

**VALORACIÓN DE DERIVADOS SOBRE
PRODUCTOS AGRÍCOLAS: UN
ENFOQUE BASADO EN MODELOS CON
REVERSIÓN A LA MEDIA Y
ESTACIONALIDAD**

Natalia del Campo Bustos

Trabajo de investigación 017/008
Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

Tutor: Manuel Moreno Fuentes

Universidad de Castilla-La Mancha
Universidad Complutense de Madrid
Universidad del País Vasco
Universidad de Valencia

www.finanzascuantitativas.com



Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas

**Valoración de derivados sobre productos
agrícolas: un enfoque basado en modelos con
reversión a la media y estacionalidad**

Natalia del Campo Bustos
Director: Manuel Moreno Fuentes

Universidad de Castilla-La Mancha
Universidad Complutense de Madrid
Universidad del País Vasco
Universidad de Valencia

Julio 2017

Resumen

Este trabajo analiza el comportamiento empírico *in-sample* del modelo propuesto en Moreno, Novales y Platania (2017) utilizando precios de futuros sobre tres productos agrícolas: maíz, trigo y soja. Este modelo supone que dichos precios presentan reversión a la media y estacionalidad. En concreto, se supone que los precios convergen a un valor a largo plazo que experimenta diversas fluctuaciones periódicas y suaves durante largos periodos de tiempo. Este supuesto es modelizado a través de una serie de Fourier.

El comportamiento de este modelo se compara frente al de los modelos propuestos en Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002). La principal conclusión es que las fluctuaciones a largo plazo se encuentran presentes en los precios de estos productos agrícolas y que el comportamiento del modelo de Moreno, Novales y Platania (2017) es muy superior al de sus competidores.

1. Introducción

Este trabajo se centra en la valoración de productos agrícolas e intenta contestar la pregunta ¿qué modelo en tiempo continuo se ajusta mejor a los datos observados en los precios de futuros sobre activos agrícolas?

En el pasado, la mayoría de las personas no invertían en materias primas (*commodities*) pues requería tiempo, experiencia y dinero. Hoy en día cualquier inversor puede participar en los mercados de *commodities*. Definimos *commodity* como todo bien que es producido en masa por el hombre o del cual existen grandes cantidades disponibles en la naturaleza, que tiene un valor o utilidad y un bajo nivel de diferenciación o especialización.

La gran variedad de materias primas existentes hacen que encontremos diversos grupos como, por ejemplo: granos (como trigo, maíz o soja), carnes y derivados, *softs* (azúcar, café, algodón, cacao, etc.), energía (como petróleo, carbón y gas natural) y metales (distinguimos entre metales industriales (aluminio, cobre, hierro) y preciosos, como oro, plata, platino o paladio).

Las Bolsas de materias primas son mercados en los que se compran y venden estos productos. Algunos ejemplos son el COMEX (*Commodity Exchange*), el CBOT (*Chicago Board of Trade*), el ICE (*Intercontinental Exchange*), el NYMEX (*New York Mercantile Exchange*), o, en España, el mercado de derivados sobre aceite de oliva en Jaén o el ya desaparecido mercado de derivados sobre cítricos en Valencia.

En general, las *commodities* suelen presentar precios complejos debido a sus múltiples características. Así, estos precios se ven afectados por la estacionalidad, especialmente presente en los productos agrícolas. Por ejemplo, el maíz alcanza su nivel máximo antes de la temporada de crecimiento, en marzo y abril y su nivel mínimo en septiembre y octubre, después de la cosecha. Por tanto, la estacionalidad no es causada sólo por el clima sino también por la variación de las demandas estacionales.

Siguiendo a Hylleberg (1992), la estacionalidad se puede definir como “el movimiento intra-anual sistemático, aunque no necesariamente regular, causado por los cambios del clima, el calendario y el momento de las decisiones, directa o indirectamente a través de las decisiones de producción y consumo tomadas por agentes de la economía. Estas decisiones están influenciadas por las dotaciones, las expectativas y preferencias de los agentes y las técnicas de producción disponibles en la economía”.

Por tanto, los mercados de productos agrícolas muestran patrones estacionales en el nivel de precios por el lado de la oferta debido a los ciclos de las cosechas, los efectos del clima y por ser productos perecederos. Sin embargo, los mercados de materias primas energéticas presentan un comportamiento estacional inducido por el lado de la demanda debido a patrones de

calendario, como los días festivos.

Este comportamiento estacional se ha documentado en trabajos como Fama y French (1987), Lucía y Schwartz (2002), Sørensen (2002) y Geman (2005). La Teoría del Almacenamiento también predice la presencia de estacionalidad en los mercados de *commodities* pues sus inventarios experimentan un patrón estacional y, por tanto, se establece que el rendimiento de conveniencia se relaciona negativamente con el nivel de inventario (véanse Kaldor (1993), Working (1949), Brennan (1958) y Telser (1958)).

La Teoría de Reversión a la Media de los precios de materias primas supone que los precios tienden a revertir a la media, es decir, cuando el precio de una *commodity* es superior al precio medio, el suministro de la *commodity* aumentará debido a que los productores con mayores costes entrarán en el mercado. Por otro lado, cuando los precios son relativamente bajos, la oferta disminuirá debido a que productores con costes elevados saldrán, lo que producirá una presión al alza sobre los precios. Como estas entradas y salidas de productores en el mercado no son instantáneas, los precios pueden ser altos o bajos temporalmente pero siempre tenderán a revertir a un cierto nivel de equilibrio. Por ello, muchos autores han considerado para las *commodities* el uso de modelos con reversión a la media. Véanse Laughton y Jacoby (1993, 1995), Cortázar y Schwartz (1994), Dixit y Pindyck (1994) y Smith y McCardle (1999), entre otros.

La Teoría Económica Básica sugiere que la evolución temporal de los precios de los productos agrícolas se rige por cambios en la oferta y la demanda. Las desviaciones de la producción real de los suministros previstos pueden tener un impacto en los patrones de precios estacionales. Estos patrones pueden ser utilizados con múltiples beneficios como, por ejemplo, para establecer un plazo de tiempo para vender una parte del cultivo o para formular objetivos de precios considerando los posibles costes de almacenamiento.

Debido al auge de estos productos, el estudio del comportamiento estocástico de los precios de las *commodities* se ha convertido en un tema de gran relevancia tanto a nivel académico como para profesionales del sector. Así, en la literatura académica podemos encontrar un gran número de modelos que explican el comportamiento de los precios de las *commodities*. Por las características anteriormente mencionadas para los productos agrícolas, son de especial importancia aquellos modelos con reversión a la media y estacionalidad. A continuación, resumimos brevemente algunos de estos trabajos que serán descritos posteriormente con más detalle.

Gibson y Schwartz (1990) proponen un modelo de dos factores para analizar el precio del petróleo. Estos factores son el precio *spot* del petróleo y el rendimiento instantáneo de conveniencia, el cual sigue un proceso de reversión a la media. Por otro lado, Schwartz (1997) propone modelos de dos y

tres factores como alternativa al modelo unifactorial en el que el logaritmo del precio *spot* del activo analizado sigue un proceso de reversión a la media del tipo Ornstein-Uhlenbeck. Los factores a incluir en este precio *spot* son el rendimiento por conveniencia y los tipos de interés.

Schwartz y Smith (2000) presentan un modelo equivalente al modelo de rendimiento estocástico desarrollado en Gibson y Schwartz (1990). Estos autores proponen un modelo bifactorial para los precios de las materias primas que permite reversión a la media de los precios a corto plazo y refleja la incertidumbre sobre el precio de equilibrio al que los precios revierten.

Lucía y Schwartz (2002) modelizan los precios de la electricidad del Nord Pool (mercado de energía escandinavo) incorporando la estacionalidad mediante un patrón cíclico determinista variable en el tiempo.

Por otro lado, Sørensen (2002) propone un modelo para analizar los precios de tres activos agrícolas (maíz, trigo y soja). En este caso, el logaritmo del precio *spot* viene dado por la suma de un componente estacional determinista y dos variables de estado. Estas variables reflejan, respectivamente, las variaciones permanentes de los precios y los efectos en los precios que se deben a cambios temporales en oferta o demanda.

Recientemente, Mu y Ye (2015) analizaron el mercado del crudo utilizando un modelo de componentes no observables para encontrar evidencia de tendencia a largo plazo combinada con movimientos cíclicos. En la estimación del modelo identifican una tendencia cuadrática determinista y dos tipos de ciclos, a corto y largo plazo, respectivamente.

Finalmente, Moreno, Novales y Platania (2017) (Moreno *et al.* (2017), a partir de ahora) proponen un modelo con reversión a la media para los precios *spot*. Estos precios convergen a un valor a largo plazo que experimenta fluctuaciones periódicas y suaves durante largos periodos de tiempo y que viene dado por una serie de Fourier. Este modelo permite fórmulas cerradas para el precio de diferentes activos derivados y es analizado empíricamente con precios de futuros sobre gas natural, crudo y gasóleo de calefacción.

Como se ha comentado anteriormente, este trabajo se centra en la valoración de productos agrícolas. En concreto, analizaremos el grupo de granos pues estos productos han sido extensamente analizados en la literatura previa y existe evidencia empírica de estacionalidad en sus precios. De manera similar a Sørensen (2002), seleccionamos maíz, trigo y soja.

Nuestro objetivo es realizar un análisis empírico de diferentes modelos en tiempo continuo intentando reflejar algunos conceptos básicos en la formación de los precios de estos productos. Para ello, analizaremos los precios diarios de futuros sobre productos agrícolas de modo similar al estudio realizado por Moreno *et al.* (2017) para futuros sobre productos energéticos.

El esquema de este trabajo es como sigue. La Sección 2 presenta el marco

teórico y describe una serie de modelos que tienen en cuenta las características de reversión a la media y estacionalidad. La Sección 3 introduce y describe el modelo de Moreno *et al.* (2017). La Sección 4 presenta el método econométrico empleado para realizar la estimación de los diferentes modelos utilizados. La Sección 5 describe las características básicas de los datos analizados. La Sección 6 incluye el análisis empírico realizado y los resultados obtenidos para los diferentes modelos. Finalmente, la Sección 7 resume las principales conclusiones y propone varias líneas de investigación futuras.

2. Marco teórico

Esta sección describe diversos modelos que han sido propuestos en la literatura para analizar el comportamiento de los precios de las *commodities*. Esta panorámica de la literatura no pretende ser exhaustiva y su objetivo es situar en perspectiva los diferentes modelos propuestos previamente antes de presentar el modelo de Moreno *et al.* (2017) en la próxima sección.

2.1. Modelo de Gibson y Schwartz (1990)

Estos autores desarrollaron y estudiaron el comportamiento empírico de un modelo de dos factores para analizar el precio del petróleo. Los dos factores son el precio *spot* del petróleo y el rendimiento instantáneo de conveniencia (*convenience yield*) el cual es una variable no observable.¹

Este modelo supone que el precio *spot* del petróleo y el rendimiento de conveniencia, δ , siguen un proceso de difusión conjunto especificado como:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_1 dW_1 \quad (1)$$

$$d\delta_t = \kappa(\alpha - \delta_t)dt + \sigma_2 dW_2 \quad (2)$$

donde μ es el término de deriva para (1), κ es la velocidad de reversión a la media y α es la media (constante) a la que revierte el rendimiento por conveniencia en (2) y σ_i , $i = 1, 2$ son los términos de difusión para (1) y (2), respectivamente. Por otro lado, dW_1 y dW_2 son movimientos Brownianos estándares correlacionados con $dW_1 dW_2 = \rho dt$.

Estos autores consideran el precio de liquidación de los futuros con vencimiento más cercano del NYMEX. El cálculo del rendimiento de conveniencia se basa en la siguiente relación de no-arbitraje entre los precios de entrega de los futuros y el precio *spot* cuando no hay incertidumbre:

$$F(S_t, t, T) = S_t e^{(r-\delta)(T-t)} \quad (3)$$

¹La estimación de esta variable requiere técnicas como, por ejemplo, el filtro de Kalman.

Esta relación de no-arbitraje permite determinar los rendimientos de conveniencia de los productos *forward* mensuales anualizados, utilizando pares de precios de contratos futuros con vencimiento mensual:

$$\delta_{T-1,T} = r_{T-1,T} - 12 \ln \left[\frac{F(S, T)}{F(S, T-1)} \right]$$

2.2. Modelo de Schwartz (1997)

Este autor propuso un modelo unifactorial donde el logaritmo del precio *spot* de la mercancía correspondiente sigue el siguiente proceso de difusión

$$dS_t = \kappa(\mu - \ln(S_t))S_t dt + \sigma dW_t$$

donde μ es el término constante que indica el valor a largo plazo de reversión a la media, κ denota la velocidad de reversión a la media y σ es el coeficiente de difusión de este proceso.

Sea $X_t = \ln(S_t)$. Aplicando el Lema de Itô, el logaritmo del precio *spot* puede ser caracterizado por un proceso estocástico de tipo Ornstein-Uhlenbeck que, bajo la probabilidad neutral al riesgo, puede escribirse como:

$$dX_t = \kappa(\tilde{\alpha} - X_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t \quad (4)$$

donde $\tilde{\alpha} = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa}$, con precio del mercado de riesgo constante, λ , y $d\tilde{W}_t$ es un movimiento Browniano bajo la medida de martingala.

La solución de la ecuación (4) viene dada por:

$$X_s = e^{-\kappa(s-t)} X_t + (1 - e^{-\kappa(s-t)})\tilde{\alpha} + \sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)} d\tilde{W}_u$$

En el momento T , esta variable sigue una distribución Gaussiana con media y varianza:

$$\begin{aligned} \tilde{E}[X_T | \mathcal{F}_t] &= e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\tilde{\alpha} \\ \tilde{V}[X_T | \mathcal{F}_t] &= \tilde{V} \left(\sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-t)} d\tilde{W}_t \right) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \end{aligned}$$

Por tanto, por las propiedades de la distribución lognormal, el precio de entrega del futuro sobre la mercancía en el momento T es el precio esperado de la mercancía bajo la medida de martingala:

$$\begin{aligned} F(S_t, t, T) &= \tilde{E}[S_T | \mathcal{F}_t] = \exp \left\{ \tilde{E}[X_T | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} \tilde{V}[X_T | \mathcal{F}_t] \right\} \\ &= \exp \left\{ e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\tilde{\alpha} + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \right\} \end{aligned}$$

Tomando logaritmos, se obtiene la siguiente expresión:

$$\ln(F(S_t, t, T)) = e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\tilde{\alpha} + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)})$$

2.3. Modelo de Schwartz y Smith (2000)

Este modelo se ha convertido en un punto de referencia imprescindible a la hora de modelizar los precios de las *commodities*. Estos autores proponen un modelo de dos factores para estos precios que permite reversión a la media de los precios a corto plazo y refleja la incertidumbre sobre el valor de equilibrio al que los precios revierten. El comportamiento empírico de este modelo es estudiado mediante precios de entrega de futuros sobre el petróleo. Este modelo es equivalente al desarrollado en Gibson y Schwartz (1990) en el sentido de que las variables de estado en cada modelo pueden representarse como combinación lineal de las variables de estado en el otro.

