Desviación típica</b>	0.015	0.022	0.025	0.006
<b>Asimetría</b>	-0.560	-0.899	-0.016	0.014
<b>Curtosis</b>	8.066	12.519	4.962	4.647

Tabla 10.1: Principales estadísticos de las rentabilidades logarítmicas de los 4 activos (IBEX, Santander (SAN), oro, y tipo de cambio EUR/USD).

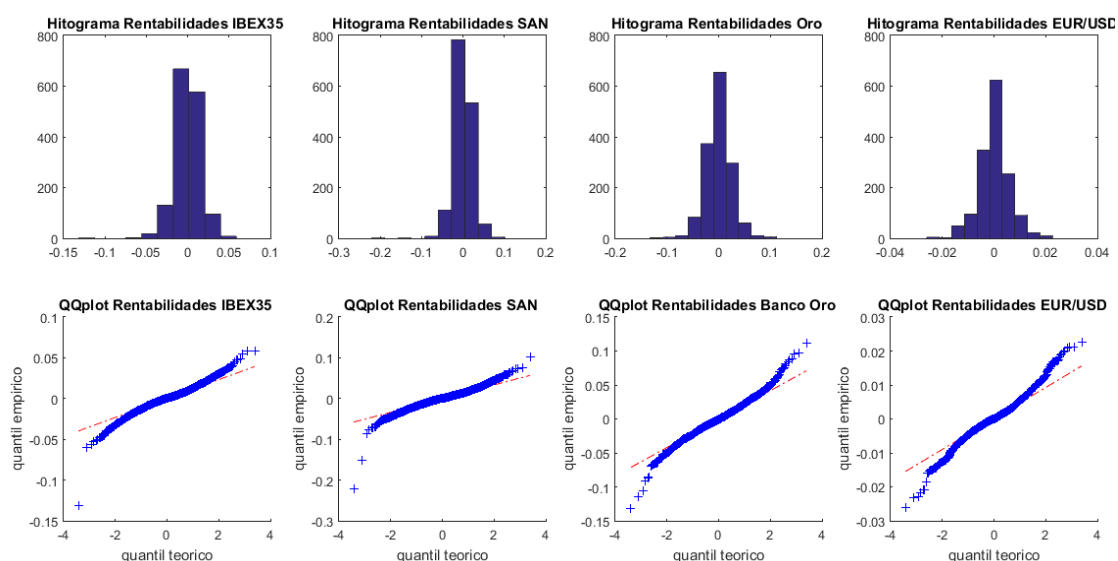


Gráfico 10.2: Histograma y QQ-plot de las rentabilidades de los activos IBEX35, Oro, Banco Santander y tipo de cambio EUR/USD

En la tabla 10.1 podemos apreciar que la media de los 4 activos es muy cercana a 0. Por otro lado, se observa tanto en la tabla 10.1 como en el gráfico 10.2, que el IBEX35 y SAN tienen mayor asimetría y curtosis, (existencia de colas gruesas). En los gráficos QQ plot observamos concavidad con respecto a la línea recta, lo que también es un indicador de existencia de colas gruesas. También se calculó el estadístico Jarque-Bera, con el cual se contrastó la normalidad de las muestras, obteniendo como resultados del estimador 1682.3 para el IBEX35, 5865.6 para SAN, 240.7 para el oro y 169.52 para EUR/USD; rechazando la hipótesis nula de normalidad, es decir los rendimientos del índice no siguen una distribución Normal. De acuerdo a los resultados anteriores esperamos que el supuesto de normalidad (en especial del IBEX y SAN) genere un mayor riesgo de modelo, ya que no representara adecuadamente el comportamiento de los activos.

