

**VALORACIÓN DE OPCIONES EXÓTICAS  
AMERICANAS SOBRE EL VIX MEDIANTE EL  
MÉTODO *LEAST-SQUARES MONTE CARLO***

**Jesús Clausi Carrique**

Trabajo de investigación 019/004

Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Director/a: Dr. Manuel Moreno Fuentes

Universidad Complutense de Madrid

Universidad del País Vasco

Universidad de Valencia

Universidad de Castilla-La Mancha

# Valoración de opciones exóticas americanas sobre el VIX mediante el método *Least-Squares Monte Carlo*

Máster en Banca y Finanzas Cuantitativas



## **Autor**

Jesús Clausi Carrique

## **Director**

Manuel Moreno Fuentes

Universidad de Castilla-La Mancha  
Universidad Complutense de Madrid  
Universidad del País Vasco  
Universitat de València

Julio 2019

# Resumen

Este trabajo presenta la valoración de diferentes opciones exóticas americanas (asiáticas y australianas, con promedio aritmético y geométrico) sobre el VIX, índice de volatilidad del índice S&P 500, haciendo uso de la técnica *Least-Squares Monte Carlo* propuesto por Longstaff & Schwartz (2001) para calcular el valor de continuación de cada fecha de ejercicio de las diferentes simulaciones realizadas del VIX. Estas simulaciones se efectúan a partir de once modelos en tiempo continuo (modelo general y diez casos particulares) de volatilidad estocástica, presentados por diferentes autores y que se recogen en Moreno & Pérez-Jiménez (2018).

Una vez calculadas las primas de las diferentes opciones exóticas americanas, se compararán los resultados obtenidos mediante los diferentes modelos. Posteriormente, se realizará un análisis numérico de las distintas sensibilidades de la prima de las opciones con respecto a diversos factores para cuantificar el efecto de un cambio en el valor de estos factores sobre la prima de dichas opciones. La principal conclusión cualitativa que se deduce a partir de los resultados es que las diferencias obtenidas entre las primas de las diferentes opciones se deben a la reversión a la media presente en (la deriva del proceso estocástico seguido por) varios modelos y no tanto a la difusión de los diferentes procesos estocásticos analizados.

# 1. Introducción

Los índices de volatilidad, en especial el índice VIX, y sus derivados (los futuros aparecieron en 2004 y las opciones, en 2006) se han ido utilizando cada vez más durante las últimas dos décadas, en parte por su uso en la cobertura del riesgo de volatilidad, pero sobretodo por la fuerte correlación negativa existente entre los cambios realizados en el índice y los rendimientos del activo subyacente, en el caso del VIX, el índice S&P 500. Esta relación se conoce como efecto apalancamiento (*leverage effect*) y es asimétrica debido a que una caída en los rendimientos ocasiona un aumento en la volatilidad mayor que un aumento en los rendimientos, del mismo tamaño, que ocasiona una disminución de la volatilidad en menor escala. En otras palabras, si hay malas noticias que llegan al mercado, éstas ocasionan que la volatilidad aumente en mayor magnitud que si las noticias fuesen buenas y tuviesen el mismo impacto en términos numéricos, cosa que ocasionaría que la volatilidad disminuyese en menor medida.

Existen diversos índices de volatilidad en la literatura financiera como son VXO, VIX, VXN, VXD, VDAX, VX1, VX6 o VSTOXX, entre otros, pero nosotros, en este trabajo, nos centraremos en el índice VIX creado por *Chicago Board Option Exchange* (CBOE), y en la valoración de sus derivados (opciones exóticas americanas). Uno de los motivos que encontramos para trabajar con el índice VIX es que nos sirve como indicador del miedo (*fear gauge*) que tienen los inversores a la situación real del mercado, debido a la relación existente entre la rentabilidad del activo subyacente y los cambios realizados en el índice y, que es útil para conocer la confianza de los inversores en el mercado, tal como hemos comentado anteriormente.

Además, utilizaremos una serie de modelos de volatilidad estocástica en tiempo continuo (sin saltos) que se han propuesto en la literatura previa para explicar el VIX y para modelizar la volatilidad estocástica de diferentes instrumentos financieros, de tal manera que obtengamos una gran cantidad de trayectorias de este índice con las que podamos trabajar cuando valoremos las distintas opciones exóticas americanas.

Haremos uso del método *Least-Squares Monte Carlo* (LSM) propuesto por Longstaff & Schwartz (2001) para valorar las diferentes opciones americanas. Este método consiste en calcular el valor de continuación (valor esperado de los flujos de caja futuros descontados a fecha de hoy, suponiendo que no se ha ejercido la opción antes) mediante regresiones de polinomios ortonormales (por ejemplo, Legendre, Laguerre, Hermite o Chebyshev, entre otros) para compararlos con los valores obtenidos con el ejercicio inmediato con el fin de calcular los flujos de caja máximos en cada una de las fechas de ejercicio posibles en las trayectorias donde la opción se encuentre ITM en ese momento. Los parámetros de esta regresión se estiman por mínimos cuadrados utilizando como variables independientes los polinomios ortonormales evaluados en el precio del activo subyacente en el instante de tiempo elegido y como la variable dependiente, los flujos de caja esperados actualizados de las trayectorias ITM (*In the*

*money*).

Por otra parte, Moreno & Navas (2003) estudian la robustez del método LSM valorando diferentes derivados concluyendo que el valor de las primas de las opciones *put* estándar apenas sufren cambios cuando se considera que los polinomios tienen grado cinco o superior. Por tanto, supondremos grado cinco en el polinomio ortonormal que utilizaremos (Hermite) para estimar los coeficientes de las regresiones.

Los modelos a los que nos hemos referido anteriormente son un modelo general y seis casos particulares (restringiendo los parámetros) utilizados por Dotsis *et al.* (2007) y por Howison *et al.* (2004), entre otros, y ampliados en dos modelos particulares más por Goard & Mazur (2013) y, por otros dos modelos particulares más por Moreno & Pérez-Jiménez (2018) que presentaremos en el apartado 4 del presente trabajo. Los parámetros de los diferentes modelos que emplearemos serán los estimados por Moreno & Pérez-Jiménez (2018), en el que utilizaron el Método Generalizado de Momentos (GMM), propuesto por Hansen (1982), para la estimación de éstos utilizando una muestra del VIX comprendida entre los años 2009 y 2015.

Los pasos que seguiremos para la valoración de las primas de las diferentes opciones exóticas serán la simulación de un cierto número de trayectorias de los diferentes modelos y el uso de la técnica LSM para calcular la regla de decisión de ejercicio óptimo en cada fecha de ejercicio posible para descontar, hasta el instante inicial, los flujos de caja asociados a cada ejercicio óptimo para, posteriormente, calcular el promedio de las primas de cada trayectoria obteniendo el valor de la prima de la opción deseada.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera: La Sección 2 trata de las publicaciones previas, tanto de los modelos de volatilidad estocástica como del método MC y LSM. La Sección 3 hace referencia a la evolución del índice VIX y como calcular el actual VIX. La Sección 4 detalla los diferentes modelos que se utilizan para simular el VIX. La Sección 5 describe el método *Least-Squares Monte Carlo* y presenta un ejemplo de dicho método. A continuación, la Sección 6 detalla las características de las opciones exóticas empleadas y presenta las primas de las opciones calculadas después de utilizar LSM. La Sección 7 calcula las Griegas de primer orden de las diferentes opciones consideradas en la sección anterior. Por último, la Sección 8 presenta las principales conclusiones de este trabajo y propone posibles futuras líneas de investigación.

## 2. Revisión de la literatura previa

Son innumerables las publicaciones previas de modelos de volatilidad estocástica que se han utilizado para, entre otros casos, valorar derivados como son opciones, futuros o *swaps* sobre diferentes activos subyacentes debido a que, con el paso de los años y en especial a partir de 1987, la existencia de una volatilidad no constante se ha ido pronunciando más.

Entre estas publicaciones destacamos las efectuadas por Dotsis, Psychoyiosa & Skiadopou-

los (2007) en el cual introducen tres modelos sin saltos (modelo Black-Scholes (1973), modelo Vasicek (1977) y el modelo Cox, Ingersoll & Ross (1985), CIR a partir de ahora) y otros tres modelos con saltos (los tres anteriores, pero con saltos) para intentar explicar seis índices de volatilidad (VIX, VXO, VXD, VDAX, VX1, VX6) utilizando el método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros de los diferentes modelos; las realizadas por Detemple & Osakwe (2000) donde valoran opciones europeas y americanas sobre la volatilidad estocástica de un subyacente suponiendo los modelos Black-Scholes (1973), Vasicek (1977) y CIR (1985).

También comentar las publicaciones efectuadas por Günbichler & Longstaff (1996) donde valoraron futuros y opciones sobre volatilidad suponiendo el modelo CIR (1985); las realizadas por Heston (1993) que proporciona una fórmula cerrada para la valoración de opciones europeas sobre una acción cuya varianza estocástica sigue el modelo CIR (1985) o las efectuadas por Eraker *et al.* (2003) y Bakshi & Cao (2004) que emplean el modelo CIR (1985) con saltos para explicar la dinámica de la volatilidad instantánea.

De igual modo, destacar las publicaciones de Andersen & Piterbarg (2006) que trabajaron, entre otros modelos, con el modelo Heston (1993) para estudiar sus características, obteniendo que los momentos de este modelo son estables bajo unas ciertas restricciones; o la de Kruse & Nögel (2005) que suponiendo el modelo Heston (1993) valoran opciones europeas *forward starting*; la efectuada por Sepp (2008) donde supuso el modelo Heston (1993) con saltos (en el activo subyacente y en su volatilidad estocástica) para valorar derivados de volatilidad (opciones, futuros y *swaps*) y realizar cobertura; la hecha por Bates (1996) en el que supone que el tipo de cambio (\$/Marco alemán) sigue el modelo Heston (1993) con saltos (solo en el proceso del activo subyacente) y valora opciones y futuros sobre este tipo de cambio.

Además, nombramos también las efectuadas por Bali (2000) que utiliza el modelo de Vasicek (1977) en la volatilidad estocástica y dos factores (tipo de interés instantáneo y varianza instantánea) con la finalidad de explicar mejor los movimientos observados en estos tipos de interés; por Scott (1987) y por Stein & Stein (1991) que modelizan la volatilidad mediante el modelo Vasicek (1977) para valorar opciones, o por Das (2002), que utiliza este mismo modelo para modelizar los tipos de interés que utiliza en el mercado de bonos.

Si buscamos las publicaciones realizadas utilizando el modelo 3/2-cuadrático, encontramos las realizadas por Baldeaux (2012) que proporciona un algoritmo para simular, de manera exacta, el precio de un activo subyacente cuya volatilidad estocástica sigue este modelo, proporcionando, además, técnicas de reducción de varianza para acelerar las simulaciones, o las realizadas por Yuen, Zheng & Kwok (2015) donde utilizan un modelo con saltos para modelizar el precio de la acción y el modelo 3/2-cuadrático para la volatilidad estocástica, con la finalidad de valorar *swaps* de varianza, *swaps* gamma y *Corridor Variance swaps*.

Por otra parte, destacar también las realizadas por Carr *et al.* (2005) que valoraron opciones sobre volatilidad modelizando los rendimientos con procesos con saltos, las efectuadas por Howison, Rafailidis & Rasmussen (2004) en el que presentan fórmulas cerradas para la valoración de *swaps* de varianza y volatilidad y *swaptions* suponiendo una serie de modelos

con difusión y con difusión con saltos para la volatilidad estocástica o la realizada por Wagner & Szimayer (2004) que fueron los primeros en introducir un proceso de difusión con saltos de Poisson para explicar el VIX, modelo que se trata de una simplificación del modelo de Black-Scholes extendido con saltos de Merton (1978).