Sea S_t el precio *spot* en el momento t de una mercancía. El logaritmo de este precio se descompone como suma de dos factores estocásticos:

$$\ln(S_t) = \chi_t + \xi_t$$

donde χ_t denota la desviación a corto plazo de los precios y ξ_t es el nivel de precios de equilibrio. Posteriormente, se incorpora estacionalidad mediante parámetros variables en el tiempo.

El nivel de precios de equilibrio ξ_t evoluciona según un proceso de Itô que refleja los cambios producidos en dicho nivel de equilibrio. Estos cambios pueden deberse, entre otros motivos, a efectos políticos y regulatorios, expectativas de agotamiento de la oferta y la mejora tecnológica.

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dW_\xi \quad (5)$$

Por otro lado, las desviaciones a corto plazo χ_t se definen como la diferencia entre los precios al contado y el precio de equilibrio. Se esperan que estas desviaciones tiendan a cero y se modelizan mediante un proceso Ornstein-Uhlenbeck. De este modo, se pueden reflejar los cambios en las desviaciones a corto plazo en la demanda debidas a cambios temporales en los precios que se producen como respuesta a situaciones puntuales como, por ejemplo, condiciones climáticas inusuales o interrupciones imprevistas en el suministro.

$$d\chi_t = -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dW_\chi \quad (6)$$

siendo κ la velocidad de reversión a la media y W_ξ y W_χ los procesos de Wiener de ambos procesos correlacionados con coeficiente de correlación constante ρ , es decir, $dW_\xi dW_\chi = \rho_{\xi\chi} dt$.

Consideremos un futuro sobre esta mercancía que vence en el momento T . El precio de entrega en el momento t de este futuro viene dado por la relación $F(S_t, t, T) = \tilde{E}[S_T | \mathcal{F}_t]$ donde la esperanza condicional a la filtración \mathcal{F}_t se toma bajo la medida neutral al riesgo, Q . Bajo esta medida de probabilidad, la versión neutral al riesgo de los procesos (5)-(6) queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d\chi_t &= (-\kappa\chi_t - \lambda_\chi)dt + \sigma_\chi d\tilde{W}_\chi \\ d\xi_t &= \mu_\xi^* dt + \sigma_\xi d\tilde{W}_\xi \end{aligned}$$

siendo $\mu_\xi^* = \mu_\xi - \sigma\lambda_\xi$ y estando los movimientos Brownianos estándar correlacionados, esto es, $d\tilde{W}_\xi d\tilde{W}_\chi = \rho_{\xi\chi} dt$.

Aplicando el lema de Itô a $f(\chi_t) = e^{\kappa t} \chi_t$ es inmediato comprobar que χ_T viene dado por:

$$\chi_T = e^{-\kappa(T-t)} \chi_t + (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \frac{\lambda_\chi}{\kappa} + \sigma_\chi \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} d\tilde{W}_s$$

Tomando esperanzas y varianzas condicionales en esta expresión, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\chi_T | \mathcal{F}_t] &= e^{-\kappa(T-t)} \chi_t + (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \frac{\lambda_\chi}{\kappa} \\ \tilde{V}[\chi_T | \mathcal{F}_t] &= \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \end{aligned}$$

Si ξ_t es conocido entonces, para $T > t$, se tiene que

$$\xi_T = \xi_t + (\mu_\xi - \lambda_\xi)(T - t) + \sigma_\xi (\tilde{W}_\xi(T) - \tilde{W}_\xi(t))$$

Los dos primeros momentos estadísticos de esta variable vienen dados por:

$$\begin{aligned} \tilde{E}[\xi_T | \mathcal{F}_t] &= \xi_t + (\mu_\xi - \lambda_\xi)(T - t) \\ \tilde{V}[\xi_T | \mathcal{F}_t] &= \sigma_\xi^2 (T - t) \end{aligned}$$

Dada la información disponible hasta el momento t , se tiene que la covarianza entre χ_T y ξ_T viene dada por:

$$\text{Cov}[\chi_T, \xi_T | \mathcal{F}_t] = (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa}$$

Suponiendo que el proceso bidimensional $(\chi_t, \xi_t)^T$ sigue una distribución Gaussiana multivariante, la media y matriz de covarianzas vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \tilde{E}[(\chi_T, \xi_T)^T | \mathcal{F}_t] &= \left(e^{-\kappa(T-t)} \chi_t + (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \frac{\lambda_\chi}{\kappa}, \xi_t + (\mu_\xi - \lambda_\xi)(T - t) \right)^T \\ \text{Cov}[\chi_T, \xi_T | \mathcal{F}_t] &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) & (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa} \\ (1 - e^{-\kappa(T-t)}) \frac{\rho_{\chi\xi} \sigma_\chi \sigma_\xi}{\kappa} & \sigma_\xi^2 (T - t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, el logaritmo del precio, $\ln(S_T)$, sigue una distribución Gaussiana con la siguiente media y varianza:

$$\begin{aligned}\tilde{E}[\ln(S_T)|\mathcal{F}_t] &= e^{-\kappa(T-t)}\chi_t + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\frac{\lambda_\chi}{\kappa} + \xi_t + (\mu_\xi - \lambda_{xi})(T - t) \\ \tilde{V}[\ln(S_T)|\mathcal{F}_t] &= \frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)}) + \sigma_\xi^2(T - t) + 2(1 - e^{-\kappa(T-t)})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{\kappa}\end{aligned}$$

Por tanto, el precio *spot* sigue una distribución lognormal:

$$\ln(\tilde{E}[S_T|\mathcal{F}_t]) = e^{-\kappa(T-t)}\chi_t + \xi_t + A(T - t)$$

con

$$\begin{aligned}A(T - t) &= (\mu_\xi - \lambda_\xi)(T - t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\frac{\lambda_\chi}{\kappa} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_\chi^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)}) + \sigma_\xi^2(T - t) + 2(1 - e^{-\kappa(T-t)})\frac{\rho_{\chi\xi}\sigma_\chi\sigma_\xi}{\kappa}\right)\end{aligned}$$

Finalmente, se determina el precio de entrega del futuro aplicando la relación anteriormente mencionada, esto es, $F_{t,T} = \tilde{E}[S_T|\mathcal{F}_t]$.

2.4. Modelo de Lucía y Schwartz (2002)

Estos autores examinan la importancia de los patrones regulares en el comportamiento de los precios de la electricidad analizando los precios *spot*, futuros y *forward* en el Nord Pool (mercado energético nórdico) ya que el patrón sistemático estacional durante todo el año es de crucial importancia para explicar la forma de los precios de los futuros. Para captar el patrón estacional de la curva de futuros utilizan una función sinusoidal.

La modelización del precio *spot* incorpora dos tipos de componentes. El primero es un componente determinista predecible que explica las regularidades en la evolución de los precios, como una tendencia determinista y cualquier comportamiento periódico natural. Por otro lado, el segundo componente es estocástico y sigue un proceso de difusión en tiempo continuo. Por simplicidad, se consideran tipos de interés constantes.

Tomamos el modelo de un factor basado en el logaritmo del precio *spot* suponiendo que el proceso del logaritmo del precio puede escribirse de la siguiente manera:

$$\ln(S_t) = f_t + Y_t, \quad t \in [0, \infty)$$

donde f_t es una función determinista variable en el tiempo. Y_t sigue un proceso de reversión a la media de tipo Ornstein - Uhlenbeck:

$$dY_t = -\kappa Y_t dt + \sigma dW_t$$

Suponiendo un precio del mercado de riesgo constante, λ , la versión neutral al riesgo de este proceso es:

$$dY_t = \kappa(\alpha^* - Y_t)dt + \sigma d\widetilde{W}_t, \quad \alpha^* = -\frac{\sigma\lambda}{\kappa}$$

La función determinista f_t captura los componentes del comportamiento de los precios de la electricidad derivados de regularidades naturales a lo largo del tiempo. De este modo, se intenta reflejar que los precios tienden a ser menores en las estaciones cálidas y más altos en las estaciones más frías. Por ello, el comportamiento estacional será descrito mediante un proceso que fluctúa aleatoriamente alrededor de una media constante a largo plazo.

De manera similar, Pilipović (2007) sugirió utilizar una función sinusoidal como la función coseno para reflejar el patrón estacional de la serie temporal de los precios. Adicionalmente, la utilización de variables dicotómicas permite una mayor flexibilidad para capturar regularidades naturales en el comportamiento de la variable subyacente.

Por tanto, esta función determinista incluirá una constante más dos términos. Estos términos intentan captar, respectivamente, la variación en el nivel de precios entre días laborales y no laborales y la evolución estacional de los precios a lo largo del año. En concreto, esta función viene dada por:

$$f_t = \alpha + \beta D_t + \gamma \cos\left((t + \tau) \cdot \frac{2\pi}{365}\right)$$

donde D_t tomará el valor 1 si t es fin de semana o festivo y se anula en caso contrario. Los parámetros constantes son α , β , γ y τ .² La función coseno se mide en radianes con periodicidad anual ya que refleja el patrón estacional en la evolución de la variable precio a lo largo del año.

Sea $X_t = \ln(S_t)$. Bajo la probabilidad neutral al riesgo tenemos:

$$X_s = f_s + e^{-\kappa(s-t)}Y_t + (1 - e^{-\kappa(s-t)})\alpha^* + \sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)}d\widetilde{W}_u, \quad s > t$$

Por tanto, el precio *spot* de la mercancía en el momento T sigue una distribución lognormal. Finalmente, el precio en el momento t del futuro sobre esta mercancía y vencimiento en T viene dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} F(S_t, t, T) &= \widetilde{E}[S_T | \mathcal{F}_t] = \exp\left\{\widetilde{E}[X_T | \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2}\widetilde{V}[X_T | \mathcal{F}_t]\right\} \\ &= \exp\left\{f_T + e^{-\kappa(T-t)}(\ln(S_t) - f_t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha^* \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)})\right\} \end{aligned}$$

²El coeficiente β intenta capturar los cambios en el nivel de la variable para fines de semana y días festivos.

2.5. Modelo de Sørensen (2002)

Este modelo se centra en la dinámica de los precios de tres activos agrícolas diferentes. El conjunto de datos consiste en observaciones semanales de los precios de entrega de futuros sobre soja, trigo y maíz. Estos precios son obtenidos del CBOT para el periodo Enero de 1972 - Julio de 1997.

Este autor propone añadir un factor estacional determinista en el modelo de Schwartz y Smith (2000). En concreto, el logaritmo de los precios *spot* de estas materias primas, $X_t = \ln(S_t)$, se modeliza como suma de un componente estacional determinista descrito por una función de tiempo y dos variables de estado x_t y z_t . En concreto, se tiene

$$X_t = s_t + x_t + z_t$$

con

$$s_t = \sum_{k=1}^K (\gamma_k \cos(2\pi kt) + \gamma_k^* \sin(2\pi kt))$$

donde $\gamma_k, \gamma_k^*, k = 1, \dots, K$ son parámetros constantes. El tiempo se mide en años y, por tanto, el primer sumando presenta una frecuencia anual, el segundo término indica una frecuencia semestral y así sucesivamente.

Este componente estacional se modeliza mediante una combinación lineal parametrizada de funciones trigonométricas con frecuencias estacionales capturando así los movimientos que están relacionados con la temporada.

Las variables de estado tienen la siguiente forma:

$$dx_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_{1t} \quad (7)$$

$$dz_t = -\kappa z_t dt + v dW_{2t} \quad (8)$$

donde los movimientos Brownianos incluidos en ambos procesos están correlacionados con coeficiente de correlación constante ρ .

La variable de estado (7) sigue un movimiento Browniano aritmético con parámetros constantes μ y σ y permite describir las variaciones permanentes que pueden experimentar los precios debido a cambios permanentes en la oferta o la demanda. Por otro lado, la variable de estado estacionaria (8) sigue un proceso Ornstein-Uhlenbeck con parámetros constantes κ y v . Este proceso es estacionario si $\kappa > 0$. Esta variable modeliza los posibles cambios en los precios de las materias primas que se deben a variaciones temporales en la oferta o la demanda, intentando captar de este modo la posible reversión a la media en estos precios.

Los precios de entrega de los futuros se determinan siguiendo el enfoque de no-arbitraje de Schwartz (1997). Considerando la medida de martingala, la versión neutral al riesgo de los procesos (7)-(8) viene dada por:

$$\begin{aligned} dx_t &= \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma d\widetilde{W}_{1t} \\ dz_t &= \kappa(\alpha^* - z_t)dt + v d\widetilde{W}_{2t} \end{aligned}$$

siendo $\alpha = \mu - \lambda_x$ y $\alpha^* = -\frac{\lambda_z v}{\kappa}$, con precios del mercado de riesgo constantes, λ_x y λ_z .

Por tanto, tal como indica Cox, Ingersoll y Ross (1981), el precio de entrega en el momento t de un contrato futuro que expira en el momento $T = t + \tau$, $F(t, T)$, se determina mediante las expectativas (bajo la medida neutral al riesgo) del precio al vencimiento:

$$F(t, T) = \exp \{s(T) + A(\tau) + x_t + z_t e^{-\kappa\tau}\}$$

donde

$$A(\tau) = \alpha\tau - \frac{\lambda_z - \rho\sigma v}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}) + \frac{v^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa\tau})$$

3. Modelo de Moreno *et al.* (2017)

Estos autores introducen un modelo de valoración para los precios de las mercancías obteniendo una expresión cerrada para los precios de los contratos futuros. El principal supuesto de este modelo es que dichos precios convergen a un valor a largo plazo que experimenta fluctuaciones periódicas y suaves durante largos periodos de tiempo. El nivel de reversión a la media se modeliza mediante una serie de Fourier.

Para analizar la posible evidencia y relevancia de dichas fluctuaciones a largo plazo en el precio de los productos energéticos, estos autores contrastan este modelo utilizando precios de futuros sobre el gas natural, petróleo y gasóleo de calefacción.