## 11. Apéndice C: Tablas de resultados.

### 11.1. Riesgo por la elección del modelo

Distribución	Modelo de	IBEX	SAN	Oro	EUR/USD
N	GARCH	3.48%	4.89%	2.16%	1.53%
N	APARCH	3.56%	5.37%	2.15%	1.51%
N	FGARCH	3.59%	5.25%	1.86%	1.51%
N	GJRGARCH	3.68%	5.38%	2.14%	1.53%
ST	GARCH	3.78%	5.38%	2.50%	1.65%
ST	APARCH	3.81%	5.78%	2.42%	1.63%
ST	FGARCH	3.87%	5.64%	2.22%	1.61%
ST	GJRGARCH	3.96%	5.82%	2.45%	1.65%
SKST	GARCH	3.93%	5.51%	2.56%	1.65%
SKST	APARCH	4.01%	6.01%	2.47%	1.62%
SKST	FGARCH	4.09%	5.87%	2.27%	1.61%
SKST	GJRGARCH	4.17%	6.02%	2.50%	1.64%
SGED	GARCH	3.95%	5.52%	2.50%	1.66%
SGED	APARCH	4.01%	6.02%	2.46%	1.63%
SGED	FGARCH	4.06%	5.87%	2.25%	1.63%
SGED	GJRGARCH	4.16%	6.04%	2.47%	1.65%
JSU	GARCH	3.99%	5.59%	2.61%	1.66%
JSU	APARCH	4.07%	6.10%	2.53%	1.63%
JSU	FGARCH	4.15%	5.95%	2.32%	1.62%
JSU	GJRGARCH	4.23%	6.11%	2.56%	1.65%
SGT	GARCH	3.94%	5.53%	2.51%	1.66%
SGT	APARCH	4.00%	5.99%	2.47%	1.64%
SGT	FGARCH	4.04%	5.86%	2.26%	1.63%
SGT	GJRGARCH	4.14%	6.02%	2.48%	1.66%
GHST	GARCH	4.26%	6.14%	2.47%	1.87%
GHST	APARCH	4.44%	6.44%	2.42%	1.49%
GHST	FGARCH	3.87%	6.63%	2.24%	1.56%
GHST	GJRGARCH	4.73%	6.62%	2.52%	1.81%
<b>Desv. Típica</b>		<b>0.0026</b>	<b>0.0040</b>	<b>0.0017</b>	<b>0.0008</b>
<b>Coef. de variación</b>		<b>0.0648</b>	<b>0.0687</b>	<b>0.0722</b>	<b>0.0486</b>

Tabla 11.1.1: Estimaciones del VaR, para distintos supuestos de distribuciones de las innovaciones y distintos modelos de varianza condicional. Las distribuciones de las rentabilidades son las siguientes: Normal (N), t-Student (ST), sesgada t-Student (SKST), sesgada error generalizado (SGED), imparcial Johnson (JSU), sesgada-t generalizada(SGT) y generalizadas hiperbólicas (GHST). También se presenta, la desviación típica y el coeficiente de variación de las estimaciones presentadas Fuente: García Jorcano Laura; *Sample size, skewness and leverage effects in Value at Risk and Expected Shortfall estimation*; capítulo 2

	Normal				ST			
	IBEX	SAN	GOLD	EURTOUSD	IBEX	SAN	GOLD	EURTOUSD
Exceedances	<b>27</b>	<b>23</b>	<b>34</b>	<b>24</b>	<b>19</b>	<b>18</b>	<b>20</b>	<b>18</b>
LR_uc	12.52	6.97	25.07	8.23	2.84	2.06	3.73	2.06
	[0.000402]	[0.008290]	[0.000001]	[0.004112]	[0.091882]	[0.150843]	[0.053591]	[0.150843]
LR_ind	0.31	-	1.08	-	-	-	1.01	-
	[0.579012]	[-]	[0.299229]	[-]	[-]	[-]	[0.315167]	[-]
LR_cc	12.83	-	26.15	-	-	-	4.73	-
	[0.001637]	[-]	[0.000002]	[-]	[-]	[-]	[0.093747]	[-]
DQT	36.15	27.49	57.17	18.85	15.65	23.72	11.70	7.97
	[0.000007]	[0.000272]	[0.000000]	[0.008665]	[0.028501]	[0.001278]	[0.110908]	[0.335480]
Exceedances	<b>26</b>	<b>25</b>	<b>22</b>	<b>24</b>	<b>22</b>	<b>19</b>	<b>27</b>	<b>18</b>
LR_uc	11.01	9.58	5.79	8.23	5.79	2.84	12.52	2.06
	[0.000905]	[0.001964]	[0.016079]	[0.004112]	[0.016079]	[0.091882]	[0.000402]	[0.150843]
LR_ind	-	-	3.65	-	-	-	2.32	-
	[-]	[-]	[0.056051]	[-]	[-]	[-]	[0.127973]	[-]
LR_cc	-	-	9.44	-	-	-	14.84	-
	[-]	[-]	[0.008894]	[-]	[-]	[-]	[0.000599]	[-]
DQT	26.81	28.30	38.87	19.00	23.06	15.81	48.34	8.04
	[0.000360]	[0.000194]	[0.000002]	[0.008202]	[0.001667]	[0.026886]	[0.000000]	[0.329212]
Exceedances	<b>3</b>	<b>24</b>	<b>36</b>	<b>23</b>	<b>21</b>	<b>20</b>	<b>23</b>	<b>17</b>
LR_uc	11.01	8.23	29.23	6.97	4.71	3.73	6.97	1.40
	[0.000905]	[0.004112]	[0.000000]	[0.008290]	[0.029964]	[0.053591]	[0.008290]	[0.236874]
LR_ind	-	-	0.83	-	-	-	3.35	-
	[-]	[-]	[0.362654]	[-]	[-]	[-]	[0.067344]	[-]
LR_cc	-	-	30.06	-	-	-	10.32	-
	[-]	[-]	[0.000000]	[-]	[-]	[-]	[0.005753]	[-]
DQT	26.92	28.27	65.99	16.05	22.02	22.51	32.51	4.57
	[0.000344]	[0.000196]	[0.000000]	[0.024703]	[0.002525]	[0.002073]	[0.000033]	[0.712717]
Exceedances	<b>29</b>	<b>29</b>	<b>38</b>	<b>24</b>	<b>22</b>	<b>21</b>	<b>27</b>	<b>16</b>
LR_uc	15.76	15.77	33.62	8.23	5.79	4.71	12.52	0.85
	[0.000072]	[0.000072]	[0.000000]	[0.004112]	[0.016079]	[0.029964]	[0.000402]	[0.355475]
LR_ind	-	-	0.62	-	-	-	2.32	-
	[-]	[-]	[0.431136]	[-]	[-]	[-]	[0.127973]	[-]
LR_cc	-	-	34.24	-	-	-	14.84	-
	[-]	[-]	[0.000000]	[-]	[-]	[-]	[0.000599]	[-]
DQT	35.27	34.73	73.66	18.52	21.87	19.58	39.92	4.12
	[0.000010]	[0.000013]	[0.000000]	[0.009828]	[0.002678]	[0.006548]	[0.000001]	[0.766330]