También, comentar los diferentes autores que trabajan con el modelo Black-Scholes (1973), como son, Little & Pant (2001) que valoran *swaps* de varianzas desarrollando un esquema de diferencias finitas en el marco de Black-Scholes extendido; Hull & White (1987) modelizan la varianza mediante el modelo de Black-Scholes (1973) suponiendo incorrelación entre el precio del subyacente y la volatilidad, para valorar opciones; Johnson & Shanno (1987) valoran opciones *call* sobre acciones con volatilidad estocástica suponiendo que existe correlación entre los cambios instantáneos de la volatilidad y el precio de la acción, y que la volatilidad está regida por el modelo Black-Scholes (1973); Merton (1976) utiliza el modelo de Black-Scholes (1973) con saltos para modelizar la dinámica del precio de la acción.

Por otro lado, Goard & Mazur (2013) añaden otros modelos sin saltos a los ya presentados por Dotsis *et al.* (2007) o por Heston (1993), entre otros, para modelizar la volatilidad y Moreno & Pérez-Jiménez (2018) añaden otros dos modelos más. Tanto Goard & Mazur (2013) como Moreno & Pérez-Jiménez (2018) utilizan el método Generalizado de Momentos para estimar los parámetros de los diferentes modelos con los que trabajan. Una ventaja de esta técnica es que no es necesario conocer la distribución de los procesos con los que trabajas para estimar los parámetros, facilitando los posibles cálculos en ciertas ocasiones.

Si ahora estudiamos el método más común que se utilizaba para valorar derivados de tipo europeo, podemos comentar que el primer autor que aplicó el método de simulación Monte Carlo en el contexto de la valoración de opciones europeas fue Boyle (1977). Posteriormente, este método es empleado, entre otros autores, por Hull & White (1987) que lo utilizan para valorar opciones sobre una acción con volatilidad estocástica, Kemna & Vorst (1990) y Broadie & Glasserman (1996) que lo utilizan para valorar opciones asiáticas o, incluso Tilley (1993) lo utiliza para valorar opciones americanas.

Más adelante, debido a la complejidad de la valoración de opciones americanas, sobretodo cuando el valor de la opción está afectada por más de un factor, Longstaff & Schwartz (2001) propusieron el método *Least-Squares Monte Carlo* para valorar opciones americanas mediante simulaciones. Este nuevo método ha sido utilizado, entre otros autores, por Moreno & Navas (2003) o Stentoft (2004) donde valoran, entre otros tipos, opciones asiáticas americanas, o Rodrigues & Rocha (2006) que utilizan este método para valorar ciertos tipos de opciones y estudian la convergencia del método cuando se incrementa el grado del polinomio ortonormal que se utiliza para aproximar el valor de continuación (tal y como se puede comprobar también en Moreno & Navas (2003)). También ha sido utilizado por Willigers & Bratvold (2009) para valorar opciones americanas sobre el petróleo y el gas, o Tsekrekos, Shackleton & Wojakowski (2003) que valoran opciones americanas sobre una acción que paga dividendos suponiendo un tipo de interés constante y no constante.

### 3. Índices de volatilidad

#### 3.1. Precedentes del VIX

La necesidad de cubrirse y especular frente a cambios en la volatilidad generó un crecimiento rápido de los mercados de derivados de volatilidad. Estos derivados tienen un *payoff* (pago final) que dependen explícitamente de alguna medida de volatilidad, como puede ser la varianza o la volatilidad. Por ello, cuando empezaron a circular en el mercado este tipo de derivados, hubo un aumento considerable en su negociación. Por otra parte, podemos considerar a un índice de volatilidad como el activo subyacente de un derivado sobre volatilidad.

En 1993, Whaley introdujo el VIX como el índice de volatilidad del índice S&P 100 que, en el año 2003, pasaría a llamarse VXO debido a unas nuevas condiciones que se dieron en el mercado. Whaley propone que su cálculo se realice a partir de una combinación lineal de las volatilidades implícitas de ocho opciones ATM (*At the money*), dos *calls* y dos *puts* para cada vencimiento, con un total de dos vencimientos: en el primer vencimiento se consideraran las opciones negociadas que tengan un tiempo a vencimiento posible, pero superior a siete días, y el segundo vencimiento será la siguiente fecha disponible de negociación. Además, el índice VXO está ponderado por un término de manera que éste represente la volatilidad implícita de una opción ATM sobre el S&P 100 con un vencimiento constante igual a 30 días (22 días laborables). Para cada vencimiento se seleccionan los dos *strikes* más próximos al valor del subyacente (superior e inferior) y, para cada uno de estos valores se asocia una de las dos *calls* y una de las dos *puts*, es decir, para cada vencimiento tendremos una *call* con *strike* superior y otra con *strike* inferior, igual que con las opciones *put* (cuatro opciones por vencimiento). Por otra parte, se utiliza el modelo de Black & Scholes (1973) para el cálculo de la volatilidad implícita de las opciones *call* y *put*.

De esta manera, el índice VXO se calcula de la siguiente manera:

$$VXO = \sigma_1 \left( \frac{N_2 - 22}{N_2 - N_1} \right) + \sigma_2 \left( \frac{22 - N_1}{N_2 - N_1} \right)$$

donde  $N_i$  indica el número de días de negociación del vencimiento  $i$ ,  $i = 1, 2$ .

La volatilidad implícita del subyacente S&P 100,  $\sigma_i$ , viene determinada por:

$$\sigma_i = \left( \frac{\sigma_{(C, K_{a,i})} + \sigma_{(P, K_{a,i})}}{2} \right) \left( \frac{S - K_{b,i}}{K_{a,i} - K_{b,i}} \right) + \left( \frac{\sigma_{(C, K_{b,i})} + \sigma_{(P, K_{b,i})}}{2} \right) \left( \frac{K_{a,i} - S}{K_{a,i} - K_{b,i}} \right)$$

donde  $K_{a,i}$  y  $K_{b,i}$  son los *strikes* superior e inferior más cercanos al valor del subyacente, respectivamente, y  $\sigma_{(C, K_{a,i})}$  y  $\sigma_{(P, K_{a,i})}$  son las volatilidades implícitas de las opciones *call* y *put* con *strike*  $K_{a,i}$ , respectivamente (ambas con vencimiento  $i$ ,  $i = 1, 2$ ).

La implementación de la técnica de construcción del VXO supone un mercado muy líquido, por tanto, no podemos aplicar esta técnica en mercados emergentes que son menos líquidos que el CBOE, ya que, de manera contraria, incurriríamos en sesgos importantes durante la



construcción del índice de volatilidad, tal como sucedió con el índice de volatilidad construido por MONEP<sup>1</sup> en 1997.

### 3.2. EL VIX

Debido a las nuevas condiciones de mercado en 2003, el CBOE cambió la forma de calcular el VIX: reemplazó el índice S&P 100 por el índice S&P 500 al haber mayor volumen de negociación en el último e introdujo opciones OTM (*Out of the money*) ya que los inversores negociaban con opciones *put* OTM para cubrirse ante posibles bajadas de los precios.

El VIX mide la volatilidad esperada durante los próximos 30 días del activo subyacente, el índice S&P 500. Para su cálculo se utilizan opciones que vencen en más de 23 días y en menos de 37 días, en el que se escogen dos instantes de vencimiento, donde el menor vencimiento se denominará “corto plazo” y el mayor vencimiento, “largo plazo”. Además, también comentar que se pueden utilizar tanto contratos de opciones estándar, es decir, opciones que vencen el tercer viernes de cada mes, como contratos de opciones semanales que venzan cada viernes, salvo los que venzan el tercer viernes de cada mes. Cada semana, las opciones utilizadas en el cálculo del VIX pasan a nuevos vencimientos de contrato, es decir, si por ejemplo hoy es el segundo martes de octubre, el VIX se calcularía utilizando opciones sobre el S&P 500 que venciesen en 24 días (“corto plazo”) y en 31 días (“largo plazo”). Al día siguiente, la opción que venciese en 30 días pasaría a ser la de “corto plazo” y la opción que expirase en 37 días (tercer viernes del mes siguiente) sería la de “largo plazo”.

Inicialmente, Demeterfi *et al.* (1999a), suponiendo  $s_t = \ln(S_t)$ , donde  $S_t$  es el precio de un cierto activo subyacente, consideraron el siguiente modelo para el subyacente  $s_t$ :

$$ds_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad (1)$$

donde  $\mu_t$  y  $\sigma_t$  son el término deriva y difusión respectivamente y  $dW_t$  es un movimiento Browniano estándar.

Además, demostraron que la varianza,  $V_t$ , bajo la medida neutral al riesgo, puede ser calculada mediante la suma de opciones *call* y *put* OTM:

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^* \left[ \int_0^T ds_t^2 \right] = \mathbb{E}^* \left[ \int_0^T \sigma_t^2 dt \right] = \frac{2e^{rT}}{T} \left[ \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK \right] \\ &= \frac{2e^{rT}}{T} \left[ \int_0^\infty \frac{M(T, K)}{K^2} dK \right] \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $r$  es el tipo de interés libre de riesgo para el periodo  $[0, T]$  y  $P(T, K)$  y  $C(T, K)$  son las cotizaciones medias del *bid* y *ask* para opciones *put* y *call* europeas con *strike*  $K$  y vencimiento  $T$ , respectivamente.

---

<sup>1</sup>Mercado francés de opciones negociables situado en París.

De esta manera, el CBOE adaptó la forma de calcular la varianza de la ecuación (2) según las nuevas condiciones de mercado de la siguiente manera:

$$V_j = \frac{2e^{r_j T_j}}{T_j} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta K_i}{K_i^2} M(K_i) - \frac{1}{T_j} \left[ \frac{F_j}{K_f} - 1 \right]^2, \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

donde  $0 < K_1 < \dots < K_f \leq F_j < K_{f+1} < \dots < K_N$ , y  $K_i$  y  $F_j$ <sup>2</sup> son los diferentes *strikes* disponibles en el mercado y el precio *forward* del activo subyacente en  $T_j$ , respectivamente.  $r_j$  denota el tipo de interés libre de riesgo para el periodo  $[0, T_j]$ ,  $K_f$  es el primer *strike* menor a  $F_j$  ( $K_f \leq F_j$ ), de manera que  $f \in \mathbb{N}/ 2 < f < N - 1$  y  $\Delta K_i$  es la media de la diferencia entre los *strikes* adyacentes a  $K_i$ , esto es,  $\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$  si  $1 < i < N$  y, en los valores extremos,  $\Delta K_1 = K_2 - K_1$  y  $\Delta K_N = K_N - K_{N-1}$ . Por último,  $M(K_i) = \min\{C(K_i, T_j), P(K_i, T_j)\}$ , es decir, indica la prima de la opción OTM para el *strike*  $K_i$ <sup>3</sup>.

De esta manera, el CBOE propone que el VIX se calcule como una combinación lineal de dos varianzas,  $V_j$ , con vencimientos  $T_j$ ,  $j = 1, 2$  (vencimiento a corto plazo y a largo plazo).

$$VIX = 100 \sqrt{\left( T_1 V_1 \frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} + T_2 V_2 \frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \frac{N_{365}}{N_{30}}} \quad (4)$$

donde  $N_j$  denota el número de minutos restantes hasta el vencimiento  $T_j$ ,  $j = 1, 2$  y  $N_{30}$  y  $N_{365}$  indican los minutos en 30 y 365 días, respectivamente. Notemos que multiplicamos por 100 para pasar el resultado a porcentaje.

Por tanto, los pasos que seguiremos en el cálculo del VIX serán los siguientes:<sup>4</sup>

- 1) Consideraremos las opciones sobre el subyacente S&P 500 que estén OTM y la opción ATM con *strike*  $K_f$ . Este *strike* se calcula como el *strike* más cercano, inferiormente, al valor *forward*,  $F_j$ , obtenido a partir de la paridad *put-call*, donde, para su cálculo, se utiliza como parámetros de las primas de la *call* y *put* las cotizaciones medias *bid* y *ask* correspondientes a cada opción y como *strike*, el que minimiza la diferencia entre las primas *call* y *put* de todos los *strikes* disponibles en el mercado. Se seleccionan las opciones *call* y *put* que estén OTM, es decir, las opciones *call* con *strike* mayor que  $K_f$  y las opciones *put* con *strike* menor que  $K_f$ , excluyendo del cálculo aquellas opciones con cotizaciones *bid* igual a 0 y aquellas opciones posteriores a dos cotizaciones *bid* iguales a 0 (Suponiendo los *strikes* ordenados de manera creciente). Esto se realiza para cada uno de los dos vencimientos.
- 2) Aplicaremos la ecuación (3) para cada vencimiento.
- 3) Aplicaremos la ecuación (4) para obtener el VIX.