Este modelo anida los modelos propuestos en Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002) pues incorpora fluctuaciones estacionales y cíclicas así como fluctuaciones a largo plazo. El análisis empírico realizado por estos autores ilustra que su modelo supera a estos dos modelos proporcionando así una herramienta simple y muy útil para la gestión de riesgos y como modelo de valoración de activos derivados.

Este modelo unifactorial modeliza el precio de la mercancía a través de la suma de dos componentes:

$$\ln(S_t) = g(t) + Y_t$$

La función determinista $g(t)$ recoge el comportamiento estacional que, como se ha comentado anteriormente, se modeliza por una serie de Fourier:

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} [A_n e^{in\omega_g t}] \quad (9)$$

El componente Y_t sigue un proceso de reversión a la media y converge a z_t , una función periódica que depende del tiempo. De este modo, se pueden captar las variaciones a largo plazo en la tendencia estocástica del logaritmo de los precios *spot*.

Dicha función se caracteriza mediante una serie de Fourier y, para que tenga sentido económico, sólo se tiene en cuenta la parte real. Por tanto, el proceso Y_t sigue un proceso estocástico que viene determinado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dY_t &= \kappa(z(t) - Y_t)dt + \sigma dW_t \\ z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re} [B_n e^{in\omega_z t}] \end{aligned}$$

donde los parámetros κ (velocidad de reversión a la media), σ (difusión del proceso) y ω_z son constantes y W_t es un proceso de Wiener estándar. Con más detalle, $A_n = A_{x,n} + iA_{y,n}$ y $B_n = B_{x,n} + iB_{y,n}$ donde $A_{x,n}, A_{y,n}, B_{x,n}, B_{y,n} \in \mathbb{C}$ y denotan la amplitud y la fase en las representaciones de Fourier para, respectivamente, las funciones $g(t)$ y $z(t)$.

Si $B_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $A_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ este modelo anida el modelo de Schwartz (1997). Si $B_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y consideramos que $g(t)$ coincide con la función f_t indicada en Lucía y Schwartz (2002), este modelo también anida al de dichos autores.

Suponemos que el precio del mercado de riesgo, λ , es constante para representar el modelo bajo la probabilidad neutral al riesgo:

$$dY_t = \mu_t dt + \sigma d\widetilde{W}_t \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_t &= \kappa(\alpha + \hat{z}(t) - Y_t) \\ \alpha &= B_0 - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} \\ \hat{z}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} [B_n e^{in\omega_z t}] \end{aligned}$$

donde $B_0 \in \mathbb{R}$ y, bajo la probabilidad neutral al riesgo, el proceso de Wiener estándar viene dado por $\widetilde{W}_t = W_t + \lambda t$.

Bajo la probabilidad neutral al riesgo, la solución de la ecuación (10) viene dada por:

$$Y_s = e^{-\kappa(s-t)}Y_t + (1 - e^{-\kappa(s-t)})\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[\frac{\kappa B_n}{\kappa + in\omega_z} (e^{in\omega_z s} - e^{-\kappa(s-t)+in\omega_z t}) \right] \\ + \sigma \int_t^s e^{-\kappa(s-u)} d\widetilde{W}_u$$

Por tanto, la distribución condicional del logaritmo del precio *spot* de la mercancía $X_t = \ln(S_t)$ al vencimiento T sigue una distribución normal cuya media y varianza (bajo la probabilidad neutral al riesgo) vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}[X_T|\mathcal{F}_t] &= g(t) + e^{-\kappa(T-t)}(\ln(S_t) - g(t)) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[\frac{\kappa B_n}{\kappa + in\omega_z} (e^{in\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t)+in\omega_z t}) \right] \\ \widetilde{V}[X_T|\mathcal{F}_t] &= \widetilde{V} \left(\sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} d\widetilde{W}_u \right) = \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \end{aligned}$$

Por tanto, se puede obtener el precio a plazo de una mercancía para el momento T utilizando las propiedades de la distribución lognormal bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo:

$$\begin{aligned} F(S_t, t, T) &= \widetilde{E}[S_T|\mathcal{F}_t] = \exp \left\{ \widetilde{E}[X_T|\mathcal{F}_t] + \frac{1}{2} \widetilde{V}[X_T|\mathcal{F}_t] \right\} \\ &= \exp \left\{ g(T) + e^{-\kappa(T-t)}(\ln(S_t) - g(t)) \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[\frac{\kappa B_n}{\kappa + in\omega_z} (e^{in\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t)+in\omega_z t}) \right] \right\} \end{aligned}$$

En forma logarítmica tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \ln(F(S_t, t, T)) &= g(T) + e^{-\kappa(T-t)}(\ln(S_t) - g(t)) \\ &\quad + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha + \frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)}) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[\frac{\kappa B_n}{\kappa + in\omega_z} (e^{in\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t)+in\omega_z t}) \right] \end{aligned}$$

A continuación analizamos los componentes que forman parte del logaritmo del precio del futuro:³

$$\begin{aligned}
\ln(F(S_t, t, T)) = & \underbrace{e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t)}_{\text{Efecto del spot}} + \underbrace{g(T) - e^{-\kappa(T-t)}g(t)}_{\text{Efecto de periodicidad a } c/p \text{ y } m/p} \\
& + \underbrace{\frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)})}_{\text{Efecto de volatilidad}} \\
& + \underbrace{(1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left[\frac{\kappa B_n}{\kappa + in\omega_z} (e^{in\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t)+in\omega_z t}) \right]}_{\text{Efecto de long-term swing}}
\end{aligned}$$

En resumen, tal como comentan estos autores, el logaritmo del precio del futuro está formado por dos componentes:

$$\ln(F(S_t, t, T)) = M(S_t, t, T; \theta) + N(t, T; \theta)$$

En más detalle, tenemos lo siguiente:

1. Componente Schwartz (1997) & Componente Lucía y Schwartz (2002), para reproducir el comportamiento de los precios *spot*:

$$M(S_t, t, T; \theta) = e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t) + (1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha + \frac{\sigma^2}{4\kappa}(1 - e^{-2\kappa(T-t)})$$

con vector de parámetros estructurales $\theta = (\alpha, \sigma, \kappa, \{B_n\}_{n=1}^{\infty}, \omega_z)$ y vector de parámetros cíclicos / estacionales $\theta_m = (\{A_n\}_{n=0}^{\infty}, \omega_f)$.

2. Componente de estacionalidad, el cual representa el aspecto novedoso respecto a modelos clásicos de valoración de *commodities*. Está formado por dos términos, el primero describe las fluctuaciones estacionales y periódicas alrededor del precio medio a largo plazo y el segundo captura la evolución temporal del nivel de reversión a la media:

$$N(t, T; \theta) = g(T) - e^{-\kappa(T-t)}g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left[\frac{\kappa B_n}{\kappa + in\omega_z} (e^{in\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t)+in\omega_z t}) \right] \quad (11)$$

donde $g(t)$ viene dada por (9).

³Por *long-term swing* entendemos las oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media.

4. Método econométrico

Esta sección describe el método econométrico mediante el cual se estimarán los parámetros de los diferentes modelos que se utilizan para analizar empíricamente los precios de diferentes productos agrícolas.

Una de las dificultades de este análisis empírico reside en la complejidad para encontrar el precio *spot* de algunas *commodities*. Otro problema que surge es el cálculo del tiempo al vencimiento para los datos diarios de cada contrato de futuro. Para la estimación de los parámetros necesitamos calcular los días laborales existentes entre el dato diario seleccionado hasta el día hábil anterior al décimoquinto día del calendario del mes de entrega⁴.

Estimaremos tres especificaciones del modelo propuesto en Moreno *et al.* (2017) así como los modelos propuestos en Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002). Para estos cinco modelos vamos a estimar el vector de parámetros $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5^j, \beta_6^j, \beta_7^j, \beta_8^j)$, $j = 1, 2, \dots, k$ (siendo k el número de vencimientos considerados en la estimación) tales que se minimiza la suma de errores de ajuste al cuadrado.

Por tanto, el problema de optimización que vamos a resolver para cada especificación del modelo es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \left(SR(\hat{\theta}; \hat{\theta}_m) \right) &= \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^k (P_{jt} - \beta' \eta_{j,t})' W (P_{jt} - \beta' \eta_{j,t}) \\ \beta' \eta_{j,t} &= \sum_{i=1}^8 \beta_i \eta_{ij,t} \end{aligned}$$

donde $W = I_k$. Las expresiones que dependen de los parámetros estructurales θ y θ_m son β_j , P_{jt} y el vector de variables $\eta_{j,t}$, $j = 1, 2, \dots, k$. Los sistemas de ecuaciones que resultan de cada modelo están identificados y, por tanto, el conjunto de ecuaciones que relaciona β_j con el conjunto de parámetros estructurales (θ, θ_m) tiene solución única.

Puede ser interesante comentar que el precio de cada *commodity* presenta una estructura compartida por cada contrato futuro pero, adicionalmente, pueden existir componentes estacionales y cíclicos específicos para cada vencimiento del contrato futuro correspondiente. Los parámetros de todos los modelos serán estimados utilizando los precios de entrega de los j -th futuros más cercanos de forma que la estimación sea eficiente.

⁴Por ejemplo, si nuestro primer día es 30/03/1982 y queremos calcular el tiempo al vencimiento para el segundo futuro más cercano para el caso del maíz (Los vencimientos del futuro del maíz son en Marzo, Mayo, Julio, Septiembre y Diciembre), tenemos que calcular los días laborales entre el 30/03/1982 hasta el 14/07/1982 ya que es el último día del futuro sobre dicho producto.

Tenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
P_t &= \ln(F(S_t, t, T)) - e^{\kappa(T-t)} \ln(S_t) = \sum_{i=1}^8 \beta_i \eta_{it} + u_t \\
\eta_{1t} &= 1 - e^{-\kappa(T-t)} \\
\eta_{2t} &= \frac{1}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)})
\end{aligned}$$

donde P_t y η_{it} son funciones no lineales de los parámetros estructurales y u_t denota el error de aproximación. η_{it} , $i = 3, \dots, 8$ es diferente para cada modelo y será comentado con más detalle a continuación.

Para separar el componente común de largo plazo y los componentes específicos de un cierto vencimiento necesitamos imponer un nivel de reversión a la media a largo plazo común para todos los vencimientos elegidos pero permitiendo que los componentes estacionales y cíclicos varíen a lo largo de los vencimientos.

Comparamos los dos modelos de referencia (Modelos 1 y 2) propuestos en Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002) frente a tres especificaciones del modelo propuesto por Moreno *et al.* (2017) (Modelos 3, 4 y 5). En más detalle, tenemos lo siguiente:

- El **Modelo 1** fue propuesto en Schwartz (1997) e incorpora reversión a la media. El vector de parámetros es $\theta = (\tilde{\alpha}, \kappa, \sigma)$:

$$\beta_1 = \tilde{\alpha} = \mu - \frac{\sigma^2}{2\kappa} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa}, \quad \beta_2 = \sigma^2, \quad \beta_i = 0, \quad i = 3, \dots, 8$$

- El **Modelo 2** fue propuesto en Lucía y Schwartz (2002) e incorpora un componente de estacionalidad. Estos autores utilizan días naturales y una variable dicotómica para tener en cuenta los fines de semana y los días festivos. En nuestro caso, vamos a utilizar días de negociación.⁵ Por tanto, la versión transformada de su modelo es:

$$\ln(S_t) = f_t + Y_t$$

con

$$f_t = \alpha + \gamma \cos \left((t + \varphi) \cdot \frac{2\pi}{260} \right)$$

donde α , γ y φ son parámetros constantes.

⁵En concreto, consideramos 260 días por año.

El segundo componente, Y_t , es un proceso estocástico con la siguiente estructura:

$$dY_t = -\kappa Y_t dt + \sigma dW_t$$

donde κ y σ son parámetros constantes.

Para incorporar el componente estacional de frecuencia anual necesitamos los siguientes parámetros $\theta = (\tilde{\alpha}, \kappa, \sigma, \gamma, \rho)$:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\lambda\sigma}{\kappa}, & \beta_2 &= \sigma^2, & \beta_3 &= \gamma, & \beta_i &= 0, \quad i = 4, \dots, 8 \\ \eta_{3t} &= \cos\left((T + \varphi) \cdot \frac{2\pi}{260}\right) - e^{\kappa(T-t)} \cos\left((t + \varphi) \cdot \frac{2\pi}{260}\right) \end{aligned}$$

A continuación, analizamos tres especificaciones del modelo propuesto en Moreno *et al.* (2017).

- El **Modelo 3** incorpora oscilaciones a largo plazo y define la función $N(t, T; \theta)$ (véase (11)) mediante una serie de Fourier con un sólo término para el nivel de reversión a la media a largo plazo, $z(t)$:

$$N(t, T; \theta) = Re \left[\frac{\kappa B}{\kappa + i\omega_z} (e^{i\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t) + i\omega_z t}) \right]$$

Los parámetros estructurales a estimar son $\theta = (\alpha, \kappa, \sigma, B_x, B_y, \omega_z)$. Entonces, nosotros tenemos:

$$\beta_1 = \alpha, \quad \beta_2 = \sigma^2, \quad \beta_i = 0, \quad i = 5, 6, 7, 8$$

Los componentes de Fourier son:

$$\beta_3 \eta_{3t} + \beta_4 \eta_{4t} = Re \left[(B_x + iB_y) \frac{\kappa}{\kappa + i\omega_z} (e^{i\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t) + i\omega_z t}) \right]$$

- El **modelo 4** incluye oscilaciones a largo plazo y un componente de estacionalidad. Este modelo surge de añadir en el modelo 3 una representación en serie de Fourier para $g(t)$ con una sola frecuencia para poder capturar el componente estacional o cíclico.