		SKST				SGED			
		IBEX	SAN	GOLD	EURTOUSD	IBEX	SAN	GOLD	EURTOUSD
GARCH	Exceedances	<b>17</b>	<b>17</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>17</b>	<b>17</b>	<b>20</b>	<b>18</b>
	LR_uc	1.40	1.40	1.40	2.06	1.40	1.40	3.73	2.06
	LR_ind	-	-	1.50	-	-	-	1.01	-
	LR_cc	-	-	2.90	-	-	-	4.73	-
	DQT	12.78	24.31	8.79	8.01	12.77	24.41	11.87	7.96
		[0.077714]	[0.001004]	[0.268404]	[0.331577]	[0.077956]	[0.000963]	[0.104910]	[0.336338]
A-APARCH	Exceedances	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>22</b>	<b>18</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>21</b>	<b>18</b>
	LR_uc	1.40	2.06	5.79	2.06	1.40	2.06	4.71	2.06
	LR_ind	-	-	3.65	-	-	-	3.98	-
	LR_cc	-	-	9.44	-	-	-	8.69	-
	DQT	14.52	15.37	38.87	8.08	14.43	15.35	27.20	8.02
		[0.042700]	[0.031522]	[0.000002]	[0.325347]	[0.043990]	[0.031724]	[0.000306]	[0.330870]
GIRGARCH	Exceedances	<b>16</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>18</b>	<b>16</b>	<b>19</b>	<b>21</b>	<b>18</b>
	LR_uc	0.85	2.84	3.73	2.06	0.85	2.84	4.71	2.06
	LR_ind	-	-	0.10	-	-	-	3.98	-
	LR_cc	-	-	8.05	-	-	-	8.69	-
	DQT	13.97	21.31	29.17	8.10	13.89	21.31	25.98	8.04
		[0.051703]	[0.003331]	[0.000134]	[0.323898]	[0.053237]	[0.003341]	[0.000508]	[0.328732]
FGARCH	Exceedances	<b>17</b>	<b>19</b>	<b>12</b>	<b>16</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>25</b>	<b>16</b>
	LR_uc	1.40	2.84	0.01	0.85	2.06	2.84	9.58	0.85
	LR_ind	-	-	12.69	-	-	-	2.80	-
	LR_cc	-	-	12.71	-	-	-	12.38	-
	DQT	14.31	14.68	8.29	4.14	14.50	14.74	36.75	4.14
		[0.045928]	[0.040335]	[0.307850]	[0.763765]	[0.043036]	[0.039422]	[0.000005]	[0.763831]