<sup>2</sup>Obtenido a partir de la paridad *put-call*.

<sup>3</sup>Para  $K_i < F_j$ ,  $M(\cdot)$  es la prima de una *put* OTM y para  $K_i > F_j$ , la prima de una *call* OTM.

<sup>4</sup>En el apéndice de este trabajo se muestra un ejemplo numérico del cálculo del VIX.

En marzo de 2004, el CBOE introdujo futuros de volatilidad sobre el VIX y en febrero de 2006, introdujo opciones sobre el VIX. Tal como comentamos anteriormente, el volumen de negociación de estos últimos derivados aumentó rápidamente, pasando de 246283 contratos negociados en julio de 2006 a 503165 en agosto de 2006, es decir, se produjo un aumento del 104,30 % en la negociación de opciones en el plazo de un mes. En 2007, el volumen de negociación se situó en más de 2,8 millones de contratos.

Por último, veamos las limitaciones que presenta el cálculo del VIX ofrecido por el CBOE:

Encontramos que las ecuaciones (3) y (4) pueden llevarnos a cuatro tipos de errores numéricos, identificados por Jiang y Tian (2005): error de truncamiento, error de discretización, error de aproximación y error de interpolación:

- Error de truncamiento en el número finito de *strikes* utilizados en la ecuación (3).<sup>5</sup>
- Error de discretización en la ecuación (3) ya que el CBOE aproxima una integral por medio de una suma finita (integral numérica) debido a que disponemos de un número finito de *strikes* que no nos permiten efectuar una partición suficientemente fina para evitar este tipo de error.
- Error en la aproximación en serie de Taylor al aproximar el segundo término de (3).
- Error de interpolación al interpolar linealmente la varianza calculada en los dos vencimientos  $T_1$  y  $T_2$  a 30 días en la ecuación (4).

Aunque es improbable que algunos de estos errores sean estadísticamente significativos, es importante conocer el impacto que tendrá en la varianza y, por tanto, en el cálculo del VIX para evitar que se den valores de este índice poco realistas. Más adelante, Jiang y Tian (2007) proponen un método de suavizado, basado en el uso de un esquema de interpolación-extrapolación en el cálculo de la varianza implícita, para resolver los problemas producidos por el procedimiento propuesto del CBOE.

## 4. Modelos de volatilidad estocástica

Tal como hemos comentado anteriormente, son diversos los modelos estocásticos utilizados para analizar la volatilidad pero, en este trabajo, nos centraremos en el modelo general propuesto por Goard & Mazur (2013) y sus ocho casos particulares dependiendo de los valores que tomen los distintos parámetros, ampliados en dos modelos particulares más por Moreno & Pérez-Jiménez (2018) para explicar el VIX y que resumiremos en la Tabla 1.

---

<sup>5</sup>El CBOE considera aquellas opciones OTM (con *strikes* asociados a cada una) con una cotización *bid* no nula y excluye aquellas opciones que se encuentren a partir de dos cotizaciones *bid* igual a cero de manera consecutiva. Esto genera que las opciones consideradas en el cálculo del VIX varíen con el tiempo generando saltos artificiales en el VIX.

Goard & Mazur (2013) propusieron un modelo general para explicar la dinámica de la volatilidad utilizando el siguiente proceso de Itô:

$$dV = \underbrace{\left( c_1 + \frac{c_2}{V} + c_3 V \ln(V) + c_4 V + c_5 V^2 \right)}_{\text{Deriva}} dt + \underbrace{k V^\gamma dZ}_{\text{Difusión}} \quad (5)$$

donde  $dV$  indica el cambio instantáneo en la volatilidad,  $dZ$  es un movimiento browniano estándar y  $k$ ,  $\gamma$ ,  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$  son los parámetros del modelo cuyas restricciones nos darán los diferentes modelos particulares que utilizaremos.

Notemos que los diferentes parámetros presentes en el modelo nos indican la posible relación entre los cambios instantáneos en la volatilidad y la propia volatilidad. Al estar presente los parámetros  $c_2$ ,  $c_4$  y  $c_5$  en la deriva del modelo, su significatividad o no, nos indican que el cambio instantáneo esperado de la volatilidad puede ser función inversa, lineal o cuadrática de la volatilidad, respectivamente. Además, pueden existir efectos cruzados entre la volatilidad y su logaritmo mediante la significatividad del parámetro  $c_3$ . Por otra parte, los parámetros  $k$  y  $\gamma$  se encuentran en la difusión del modelo, donde  $k$  sería el coeficiente de este término y  $\gamma$  indicaría la sensibilidad de la varianza de los cambios en la volatilidad con respecto al nivel de volatilidad.

Presentamos los diferentes modelos particulares, según las restricciones en los parámetros del modelo general (5), en la siguiente tabla:

Tabla 1: Casos particulares del modelo general según las restricciones de sus parámetros.

	Modelo	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$k$	$\gamma$
1	Heston (MRSR $V^2$ )	0	-	0	-	0	-	0
2	MR	-	0	0	-	0	-	1
3	MRSR	-	0	0	-	0	-	0.5
4	GBM	0	0	0	-	0	-	1
5	MRG	-	0	0	-	0	-	0
6	GBMWD	0	0	0	0	0	-	1
7	MRL	0	0	-	-	0	-	1
8	$\frac{3}{2}$ cuadrático	0	0	0	-	-	-	1.5
9	$\frac{3}{2}$ lineal	-	0	0	-	0	-	1.5
10	GBMWDF	0	0	0	-	0	0	0

Nombre completo de los modelos: MR: Mean-Reverting, MRSR: Mean-Reverting Square Root, GBM: Geometric Brownian Motion, MRG: Mean-Reverting Gaussian, GBMWD: Geometric Brownian Motion without Drift, MRL: Mean-Reverting Logarithmic, GBMWDF: Geometric Brownian Motion without Diffusion.

A continuación, describimos las diferentes características presentes en los modelos propuestos anteriormente y que pretenden modelizar la volatilidad:

- En el modelo 1 nos percatamos que si consideramos el cambio de variable  $w = V^2$  ( $w$  es la varianza) y utilizamos el lema de Itô, llegamos al modelo propuesto por Heston (1993):

$$dw = (a + bw)dt + X\sqrt{w}dZ \quad (6)$$

donde  $a = 2c_2 + k^2$ ,  $b = 2c_4$  y  $X = 2k$ . Notamos que este modelo presenta un proceso con reversión a la media, la varianza de los cambios en la varianza es proporcional al nivel de la varianza, esto es,  $Var[dw] \propto w$ , y es heterocedástico. Además, este último modelo sería el análogo al modelo Cox, Ingersoll and Ross (1985a) utilizado para explicar los tipos de interés instantáneos.

- El modelo 2 propone un proceso con reversión a la media, la volatilidad de los cambios en la volatilidad es proporcional al nivel de volatilidad, es heterocedástico y su análogo para tipos de interés sería el modelo de Brennan & Schwartz (1980). Howison *et al.* (2004) utiliza este modelo para modelizar la volatilidad suponiendo, conjuntamente, que el activo subyacente sigue un movimiento browniano geométrico, para valorar derivados sobre volatilidad (*swaps* de varianza).
- El modelo 3 también propone un proceso con reversión a la media, pero en este caso, la varianza (y no la volatilidad) de los cambios en la volatilidad es proporcional al nivel de la volatilidad, es heterocedástico y su análogo para tipos de interés sería el modelo de Cox, Ingersoll and Ross (1985a). Detemple & Osakwe (2000) y Grünbichler & Longstaff (1996) utilizan este modelo para valorar opciones y futuros sobre volatilidad. Detemple & Osakwe (2000) también utilizan los modelos 4, 5 y 7 para valorar opciones sobre volatilidad.
- El modelo 4 no presenta reversión a la media, la volatilidad de los cambios en la volatilidad es proporcional al nivel de volatilidad y es heterocedástico. Su análogo para los tipos de interés sería el modelo Black-Scholes (1973). Hull & White (1987) y Johnson & Shanno (1987) utilizan este modelo para valorar opciones sobre acciones cuya volatilidad estocástica sigue este modelo.
- El modelo 5 presenta un proceso con reversión a la media, la volatilidad de los cambios en la volatilidad es proporcional al nivel de volatilidad, es homocedástico y su análogo para tipos de interés sería el modelo de Vasicek (1977). Stein & Stein utilizan el modelo para valorar 21 opciones europeas sobre acciones con volatilidad estocástica, y Scott (1992), para valorar opciones europeas sobre acciones con volatilidad estocástica.
- El modelo 6 no presenta reversión a la media (sin deriva), la volatilidad de los cambios en la volatilidad es proporcional al nivel de volatilidad, es heterocedástico y su análogo

para tipos de interés sería el modelo de Dothan (1978). Además, este modelo es un caso particular del modelo 4, que a su vez, es un caso particular del modelo 2.

- Si aplicamos el lema de Itô sobre la variable  $\ln(V)$  presente en el modelo 7, obtenemos el siguiente proceso:

$$d \ln(V) = (\alpha + \lambda \ln(V))dt + kdZ$$

donde  $\alpha = c_4 - \frac{k^2}{2}$  y  $\lambda = -c_3$ .

Observamos que el modelo 7 propone un proceso con reversión a la media y es heterocedástico. Este modelo es utilizado por Wiggins (1987) y Melino & Turnbull (1990) para valorar opciones sobre acciones con volatilidad estocástica.

- Tanto el modelo 8 como el 9 fueron propuestos por Goard & Mazur (2013) para intentar ajustar mejor el VIX añadiendo una potencia mayor a uno en la sensibilidad de la volatilidad presente en el término de difusión, en concreto, de 3/2. Por otra parte, al tener una potencia mayor que uno en la sensibilidad de la volatilidad del término de difusión, la volatilidad presenta una mayor sensibilidad de la variabilidad de V con respecto a su nivel de lo que lo hacen los anteriores modelos. También comprueban que estos dos modelos mejoran a los seis anteriores en explicar el VIX durante el periodo que comprende los años 1990-2009 debido a la mayor sensibilidad recogida en el parámetro  $\gamma$ .
- Por último, el modelo 10 trata de un modelo de volatilidad determinista al no tener término de difusión. Además, es un caso particular del modelo 4.

Por otra parte, Moreno & Pérez-Jiménez (2018) utilizan datos del VIX desde enero de 2009 hasta diciembre de 2015 para estimar, por GMM, los parámetros de los once modelos. Los parámetros estimados, juntamente con sus *t-statistics* (estadísticos de contraste) entre paréntesis y el contraste  $\chi^2$  se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2: Estimaciones de los parámetros de los diferentes modelos.