Por tanto, la función $N(t, T; \theta)$ toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} N(t, T; \theta) &= Re \left[\frac{\kappa B}{\kappa + i\omega_z} (e^{i\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t) + i\omega_z t}) \right] \\ &\quad + Re \left[A_1 (e^{i\omega_{g,1} T} - e^{-\kappa(T-t) + i\omega_{g,1} t}) \right] \end{aligned}$$

Los coeficientes a estimar son $\beta_1 = \alpha$, $\beta_2 = \sigma^2$, $\beta_7 = \beta_8 = 0$ y los componentes de Fourier son:

$$\begin{aligned}\beta_3\eta_{3t} + \beta_4\eta_{4t} &= Re \left[(B_x + iB_y) \frac{\kappa}{\kappa + i\omega_z} (e^{i\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t) + i\omega_z t}) \right] \\ \beta_5\eta_{5t} + \beta_6\eta_{6t} &= Re \left[(A_{x,1} + iB_{y,1}) e^{i\omega_{g,1} t} \right]\end{aligned}$$

Si utilizamos k futuros tendremos las variables P_{jt} y $\{\eta_{ijt}\}_{i=1}^6$ para cada vencimiento $j = 1, 2, \dots, k$. El componente estacional / cíclico puede ser específico de cada vencimiento. Finalmente, el vector de parámetros se divide en $\theta = (\alpha, \kappa, \sigma, B_{x,y}, \omega_z)$, que es común para todos los vencimientos, y $\theta_m = (A_{x,1}^j, A_{y,1}^j, \omega_{f,1}^j)$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

- El **Modelo 5** incorpora dos términos en la expansión de Fourier, $g(t)$, que corresponden a la variación estacional o componente cíclico y un término en la media a largo plazo $z(t)$, capturando así las fluctuaciones del ciclo económico y la estacionalidad a corto plazo.

En este caso, la función $N(t, T; \theta)$ viene dada por:

$$\begin{aligned}N(t, T; \theta) &= Re \left[\frac{\kappa B}{\kappa + i\omega_z} (e^{i\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t) + i\omega_z t}) \right] \\ &+ \sum_{l=1,2} Re \left[A_l (e^{i\omega_{g,l} T} - e^{-\kappa(T-t) + i\omega_{g,l} t}) \right]\end{aligned}$$

donde $\omega_{f,1}$ y $\omega_{f,2}$ son múltiplos de la frecuencia ω_f .

Como coeficientes a estimar, tenemos $\beta_1 = \alpha$, $\beta_2 = \sigma^2$ y los componentes de Fourier vienen dados por:

$$\begin{aligned}\beta_3\eta_{3t} + \beta_4\eta_{4t} &= Re \left[(B_x + iB_y) \frac{\kappa}{\kappa + i\omega_z} (e^{i\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t) + i\omega_z t}) \right] \\ \sum_{i=5}^8 \beta_i \eta_{it} &= \sum_{l=1,2} Re \left[(A_{x,l} + iA_{y,l}) e^{i\omega_{g,l} t} \right]\end{aligned}$$

Al igual que en el modelo anterior, las variables a considerar son P_{jt} y $\{\eta_{ijt}\}_{i=1}^8$ para cada vencimiento $j = 1, 2, \dots, k$. Los parámetros estructurales comunes entre los vencimientos son los mismos que en el modelo 4, es decir, $\theta = (\alpha, \kappa, \sigma, B_{x,y}, \omega_z)$, mientras que los parámetros estacionales / cíclicos son $\theta_m = (A_{x,1}^j, A_{y,1}^j, A_{x,2}^j, A_{y,2}^j, \omega_{f,1}^j, \omega_{f,2}^j)$ para $j = 1, 2, \dots, k$.

Los modelos 4 y 5 incluyen más de una serie de Fourier. La frecuencia estimada más baja se asocia a oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversion a la media. El resto de frecuencias estimadas (una en el modelo 4 y dos en el modelo 5) sirven para caracterizar los componentes estacionales o cíclicos de los precios de los futuros.

Finalmente, al igual que en Moreno *et al.* (2017), en la estimación de las series de Fourier para $g(t)$ y $z(t)$, vamos a permitir que los datos sugieran las frecuencias sin imponer ningún tipo de restricciones a priori.

5. Datos

El estudio empírico se basa en observaciones diarias⁶ de los precios *spot* y de los precios de cierre de los contratos futuros⁷ sobre maíz, trigo y soja, negociados en el CBOT.⁸ Todas las series temporales de precios han sido extraídas de Datastream.

Los futuros⁹ sobre el maíz y el trigo tienen cinco vencimientos en el año:¹⁰ Marzo, Mayo, Julio, Septiembre y Diciembre. Sin embargo, los futuros sobre soja tienen siete vencimientos en un año: Enero, Marzo, Mayo, Julio, Agosto, Septiembre y Noviembre. Para nuestro estudio seleccionamos los futuros con vencimientos segundo, tercero, quinto, octavo y undécimo. El motivo de esta elección es que queremos analizar empíricamente la fijación de precios a través de los distintos modelos para vencimientos que incluyan todo un año y vencimientos que no lleguen a completar el año natural.

El tipo de maíz seleccionado es el maíz amarillo con grado número 2. El precio *spot* y los contratos de futuros¹¹ $Zc-2$, $Zc-3$, $Zc-5$ cubren el periodo 02/01/1979 hasta el 10/05/2017 mientras que, para $Zc-8$, el período es desde

⁶Sólo tenemos en cuenta los días laborales.

⁷Estos precios de cierre son un promedio de los precios a los que se negocia un contrato. Los futuros sobre productos agrícolas requieren la entrega física del subyacente, la cual se produce el segundo día hábil después del último día de negociación (día hábil anterior al décimoquinto día del calendario del mes del contrato) del mes de entrega. Para el *CME Globex*, el horario de negociación es de domingo a viernes, de 2am a 8:15pm, hora española.

⁸Estos precios de cierre están expresados en céntimos de dólar por *bushel* (unidad de volumen) con un tamaño del contrato de 5000 *bushels*.

⁹El símbolo base para las *commodities* incluye una o dos letras. Así tenemos Zc para el maíz, W para el trigo y S para la soja.

¹⁰Los códigos de abreviatura por mes para la construcción del código (*ticker*) de estos futuros son: Enero (F), Febrero (G), Marzo (H), Abril (J), Mayo (K), Junio (M), Julio (N), Agosto (Q), Septiembre (U), Octubre (V), Noviembre (X) y Diciembre (Z).

¹¹El j -th futuro más cercano al vencimiento se denota mediante el código de la *commodity* y el número que indique el vencimiento más cercano. Por ejemplo, $Zc-2$ denota el contrato futuro con el segundo plazo más corto hasta su vencimiento.

26/05/1988 hasta 10/05/2017 y Zc-11 comprende desde el 04/10/1999 hasta 10/05/2017, lo que supone un total de 10007, 7555 y 4593 observaciones, respectivamente.

El segundo activo seleccionado es el trigo rojo suave (grado número 2). El precio *spot* y los contratos de futuros W-2, W-3, W-5 cubren desde el 30/03/1982 hasta el 10/05/2017 mientras que, para W-8, el periodo considerado va del 23/03/1992 hasta el 10/05/2017. No se considera el contrato futuro W-11 pues no disponemos de datos. En total disponemos de 9162 observaciones para el precio *spot* y para los futuros W-2, W-3, W-5 y 6558 observaciones para el contrato de futuro W-8.

Finalmente, la variedad de soja seleccionada es la de tipo amarillo con grado número 1. Los datos para el precio *spot* y los contratos futuros S-2, S-3, S-5 y S-8 cubren desde el 02/01/1979 hasta el 10/05/2017 mientras que, para S-11, el período es desde el 20/06/1988 hasta 10/05/2017. En total disponemos de 10007 y 7538 observaciones, respectivamente.

A continuación, vamos a realizar un análisis descriptivo de los precios de estos tres subyacentes para proporcionar diversos detalles sobre sus características y sobre el comportamiento que presentan las series de tiempo de los datos durante el periodo muestral.

La Tabla 1 presenta diversas medidas descriptivas de los precios *spot* y de los contratos futuros más cercanos al vencimiento considerados. En concreto, esta tabla incluye los cuatro primeros momentos muestrales junto con el coeficiente de variación.¹²

El análisis de los datos del maíz indica que, cuando aumenta el vencimiento, el precio medio aumenta, la volatilidad disminuye y se obtienen datos más simétricos y con menor curtosis para todos los contratos excepto para el futuro Zc-11 que presenta un mayor precio medio junto con una disminución simultánea en el resto de medidas.

Esta disminución de la volatilidad a medida que aumenta el tiempo a vencimiento es conocida como efecto Samuelson¹³ pues Samuelson (1965) postuló que la volatilidad del precio de un contrato futuro es una función decreciente del tiempo hasta vencimiento. En mercados estacionales, este efecto tiende a confundirse con el efecto que produce la estacionalidad. La estacionalidad provoca que las épocas donde se genera un mayor flujo de información relativa al nivel de producción coincida con la época de mayor volatilidad en todos los vencimientos. De este modo, los contratos con vencimiento posterior a ese periodo pueden exhibir tramos de volatilidades crecientes con el vencimiento.

¹²Este coeficiente es igual a la desviación típica dividida por la media y es la medida adecuada para comparar volatilidades de diferentes variables aleatorias.

¹³Una alternativa para analizar mejor este efecto puede ser utilizar una medida de volatilidad diaria pues la utilización de precios y medias puede oscurecer dicho efecto.

Observando los valores obtenidos para el trigo vemos como, al aumentar el tiempo al vencimiento, el precio medio aumenta, produciendo una disminución de la volatilidad, la asimetría y la curtosis. No ocurre lo mismo con la soja ya que un mayor tiempo al vencimiento conlleva disminuciones en todos los estadísticos descriptivos.

Todos los precios *spot* y de entrega de los futuros han experimentado una fluctuación en torno a su media por debajo del 45 %. En todos los casos, la asimetría presenta un signo positivo siendo más probables los valores altos extremos que los valores bajos extremos. Finalmente, para los precios *spot* y los contratos futuros con vencimiento segundo, tercero, quinto y octavo para el caso de la soja, los valores de la curtosis son especialmente elevados.

Puede ser interesante comentar que el precio *spot* presenta unos estadísticos muy similares a los futuros con vencimientos más cercanos y, por ello, el precio *spot* puede considerarse como una *proxy* adecuada de dichos precios futuros. Por tanto, una alta correlación entre ambos puede ayudar a diversificar el riesgo tomando una cierta posición en ambos para realizar la correspondiente cobertura. Es decir, una alta correlación entre el precio *spot* y el precio futuro permite aplicar el principio de diversificación que establece la teoría de carteras y obtener una cartera (combinación del activo subyacente y un futuro sobre él) cuyo riesgo específico es menor al de la posición original en el activo subyacente.

La Figura 1 presenta las series temporales del precio *spot* y de los contratos futuros sobre el maíz. Una inspección visual sugiere que las series de los futuros presentan un comportamiento muy similar al del precio *spot*. Este gráfico también muestra que los precios futuros están en *contango* para los vencimientos a corto plazo (es decir, los j -th más cercanos a vencimiento) mientras que los futuros a largo plazo se sitúan en *backwardation*.¹⁴ Cabe señalar que en Agosto del 2012 se produce la mayor subida experimentada por el precio *spot* para el periodo escogido debido a la sequía sufrida en Estados Unidos. A partir de ese momento el precio de esta materia prima entró en un periodo de fuerte volatilidad.

La Figura 2 muestra la evolución temporal del precio *spot* y de los futuros sobre el trigo. Podemos ver que, en Marzo de 2008, el precio *spot* experimentó la mayor subida en su historia como consecuencia de la liberalización de la agricultura. En este caso los futuros alternan entre *contango* y *backwardation* en función, principalmente, de los cambios de inventarios. En otras palabras, el nivel de dichos inventarios y su evolución temporal ayudan a explicar la curva de los precios de los futuros: una reducción en dichos niveles implica

¹⁴Contango (*backwardation*) indica que los futuros cotizan por encima (debajo) del precio *spot* de su activo subyacente.

una situación de *backwardation* y viceversa.

Finalmente, la Figura 3 indica el comportamiento del precio *spot* y de los precios de los futuros sobre la soja. Este producto registró su mayor caída en Julio de 1999 debido a una serie de factores como la sobreoferta de oleaginosas en el mercado internacional en combinación con un aumento de la producción. Por otro lado, su mayor subida se produce en Septiembre del 2012 debido a la sequía de materias primas en Estados Unidos durante ese año. Este gráfico muestra una alternancia de *contango* y *backwardation* en estos futuros al igual que ocurría en el caso del trigo.

6. Análisis empírico de los modelos

Esta sección incluye el análisis empírico implementado con los cinco modelos aplicado a datos de precios de futuros sobre maíz, trigo y soja. Comentaremos con detalle los resultados obtenidos para el maíz y los resultados para trigo y soja se indicarán de manera más resumida.

6.1. Maíz

La Tabla 2 muestra los parámetros estimados para cada modelo. Esta tabla también incluye tres medidas de bondad de ajuste: a) valor mínimo de la suma de errores al cuadrado, $\sum_t \min SR(\hat{\theta}_t) = \sum_t \hat{u}_t^2$, b) desviación típica de los errores, $(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2)^{1/2}$ y c) error absoluto medio, $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |\hat{u}_t|$. La Tabla 3 indica la suma de errores cuadráticos, componentes y comparativa para cada uno de los modelos. Una de las principales conclusiones es que la inclusión de términos de Fourier en el proceso estocástico que sigue el (log)-precio de los futuros mejora el ajuste a los datos observados en el mercado en el periodo muestral analizado.

La diferencia entre los modelos 1 y 2 es poco significativa pues, al incorporar el componente estacional (frecuencia anual), el ajuste sólo mejora un 3,65%. Esto no quiere decir que los precios de los futuros no presenten una estacionalidad anual sino que dicho componente ya está presente en el precio pues se hereda de los precios *spot*. Para analizar mejor lo que ocurre en estos dos modelos, la Tabla 3 muestra que, para el futuro Zc-11, se produce un empeoramiento cercano al 2% debido a que la incorporación de la frecuencia anual no produce una mejora adicional. Además, sólo para los dos primeros futuros se consigue una mejora que fluctúa entre 7% y 10%.

El modelo 3 incorpora las oscilaciones en el nivel de reversión a la media mediante el término de Fourier y reduce la suma de errores al cuadrado del modelo 2 en un 38.48%. Para todos los vencimientos, se obtiene una

frecuencia estimada de, aproximadamente, 46.5 años para las fluctuaciones a largo plazo. En comparación con el modelo 1, se obtiene una reducción del 40.73 % en la suma de errores al cuadrado.

El modelo 4 incluye un componente estacional y, adicionalmente, se introduce una representación de Fourier con una frecuencia para los componentes estacionales y cíclicos. Este modelo mejora significativamente el ajuste en un 55,62 %, 53,94 %, 25,12 % con respecto a los modelos 1, 2 y 3, respectivamente. La mejora sobre el modelo 2 se debe a las oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media el cual tiene un periodo de 50 años, superior al que hemos obtenido para el modelo 3, que eran 46.5 años.