		JSU				SGT				GHST			
		IBEX	SAN	GOLD	EURTOUSD	IBEX	SAN	GOLD	EURTOUSD	IBEX	SAN	GOLD	EURTOUSD
GARCH	Exceedances	<b>16</b>	<b>17</b>	<b>14</b>	<b>18</b>	<b>17</b>	<b>17</b>	<b>20</b>	<b>18</b>	<b>12</b>	<b>11</b>	<b>21</b>	<b>11</b>
	LR_uc	0.85	1.40	0.15	2.06	1.40	1.40	3.73	2.06	0.03	0.21	4.71	0.21
	LR_ind	-	-	2.16	-	-	-	1.01	-	-	-	3.98	-
	LR_cc	-	-	2.31	-	-	-	4.73	-	-	-	8.69	-
	DQT	11.19	24.33	7.42	8.01	12.61	24.39	11.82	7.94	9.32	16.95	25.94	1.94
		[0.130635]	[0.000995]	[0.386628]	[0.331624]	[0.082152]	[0.000972]	[0.106486]	[0.338011]	[0.230397]	[0.017725]	[0.000516]	[0.963317]
A-APARCH	Exceedances	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>20</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>21</b>	<b>18</b>	<b>12</b>	<b>10</b>	<b>27</b>	<b>16</b>
	LR_uc	1.40	2.06	3.73	2.06	2.06	2.06	4.71	2.06	0.03	0.58	12.52	0.85
	LR_ind	-	-	4.32	-	-	-	3.98	-	-	-	2.32	-
	LR_cc	-	-	8.05	-	-	-	8.69	-	-	-	14.84	-
	DQT	10.24	15.35	26.14	8.08	17.11	15.34	27.03	8.00	11.98	19.42	48.51	7.26
		[0.175265]	[0.031726]	[0.000476]	[0.325622]	[0.016700]	[0.031868]	[0.000329]	[0.332312]	[0.101266]	[0.006959]	[0.000000]	[0.402800]
GIRGARCH	Exceedances	<b>15</b>	<b>19</b>	<b>17</b>	<b>18</b>	<b>17</b>	<b>19</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>10</b>	<b>7</b>	<b>20</b>	<b>9</b>
	LR_uc	0.44	2.84	1.40	2.06	1.40	2.84	2.06	2.06	0.58	3.00	3.73	1.15
	LR_ind	-	-	1.50	-	-	-	5.10	-	-	-	4.32	-
	LR_cc	-	-	2.90	-	-	-	7.17	-	-	-	8.05	-
	DQT	12.59	21.32	10.39	8.10	15.62	21.29	26.83	8.03	14.14	17.12	24.88	3.43
		[0.082789]	[0.003330]	[0.167450]	[0.324130]	[0.028809]	[0.003366]	[0.000357]	[0.330054]	[0.048749]	[0.016612]	[0.000798]	[0.842156]
FGARCH	Exceedances	<b>16</b>	<b>19</b>	<b>18</b>	<b>16</b>	<b>19</b>	<b>19</b>	<b>25</b>	<b>16</b>	<b>16</b>	<b>9</b>	<b>29</b>	<b>14</b>
	LR_uc	0.85	2.84	2.06	0.85	2.84	2.84	9.58	0.85	0.85	1.15	15.77	0.15
	LR_ind	-	-	5.10	-	-	-	2.80	-	-	-	1.90	-
	LR_cc	-	-	7.17	-	-	-	12.38	-	-	-	17.66	-
	DQT	13.95	14.68	26.54	4.12	16.69	14.76	36.52	4.12	13.68	20.92	46.55	2.64
		[0.052058]	[0.040339]	[0.000403]	[0.765583]	[0.019487]	[0.039174]	[0.000006]	[0.765692]	[0.057233]	[0.003892]	[0.000000]	[0.915856]

Tabla 11.1.2: Resultados de validación del VaR, para distintos supuestos de distribuciones de las innovaciones y distintos modelos de varianza condicional. Las distribuciones son las siguientes: Normal (N), t-Student (ST), sesgada t-Student (SKST), sesgada error generalizado (SGED), imparcial Johnson (JSU), sesgada-t generalizada (SGT) y generalizadas hiperbólicas (GHST). Donde LR\_uc, LR\_ind, LR\_cc y DQT, son los p-values de las pruebas de cobertura incondicional, independencia, cobertura condicional y dinámica cuantílica respectivamente. Fuente García Jorcano Laura; *Sample size, skewness and leverage effects in Value at Risk and Expected Shortfall estimation*; capítulo 2

Distribución	Modelo de Volatilidad	IBEX	SAN	Oro	EUR/USD
N	GARCH				
N	APARCH				
N	FGARCH				
N	GJRGARCH				
ST	GARCH			X	X
ST	APARCH		X		X
ST	FGARCH				X
ST	GJRGARCH				X
SKST	GARCH	X		X	X
SKST	APARCH	X	X		X
SKST	FGARCH	X			X
SKST	GJRGARCH	X	X	X	X
SGED	GARCH	X		X	X
SGED	APARCH	X	X		X
SGED	FGARCH	X			X
SGED	GJRGARCH	X	X		X
JSU	GARCH	X		X	X
JSU	APARCH	X	X		X
JSU	FGARCH	X		X	X
JSU	GJRGARCH	X	X		X
SGT	GARCH	X		X	X
SGT	APARCH	X	X		X
SGT	FGARCH	X			X
SGT	GJRGARCH	X	X		X
GHST	GARCH	X	X		X
GHST	APARCH	X			X
GHST	FGARCH	X	X		X
GHST	GJRGARCH	X			X

Tabla 11.1.2: Selección de modelos (indicados con una X) para la cual nos basamos en los resultados de validación (tabla 9.6.2); donde el criterio de selección ha sido de aquellos modelos que pasaron la prueba del contraste incondicional (LR\_uc) y la prueba del cuantil dinámico (DQT). La X indica los modelos que han pasado ambas pruebas.