Modelo	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$k$	$\gamma$	$\chi^2$
General	153,0839 (1,2398)	-4,8304 (-1,1219)	741,5960 (1,3423)	769,0257 (1,4423)	-1107,0517 (-1,4430)	1,5195 (5,8304)	1,1701 (10,8792)	
1	0	0,1180 (4,7402)	0	-3,6098 (-3,6600)	0	0,1966 (21,8575)	0	29,6736 (0,0000)
2	1,1127 (3,9805)	0	0	-5,6177 (-3,3724)	0	1,1227 (25,061)	1	7,0063 (0,1356)
3	1,2272 (4,4047)	0	0	-5,6177 (-3,3724)	0	1,1227 (25,0961)	0,5	19,8940 (0,0005)
4	0	0	0	0,7320 (1,6108)	0	1,1651 (27,5483)	1	20,8594 (0,0009)
5	1,2853 (4,6178)	0	0	-6,7839 (-4,1083)	0	-0,1959 (-21,5799)	0	30,4988 (0,0000)
6	0	0	0	0	0	1,1354 (29,1785)	1	23,4754 (0,0007)
7	0	0	-5,2636 (-3,7790)	-8,1798 (-3,3961)	0	1,1234 (25,1083)	1	8,6342 (0,0709)
8	0	0	0	4,1539 (3,3162)	-19,3338 (-3,2015)	2,3426 (24,8906)	1,5	19,8119 (0,0005)
9	1,0380 (3,6897)	0	0	-5,5341 (-3,3078)	0	2,3275 (24,4304)	1,5	16,5859 (0,0023)
10	0	0	0	-1,3299 (-3,1295)	0	0	1	187,1028 (0,0000)

Los contrastes  $\chi^2$  indican la bondad de ajuste de los diferentes modelos a los datos observados. Por este motivo, cuanto menor sea este valor mejor estará el modelo especificado. Estos valores sugieren que los modelos 2 y 7 son los únicos que no están mal especificados al no rechazarse la hipótesis nula a un nivel de significación del 5%. Notemos que ambos modelos tienen reversión a la media y son heterocedásticos ( $\gamma = 1 > 0$ ). En cambio, los modelos 1, 5 y 10 son los peores especificados, siendo los tres homocedásticos ( $\gamma = 0$ ), y el modelo 10 también determinista. Por otra parte, los valores obtenidos de  $\chi^2$  de los modelos restantes también son altos, indicando que están mal especificados, esto es, que las restricciones seleccionadas para estos modelos a partir del modelo general no son adecuadas para explicar la muestra seleccionada del VIX.

Por otra parte, hemos obtenido *t-statistics* mayores que dos, en valor absoluto, en prácticamente todos los parámetros de los modelos restringidos al hacer uso de los contrastes de significatividad de estos parámetros (contraste de hipótesis de dos colas). Esto indica que tenemos evidencia estadística suficiente como para rechazar  $H_0 : c_i = 0$ , es decir, podemos considerar, estadísticamente hablando, que los parámetros de los modelos restringidos son distintos de cero con un nivel de significación del 5%.

En cambio, en los parámetros  $c_i$  del modelo general no hemos obtenido *t-statistics* mayores que dos en valor absoluto, por tanto, estadísticamente hablando, estos coeficientes no son significativamente distintos de cero. El motivo principal de obtener este resultado es que los estimadores de los parámetros se han estimado con poca precisión, es decir, obtenemos una desviación típica de la estimación de los parámetros muy elevada debido a que el *t-statistic* es el cociente entre el parámetro estimado y su desviación típica.

Esperamos que las simulaciones del VIX obtenidas con los modelos estimados que presentan reversión a la media estén acotados, ya que la volatilidad del mercado no puede ser muy pequeña debido a que siempre ocurren noticias inesperadas, propiciando cambios en los precios de mercado (cota inferior) y tampoco se puede disparar el VIX debido a que para que sucediese deberían salir a la luz noticias inesperadas constantemente, que es complicado que ocurra, pero que en caso de suceder ocasionaría que los inversores lo tomaran como nueva norma (cota superior).

Por otra lado, tal como hemos comentado anteriormente, una de las características del VIX es que presenta reversión a la media, por tanto, esperamos que los modelos con esta propiedad ajusten mejor al VIX que los que no la presentan. Encontramos dos tipos de reversión a la media, la primera es reversión a la media lineal que se consigue cuando  $c_4 < 0$  y que concuerda con las estimaciones del signo de este parámetro en los modelos 1, 2, 3, 5, 7 y 9. Por otra parte, el modelo presentará reversión no lineal a la media si el signo del parámetro  $c_5$  es negativo ya que esto indicará que después de un gran pico de volatilidad, ésta descenderá rápidamente, pero después de un periodo de baja volatilidad, su aumento podrá ser lento (segundo tipo de reversión a la media). Observamos que las estimaciones de este parámetro en los modelos 8 y en el general se cumple.

Por último, para comprobar si el modelo presenta homocedasticidad o heterocedasticidad debemos mirar la estimación del parámetro  $\gamma$ . Si éste es 0, el modelo es homocedástico; en caso contrario, es heterocedástico.

Además, excluirémos el modelo 10 de la valoración de opciones ya que se trata de un modelo de volatilidad determinista, por tanto, todas sus trayectorias son la misma y, por ende, no tiene sentido aplicar LSM, es decir, se considerarán los otros nueve modelos particulares y el modelo general para la valoración de las distintas opciones exóticas, incluso aunque algunos de estos modelos particulares no estén bien especificados para la muestra del VIX seleccionada ya que deseamos comprobar como influyen las características de reversión a la media y heterocedasticidad en la valoración y en el análisis de sensibilidades que efectuaremos en la parte final del trabajo.

Si resumimos las características de reversión a la media y heterocedasticidad de los diferentes modelos particulares en una tabla, obtenemos:



Tabla 3: Clasificación de los modelos particulares según sus características.

	Heterocedástico	Homocedástico
Reversión a la media	2, 3, 7, 8, 9	1, 5
Sin reversión a la media	4, 6	-

A continuación, procedemos a simular 5000 trayectorias de algunos de los modelos para ver si concuerdan con las características descritas en la tabla anterior:

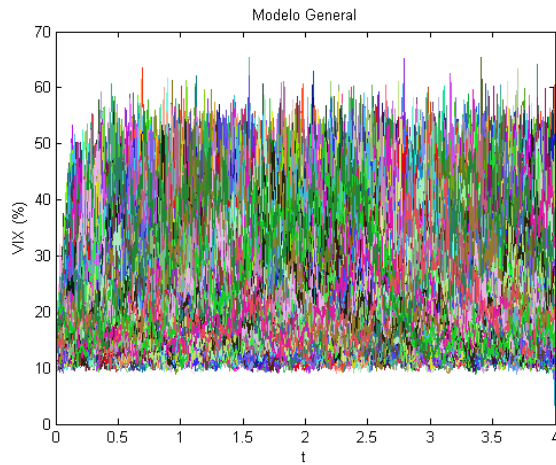


Figura 1: Simulaciones del modelo General.

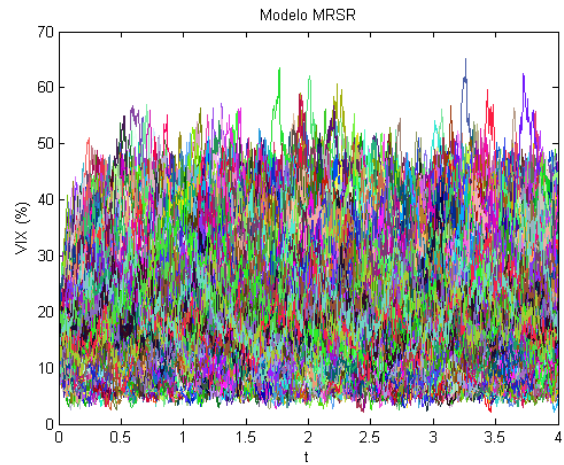


Figura 2: Simulaciones del modelo 3.

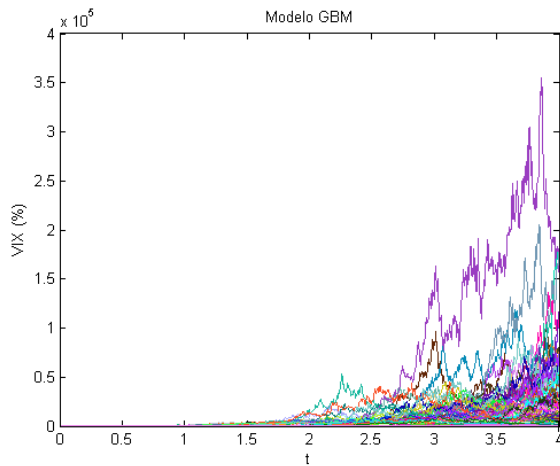


Figura 3: Simulaciones del modelo 4.

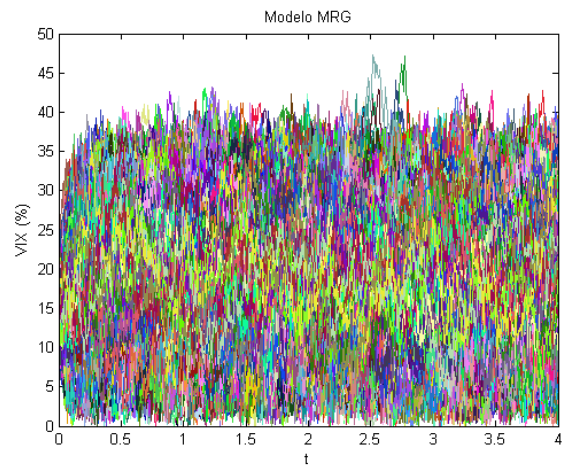


Figura 4: Simulaciones del modelo 5.

Observamos que las características descritas anteriormente concuerdan con las simulaciones de los diferentes modelos. Observamos que el modelo 5 presenta reversión a la media al

no dispararse los valores simulados del VIX y homocedasticidad al mantener, relativamente constantes, las variaciones de los valores simulados del VIX a lo largo del tiempo. El modelo general y el modelo 3 también presentan reversión a la media, pero son heterocedásticos, tal como se puede observar en las mayores fluctuaciones de los valores simulados del VIX (se generan más picos en la parte alta de los valores) a lo largo del tiempo, en contraposición al modelo 5. Por último, comentar que el modelo 4 no posee reversión a la media y es heterocedástico, hecho que genera que los valores del VIX “exploten” cuando pasa el tiempo.

Notemos que esperamos que las primas de las opciones *call* y *put* obtenidas con los modelos 4 y 6 sean mayores que el resto debido a que estos modelos no harán que el VIX converja a un cierto valor a largo plazo, es decir, estos modelos presentarán mayor volatilidad.

Además, esperamos que los modelos con reversión a la media se ajusten y expliquen mejor el VIX, al presentar este índice esta característica, y que obtengamos valoraciones de las opciones más adecuadas con lo que se esperaría.

Para acabar, simulamos el modelo 10 para comprobar que se trata de un modelo de volatilidad determinista y, de esta manera, excluirlo de la valoración de las primas de las opciones por LSM.

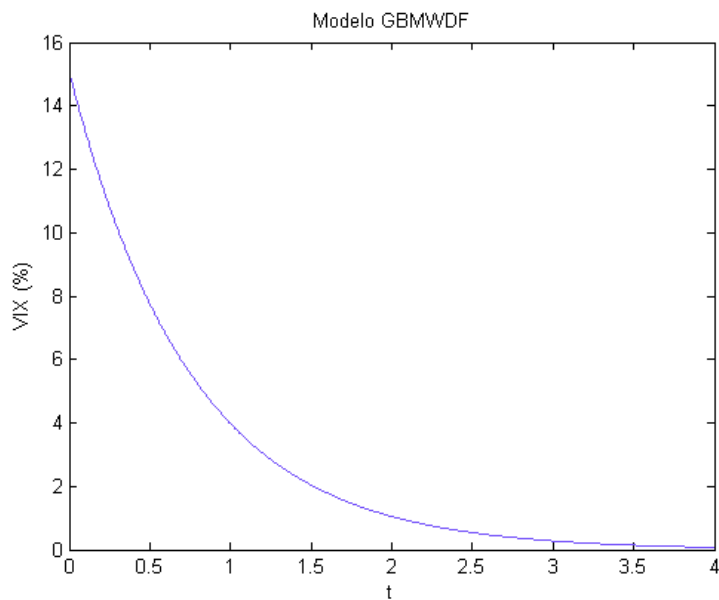


Figura 5: Simulación del modelo 10.

## 5. Método de valoración

Nuestro objetivo consiste en valorar, en el instante inicial ( $t = 0$ ), opciones exóticas americanas con vencimiento en el instante  $T$ . Para tal fin, utilizaremos el método de valoración de opciones americanas *Least-Squares Monte Carlo* propuesto por Longstaff & Schwartz (2001).