La incorporación de una segunda frecuencia en la serie de Fourier nos lleva al modelo 5, el cual reduce la suma de errores cuadráticos en 36,02 % y 14.56 % con respecto a, respectivamente, los modelos 3 y 4. Al incorporar el término de Fourier se obtiene una frecuencia de 53 años para las fluctuaciones a largo plazo, valor superior al estimado por los modelos 3 y 4. Este término captura un componente periódico que sugiere un periodo de 9 años para todos los contratos excepto para los contratos Zc-8 y Zc-11 donde, se obtiene, respectivamente, 10 y 3 años. La frecuencia restante estimada fluctúa entre 6 y 10 años excepto para el Zc-3, donde se obtiene una frecuencia anual.

La Figura 4 muestra el nivel de reversión a la media (*long-term swing*) en el modelo 5 para los cinco contratos futuros e ilustra la sincronización entre los niveles obtenidos para los diferentes vencimientos.

Por tanto, concluimos que, aunque aumentar el número de términos en la serie de Fourier mejoraría el ajuste a los datos observados, las especificaciones más sencillas parecen suficientes para mejorar significativamente el ajuste obtenido por los modelos de Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002).

A continuación, se realiza un análisis espectral a todos los contratos futuros para tener una primera evidencia sobre la (posible) presencia de términos periódicos de diferente naturaleza en el maíz. La Figura 5 muestra los resultados obtenidos. Esta figura sólo muestra un máximo global correspondiente a un periodo cercano a los 53 años y no presenta ningún máximo local alrededor de la frecuencia anual. Por otro lado, nuestras estimaciones sugieren que la fluctuación estacional de la periodicidad anual en el contrato Zc-3 se explica en parte por una característica similar en los precios *spot* mientras que el resto se explica a través de los precios de futuros.

La Figura 6 muestra, para el futuro Zc-3, los precios ajustados para los cinco modelos estimados junto con el precio observado para dicho futuro. Hemos elegido este futuro pues es el que presenta una frecuencia estimada de 1 año. Los modelos ajustan razonablemente bien el precio real a lo largo de todo el período muestral. En ningún momento se observan “picos” desorbitados y se comprueba que el ajuste mejora a medida que se van incluyendo carac-

terísticas adicionales a los modelos.

Finalmente, la Figura 7 muestra los errores de precios de todos los modelos para el futuro Zc-3. En general, estos errores no son muy elevados y oscilan entre -0.4 y 0.4. Los mayores errores se concentran de forma puntual y corresponden a “picos” de la serie de precios *spot*. Estos “picos” no se reflejan en los precios de los futuros. La explicación de este hecho es que los precios *spot* son precios de cierre mientras que los precios de los futuros son precios de liquidación (es decir, un precio promedio) y, por tanto, suavizan esos “picos”. En este caso, se concluye que la naturaleza del mercado *spot* no es favorable para explicar la evolución temporal de los precios de los futuros.

6.1.1. Análisis de modelos

Esta sección analiza si las tres versiones del modelo de Moreno *et al.* (2017) pueden reproducir las oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media junto con los componentes estacionales y cíclicos que pueden estar presentes en los datos de los precios futuros de los productos agrícolas.

La Figura 8 muestra los diferentes componentes del modelo 5 para explicar el precio del futuro Zc-3. En la parte superior se muestra como los precios *spot* presentan una mayor volatilidad a corto plazo que los precios futuros. Además, es interesante mencionar el año 1997 donde se puede ver un pico más acusado en el precio *spot* que en los precios futuros (motivo que hemos comentado en la sección anterior). En el gráfico inferior izquierdo, la fórmula de fijación de precio reproduce los picos de los precios *spot* pero más suavizados, lo que produce errores de ajuste significativos. Tal como se ilustra en el gráfico inferior derecho, este modelo está compuesto por cuatro componentes:

- Efecto *spot*, $e^{-\kappa(T-t)} \ln(S_t)$.
- Efecto del componente periódico, $g(T) - e^{-\kappa(T-t)}g(t)$.
- Efecto volatilidad, $\frac{\sigma^2}{4\kappa} (1 - e^{-2\kappa(T-t)})$.
- Efecto *long-term swing*, dado por

$$(1 - e^{-\kappa(T-t)})\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} Re \left[\frac{\kappa B_n}{\kappa + in\omega_z} (e^{in\omega_z T} - e^{-\kappa(T-t)+in\omega_z t}) \right]$$

Se observa que nuestras estimaciones de la serie de Fourier para el nivel de reversión a la media y el efecto periódico reproducen un comportamiento sinusoidal. Por otro lado, el efecto *spot* no reproduce al 100 % el nivel del

precio del futuro ya que el valor inicial de ambos precios es diferente. Sin embargo, si se comprueba un comportamiento similar en ambos precios.

La Figura 9 (parte superior izquierda) muestra como los valores ajustados reproducen los “picos” en los precios para el futuro Zc-3. Además, si a ese ajuste le descontamos la contribución del término de Fourier para analizar la contribución del *long-term swing*, se observa una pérdida significativa en la fluctuación a largo plazo. En el gráfico superior derecho, los errores de ajuste del modelo de fijación de precios registran de forma puntual los “picos” presentes en la serie de precios *spot*. Este modelo es capaz de reproducir la no estacionariedad en los datos de los precios de los futuros pues permite explicar el componente persistente en dichos precios.

El gráfico inferior izquierdo representa los precios ajustados en las tres versiones del modelo de Moreno *et al.* (2017) junto al precio real del futuro Zc-3. Se observa que los tres modelos reproducen correctamente el comportamiento del futuro. Para analizar más detalladamente este ajuste escogemos arbitrariamente un subperíodo muestral, Enero de 1996 a Enero de 1998, y constatamos que, para este periodo, el modelo 5 es el que proporciona un mejor ajuste. Cabe destacar que, al final de este periodo, el modelo 3 es el que mejor representa el comportamiento del precio observado para este futuro.

A continuación, se considera la señal filtrada sobre el comportamiento de los precios futuros, $N(t, T; \theta)$. Como se comentó previamente, esta señal refleja las fluctuaciones estacionales y periódicas alrededor del precio medio a largo plazo así como la evolución temporal del nivel de reversión a la media.

La Figura 10 (gráfico superior izquierdo) muestra esta función junto con el ajuste del modelo 3 para el futuro Zc-3. Este modelo incluye un término de Fourier para el nivel de reversión a la media a largo plazo. Se comprueba que este término captura la evolución temporal del nivel de reversión a la media pero no permite explicar las fluctuaciones a corto y medio plazo.

El gráfico superior derecha ilustra que el modelo 4 es capaz de capturar razonablemente el patrón estacional (fluctuaciones a medio plazo). Adicionalmente, el gráfico inferior izquierdo muestra que el modelo 5 mejora significativamente el ajuste a los precios futuros observados y captura el corto y largo plazo con, respectivamente, frecuencias de 1 y 9 años.¹⁵

Finalmente, señalemos que $N(t, T; \theta)$ muestra un comportamiento diferente para los distintos vencimientos (ver gráfico inferior derecho). Los contratos Zc-2, Zc-3 y Zc-8 presentan una evidencia clara de ciclo estacional anual. Por el contrario, los contratos Zc-5 y Zc-11 no presentan dicha evidencia ya que su vencimiento cubre un número entero de años. Este gráfico muestra un

¹⁵Recordemos que este modelo surge al añadir en el modelo 4 un segundo término para explicar el componente cíclico.

máximo bien definido que corresponde a un periodo de, aproximadamente, 53 años. En la frecuencia anual también encontramos un máximo local como sucedía al analizar los contratos $Zc-2$ y $Zc-8$ mediante el análisis espectral.

6.2. Trigo

A continuación, se muestran los resultados obtenidos con los cinco modelos analizados para el caso de futuros sobre el trigo. La Tabla 4 muestra los parámetros estimados en estos modelos y la Tabla 5 indica la suma de errores cuadráticos, componentes y comparativa para cada uno de los modelos.

Los resultados para los modelos 1 y 2 son muy similares a los obtenidos en el caso del maíz. Así, al incluir una frecuencia anual, el modelo 2 solo reduce un 3.72% la suma de errores cuadráticos del modelo 1. Ninguno de estos modelos capta adecuadamente las relaciones entre los precios *spot* y los precios futuros. Así, al incorporar la frecuencia asociada a las oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media, el modelo 3 reduce, aproximadamente, un 35% los errores con respecto a los modelos 1 y 2. Por último, los modelos 4 y 5 mejoran los resultados más de un 50% con respecto a los modelos 1 y 2 y alrededor de un 30% respecto al modelo 3.

El modelo 5 mejora los resultados del modelo 4 en todos los futuros considerados excepto en el caso del futuro W-8. La causa de este empeoramiento puede ser una sobreparametrización en el modelo 5.¹⁶ Para analizar más detalladamente este resultado, la Figura 11 muestra el precio del futuro W-8 junto con las estimaciones de los cinco modelos. Se observa que el modelo 5 sobreestima los valores reales del precio de este futuro.

En contraste con el análisis del maíz, ahora se obtiene, para todos los vencimientos, una fluctuación anual común en el modelo 5. Por tanto, esta evidencia sugiere que la frecuencia anual desempeña un papel especialmente significativo en el caso del trigo. La frecuencia restante es de 9.4 años para los contratos W-2, W-3 y W-5 y de 4 años para W-8. Las oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media tienen un periodo inferior al encontrado para el maíz siendo de 45.6, 48.5 y 45 años para, respectivamente, los modelos 3, 4 y 5.

6.3. Soja

La etapa final de este análisis empírico se centra en futuros sobre soja. La Tabla 6 muestra los parámetros estimados para los diferentes modelos y la

¹⁶Otra posible explicación puede ser el efecto de las condiciones iniciales de los programas informáticos.

Tabla 7 indica la suma de errores cuadráticos, componentes y comparativa para estos modelos.

Como en los casos anteriores, el modelo 2 mejora marginalmente (5%) el ajuste del modelo 1. La inclusión de oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media (modelo 3) lleva a una mejora de 16.67% y 12.2% con respecto a, respectivamente, los modelos 1 y 2. Los modelos 4 y 5 logran mejoras adicionales respecto al modelo 3.

En términos globales, el modelo 5 mejora un 42,59% el ajuste del modelo 1 y se convierte en el mejor modelo para explicar los precios de estos futuros. Por tanto, se concluye que la incorporación de los *long-term swing* puede mejorar significativamente el ajuste de los modelos previos.

En contraste con los activos anteriores, el mercado de soja es el que presenta una reversión a la media con menor periodo de años, fluctuando entre 32 y 38 años. En el modelo 5, los futuros S-2, S-3 y S-5 presentan una frecuencia anual para la fluctuación estacional. Por otro lado, el modelo 4 sugiere una frecuencia anual en los contratos S-2 y S-3, de 9 años para los contratos S-5 y S-8 y de 8,4 años para el contrato S-11.

Se comprueba una reducción significativa de la suma de los errores al cuadrado para todos los contratos excepto para el S-2. Por otro lado, la incorporación en el modelo 5 de un componente de Fourier adicional sugiere una dependencia cíclica con un periodo de 9 años para los contratos S-2, S-3 y S-5 y de, aproximadamente, 6 años para los contratos S-8 y S-11.

Por último, la Figura 12 refleja el ajuste de los modelos para el futuro S-3, el cual presenta una frecuencia anual para la fluctuación estacional. Como se ha comentado anteriormente, los modelos 1 y 2 tienen un comportamiento similar y bastante inferior al del resto de modelos.

7. Conclusiones

Este trabajo ha presentado el modelo en tiempo continuo propuesto en Moreno *et al.* (2017) con el objetivo de explicar el comportamiento de los precios de los futuros sobre productos agrícolas. Este modelo fue establecido originalmente para modelizar los precios de los futuros sobre subyacentes energéticos y hace especial énfasis en la reversión a la media y en la estacionalidad. El comportamiento empírico de este modelo ha sido analizado en comparación con otros modelos propuestos previamente en la literatura. Este análisis empírico se ha basado en precios de futuros (para diferentes vencimientos) sobre maíz, trigo y soja, todos ellos negociados en el CBOT.

Este modelo supone fluctuaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media así como componentes estacionales y cíclicos de los precios *spot* con

periodos a corto y medio plazo. La principal herramienta para representar estos componentes son series de Fourier, variables en el tiempo con una sola frecuencia para el nivel de reversión a la media y una o varias frecuencias para capturar los componentes estacionales y cíclicos.

La dinámica de la reversión a la media de los precios de las materias primas se ha modelizado mediante un proceso estocástico tipo Ornstein-Uhlenbeck. Para identificar la presencia de términos periódicos de distinta naturaleza en los precios de los futuros se ha realizado un análisis espectral para cada contrato futuro.

Este modelo anida los modelos propuestos en Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002), los cuales se convierten, por tanto, de manera natural en modelos de referencia para el análisis empírico. La posible mejora en el comportamiento empírico que puede proporcionar el modelo de Moreno *et al.* (2017) proviene de permitir oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media sin imponer ninguna restricción sobre las frecuencias a estimar en la serie de Fourier para los diferentes componentes del modelo. Además, la ventaja de este modelo es la existencia de fórmulas cerradas para los precios de diferentes activos derivados y, en particular, para los precios de los futuros.

El estudio empírico *in-sample* realizado ilustra la efectividad de las tres versiones del modelo de Moreno *et al.* (2017) frente a los modelos propuestos en Schwartz (1997) y Lucía y Schwartz (2002). La principal conclusión es que el ajuste obtenido en estas tres versiones mejora los resultados conseguidos en los modelos anidados y, por tanto, la inclusión de oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversión a la media y de componentes cíclicos y estacionales ayuda a explicar la fijación de los precios de los futuros en estos mercados.

Como futuras líneas de investigación, se puede realizar un análisis *out-of-sample* para analizar el poder predictivo de los modelos aquí analizados. También se puede analizar el comportamiento empírico del modelo propuesto en Moreno *et al.* (2017) para el mercado eléctrico. Finalmente, la introducción del *convenience yield* como factor adicional en este modelo puede ayudar a mejorar la modelización de los precios de los futuros sobre subyacentes agrícolas.