SAN		
Distribución:	CVaR	Viol
N	5.32%	0.021
ST	6.14%	0.015
SKST	6.40%	0.014
SGED	6.17%	0.014
JSU	6.47%	0.013
N-EVT	7.76%	0.009
ST-EVT	7.81%	0.009
SKST-EVT	7.77%	0.009
SGED-EVT	7.72%	0.009
JSU-EVT	7.77%	0.009
<b>Desv. Típica</b>	<b>0.0093</b>	
<b>Coef. de variación</b>	<b>0.1340</b>	

Tabla 11.1.4: Media de la estimación del CVaR, y el ratio de violaciones. Así como la desviación típica y el coeficiente de variación de las estimaciones presentadas. Fuente: García Jorcano Laura; *Sample size, skewness and leverage effects in Value at Risk and Expected Shortfall estimation*"; capítulo 3

## 11.2. Riesgo por incertidumbre paramétrica.

	$\delta_1$	$\delta_2$
IBEX35	0.0933	0.8824
	(0.0095)	(0.0148)
SAN	0.1019	0.0168
	0.0962	0.8877
Oro	(0.0094)	(0.0129)
	0.0977	0.0145
EUR/USD	0.0500	0.9000
	(0.0107)	(0.0206)
	0.2140	0.0229
	0.0315	0.9626
	(0.0044)	(0.0050)
	0.1395	0.0052

Tabla 11.2.1: Parámetros del modelo GARCH (1,1), desviaciones típicas y coeficientes de variación de los mismos, para cada uno de los activos IBEX, SAN, Oro y EUR/USD.

	EVT Vol. Constante		EVT GARCH	
	$\xi$	$\beta$	$\xi$	$\beta$
IBEX35	<b>0.1115</b>	<b>0.6620</b>	<b>0.1048</b>	<b>0.5657</b>
	(0.0997)	(0.1010)	(0.0958)	(0.0849)
SAN	<b>0.8943</b>	<b>0.1526</b>	<b>0.9141</b>	<b>0.1501</b>
	(0.1340)	(0.0827)	(0.1166)	(0.0899)
Oro	<b>0.3069</b>	<b>0.4760</b>	<b>0.2100</b>	<b>0.5518</b>
	(0.1340)	(0.0827)	(0.1166)	(0.0899)
EUR/USD	<b>0.4366</b>	<b>0.1738</b>	<b>0.5552</b>	<b>0.1629</b>
	(0.1277)	(0.0987)	(0.1187)	(0.0966)
	<b>1.1078</b>	<b>0.1754</b>	<b>1.0058</b>	<b>0.1656</b>
	(0.0970)	(0.1149)	(0.1454)	(0.0892)
	<b>0.6531</b>	<b>0.1504</b>	<b>1.4387</b>	<b>0.1858</b>

Tabla 11.2.2: Parámetros del modelo EVT, desviaciones típicas y coeficientes de variación de los mismos. Para el cual se supones volatilidad constante (panel izquierdo) y volatilidad condicional GARCH (1,1) (panel derecho).

	SAN-Repsol		SAN -Oro		SAN-EUR/USD	
Cópula	Parámetros		Parámetros		Parámetros	
Gaussiana	$\rho$		$\rho$		$\rho$	
	<b>0.755</b>		<b>0.038</b>		<b>-0.139</b>	
	(0.0032)		(0.0262)		(0.0225)	
	<b>0.0042</b>		<b>0.6843</b>		<b>0.1624</b>	
T-student	$\rho$	$\nu$	$\rho$	$\nu$	$\rho$	$\nu$
	<b>0.779</b>	<b>3.781</b>	<b>0.035</b>	<b>24.215</b>	<b>-0.129</b>	<b>3.46</b>
	(0.011)	(0.456)	(0.027)	(3.641)	(0.03)	(0.402)
	<b>0.0141</b>	<b>0.1206</b>	<b>0.7731</b>	<b>0.1504</b>	<b>0.2322</b>	<b>0.1162</b>
Clayton	$\alpha$		$\alpha$		$\alpha$	
	<b>1.79</b>		<b>0.03</b>		<b>0.05</b>	
	(0.0506)		(0.0271)		(0.0202)	
	<b>0.0283</b>		<b>0.7758</b>		<b>0.38</b>	

Tabla 11.2.3: Parámetros de las cópulas Gaussiana, t-Student<sup>17</sup> y Clayton, desviación típica y coeficiente de variación para cada cartera equiponderada formada por dos activos. Los parámetros y la desviación típica obtenidos con el programa Matlab.