Trabajaremos en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$  dentro del intervalo  $[0, T]$  (intervalo en el cual valoraremos las opciones), donde  $\Omega$  es el conjunto de todos los posibles resultados de la economía (estocástico),  $\mathbb{F}$  es el  $\sigma$ -álgebra de todos los eventos conocidos en  $T$  y  $P$  denota la medida de probabilidad definida sobre los elementos de  $\mathbb{F}$ . Además, consideraremos una medida equivalente martingala  $Q$  y denotaremos por  $C(\omega, s; t, T)$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $s \in ]t, T]$ , los flujos de caja, en el instante  $s$ , de la trayectoria  $\omega$  suponiendo que la opción no se ejerce antes de  $t$  y que el inversor sigue la estrategia de inversión óptima en cada fecha de ejercicio (posterior al instante  $t$ ) de la opción, es decir, aquella estrategia que maximice sus beneficios en cada una de las fechas de ejercicio. En particular, en la fecha de vencimiento de la opción, el inversor ejercerá la opción si ésta está ITM y, en el intervalo  $]t, T[$ , el inversor deberá elegir si ejercer la opción inmediatamente en cada fecha de ejercicio (flujos de caja conocidos en cada fecha posible de ejercicio) o esperar a ejercerla posteriormente (estos flujos de caja, que llamaremos valor de continuación, serán los obtenidos mediante el método LSM).

Para su valoración, consideramos solo aquellos derivados cuyos flujos de caja sean elementos del espacio de funciones de cuadrado integrable o de varianza finita  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{F}, Q)$  y supondremos que la opción americana solo se puede ejercer en un número finito de fechas de ejercicio  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ , esto es, aproximaremos la opción americana por su opción bermuda correspondiente. La calidad de la aproximación dependerá del número de fechas de ejercicio de la opción elegidas en el intervalo  $[0, T]$ .

Bajo condiciones de no arbitraje, el valor de continuación,  $F(\omega; t_i)$ , se calcula como la esperanza (neutral al riesgo) de los flujos de caja futuros descontados,  $C(\omega, s, t_i, T)$ :

$$F(\omega; t_i) = \mathbb{E}_Q \left[ \sum_{j=i+1}^N \exp \left( - \int_{t_i}^{t_j} r(\omega, s) ds \right) C(\omega, t_j; t_i, T) \mid \mathbb{F}_{t_i} \right] \quad (7)$$

donde  $r(\omega, s)$  es el tipo de interés libre de riesgo y  $\mathbb{F}_{t_i}$  es el conjunto de información disponible hasta el instante  $t_i$ .

El método LSM se basa en aproximar la esperanza condicional de la ecuación (7) a través de una regresión por mínimos cuadrados para cada fecha de ejercicio posible  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ . Por otra parte, trabajaremos recursivamente hacia atrás comenzando desde el instante  $t_{N-1}$  y, debido a que el valor de continuación está en el espacio de Hilbert  $\mathcal{L}^2$ , consideraremos que en este instante,  $F(\omega; t_{N-1})$  puede expresarse como una combinación lineal finita de funciones básicas ortonormales,  $p_j(X)$ , como son los polinomios de Laguerre, Legendre, Chebyshev,

Gegenbauer, Hermite o Jacobi <sup>6</sup>. De esta manera:

$$F(\omega; t_{N-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p_j(X), \quad a_j \in \mathbb{R}$$

se puede aproximar por:

$$F(\omega; t_{N-1}) = \sum_{j=0}^M a_j p_j(X), \quad a_j \in \mathbb{R} \quad (8)$$

donde el parámetro  $M$  supondremos que será igual a 5 debido a que, en Moreno & Navas (2003) se analiza computacionalmente la robustez del método LSM ante cambios en el valor del parámetro  $M$  (grado del polinomio) y en el uso de los diferentes polinomios ortonormales para diferentes derivados, llegando a la conclusión que, aumentando el grado del polinomio más allá de cinco para opciones *put* americanas estándar, se producen cambios en la prima muy pequeños.

De esta manera, supondremos que el uso los polinomios de Hermite hasta grado cinco será suficiente para valorar adecuadamente las opciones exóticas Americanas consideradas en el presente trabajo, es decir, se estimarán los coeficientes  $a_j$  a partir de la siguiente regresión:

$$Y = \sum_{j=0}^5 a_j p_j(X) + \varepsilon \quad (9)$$

donde la dependencia,  $X$ , de los polinomios ortonormales representa los precios del activo subyacente en  $t_{N-1}$  de las trayectorias ITM e  $Y$  son los *payoffs* de  $t_N$  actualizados a  $t_{N-1}$ , suponiendo que no se ha ejercido la opción en  $t_{N-1}$ , de las trayectorias que en ese momento estén ITM. Notemos que se eligen las trayectorias ITM ya que son las relevantes en el momento de ejercer la opción, así como se reduce bastante el número de funciones básicas requeridas para obtener una buena aproximación a esta esperanza condicional. De este modo, además, se restringe el conjunto donde se estima la esperanza condicional (7).

Como los valores de las funciones básicas en las trayectorias son iid (independientes e idénticamente distribuidas), podemos aplicar el teorema 3.5 de White (1984) debido a ciertos supuestos sobre la existencia de los momentos. De esta manera, el valor estimado de la regresión anterior,  $\hat{F}_M(\omega; t_{N-1})$ , converge en media cuadrática y en probabilidad a  $F_M(\omega; t_{N-1})$  cuando el número de trayectorias ITM tiende a infinito. Además, el teorema 1.2.1 de Amemiya (1985) nos indica que  $\hat{F}_M(\omega; t_{N-1})$  es un estimador ELIO (Estimador Lineal Insegado y Óptimo) de  $F_M(\omega; t_{N-1})$  respecto de la métrica de media-cuadrática.

Así pues, una vez estimada la función de esperanza condicional y, por ende, el valor de continuación  $F_M(\omega, t_{N-1})$ , lo compararemos con el valor de ejercicio inmediato para determinar si el ejercicio anticipado en  $t = t_{N-1}$  es óptimo para las trayectorias ITM o no. Teniendo ya

---

<sup>6</sup>Para más información, estos polinomios están descritos en el capítulo 22 de Abramowitz & Stegun (1970).

identificada la decisión de ejercicio en el instante  $t = t_{N-1}$ , podremos establecer los flujos de caja de la opción en este instante de tiempo. Repetiremos este proceso de manera recursiva hacia atrás para  $t = t_{N-2}, t_{N-3}, \dots, t_1$ , donde  $t_1$  será el primer instante de ejercicio de la opción.

A continuación, procedemos a describir el conjunto de polinomios de Hermite sobre el que trabajaremos. Los polinomios de Hermite,  $H_j(X)$ , son las soluciones que se obtienen de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$H''(X) - 2XH'(X) + 2nH(X) = 0$$

La expresión de estos polinomios es la siguiente:

$$H_j(X) = (-1)^j e^{-X^2} \frac{d^j}{dX^j} \left( e^{-X^2} \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Estos polinomios verifican que son ortogonales respecto al peso  $e^{-X^2}$  en el intervalo  $]-\infty, \infty[$ , es decir:

$$\langle H_i(X), H_j(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_i(X) H_j(X) e^{-X^2} dX = 2^j j! \sqrt{\pi} \delta_{ij}$$

donde  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y 0 en otro caso. Además, su norma al cuadrado, en el espacio  $\mathcal{L}^2$ , vale:

$$\|H_j(X)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \langle H_j(X), H_j(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_j(X) H_j(X) e^{-X^2} dX = 2^j j! \sqrt{\pi}$$

De esta manera, determinaremos el polinomio ortonormal,  $p_j(X)$ , a partir del polinomio de Hermite,  $H_j(X)$ , como:

$$p_j(X) = \frac{e^{-\frac{X^2}{2}}}{\sqrt{2^j j! \sqrt{\pi}}} H_j(X), \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (11)$$

Así, si se aplica el producto escalar (producto interior) a los polinomios (11), obtenemos que éste es un polinomio ortonormal.

$$\langle p_i, p_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p_i(X) p_j(X) dX = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

es decir, el producto escalar valdrá uno cuando el grado de ambos polinomios coincida (que se define como la norma al cuadrado) y 0 en otro caso.

Como hemos comentado anteriormente, utilizaremos los polinomios ortonormales  $p_j(X)$  como los polinomios de Hermite ponderados desde grado cero hasta grado cinco para calcular la esperanza condicional (7).

De este modo, los pasos que seguiremos para valorar opciones americanas mediante este método, suponiendo que las simulaciones del subyacente ya se han efectuado, son los siguiente:

- 1) Seleccionaremos aquellas trayectorias donde la opción se encuentre ITM en la fecha de ejercicio  $t_{N-1}$ .
- 2) Calcularemos los valores de  $Y$  y  $X$  (éstos últimos los utilizaremos para calcular  $p_j(X)$ ).
- 3) Estimaremos los parámetros de la regresión (9),  $a_j$ , por mínimos cuadrados.
- 4) Tomaremos esperanzas condicionales en la regresión estimada en el paso anterior para obtener el valor de continuación calculado a partir de los parámetros  $a_j$  estimados y con los polinomios de Hermite ponderados  $p_j(X)$ .
- 5) Calcularemos el valor de ejercicio inmediato en la fecha de ejercicio  $t_{N-1}$ , que compararemos con el valor de continuación para saber si ejercer o no en dicha fecha y así, calcular el flujo de caja máximo para las trayectorias ITM.
- 6) Repetiremos los pasos 1) - 5) para las fechas de ejercicio  $t_{N-2}, \dots, t_1$  (recursivamente hacia atrás), en los que nos quedaremos con los flujos de caja máximos en las fechas de ejercicio que más cerca estén de la fecha inicial si nos encontramos con que la opción se puede ejercer en más de una de estas fechas, ya que al calcular el valor de  $Y$  se condiciona a no haber ejercido la opción anteriormente. En cuyo caso, si hubiésemos obtenido que la opción se pudiese ejercer en más de una de las fechas de ejercicio posible, ejerceríamos la opción lo antes posible.
- 7) Una vez tuviésemos los flujos de caja máximos en cada una de estas trayectorias, los descontaríamos a fecha inicial y calcularíamos el promedio aritmético para obtener la prima de la opción americana.

Presentamos a continuación un ejemplo sencillo para comprender mejor este método:

*Ejemplo :*

Queremos valorar una *put* Asiática geométrica Americana sobre un activo subyacente que no paga dividendos, con *strike*  $K = 1,1$ , con volatilidad  $\sigma = 0,2$  y con tipo de interés libre de riesgo compuesto continuo es del 5%. Suponemos que existen tres posibles fechas de ejercicio y que el flujo de caja en el instante  $t$  se calcula a partir del precio del subyacente en ese mismo instante y en los instantes de ejercicios anteriores hasta  $t = 1$ , es decir, excluimos el valor inicial del activo subyacente en el cálculo del flujo de caja. Además, suponemos que el precio del activo subyacente sigue el siguiente proceso estocástico (neutral al riesgo):

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$$

es decir,  $S_{t+1} = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_t}$ , donde  $t = 0, 1, 2$ ,  $Z_t \sim N(0, 1)$  y  $\Delta t = 1$ .

A partir del resultado anterior, simulamos ocho trayectorias:<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>El símbolo \* indica que las trayectorias están ITM.

Tabla 4: Simulaciones del precio del activo subyacente y el pago obtenido en el vencimiento de la opción.

Trayectoria	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	Pago en $t = 3$
1	1	0,87*	0,90*	0,87*	0,22
2	1	0,85*	0,74*	0,65*	0,36
3	1	0,82*	1,03*	0,85*	0,20
4	1	0,93*	0,93*	1,59	0
5	1	0,69*	0,62*	0,88*	0,38
6	1	1,25	1,69	1,85	0
7	1	1,14	1,13	0,90*	0,05
8	1	1,03*	0,94*	0,81*	0,18

Si trabajamos con los datos obtenidos en la última columna de la tabla anterior descontándolos al momento inicial y calculamos la media aritmética de estos flujos descontados obtenemos que el precio de esta *put* europea es de 0.1495.