Referencias

- [1] BRENNAN, M.J. (1958). The supply of storage. *American Economic Review*, 48, 50–72.
- [2] CORTÁZAR, G., and SCHWARTZ, E.S. (1994). The evaluation of commodity contingent claims. *Journal of Derivatives*, 1, 4, 27–39.
- [3] COX, J.C., INGERSOLL, JR., J.E., & ROSS, S.A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, 2, 385–407.
- [4] DIXIT, A.K., & PINDYCK, R.S. (1994). Investment under uncertainty. *Princeton, NJ: Princeton University Press*.
- [5] FAMA, E.F., & FRENCH, K.R. (1987). Commodity futures prices: some evidence on forecast power, premiums, and the theory of storage. *Journal of Business*, 60, 1, 55–73.
- [6] GEMAN, H. (2005). Commodities and commodity derivatives: modeling and pricing of agriculturals, metals and energy. *Finance, Wiley*.
- [7] GIBSON, R. and SCHWARTZ, E.S. (1990) Stochastic convenience yield and the pricing of oil contingent claims. *Journal of Finance*, 45, 3, 959–976.
- [8] HYLLEBERG, S. (1992). Modelling seasonality. Advanced texts in econometrics, *Oxford University Press*.
- [9] KALDOR, N. (1939). Speculation and economic stability. *Review of Economic Studies*, 7, 1–27.
- [10] LAUGHTON, D.G. y JACOBY, H.D. (1993). Short-term shocks, reversion, and long-term, decision-making. MIT-CEEPR 93-002WP.
- [11] LUCÍA, J. y SCHWARTZ, E.S. (2002). Electricity prices and power derivatives: evidence from the nordic power exchange. *Review of Derivatives Research*, 5, 1, 5–50.
- [12] MORENO, M., NOVALES, A. y PLATANIA, F. (2017). Long-term swings and seasonality in energy markets, mimeo.
- [13] MU, X. and H. YE (2015). Small trends and big cycles in crude oil prices. *Energy Journal*, 36, 1, 49–72.
- [14] PILIPOVIĆ, D. (2007). Energy risk, valuing and managing energy derivatives, segunda edición, *Mc Graw-Hill*.

- [15] SAMUELSON, PAUL A. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, 6, 2, 41-49.
- [16] SCHWARTZ, E.S. (1997). The stochastic behaviour of commodity prices: implications for valuation and hedging. *Journal of Finance*, 52, 3, 923-973.
- [17] SCHWARTZ, E.S. and SMITH, J. (2000). Short-term variations and long-term dynamics in commodity prices. *Management Science*, 46, 7, 893-911.
- [18] SMITH, JAMES E. and MCCARDLE, KEVIN F. (1999). Options in the real world: lessons learned in evaluating oil and gas investments. *Operations Research*, 47, 1, 1-15.
- [19] SØRENSEN, C. (2002). Modeling seasonality in agricultural commodity futures. *Journal of Futures Markets*, 22, 5, 393-426.
- [20] TELSER, L.G. (1958). Futures trading and the storage of cotton and wheat. *Journal of Political Economy*, 66, 3, 233-255.
- [21] UHLENBECK, G.E. and ORNSTEIN, L.S. (1930). On the theory of brownian motion. *Physical Review*, 36, 823-841.
- [22] WORKING, H. (1949). The theory of the price of storage. *American Economic Review*, 39, 6, 1254-1262.

Apéndice de Tablas

Resumen estadístico para los contratos de maíz, trigo y soja					
Contratos Futuros	Precio medio	Desviación Típica	Coefficiente de Variación(%)	Asimetría	Curtosis
MAÍZ					
Spot	303.2034	133.0679	43.8873	1.7918	6.0174
Zc-2	318.5959	128.3460	40.2849	1.7399	5.7889
Zc-3	321.8099	125.1258	38.8819	1.7232	5.7748
Zc-5	324.5531	116.8894	36.0155	1.6113	5.4159
Zc-8	341.0138	120.4238	35.3135	1.1373	3.0965
Zc-11	390.1404	123.9831	31.7791	0.3315	1.9379
TRIGO					
Spot	405.1078	149.5816	36.9239	1.4360	4.7022
W-2	427.3549	163.1243	38.1707	1.4898	4.8544
W-3	431.0517	163.9955	38.0454	1.4251	4.3947
W-5	438.0352	166.6462	38.0440	1.4012	4.2706
W-8	486.0643	180.3319	37.1004	0.9457	2.7097
SOJA					
Spot	751.8100	281.1312	37.3939	1.3173	3.9851
S-2	766.0616	274.4921	35.8316	1.2556	3.7790
S-3	765.7448	267.8615	34.9805	1.2310	3.7320
S-5	761.5847	253.5459	33.2919	1.1870	3.5754
S-8	757.8673	240.0707	31.6771	1.1748	3.5380
S-11	771.0287	258.7404	33.5578	0.9117	2.5505

Tabla 1: Análisis descriptivo de los precios *spot* y de los contratos futuros considerados. Los estadísticos calculados son precio medio, desviación típica y coeficientes de variación, asimetría y curtosis. El periodo muestral para el precio *spot* del maíz y de los futuros Zc-2, Zc-3 y Zc-5 empieza el 02/01/1979 mientras que, para los futuros Zc-8 y Zc-11, empieza el 26/05/1988 y el 04/10/1999, respectivamente. El fin de todos estos periodos es el 10/05/2017. El periodo muestral para el precio *spot* del trigo y de los futuros W-2, W-3 y W-5 es del 30/03/1982 hasta 10/05/2017 mientras que, para el futuro W-8, es del 23/03/1992 hasta 10/05/2017. El periodo muestral para el precio *spot* de la soja y de los futuros S-2, S-3, S-5 y S-8 es desde 02/01/1979 hasta 10/05/2017 y, para el futuro S-11, es desde 20/06/1988 hasta 10/05/2017.

Parámetros estimados. Estimación *in-sample* del maíz

Parámetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
Parámetros Estructurales					
$\hat{\beta}_1$	4.9307 (0.0342)	5.0231 (0.0302)	4.6785 (0.0117)	4.6730 (0.0128)	4.7749 (0.0127)
$\hat{\beta}_2$	0.5710 (0.0152)	0.5163 (0.0132)	1.1862 (0.0096)	1.1957 (0.0093)	1.1186 (0.0085)
$\hat{\kappa}$	0.2022 (0.0009)	0.1993 (0.0009)	0.3778 (0.0012)	0.3752 (0.0016)	0.3755 (0.0014)
$\hat{\gamma}$	-	-0.0177 (0.0003)	-	-	-
$\hat{\rho}$	-	1.0337 (0.0023)	-	-	-
$\hat{\beta}_x$	-	-	0.0795 (0.0034)	-0.0047 (0.0055)	-0.0431 (0.0037)
$\hat{\beta}_y$	-	-	0.3576 (0.0013)	0.3881 (0.0012)	0.3892 (0.0009)
$\hat{\omega}_z$	-	-	$2\pi \times 0.0215$ (0.0004)	$2\pi \times 0.0198$ (0.0008)	$2\pi \times 0.0188$ (0.0005)
Periodo \approx	-	-	47 años	50 años	53 años
Parámetros Estacionales					
Zc-2					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	-0.1010 (0.0027)	-0.1046 (0.0027)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	-0.0305 (0.0053)	-0.0204 (0.0064)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1091$ (0.0020)	$2\pi \times 0.1101$ (0.0024)
Periodo \approx	-	-	-	9 años	9 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	-0.0252 (0.0036)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	0.0687 (0.0017)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.1641$ (0.0025)
Periodo \approx	-	-	-	-	6 años

Parámetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
Zc-3					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	-0.0969 (0.0017)	-0.0956 (0.0017)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	-0.0257 (0.0034)	-0.0334 (0.0030)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1084$ (0.0015)	$2\pi \times 0.1078$ (0.0013)
Periodo \approx	-	-	-	9 años	9 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	-0.0162 (0.0003)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	-0.0081 (0.0005)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.9972$ (0.0014)
Periodo \approx	-	-	-	-	1 año
Zc-5					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	-0.0868 (0.0009)	-0.0908 (0.0010)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	-0.0082 (0.0020)	0.0055 (0.0018)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1084$ (0.0010)	$2\pi \times 0.1090$ (0.0008)
Periodo \approx	-	-	-	9 años	9 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	-0.0291 (0.0010)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	0.0248 (0.0010)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.1541$ (0.0016)
Periodo \approx	-	-	-	-	7 años

Parámetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
Zc-8					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	-0.0592 (0.0023)	-0.0171 (0.0075)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	0.0282 (0.0045)	-0.0745 (0.0022)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1098$ (0.0029)	$2\pi \times 0.1000$ (0.0035)
Periodo \approx	-	-	-	9 años	10 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	-0.0318 (0.0020)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	-0.0335 (0.0025)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.1432$ (0.0028)
Periodo \approx	-	-	-	-	7 años
Zc-11					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	-0.0410 (0.0085)	-0.0261 (0.0021)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	-0.0908 (0.0047)	-0.0186 (0.0029)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1000$ (0.0034)	$2\pi \times 0.2995$ (0.0035)
Periodo \approx	-	-	-	10 años	3 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	-0.0421 (0.0049)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	-0.0972 (0.0030)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.1000$ (0.0018)
Periodo \approx	-	-	-	-	10 años
$\sum_{t=1}^n \min SR(\hat{\theta}_t)$	356	343	211	158	135
$(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2)^{\frac{1}{2}}$	0.0919	0.0901	0.0708	0.0612	0.0565
$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t $	0.0689	0.0676	0.0514	0.0459	0.0421

Tabla 2: Parámetros estimados (con desviación típica entre paréntesis), períodos y medidas de bondad de ajuste para los cinco modelos considerados.

Resultados numéricos para el maíz

$\sum_t \text{mín } SR(\hat{\theta}_t)$	Zc-2	Zc-3	Zc-5	Zc-8	Zc-11
Modelo 1 (Schwartz)	40.9	58.9	82.4	117.5	56.1
Modelo 2 (Lucía y Schwartz)	38.0	52.6	81.1	113.8	57.0
Estacionalidad (Años)	1	1	1	1	1
Mejora s/ Modelo 1 (%)	7.1	10.7	1.6	3.2	-1.6
Modelo 3	30.3	42.6	47.3	45.8	45.1
<i>Long-Term Swing</i> (Años)	46.5	46.5	46.5	46.5	46.5
Mejora s/ Modelo 2 (%)	20.2	19.0	41.7	59.7	20.9
Modelo 4	27.6	36.6	35.5	35.1	23.4
<i>Long-Term Swing</i> (Años)	50	50	50	50	50
Estacionalidad (Años)	9	9	9	9	10
Mejora s/ Modelo 3 (%)	9.2	14.2	25.0	23.5	48.1
Modelo 5	25.1	31.5	31.6	27.9	18.4
<i>Long-Term Swing</i> (Años)	53	53	53	53	53
Estacionalidad (Años)	9	9	9	10	3
Estacionalidad (Años)	6	1	6.5	7	10
Mejora s/ Modelo 4 (%)	9.0	13.8	10.8	20.5	21.2

Tabla 3: Suma de errores cuadráticos, períodos de estacionalidad y de las oscilaciones a largo plazo del nivel de reversión a la media y mejora estadística de cada modelo.

Parámetros estimados. Estimación *in-sample* del trigo

Parámetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
Parámetros Estructurales					
$\hat{\beta}_1$	3.9906 (0.2149)	3.0875 (0.2602)	5.2016 (0.0247)	5.0359 (0.0266)	4.5896 (0.0321)
$\hat{\beta}_2$	0.7674 (0.0573)	0.9673 (0.0632)	1.0361 (0.0227)	1.0478 (0.0176)	1.4020 (0.0224)
$\hat{\kappa}$	0.1310 (0.0020)	0.1222 (0.0019)	0.4179 (0.0028)	0.3410 (0.0022)	0.3493 (0.0024)
$\hat{\gamma}$	-	0.0250 (0.0004)	-	-	-
$\hat{\rho}$	-	1.1023 (0.0028)	-	-	-
$\hat{\mathcal{B}}_x$	-	-	-0.1502 (0.0062)	-0.1790 (0.0050)	-0.1270 (0.0061)
$\hat{\mathcal{B}}_y$	-	-	0.4764 (0.0028)	0.5110 (0.0029)	0.5258 (0.0025)
$\hat{\omega}_z$	-	-	$2\pi \times 0.0219$ (0.0006)	$2\pi \times 0.0206$ (0.0007)	$2\pi \times 0.0224$ (0.0005)
Periodo \approx	-	-	46 años	49 años	45
Parámetros Estacionales					
W-2					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	0.2818 (0.0055)	0.2880 (0.0053)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	-0.1078 (0.0098)	-0.0938 (0.0094)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1064$ (0.0014)	$2\pi \times 0.1061$ (0.0014)
Periodo \approx	-	-	-	9 años	9 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	0.0072 (0.0011)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	0.0289 (0.0007)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.9944$ (0.0019)
Periodo \approx	-	-	-	-	1 año

Parámetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
W-3					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	0.2073 (0.0035)	0.2083 (0.0036)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	-0.1013 (0.0057)	-0.0952 (0.0055)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1059$ (0.0011)	$2\pi \times 0.1060$ (0.0011)
Periodo \approx	-	-	-	9 años	9 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	0.0137 (0.0009)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	0.0288 (0.0006)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.9937$ (0.0016)
Periodo \approx	-	-	-	-	1 año
W-5					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	0.1378 (0.0024)	0.1308 (0.0027)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	-0.0963 (0.0027)	-0.1004 (0.0030)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1051$ (0.0008)	$2\pi \times 0.1058$ (0.0010)
Periodo \approx	-	-	-	10 años	9 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	0.0405 (0.0018)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	0.0249 (0.0023)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.9943$ (0.0027)
Periodo \approx	-	-	-	-	1 año

Parámetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
W-8					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	0.1694 (0.0015)	-0.0183 (0.0018)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	-0.0016 (0.0073)	-0.0164 (0.0021)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1000$ (0.0016)	$2\pi \times 0.2563$ (0.0052)
Periodo \approx	-	-	-	10 años	4 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	-0.0054 (0.0022)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	0.0233 (0.0009)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.9930$ (0.0039)
Periodo \approx	-	-	-	-	1 año
$\sum_{t=1}^n \min SR(\hat{\theta}_t)$	645	621	408	270	289
$(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2)^{\frac{1}{2}}$	0.1376	0.1350	0.1094	0.0891	0.0921
$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t $	0.1001	0.0983	0.0814	0.0657	0.0676

Tabla 4: Parámetros estimados (con desviación típica entre paréntesis), períodos y medidas de bondad de ajuste para los cinco modelos considerados.