<sup>17</sup> Se ha considerando para la cópula t-Student una correlación entre los parámetros  $\rho$  y  $\nu$  de 0.3

	Distribución teórica				Distribución Empírica			
	Paramétrico		Historico		Paramétrico		Historico	
	Diferencia (%)		Diferencia (%)		Diferencia (%)		Diferencia (%)	
<b>IBEX35</b>								
VaR	-3.5%	3.7%	-7.0%	7.0%	-6.9%	6.9%	-13.5%	17.4%
ES	-3.5%	3.7%			-6.9%	6.9%	-24.5%	23.8%
<b>SAN</b>								
VaR	-3.5%	3.7%	-7.8%	7.8%	-8.7%	8.4%	-13.7%	15.7%
ES	-3.5%	3.7%			-8.7%	8.4%	-33.1%	32.4%
<b>Oro</b>								
VaR	-3.5%	3.7%	-7.6%	7.6%	-5.0%	5.0%	-12.1%	12.3%
ES	-3.5%	3.7%			-5.0%	5.0%	-17.9%	18.0%
<b>EUR/USD</b>								
VaR	-3.5%	3.7%	-7.6%	7.6%	-4.9%	4.8%	-9.3%	6.6%
ES	-3.5%	3.7%			-4.9%	4.8%	-15.8%	12.6%

Tabla 11.2.4: Diferencias porcentuales entre los extremos de los intervalos de confianza al 95% (tabla 5.2) y la estimación puntual (tabla 4.2); Paramétrico hace referencia a la estimación del VaR y CVaR por el método paramétrico (supuesto 2) e Histórico hace referencia a la estimación del VaR y CVaR por el método de simulación histórica (sin ajuste de volatilidad)). Por otro lado los intervalos de confianza fueron calculados de acuerdo a la distribución teórica<sup>18</sup> de la estimación del VaR y CVaR (panel izquierdo) y a la distribución empírica<sup>19</sup> (panel derecho).

	GARCH		EVT Vol. Constante		EVT GARCH	
	Diferencia %		Diferencia %		Diferencia %	
<b>IBEX35</b>						
VaR	-12.37%	5.79%	-10.40%	10.89%	-12.93%	5.53%
ES	-12.37%	5.79%	-16.43%	17.90%	-17.72%	12.11%
<b>SAN</b>						
VaR	-10.59%	10.34%	-11.31%	11.05%	-10.91%	10.61%
ES	-10.59%	10.48%	-27.52%	31.26%	-20.93%	22.86%
<b>Oro</b>						
VaR	-1.14%	1.71%	-10.20%	9.65%	-9.43%	11.11%
ES	-1.14%	1.71%	-17.30%	17.92%	-16.55%	19.48%
<b>EUR/USD</b>						
VaR	-2.86%	2.75%	-8.66%	8.28%	-9.29%	8.10%
ES	-2.86%	2.75%	-9.94%	9.85%	-15.90%	16.40%

Tabla 11.2.5: Diferencias porcentuales entre los extremos de los intervalos de confianza al 95% (tabla 5.3) y las estimaciones puntuales (tabla 4.2); GARCH hace referencia a la estimación del VaR y CVaR

<sup>18</sup> La distribución teórica es la descrita en la sección 5.1, (I y II), para el caso del VaR y CVaR paramétrico y el VaR por simulación histórica respectivamente.

<sup>19</sup> La distribución empírica es la descrita en la sección 5.2.3, (IV).

por método paramétrico suponiendo una volatilidad condicional GARCH (1,1) (supuesto3) y EVT hace referencia a la estimación del VaR y CVaR mediante el método EVT, suponiendo volatilidad incondicional y condicional GARCH (supuesto 2 y 3)) para la estandarización de las rentabilidades.

	SAN-REP Diferencia (%)		SAN-Oro Diferencia (%)		SAN-EUR/USD Diferencia (%)	
<b>Gaussina</b>						
VaR	-0.17%	0.15%	-3.26%	3.85%	-1.34%	1.35%
CVaR	-0.28%	0.29%	-2.34%	2.52%	-1.33%	1.34%
<b>T-student</b>						
VaR	-0.49%	0.73%	-3.65%	4.09%	-2.74%	2.63%
CVaR	-0.95%	1.05%	-2.46%	2.61%	-2.55%	2.45%
<b>Clayton</b>						
VaR	-0.06%	0.06%	-5.86%	5.92%	-1.46%	1.43%
CVaR	-0.24%	0.23%	-4.81%	4.94%	-1.56%	1.56%

Tabla 11.2.6: Diferencias porcentuales entre los extremos de cada intervalo de confianza al 95% (tabla 5.4) y las estimaciones puntuales del VaR y CVaR obtenidas con las 3 cópulas (tabla 4.3) para cada una de las carteras equiponderadas.