Ahora, para una opción *put* americana, el método LSM trabaja con trayectorias ITM a partir de las cuales maximizamos el valor de ejercicio en cada posible fecha de ejercicio de la opción comparando el valor de continuación con el valor de ejercicio inmediato.

En cada fecha posible de ejercicio, denotamos a la variable  $Y$  como el valor descontado de los flujos de caja de las trayectorias ITM que se recibirá en el futuro si se decide esperar y no ejercer antes y, por  $X$ , el precio del activo subyacente en el instante dado.

Calcularemos, de manera recursiva (hacia atrás) con el método LSM los valores de continuación y, por ende, los valores que maximizan el flujo de caja en cada fecha de ejercicio de las trayectorias ITM. De esta manera, en  $t = 2$  se tienen 6 trayectorias ITM a partir de las cuales calculamos los valores de  $X$  e  $Y$  y que presentamos en la siguiente tabla:

Tabla 5: Valores de  $Y$  y  $X$  en  $t = 2$ .

Trayectoria	$Y$	$X$
1	$e^{-0,05} \cdot 0,22$	0,90
2	$e^{-0,05} \cdot 0,36$	0,74
3	$e^{-0,05} \cdot 0,20$	1,03
4	$e^{-0,05} \cdot 0$	0,93
5	$e^{-0,05} \cdot 0,38$	0,62
6	-	-
7	-	-
8	$e^{-0,05} \cdot 0,18$	0,94

Para decidir si ejercer o no, compararemos el valor de ejercicio inmediato con el valor

de continuación estimado mediante una regresión de mínimos cuadrados, donde la variable respuesta es  $Y$  y las variables explicativas son  $\{X, X^2\}$  acompañados por una constante, es decir:

$$Y_j = a_0 + a_1X_j + a_2X_j^2 + \varepsilon_j$$

donde  $j$  representa las trayectorias ITM, en este caso,  $j = 1, 2, \dots, 6$

Conociendo los valores de  $Y_j$  y  $X_j$ , estimamos los parámetros por mínimos cuadrados y tomamos esperanzas condicionales, obteniendo la siguiente expresión:

$$E[Y|X] = 1,7712 - 3,1806X + 1,5510X^2$$

A partir de esta expresión (valor de continuación esperado conociendo  $X$ ), decidimos si ejercer en  $t = 2$  o esperar al vencimiento para cada trayectoria, comparando  $1,1 - G$  y  $E[Y|X]$ , donde  $G = Promedio_{Geom}(X)$ , que se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 6: Decisión sobre el posible ejercicio en  $t = 2$ .

Trayectoria	$1,1 - G$	$E[Y X]$	Decisión
1	0,22	0,1650	Ejercer
2	0,31	0,2669	Ejercer
3	0,18	0,1407	Ejercer
4	0,17	0,1547	Ejercer
5	0,45	0,3954	Ejercer
6	-	-	-
7	-	-	-
8	0,12	0,1519	Esperar

Notemos que en  $t = 2$  ejerceremos siempre que  $1,1 - G > E[Y|X]$ . De esta manera, los flujos de caja en  $t = 2$  para el propietario de la opción *put*, suponiendo que no se ha ejercido antes la opción para ninguna de las diferentes trayectorias, vienen dados por la siguiente tabla:

Tabla 7: Flujos de caja si la opción no se ejerce antes del instante  $t = 2$ .

Trayectoria	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	-	0,22	0
2	-	0,31	0
3	-	0,18	0
4	-	0,17	0
5	-	0,45	0
6	-	-	-
7	-	-	-
8	-	0	0,18



Repetimos el mismo proceso para el instante  $t = 1$ . En este caso también tenemos las mismas 6 trayectorias ITM que en el instante  $t = 2$ . Ahora, para calcular la variable  $Y$  se descuentan los flujos de caja obtenidos en la Tabla 7 en los instantes  $t = 2$  o  $t = 3$  (pero no en los dos instantes a la vez) para cada trayectoria ya que solo podemos ejercer la opción una vez en cada trayectoria. Los valores de  $Y$  y  $X$  obtenidos para el instante  $t = 1$  se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 8: Valor de  $Y$  y  $X$  en  $t = 1$ .

Trayectoria	$Y$	$X$
1	$e^{-0,05} \cdot 0,22$	0,87
2	$e^{-0,05} \cdot 0,31$	0,85
3	$e^{-0,05} \cdot 0,18$	0,82
4	$e^{-0,05} \cdot 0,17$	0,93
5	$e^{-0,05} \cdot 0,45$	0,69
6	-	-
7	-	-
8	$e^{-0,05 \cdot 2} \cdot 0,18$	1,03

Estimamos de nuevo por mínimos cuadrados la regresión con  $Y$  como variable respuesta y con una constante,  $X$  y  $X^2$  como variables explicativas utilizando los datos de la Tabla 8, obteniendo los siguientes resultados:

$$E[Y|X] = 2,9308 - 5,5702X + 2,8004X^2$$

En este caso, la regla de decisión es:

Tabla 9: Decisión sobre el posible ejercicio en  $t = 1$ .

Trayectoria	$1,1 - G$	$E[Y X]$	Decisión
1	0,23	0,1780	Ejercer
2	0,25	0,1883	Ejercer
3	0,28	0,2060	Ejercer
4	0,17	0,1547	Ejercer
5	0,41	0,3150	Ejercer
6	-	-	-
7	-	-	-
8	0,07	0,1407	Esperar

De la misma manera que antes, ejercemos en  $t = 1$  siempre que  $1,1 - G > E[Y|X]$ .

Por tanto, la matriz de decisiones de ejercicio de esta opción para las diferentes trayectorias e instantes, es:

Tabla 10: Matriz de decisiones de ejercicio.

Trayectoria	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1	0	0
2	1	0	0
3	1	0	0
4	1	0	0
5	1	0	0
6	0	0	0
7	0	0	1
8	0	0	1

Por consiguiente, los flujos de caja que paga esta opción asiática geométrica americana en las tres fechas de ejercicio y para las ocho trayectorias, para el dueño de la opción, es:

Tabla 11: Flujos de caja de la opción.

Trayectoria	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0,23	0	0
2	0,25	0	0
3	0,28	0	0
4	0,17	0	0
5	0,41	0	0
6	0	0	0
7	0	0	0,05
8	0	0	0,18

Observamos que en  $t = 1$ , la opción se ejerce para las cinco primeras trayectorias generando el consiguiente flujo de caja, en  $t = 2$ , no se ejerce ninguna de las trayectorias y en  $t = 3$  se ejerce en las dos últimas trayectorias. Además, observamos que la trayectoria 6 no se ejerce en ningún momento, debido a que la opción siempre está OTM en los diferentes instantes de tiempo. Notemos, también, que no hemos hecho una mala decisión de ejercicio ya que la única trayectoria donde no hemos ejercido la opción ha sido aquella donde ésta siempre ha estado OTM para todos los instantes y, en la trayectoria 7, a pesar de haber estado siempre OTM en los dos primeros instantes de tiempo, hemos tenido suerte y en el vencimiento hemos conseguido un *payoff* positivo.

Por último, calculamos la prima de esta opción americana descontando los flujos de caja

al instante inicial y calculando la media aritmética de los valores de todas las trayectorias. Obtenemos un valor de la prima igual a 0,2104, mayor que la opción europea homóloga.

## 6. Valoración de las opciones exóticas

### 6.1. Introducción previa

Primeramente introduciremos los dos tipos de opciones exóticas: la opción asiática y la opción australiana, para posteriormente, definir los flujos de caja que presentan.

1. Aunque a finales de 1970 existían bonos vinculados a *commodities*<sup>8</sup> (materias primas) con precio de liquidación de valor medio, no fue hasta 1987 cuando David Spaughton y Mark Standish (empleados de Bankers Trust) desarrollaron la primera fórmula de valoración utilizada para opciones ligadas al precio medio del petróleo.

Se trata de opciones con trayectorias dependientes de valores pasados al depender su *payoff* del precio del activo subyacente en los instantes de tiempo anteriores y actual, según dicte el contrato establecido. Una ventaja de la estructura de este *payoff* es que evita la manipulación del precio del activo subyacente cerca de vencimiento, como pasa con las opciones europeas comunes, ocasionando que sea más difícil de influir sobre la probabilidad de ejercicio de la opción.

Por otro lado, como la media del precio de un activo subyacente es menos volátil que el precio de éste, las primas de las opciones asiáticas suelen ser más baratas que las primas de las opciones europeas o americanas comunes. El abaratamiento de este tipo de opciones genera que las opciones asiáticas se suelen utilizar más en la cobertura de un activo que sus homólogas opciones comunes.

Exponemos ahora la estructura de los flujos de caja de estas opciones:

Sea  $V_t$  el valor del índice VIX en el instante  $t$ ,  $1 \leq t \leq N$  y sea  $G_t$  y  $A_t$  la media geométrica y aritmética de  $V$ , respectivamente, es decir,  $G_t = \left( \prod_{i=1}^t V_i \right)^{1/t}$ , con  $G_0 = V_0$

y  $A_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t V_i$  con  $A_0 = V_0$ ,  $1 \leq t \leq N$ .

- El flujo de caja de la opción *put* asiática geométrica es función del producto del precio del activo subyacente en una fechas de ejercicio concretas prefijadas en el contrato. En concreto, si denotamos  $K$  como el *strike*:

$$FC_t = \max(K - G_t, 0) \quad (12)$$

---

<sup>8</sup>Estos contratos dan derecho a los inversores al máximo entre el valor promedio del *commodity* subyacente durante un cierto intervalo de tiempo y el valor nominal del bono.

- El flujo de caja de la opción *put* asiática aritmética es función de la suma del precio del activo subyacente en una fechas de ejercicio concretas prefijadas en el contrato. En concreto:

$$FC_t = \text{máx}(K - A_t, 0) \quad (13)$$

Como los precios son no negativos, se sabe que el valor obtenido a partir de la media aritmética es mayor que el obtenido a partir de la media geométrica, de este modo esperamos encontrar primas de opciones *put* asiáticas aritméticas más baratas que las primas de opciones asiáticas geométricas.

2. La opción australiana fue presentada por Moreno & Navas (2008), donde suponen que el flujo de caja de este tipo de opción europea es función del ratio entre el precio de la acción (que sigue un proceso lognormal) y su media a lo largo de la vida de la opción, o viceversa. Las medias consideradas son la media aritmética y la media geométrica. Además, notemos que las opciones australianas serían un caso particular de las opciones asiáticas.

Vemos ahora su flujo de caja en  $t$ ,  $1 \leq t \leq N$ :

- El flujo de caja de la opción *put* australiana geométrica con ratio entre la media geométrica y el precio del activo subyacente, que denotaremos como  $GV$ , se define como:

$$FC_t = \text{máx}\left(K - \frac{G_t}{V_t}, 0\right) = \text{máx}(K - GV_t, 0) \quad (14)$$

- En cambio, si consideramos el ratio entre el precio del activo subyacente y la media geométrica, que denotaremos como  $VG$ , el flujo de caja es:

$$FC_t = \text{máx}\left(K - \frac{V_t}{G_t}, 0\right) = \text{máx}(K - VG_t, 0) \quad (15)$$

- Por otra parte, definimos el flujo de caja de la opción *put* australiana aritmética con ratio entre la media aritmética y el precio del activo subyacente, que denotaremos como  $AV$ , como:

$$FC_t = \text{máx}\left(K - \frac{A_t}{V_t}, 0\right) = \text{máx}(K - AV_t, 0) \quad (16)$$

- Por último, el flujo de caja de la opción *put* australiana aritmética con ratio entre el precio del activo subyacente y la media, que denotaremos como  $VA$ , es:

$$FC_t = \text{máx}\left(K - \frac{V_t}{A_t}, 0\right) = \text{máx}(K - VA_t, 0) \quad (17)$$

3. Las distintas opciones *call* se definirán del mismo modo que las opciones *put*, salvo que el término no nulo del flujo de caja, presente dentro de la función máximo, se definirá con un signo negativo, afectando a ambos sumandos.