Resultados numéricos para el trigo				
$\sum_t \text{mín } SR(\hat{\theta}_t)$	W-2	W-3	W-5	W-8
Modelo 1 (Schwartz)	98.6	131.8	187.6	226.9
Modelo 2 (Lucía y Schwartz)	90.9	120.1	185.1	224.4
Estacionalidad (Años)	1	1	1	1
Mejora s/ Modelo 1 (%)	7.8	8.8	1.4	1.1
Modelo 3	76.5	92.3	108.6	130.3
<i>Long-Term Swing</i> (Años)	45.6	45.6	45.6	45.6
Mejora s/ Modelo 2 (%)	15.8	23.2	41.3	41.9
Modelo 4	58.6	67.8	73.0	70.6
<i>Long-Term Swing</i> (Años)	48.5	48.5	48.5	48.5
Estacionalidad (Años)	9.4	9.4	9.5	10
Mejora s/ Modelo 3 (%)	23.4	26.6	32.8	45.8
Modelo 5	47.9	52.0	66.0	123.0
<i>Long-Term Swing</i> (Años)	45	45	45	45
Estacionalidad (Años)	9.4	9.4	9.4	4
Estacionalidad (Años)	1	1	1	1
Mejora s/ Modelo 4 (%)	18.3	23.2	9.6	-74.1

Tabla 5: Suma de errores cuadráticos, períodos de estacionalidad y de las oscilaciones a largo plazo del nivel de reversión a la media y mejora estadística de cada modelo.

Parámetros estimados. Estimación *in-sample* de la soja

Parámetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
Parámetros Estructurales					
$\hat{\beta}_1$	1.7106 (0.0869)	1.3498 (0.0930)	5.3446 (0.0260)	4.9091 (0.0274)	4.1658 (0.0389)
$\hat{\beta}_2$	1.6614 (0.0243)	1.7198 (0.0246)	0.8040 (0.0145)	0.8780 (0.0126)	1.0715 (0.0125)
$\hat{\kappa}$	0.1533 (0.0009)	0.1486 (0.0008)	0.2658 (0.0013)	0.2254 (0.0013)	0.1954 (0.0012)
$\hat{\gamma}$	-	-0.0153 (0.0002)	-	-	-
$\hat{\rho}$	-	1.0152 (0.0021)	-	-	-
$\hat{\mathcal{B}}_x$	-	-	0.2659 (0.0014)	0.2299 (0.0040)	0.1931 (0.0044)
$\hat{\mathcal{B}}_y$	-	-	0.0149 (0.0063)	-0.0929 (0.0083)	-0.1373 (0.0062)
$\hat{\omega}_z$	-	-	$2\pi \times 0.0265$ (0.0011)	$2\pi \times 0.0298$ (0.0015)	$2\pi \times 0.0314$ (0.0013)
Periodo \approx	-	-	38 años	34 años	32 años
Parámetros Estacionales					
S-2	-	-	-	-0.0066 (0.0010)	-0.0063 (0.0007)
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	-0.0096 (0.0007)	-0.0096 (0.0006)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.9951$ (0.0040)	$2\pi \times 0.9951$ (0.0028)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	1 año	1 año
Periodo \approx	-	-	-	-	-
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	-0.0764 (0.0036)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	-0.0383 (0.0054)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.1083$ (0.0027)
Periodo \approx	-	-	-	-	9 años

Parámetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
S-3					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	-0.0123 (0.0007)	-0.0122 (0.0005)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	-0.0099 (0.0007)	-0.0099 (0.0006)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.9959$ (0.0024)	$2\pi \times 0.9960$ (0.0016)
Periodo \approx	-	-	-	1 año	1 año
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	-0.0796 (0.0021)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	-0.0265 (0.0036)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.1082$ (0.0018)
Periodo \approx	-	-	-	-	9 años
S-5					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	-0.0819 (0.0013)	-0.0848 (0.0012)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	0.0008 (0.0027)	0.0029 (0.0022)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1096$ (0.0012)	$2\pi \times 0.1095$ (0.0011)
Periodo \approx	-	-	-	9 años	9 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	-0.0153 (0.0004)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	-0.0106 (0.0006)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.9954$ (0.0015)
Periodo \approx	-	-	-	-	1 año

Parámetros	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5
S-8					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	-0.0678 (0.0009)	-0.0655 (0.0010)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	0.0095 (0.0017)	0.0346 (0.0016)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1095$ (0.0010)	$2\pi \times 0.1115$ (0.0009)
Periodo \approx	-	-	-	9 años	9 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	-0.0186 (0.0012)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	0.0301 (0.0010)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.1581$ (0.0015)
Periodo \approx	-	-	-	-	6 años
S-11					
$\hat{A}_{x,1}$	-	-	-	0.0206 (0.0033)	0.0710 (0.0012)
$\hat{A}_{y,1}$	-	-	-	0.0576 (0.0023)	0.0206 (0.0027)
$\hat{\omega}_{f,1}$	-	-	-	$2\pi \times 0.1192$ (0.0026)	$2\pi \times 0.1253$ (0.0018)
Periodo \approx	-	-	-	8 años	8 años
$\hat{A}_{x,2}$	-	-	-	-	0.0001 (0.0024)
$\hat{A}_{y,2}$	-	-	-	-	-0.0457 (0.0004)
$\hat{\omega}_{f,2}$	-	-	-	-	$2\pi \times 0.1777$ (0.0022)
Periodo \approx	-	-	-	-	6 años
$\sum_{t=1}^n \min SR(\hat{\theta}_t)$	216	205	180	149	124
$(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2)^{\frac{1}{2}}$	0.0674	0.0657	0.0616	0.0560	0.0511
$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{u}_t $	0.0463	0.0453	0.0434	0.0391	0.0368

Tabla 6: Parámetros estimados (con desviación típica entre paréntesis), períodos y medidas de bondad de ajuste para los cinco modelos considerados.

Resultados numéricos para la soja					
$\sum_t \text{mín } SR(\hat{\theta}_t)$	S-2	S-3	S-5	S-8	S-11
Modelo 1 (Schwartz)	10.6	21.5	42.0	57.5	84.6
Modelo 2 (Lucía y Schwartz)	10.1	18.7	37.4	57.3	81.8
Estacionalidad (Años)	1	1	1	1	1
Mejora s/ Modelo 1 (%)	4.3	13.3	11.0	0.3	3.3
Modelo 3	10.5	20.2	36.3	48.0	65.2
<i>Long-Term Swing</i> (Años)	38	38	38	38	38
Mejora s/ Modelo 2 (%)	-3.5	-8.1	2.9	16.2	20.3
Modelo 4	9.7	17.1	30.4	37.5	54.4
<i>Long-Term Swing</i> (Años)	33.5	33.5	33.5	33.5	33.5
Estacionalidad (Años)	1	1	9	9	8.4
Mejora s/ Modelo 3 (%)	7.4	15.4	16.4	22.0	16.6
Modelo 5	8.7	14.9	25.9	32.4	42.3
<i>Long-Term Swing</i> (Años)	32	32	32	32	32
Estacionalidad (Años)	1	1	9	9	8
Estacionalidad (Años)	9	9	1	6	5.6
Mejora s/ Modelo 4 (%)	10.1	12.6	14.8	13.6	22.2

Tabla 7: Suma de errores cuadráticos, períodos de estacionalidad y de las oscilaciones a largo plazo del nivel de reversión a la media y mejora estadística de cada modelo.

Apéndice de Figuras

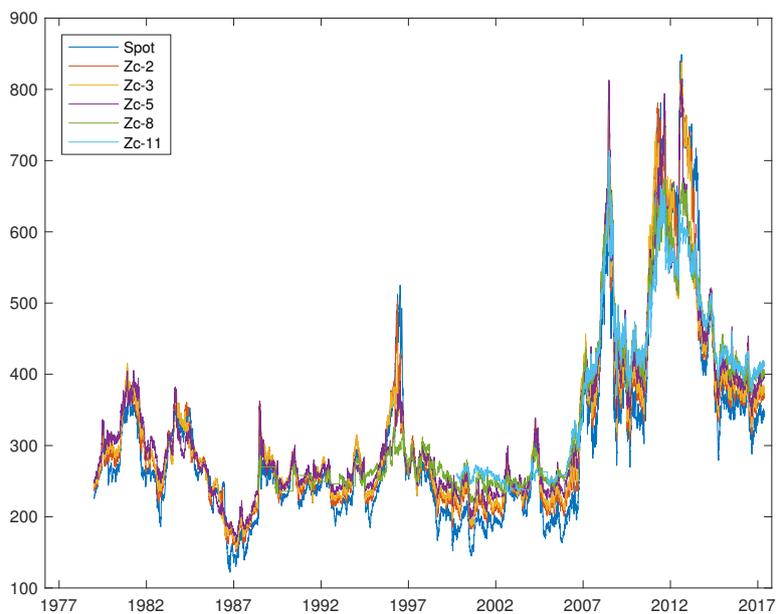


Figura 1: Precio *spot* y precios de los futuros *Zc-2*, *Zc-3*, *Zc-5*, *Zc-8* y *Zc-11* sobre maíz. El periodo muestral para el precio *spot* y los futuros *Zc-2*, *Zc-3* y *Zc-5* empieza el 02/01/1979 mientras que, para los futuros *Zc-8* y *Zc-11*, empieza el 26/05/1988 y el 04/10/1999, respectivamente.

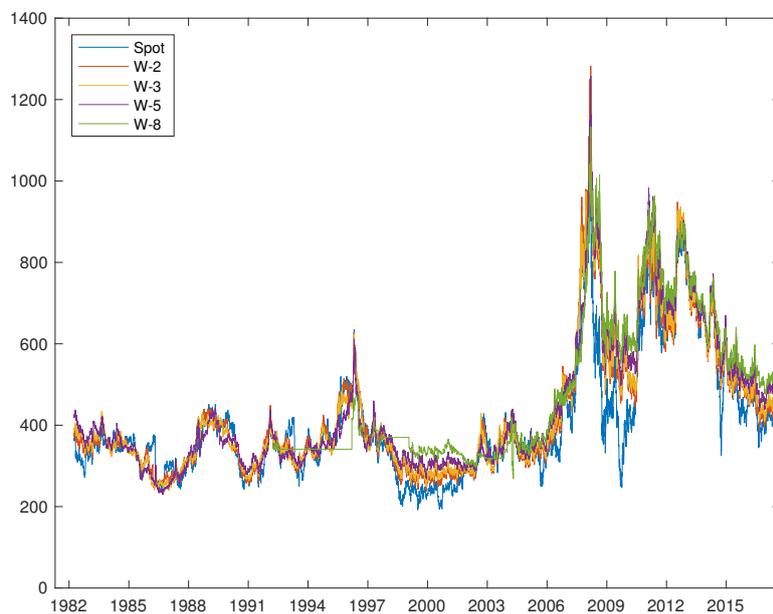


Figura 2: Precio *spot* y precios de los futuros W-2, W-3, W-5 y W-8 sobre trigo. El periodo muestral para el precio *spot* y los futuros W-2, W-3 y W-5 es del 30/03/1982 hasta 10/05/2017 mientras que, para el futuro W-8, es del 23/03/1992 hasta 10/05/2017.

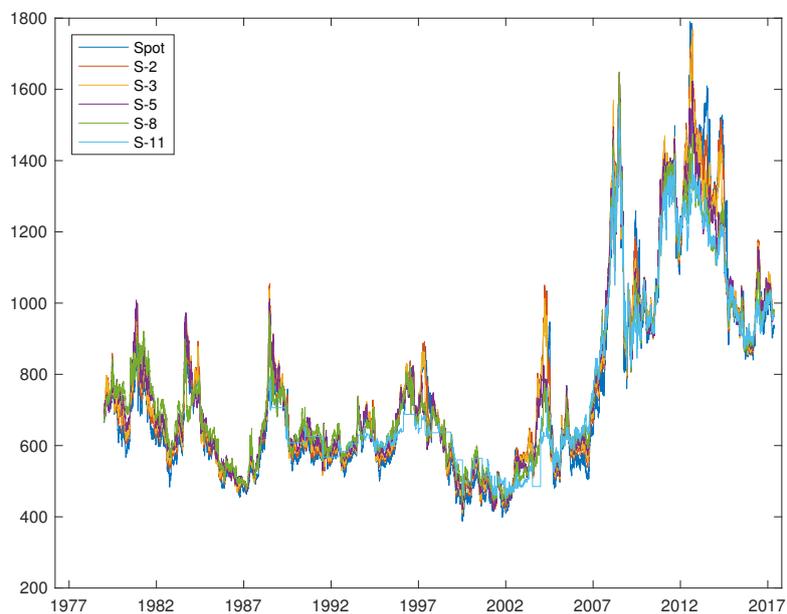


Figura 3: Precio *spot* y precios de los futuros S-2, S-3, S-5, S-8 y S-11 sobre soja. El periodo muestral para el precio *spot* y los futuros S-2, S-3, S-5 y S-8 es desde 02/01/1979 hasta 10/05/2017 y, para el futuro S-11, es desde 20/06/1988 hasta 10/05/2017.

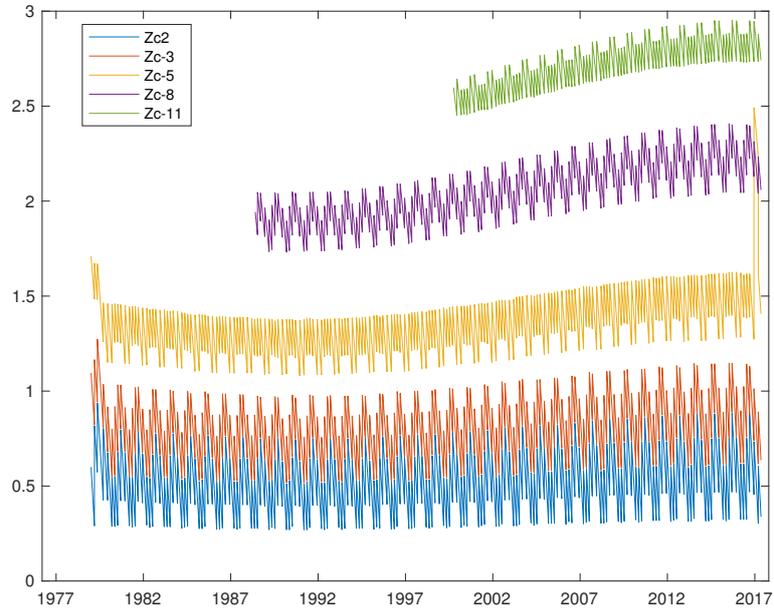


Figura 4: Estimación del nivel de reversión a la media (*long-term swing*) para los precios de los futuros Zc-2, Zc-3, Zc-5, Zc-8 y Zc-11 sobre maíz.