### 11.3. Riesgo en CreditMetrics

		A			BBB			AA			B		
		$B_{i,j}$	Prob (o)	Prob (m)	$B_{i,j}$	Prob (o)	Prob (m)	$B_{i,j}$	Prob (o)	Prob (m)	$B_{i,j}$	Prob (o)	Prob (m)
j	AAA	106.59	0.001	0.002	109.35	0.000	0.001	100.20	0.007	0.008	113.35	0.00	0.001
	AA	106.49	0.023	0.024	109.17	0.003	0.004	100.03	0.907	0.902	113.21	0.00	0.002
	A	106.30	0.911	0.906	108.64	0.060	0.059	99.52	0.078	0.077	112.80	0.00	0.003
	BBB	105.64	0.055	0.054	107.53	0.869	0.864	98.46	0.006	0.007	111.89	0.00	0.005
	BB	103.15	0.007	0.008	102.01	0.053	0.054	93.18	0.001	0.002	107.74	0.06	0.064
	B	101.39	0.003	0.004	98.09	0.012	0.013	89.43	0.001	0.002	104.58	0.83	0.830
	CCC	88.71	0.000	0.001	83.63	0.001	0.002	75.82	0.000	0.001	90.54	0.04	0.042
	Default	51.13	0.001	0.002	51.13	0.002	0.003	38.52	0.000	0.001	32.74	0.05	0.053

Tabla 11.3.1: Perfil de riesgo a un año de una cartera compuesta por un bono con calificación actual i. Prob (o), es la probabilidad de transición de la matriz original y prob (m) es la probabilidad de transición obtenida de la matriz de transición modificada. Entendiendo como perfil de riesgo, los posibles valores que después de un año pudiera tener la cartera de crédito. Los cuales están asociado a una probabilidad de migrar de la calificación inicial a otra.

		Calificación Bono 2							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
Calificación Bono 1	AAA	0.000%	0.000%	0.005%	0.078%	0.005%	0.001%	0.000%	0.000%
	AA	0.000%	0.007%	0.135%	1.973%	0.120%	0.027%	0.003%	0.004%
	A	0.018%	0.300%	5.417%	79.150%	4.826%	1.065%	0.109%	0.164%
	BBB	0.001%	0.018%	0.328%	4.799%	0.293%	0.065%	0.007%	0.010%
	BB	0.000%	0.002%	0.044%	0.643%	0.039%	0.009%	0.001%	0.001%
	B	0.000%	0.001%	0.015%	0.226%	0.014%	0.003%	0.000%	0.000%
	CCC	0.000%	0.000%	0.001%	0.009%	0.001%	0.000%	0.000%	0.000%
	Default	0.000%	0.000%	0.004%	0.052%	0.003%	0.001%	0.000%	0.000%

Tabla 11.3.2: Probabilidades conjuntas del bono 1 y 2 a un año, en donde se supone independencia. Matriz original

		Calificación Bono 2							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
Calificación Bono 1	AAA	0.000%	0.003%	0.023%	0.063%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%
	AA	0.003%	0.038%	0.394%	1.810%	0.022%	0.003%	0.000%	0.000%
	A	0.016%	0.287%	5.444%	79.691%	4.465%	0.928%	0.090%	0.129%
	BBB	0.000%	0.002%	0.081%	4.553%	0.643%	0.182%	0.022%	0.037%
	BB	0.000%	0.000%	0.006%	0.574%	0.111%	0.036%	0.005%	0.009%
	B	0.000%	0.000%	0.002%	0.192%	0.045%	0.016%	0.002%	0.004%
	CCC	0.000%	0.000%	0.000%	0.007%	0.002%	0.001%	0.000%	0.000%
	Default	0.000%	0.000%	0.000%	0.040%	0.012%	0.005%	0.001%	0.002%

Tabla 11.3.3: Probabilidades conjuntas del bono 1 y 2 a un año, en donde se supone una correlación  $\rho = .30$ . Matriz original