## 6.2. Valoración

En esta sección vamos a dar una estimación de la prima de las seis opciones exóticas americanas diferentes haciendo uso del método LSM y de sus homólogas opciones europeas. En concreto, valoraremos las opciones europeas y americanas presentadas en el subapartado anterior, considerando que los dos tipos de media se calculan a partir de todas las fechas de ejercicio anteriores y la actual, excluyendo el valor inicial del activo subyacente, es decir, si estamos en el instante  $t$ ,  $1 \leq t \leq N$ , la media geométrica y la media aritmética tomarán el valor calculado a partir de  $G_t$  y  $A_t$  ya presentados anteriormente, respectivamente.

Primeramente, para simular el VIX, debemos transformar los modelos en tiempo continuo presentados en el apartado 3, en tiempo discreto. Esta transformación la haremos utilizando la discretización de Euler.

Por ejemplo, podríamos utilizar esta técnica en el modelo general (5), quedando de la siguiente forma:

$$V_{t+1} = V_t + \left( c_1 + \frac{c_2}{V_t} + c_3 V_t \ln(V_t) + c_4 V_t + c_5 V_t^2 \right) \Delta t + k V_t^\gamma \sqrt{\Delta t} Z_t, \quad Z_t \sim N(0, 1) \quad (18)$$

Posteriormente, sustituimos los parámetros estimados en cada modelo y simulamos (algunos de estos ejemplos están disponibles al final de la sección 4 del presente trabajo). Una vez simuladas las diferentes trayectorias del VIX, pasamos a valorar los seis tipos de opciones exóticas con las siguientes características:

- Precio del VIX en la fecha 21/05/2019:  $S = 15,10$  dólares.
- Precio de ejercicio:  $K = 20$  dólares.
- Tipo de interés libre de riesgo:  $r = 2,5\%$ .
- Fecha de vencimiento:  $T = 4$  años.

Como el VIX no paga dividendos, las opciones *calls* americanas y europeas tienen la misma prima ya que sabemos que la *call* americana no se ejercerá antes del vencimiento pues tiene un valor temporal no nulo. De esta manera, primero valoraremos las opciones *put* europeas<sup>9</sup>

---

<sup>9</sup>Utilizaremos el método de Monte Carlo.

y posteriormente se utilizará la paridad *put-call* para opciones europeas<sup>10</sup> para valorar las opciones *calls* asociadas. Por último, calcularemos la prima de las opciones *put* americanas mediante el método LSM.

A priori, esperamos que las primas de las opciones obtenidas con los modelos con reversión a la media sean menores que con los modelos sin reversión a la media ya que los primeros hacen que el VIX converja a un valor a largo plazo, cosa que no sucederá con los segundos tipos de modelos, es decir, con modelos con reversión a la media, el VIX será menos volátil, haciendo que las primas obtenidas sean menores que con las de los modelos sin reversión a la media. Con respecto a la heterocedasticidad, las primas de los modelos heterocedásticos podrán ser mayores o menores que las obtenidas con modelos homocedásticos ya que éstas dependerán del nivel de volatilidad presente en cada fecha de ejercicio posible de la opción.

Por otra parte, esperamos que las primas de las opciones *call* obtenidas con media aritmética sean mayores que las obtenidas con media geométrica y suceda lo contrario con las opciones *put*, tal como hemos expuesto en el anterior apartado, es decir, esperamos que las primas de las opciones *put* asiáticas geométricas sean mayores que las asiáticas aritméticas y que las primas de las opciones *put* australianas sobre GV y VG sean mayores que las australianas sobre AV y VA, respectivamente. De manera contraria sucedería con las primas de las opciones *call*.

---

<sup>10</sup>Opciones asiáticas :  $c_0 - p_0 = (Aver - K) e^{-rT}$

$$Opciones\ australianas : \begin{cases} Tipo\ GV\ y\ AV : & c_0 - p_0 = \left( \frac{Aver}{VIX_T} - K \right) e^{-rT} \\ Tipo\ VG\ y\ VA : & c_0 - p_0 = \left( \frac{VIX_T}{Aver} - K \right) e^{-rT} \end{cases}$$

Tabla 12: Primas de las diferentes opciones obtenidas a partir de los diez modelos.

Primas de las opciones						
$S = 15,10, K = 20$ $r = 2,5\%, T = 4$	<i>Put europea</i>					
	AsGeom	AsArit	AusGeom-GV	AusGeom-VG	AusArit-AV	AusArit-VA
Modelos: General	0,58	0,31	18,89	18,94	18,81	19,00
2	1,62	1,04	18,95	18,92	18,90	18,97
3	1,78	1,15	18,96	18,93	18,91	18,98
7	1,63	0,98	18,94	18,92	18,88	18,98
8	2,54	1,79	18,95	18,91	18,89	18,97
9	2,30	1,73	18,96	18,94	18,91	18,98
1	2,00	1,41	18,96	18,94	18,92	18,98
5	1,96	1,29	18,93	18,94	18,89	18,99
4	6,40	5,01	17,87	17,38	16,87	18,48
6	13,26	11,05	13,72	19,38	10,97	19,57
$S = 15,10, K = 20$ $r = 2,5\%, T = 4$	<i>Put americana</i>					
	AsGeom	AsArit	AusGeom-GV	AusGeom-VG	AusArit-AV	AusArit-VA
Modelos: General	4,76	4,76	19,00	19,00	19,00	19,00
2	4,78	4,78	19,00	19,00	19,00	19,00
3	4,81	4,81	19,00	19,00	19,00	19,00
7	4,77	4,77	19,00	19,00	19,00	19,00
8	4,83	4,83	19,00	19,00	19,00	19,00
9	4,81	4,81	19,00	19,00	19,00	19,00
1	4,79	4,79	19,00	19,00	19,00	19,00
5	4,82	4,81	19,00	19,00	19,00	19,00
4	4,84	4,84	19,00	19,00	19,00	19,00
6	4,92	4,92	19,00	19,00	19,00	19,00
$S = 15,10, K = 20$ $r = 2,5\%, T = 4$	<i>Call europea</i>					
	AsGeom	AsArit	AusGeom-GV	AusGeom-VG	AusArit-AV	AusArit-VA
Modelos: General	1,47	2,55	0	0	0	0
2	0,27	0,65	0	0	0	0
3	0,13	0,32	0	0	0	0
7	0,31	0,70	0	0	0	0
8	0,11	0,33	0	0	0	0
9	0,09	0,32	0	0	0	0
1	0,05	0,13	0	0	0	0
5	0,06	0,16	0	0	0	0
4	29,79	89,09	0,19	0,26	1,60	0
6	2,94	5,73	2,36	0	22,07	0

Nombre completo de las opciones: AsGeom: Asiática geométrica, AsArit: Asiática aritmética, AusGeom-GV: Australiana geométrica sobre GV, AusGeom-VG: Australiana geométrica sobre VG, AusArit-AV: Australiana aritmética sobre AV, AusArit-VA: Australiana aritmética sobre VA.

En la tabla anterior hemos ordenados los modelos del siguiente modo: el modelo general, los cinco modelos con reversión a la media y heterocedásticos, los dos modelos con reversión a la media y homocedásticos y los últimos dos modelos sin reversión a la media y heterocedásticos.

- Para las opciones *put* europeas asiáticas, observamos que el valor de la primas para los modelos 4 y 6 son mayores que el del resto de los modelos. En cambio, las obtenidas con el modelo general son las más pequeñas. Por contra, las obtenidas con los modelos con reversión a la media heterocedásticos y homocedásticos son muy parecidas. Tal como esperábamos, hemos obtenido primas más caras en los modelos sin reversión a la media que con los modelos con reversión a la media y primas más caras en las opciones con promedio geométrico que aritmético.

Por otra parte, para las opciones *put* australianas notemos que sucede lo contrario para los tipos geométrico sobre GV y aritméticos sobre AV y, lo mismo, para los otros dos tipos. Recordemos que los flujos de caja de las opciones australianas geométricas sobre GV y aritméticas sobre AV se definían en función del cociente entre el promedio correspondiente y el valor del VIX y, para las opciones australianas geométricas sobre VG y aritméticas sobre VA, el cociente era el inverso. Estos resultados nos indican que, en general, el valor del VIX es menor que los dos tipos de promedios, ocasionando que el cociente para las opciones sobre GV y AV sean mayores y para VG y VA, menores. Para el resto de modelos, las diferencias entre primas son muy pequeñas, salvo el modelo general cuyos valores distan un poco más que el resto.

- En caso de las opciones *put* americanas, la diferencia entre primas para las opciones asiáticas y australianas, considerando dos decimales, es irrelevante. Las primas obtenidas con todos los modelos para las opciones australianas son las mismas. En cambio, existen pequeñas diferencias entre las primas de las opciones asiáticas. Tal como sucede en el caso de las *put* europeas, éstas son más baratas en el modelo general y más caras en los modelos sin reversión a la media y heterocedásticos. Además, tienen menores diferencias entre los modelos con reversión a la media heterocedásticos y homocedásticos.
- Si observamos los resultados de las primas de las opciones *call* asiáticas encontramos, de nuevo, la distinción entre los tres tipos de modelos (pudiendo ampliarlo en cuatro, en este caso). La prima obtenida en el modelo general se sitúa entre la de los modelos con reversión a la media y los modelos sin reversión a la media y, las del modelo con reversión a la media y homocedástico son más pequeñas que las del modelo heterocedástico. Esto se debe a que, al ser el modelo heterocedástico, puede darse momentos de mayor y menor valor en el VIX, aunque en el segundo caso estaría acotado por 0, es decir, hay más probabilidades de obtener un valor más elevado (picos) en los modelos heterocedásticos que homocedásticos.



Por último, las primas obtenidas con los modelos sin reversión a la media y heterocedásticos son las mayores, superando incluso el precio de ejercicio. Este hecho no debería sorprendernos ya que, tal como observamos en la gráfica (3), el valor del VIX no tiene cota superior, por tanto, al hacer el promedio, éste no está acotado superiormente pudiendo generar valores del *payoff* en el vencimiento muy altos. Para el caso de las opciones *call* australianas, solo las primas en los modelos sin reversión a la media y heterocedásticos son distintos de cero exceptuando las de pago VG y VA. Una de las causas sería que el valor del VIX y el de sus dos tipos de promedio estén cercanas entre si en el vencimiento. El hecho de que las primas sean nulas es debido a un *payoff* nulo, es decir, las opciones estarían muy OTM en estos modelos. Para el caso de los modelos 4 y 6 sobre GV y AV, el promedio debería ser lo suficientemente más grande que el valor del VIX en el vencimiento como para que las opciones estén alrededor del *strike* o lo superen.

Además, comprobamos que las mayores diferencias en las primas se dan entre los modelos con y sin reversión a la media y no tanto entre los modelos con heterocedasticidad o no.

Observamos que, en general, las primas de las opciones *put* americanas son mayores que las de tipo europeo, excepto en los modelos que no presentan reversión a la media y son heterocedásticos, considerando las opciones asiáticas y australianas de tipo VG y VA . Uno de los motivos podría ser que para el cálculo de las primas de las opciones de tipo europeo se consideran solo los flujos de caja de la opción al vencimiento. En caso contrario, para calcular las primas de las opciones *put* de tipo americano, se consideran todos los flujos de caja correspondientes a las posibles fechas de ejercicio de la opción de las trayectorias ITM, es decir, al calcular el promedio en cada una de estas posibles fechas de ejercicio se suavizan, en mayor medida, los valores del VIX que, al descontar los flujos de caja máximos y calcular la media de todas estas trayectorias, ocasionaría un valor de la prima menor.