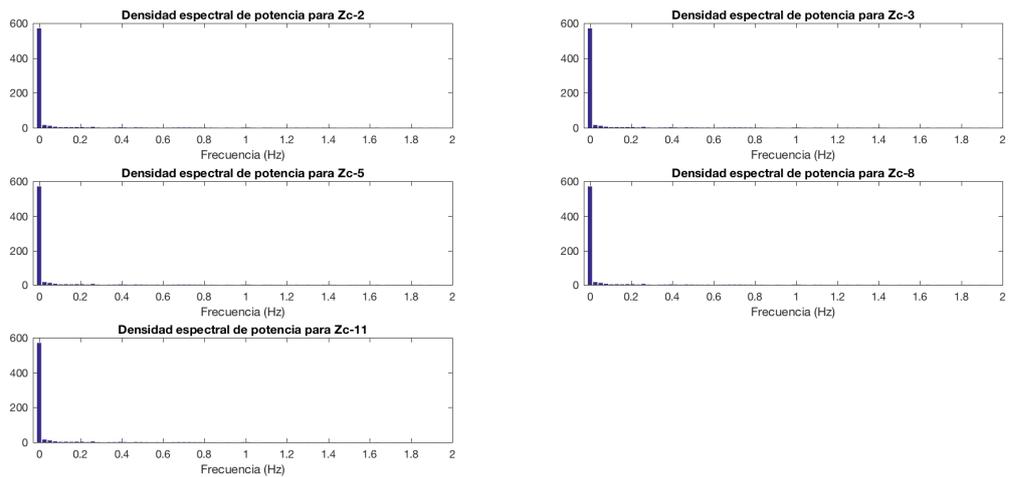


Figura 5: Estimación de la densidad espectral de potencia para los futuros sobre maíz para los cinco vencimientos considerados.

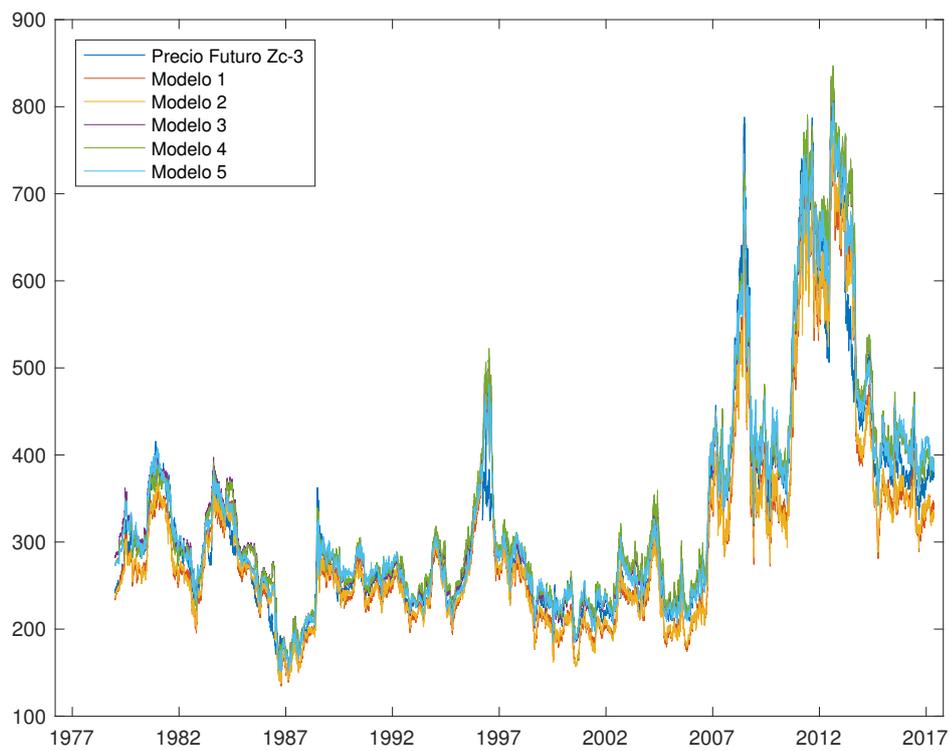


Figura 6: Precios ajustados del futuro Zc-3 para los cinco modelos considerados, junto con el precio real de este contrato.

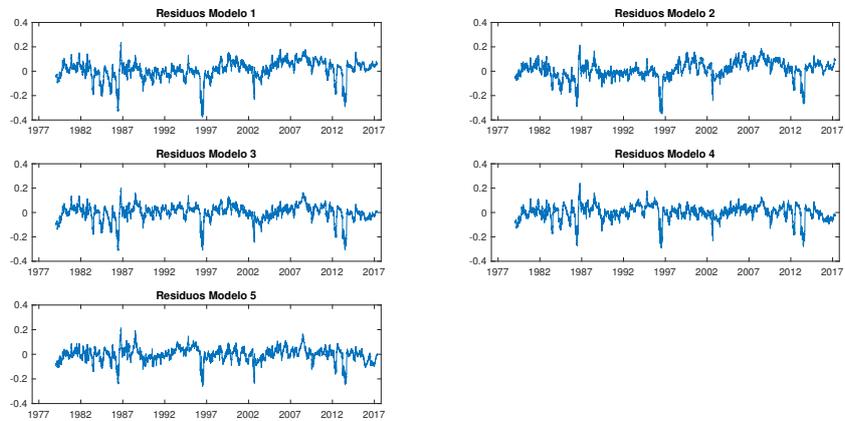


Figura 7: Errores de precios que se han obtenido para el futuro Zc-3 para los cinco modelos considerados.

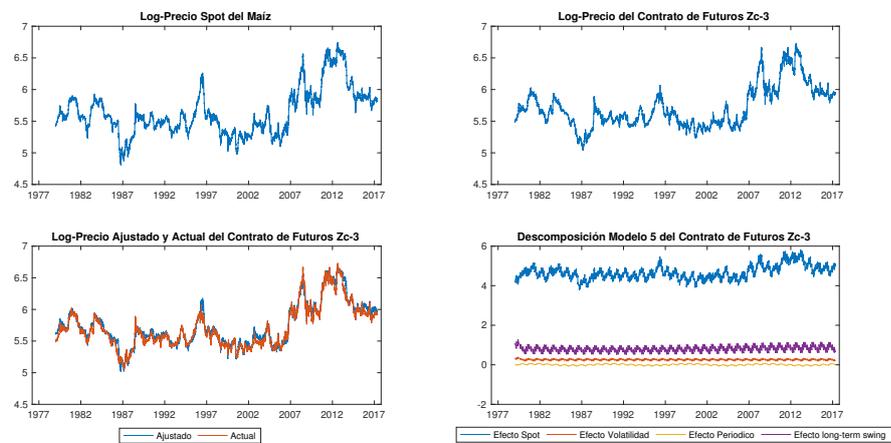


Figura 8: Las figuras superiores muestran los logaritmos del precio *spot* y del precio de entrega del futuro Zc-3. La figura inferior izquierda muestra los precios del futuro actual y ajustado del modelo 5. La figura inferior derecha muestra la evolución de los cuatro componentes: i) efecto *spot*, ii) componente periódico, iii) efecto volatilidad y iv) oscilaciones a largo plazo en el nivel de reversion a la media.

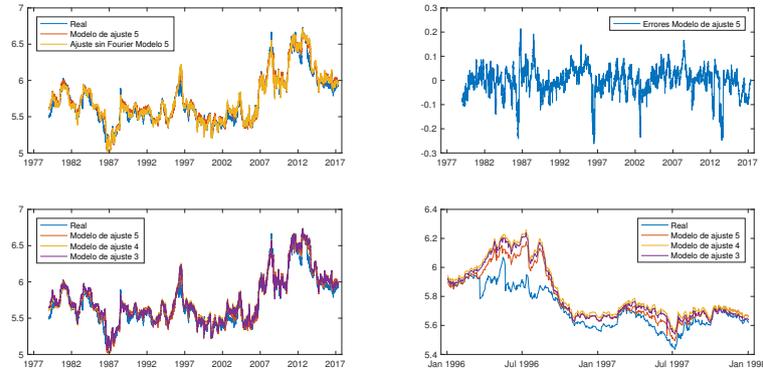


Figura 9: El gráfico superior izquierda muestra el precio real del futuro Zc-3 junto con el ajuste del modelo 5 y los precios ajustados excepto la contribución de los componentes de Fourier. La figura superior derecha muestra los errores de precios del modelo 5. Las Figuras inferiores muestran el precio real del futuro Zc-3 junto con los precios estimados por los modelos 3, 4 y 5. La figura izquierda tiene en cuenta toda la muestra y la Figura derecha considera desde Enero de 1996 hasta Enero de 1998.

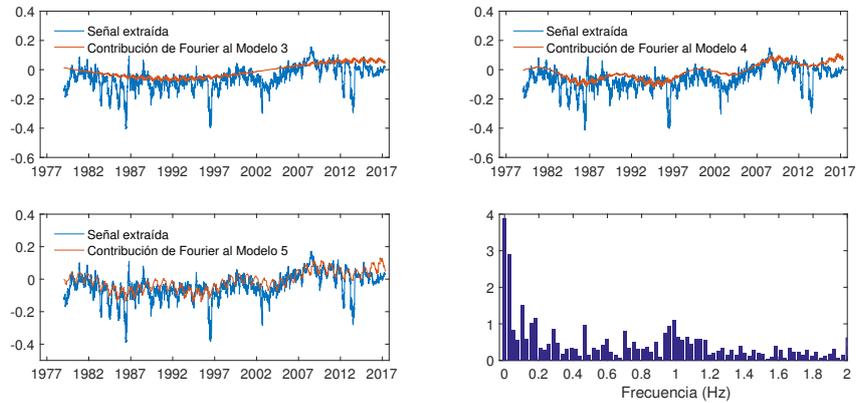


Figura 10: Los gráficos superiores y el inferior izquierda muestran la función $N(t, T; \theta)$ junto con el componente de Fourier estimado en los modelos 3, 4 y 5, respectivamente. El gráfico inferior derecho muestra la densidad espectral de potencia de la función $N(t, T; \theta)$ para el futuro Zc-3.

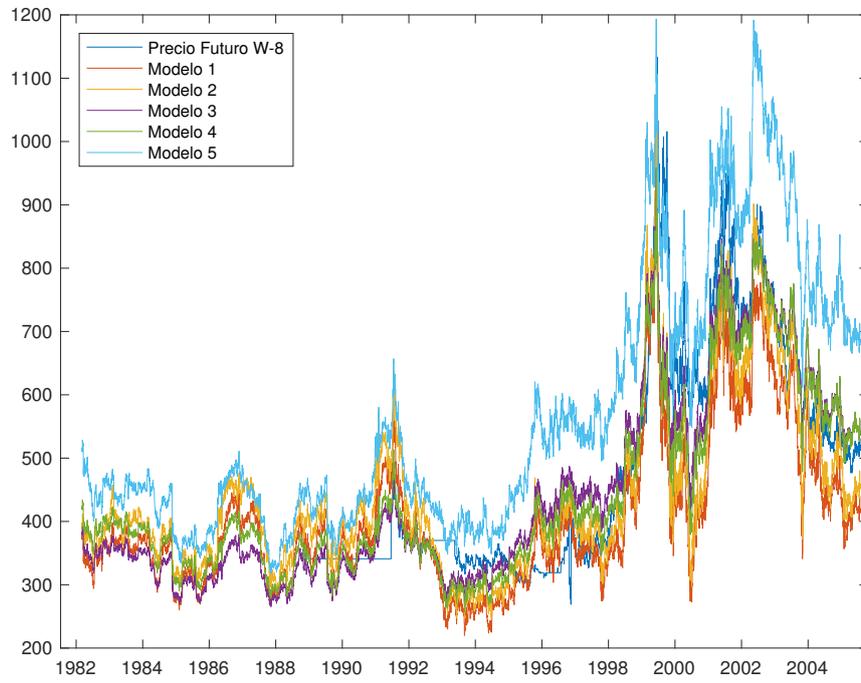


Figura 11: Precios ajustados del futuro W-8 para los cinco modelos considerados, junto con el precio real de este contrato.

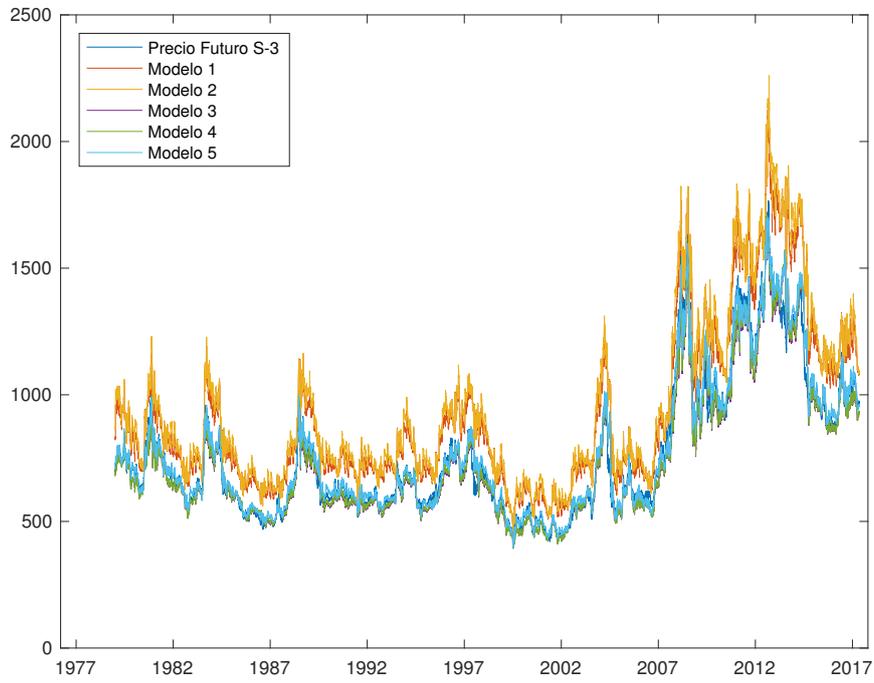


Figura 12: Precios ajustados del futuro S-3 para los cinco modelos considerados, junto con el precio real de este contrato.