		Calificación Bono 2							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
Calificación Bono 1	AAA	0.000%	0.001%	0.011%	0.164%	0.010%	0.002%	0.000%	0.001%
	AA	0.003%	0.010%	0.139%	2.048%	0.128%	0.030%	0.005%	0.007%
	A	0.109%	0.389%	5.297%	78.262%	4.890%	1.150%	0.199%	0.254%
	BBB	0.007%	0.023%	0.317%	4.685%	0.293%	0.069%	0.012%	0.015%
	BB	0.001%	0.004%	0.049%	0.726%	0.045%	0.011%	0.002%	0.002%
	B	0.000%	0.002%	0.021%	0.311%	0.019%	0.005%	0.001%	0.001%
	CCC	0.000%	0.000%	0.006%	0.095%	0.006%	0.001%	0.000%	0.000%
	Default	0.000%	0.001%	0.009%	0.138%	0.009%	0.002%	0.000%	0.000%

Tabla 11.3.4: Probabilidades conjuntas modificadas del bono 1 y 2 a un año, en donde se supone independencia. Matriz modificada

		Calificación Bono 2							
		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
Calificación Bono 1	AAA	0.003%	0.006%	0.043%	0.136%	0.001%	0.000%	0.000%	0.000%
	AA	0.016%	0.045%	0.387%	1.893%	0.026%	0.004%	0.000%	0.000%
	A	0.100%	0.376%	5.325%	78.839%	4.532%	1.009%	0.168%	0.202%
	BBB	0.001%	0.003%	0.083%	4.445%	0.620%	0.182%	0.036%	0.051%
	BB	0.000%	0.000%	0.008%	0.655%	0.118%	0.038%	0.008%	0.012%
	B	0.000%	0.000%	0.003%	0.271%	0.056%	0.019%	0.004%	0.007%
	CCC	0.000%	0.000%	0.001%	0.080%	0.018%	0.007%	0.001%	0.002%
	Default	0.000%	0.000%	0.001%	0.111%	0.030%	0.011%	0.003%	0.005%

Tabla 11.3.5: Probabilidades conjuntas modificadas del bono 1 y 2 a un año, en donde se supone una correlación  $\rho = .30$ . Matriz modificada

Calificación inicial (T=0)	Calificación despues de un año (T=1)						
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
AAA	-1.33	-2.38	-2.91	-3.04	-Inf	-Inf	-Inf
AA	2.46	-1.36	-2.38	-2.85	-2.95	-3.54	-Inf
A	3.12	1.98	-1.51	-2.30	-2.72	-3.19	-3.24
BBB	3.54	2.70	1.53	-1.49	-2.18	-2.75	-2.91
BB	3.43	2.93	2.39	1.37	-1.23	-2.04	-2.30
B	8.21	3.06	2.70	2.42	1.46	-1.32	-1.62
CCC	2.85	2.85	2.62	2.11	1.74	1.02	-0.85

Tabla 11.3.6: Límites inferiores  $z$ 's (umbrales  $z$ 's) para cada calificación, obtenidos a partir de la matriz de probabilidades transición original. Los cuales interpretamos como rentabilidades estandarizadas a un año.

Calificación inicial (T=0)	Calificación después de un año (T=1)						
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
AAA	-1.30	-2.18	-2.47	-2.56	-Inf	-Inf	-Inf
AA	2.41	-1.34	-2.21	-2.50	-2.60	-2.85	-Inf
A	2.89	1.95	-1.48	-2.18	-2.49	-2.78	-2.95
BBB	3.04	2.54	1.52	-1.46	-2.10	-2.58	-2.77
BB	3.01	2.68	2.28	1.34	-1.23	-2.00	-2.27
B	8.21	2.74	2.48	2.26	1.44	-1.31	-1.62
CCC	2.73	2.64	2.44	2.03	1.68	1.00	-0.85

Tabla 11.3.7: Límites inferiores  $z$ 's (umbrales  $z$ 's) para cada calificación, obtenidos a partir de la matriz de probabilidades transición modificada. Los cuales interpretamos como rentabilidades estandarizadas a un año.

Calificación inicial (T=0)	Calificación después de un año (T=1)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	-0.55%	-1.20%	14.71%	166.67%	83.33%	Inf	Inf	Inf
AA	14.29%	-0.55%	-1.28%	15.63%	166.67%	71.43%	500.00%	Inf
A	111.11%	4.41%	-0.55%	-1.81%	13.51%	38.46%	1000.00%	166.67%
BBB	500.00%	30.30%	-1.68%	-0.58%	1.89%	8.55%	83.33%	55.56%
BB	333.33%	71.43%	14.93%	1.29%	-0.62%	-1.13%	10.00%	9.43%
B	Inf	90.91%	41.67%	23.26%	-1.54%	-0.60%	2.46%	1.92%
CCC	45.45%	Inf	45.45%	7.69%	4.20%	0.89%	-0.77%	-0.51%

Tabla 11.3.8: Diferencias porcentuales entre las probabilidades de transición de la matriz original y la matriz modificada.