Notemos, por último, que las primas de las *call* asiáticas aritméticas obtenidas son mayores que las respectivas opciones geométricas tal como esperábamos, mientras que para las opciones *put*, ocurre lo contrario. Para las opciones australianas también sucede lo esperado, las primas de las *put* de tipo GV son mayores que las de tipo AV y al contrario para el caso VG y VA. Para las *call*, las primas son mayores en AV que en GV, y menores en VA que en VG.

## 7. Griegas

En este último apartado cerraremos los cálculos numéricos calculando las Griegas de primer orden:  $\Delta$ , Dual- $\Delta$ ,  $\rho$ ,  $\Theta$  de las seis opciones *put* exóticas americanas utilizadas en el apartado anterior (datos:  $S_0 = 15,10$ ,  $K = 20$ ,  $r = 2,5\%$ ,  $T = 4$ ) haciendo uso de la expresión en diferencias numéricas:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

donde  $\mathcal{O}(h)$  indica que el error de discretización es de primer orden, la función  $f'$  son las diferentes Griegas y  $x_0$  será la variable que varía en cada caso ( $S_0$ ,  $K$ ,  $r$  o  $T$ ) en una cantidad infinitesimal  $h$ .

Ahora, definimos las Griegas anteriormente mencionadas que utilizaremos en el análisis de sensibilidades de las primas de las opciones mediante el uso de diferencias numéricas:

- Delta ( $\Delta$ ): Mide la sensibilidad de la prima de la opción ante cambios infinitesimales en el precio del activo subyacente:

$$\Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S_0} = \frac{p(S_0 + h, K, r, T) - p(S_0, K, r, T)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (19)$$

- Dual-Delta (Dual- $\Delta$ ): Mide la sensibilidad de la prima de la opción ante cambios infinitesimales en el valor del *strike*:

$$Dual - \Delta_p = \frac{\partial p}{\partial K} = \frac{p(S_0, K + h, r, T) - p(S_0, K, r, T)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (20)$$

- Rho ( $\rho$ ): Mide la sensibilidad de la prima de la opción ante cambios infinitesimales en el tipo de interés libre de riesgo:

$$\rho_p = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{p(S_0, K, r + h, T) - p(S_0, K, r, T)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (21)$$

- Theta ( $\Theta$ ): Mide la sensibilidad de la prima de la opción ante cambios infinitesimales en el paso del tiempo/fecha de vencimiento:

$$\Theta_p = \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p(S_0, K, r, T + h) - p(S_0, K, r, T)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (22)$$

Presentamos los resultados de las diferentes Griegas en la siguiente tabla:

Tabla 13: Griegas de primer orden de las diferentes opciones *put* americanas.

Griegas						
Modelos	$\Delta$					
	AsGeom	AsArit	AusGeom-GV	AusGeom-VG	AusArit-AV	AusArit-VA
General	-16,3968	-16,3998	0,0012	-0,0010	0,0010	-0,0010
2	-13,2950	-13,3022	0,0012	-0,0014	0,0013	-0,0016
3	-9,4414	-9,4480	-0,0007	0,0007	-0,0006	0,0006
7	-14,1568	-14,1614	-0,0007	0,0006	-0,0008	0,0007
8	-6,9567	-6,9574	-0,0013	0,0011	-0,0013	0,0013
9	-7,8600	-7,8602	-0,0013	0,0013	-0,0013	0,0013
1	-12,2168	-12,2082	0,0033	-0,0032	0,0039	-0,0037
5	-11,7620	-11,7580	-0,0067	0,0075	-0,0064	0,0071
4	-7,5175	-7,5252	0,0018	-0,0017	0,0021	-0,0020
6	-1,0758	-1,0719	-0,0003	0,0003	-0,0003	0,0003
Modelos	Dual- $\Delta$					
	AsGeom	AsArit	AusGeom-GV	AusGeom-VG	AusArit-AV	AusArit-VA
General	-31,7805	-31,7722	1,0019	0,9983	1,0017	0,9983
2	-11,3386	-11,3468	1,0012	0,9986	1,0013	0,9984
3	-7,4927	-7,4993	0,9993	1,0007	0,9994	1,0006
7	-12,1852	-12,1994	0,9993	1,0006	0,9992	1,0007
8	-4,9725	-4,9732	0,9987	1,0011	0,9987	1,0012
9	-5,9036	-5,9038	0,9987	1,0013	0,9987	1,0013
1	-10,2878	-10,2809	1,0033	0,9968	1,0039	0,9963
5	-9,8150	-9,8116	0,9933	1,0075	0,9936	1,0070
4	-5,5154	-5,5178	1,0018	0,9983	1,0021	0,9980
6	-1,3335	-1,3393	0,9997	1,0003	0,9997	1,0003
Modelos	$\rho$					
	AsGeom	AsArit	AusGeom-GV	AusGeom-VG	AusArit-AV	AusArit-VA
General	-32,7796	-32,7689	0,0016	-0,0020	0,0014	-0,0020
2	-12,3387	-12,3466	0,0008	-0,0017	0,0010	-0,0019
3	-8,4928	-8,4994	-0,0010	0,0004	-0,0010	0,0004
7	-13,1827	-13,1990	-0,0010	0,0003	-0,0011	0,0004
8	-5,9726	-5,9733	-0,0016	0,0008	-0,0017	0,0009
9	-6,9037	-6,9038	-0,0016	0,0010	-0,0016	0,0010
1	-11,2868	-11,2800	0,0030	-0,0035	0,0036	-0,0040
5	-10,8151	-10,8117	-0,0070	0,0071	-0,0067	0,0067
4	-6,5098	-6,5175	0,0014	-0,0020	0,0017	-0,0023
6	-0,0709	-0,0667	-0,0006	-0,00006	-0,0006	-0,00004
Modelos	$\Theta$					
	AsGeom	AsArit	AusGeom-GV	AusGeom-VG	AusArit-AV	AusArit-VA
General	-44,1435	-44,1230	0,0285	-0,0280	0,0280	-0,0280
2	-34,7758	-34,7945	0,0003	-0,0003	0,00003	-0,0008
3	-7,9195	-7,9338	-0,0075	0,0078	-0,0073	0,0075
7	-20,6810	-20,6950	-0,0080	0,0080	-0,0080	0,0080
8	-22,6158	-22,6158	-0,0005	0,0005	-0,0005	0,0005
9	-5,0845	-5,0690	-0,0033	0,0033	-0,0033	0,0033
1	-28,2170	-28,1998	0,0083	-0,0080	0,0098	-0,0093
5	-27,0375	-27,0290	-0,0168	0,0188	-0,0160	0,0175
4	-16,2743	-16,2938	0,0045	-0,0043	0,0053	-0,0050
6	-5,8338	-5,8423	-0,0065	0,0058	-0,0065	0,0058

Nombre completo de las opciones: AsGeom: Asiática geométrica, AsArit: Asiática aritmética, AusGeom-GV: Australiana geométrica sobre GV, AusGeom-VG: Australiana geométrica sobre VG, AusArit-AV: Australiana aritmética sobre AV, AusArit-VA: Australiana aritmética sobre VA.

De los resultados anteriores, observamos primero la gran diferencia, en magnitud, entre los valores de las Griegas de las opciones asiáticas y las opciones australianas. Mientras que el valor de  $\text{Dual-}\Delta$  en la opción asiática geométrica sobrepasa el valor  $-30$  en el modelo general, éste se sitúa entorno a 1 en las opciones australianas, diferencia incluso menor (en tamaño) si comparamos las griegas  $\rho$  o  $\Theta$ , donde la diferencia se incrementa.

Con respecto a las Griegas de las opciones *put* asiáticas notamos que:

- Los valores de  $\Delta$  son negativos, indicando que cuando el precio del subyacente aumenta, la prima de la opción disminuye. También observamos que, tanto en las opciones de tipo aritmético como geométrico, en el modelo 6 obtenemos el valor negativo más cercano a cero de entre todos los resultados, indicando que este modelo es el menos sensible ante cambios en el precio del activo subyacente. En contra, con el modelo general y los modelos 1, 2, 5 y 7 obtenemos los valores más negativos de esta griega en los dos tipos de opciones, indicando que estos cinco modelos son más sensibles ante cambios en el precio del subyacente, es decir, podríamos considerar el modelo general como el más sensible, los dos modelos con reversión a la media y homocedásticos como dos de los modelos más sensibles a variaciones en la prima cuando varía el precio de subyacente y el modelo 6 como el menos sensible a variaciones en el precio del subyacente.

Por ende, podríamos considerar los modelos sin reversión a la media y heterocedásticos como los menos sensibles a variaciones en el precio del subyacente. Además, el valor de  $\Delta$  obtenido con las opciones de tipo geométrico para los diferentes modelos están, en general, más cercanos a cero que las opciones de tipo aritmético correspondientes, es decir, estos últimos tipos de opciones son más sensibles a variaciones en el precio del subyacente que sus homólogas opciones geométricas. Esto sucede en el modelo general y en los modelos con reversión a la media y heterocedásticos, y es debido a que las nuevas primas de las opciones aritméticas distan más de la prima original que las de las opciones geométricas, es decir, la caída en el nuevo valor de la prima de la *put* asiática aritmética ha sido, en mayor medida, superior a la caída en la prima de la *put* asiática geométrica para la mayoría de los modelos.

- En el caso de  $\text{Dual-}\Delta$ , los valores también son negativos en todos los modelos, es decir, si el *strike* aumenta, la prima de la opción disminuye haciéndolo en mayor medida en el modelo general, seguido por los modelo 7, 2 y 1. En cambio, en el modelo 6 obtenemos la sensibilidad más cercana al valor 0, es decir, si el precio de ejercicio aumenta, la prima de la opción geométrica disminuye en un 133,35 % de esta cantidad y en un 133,93 % para la opción aritmética.

De manera similar al caso anterior, la opción aritmética es más sensible que la opción geométrica para los modelos con y sin reversión a la media y heterocedásticos. Además,

para los dos modelos con reversión a la media y homocedásticos, la diferencia que se produce entre el valor de la griega es menor que en los dos modelos sin reversión a la media y heterocedásticos y en los cinco modelos con reversión a la media y heterocedásticos.

Por otra parte, de la misma manera que sucedía en la anterior griega, en general, los modelos sin reversión a la media y heterocedásticos son los menos sensibles, el modelo general es el más sensible, una parte de los modelos con reversión a la media y heterocedásticos son más sensibles que otros y los modelos con reversión a la media y homocedásticos son bastante sensibles.

- A continuación, el signo de  $\rho$  es negativo en todos los modelos, estableciendo que al aumentar el tipo de interés libre de riesgo, la prima de la opción disminuye. La mayor sensibilidad en la prima ante cambios en el tipo de interés se da en el modelo general seguido por los modelos 7 y 2 y por los dos modelos con reversión a la media y homocedásticos. El modelo menos sensible a estos cambios es el modelo 6. Notemos que en este caso, la opción aritmética es más sensible que la opción geométrica únicamente en los modelos con reversión a la media y heterocedásticos y, viceversa para el modelo general y los modelos con reversión a la media y homocedásticos.
- Por último, el signo de  $\Theta$  es negativo en todos los modelos. Además, el modelo más sensible a los cambios en la fecha de vencimiento ha sido el modelo general seguido por el modelo 2 y los dos modelos con reversión a la media y homocedásticos y el modelo menos sensible a estos cambios ha sido el modelo 9. Las mayores variaciones en el valor numérico de esta griega se han dado dentro de los cinco modelos con reversión a la media y heterocedásticos, y las menores variaciones, en los dos modelos con reversión a la media y homocedásticos. Los dos modelos sin reversión a la media y heterocedásticos han dado valores de  $\Theta$  bajos en comparación con los otros valores obtenidos.

Por tanto, encontramos diferencias mínimas entre las Griegas de los dos tipos de opciones *put* asiáticas siendo, a veces, una mayor que la otra o viceversa dependiendo del modelo y de la griega estudiada. Además, en todas las Griegas estudiadas, el modelo más sensible a cambios en los cuatro parámetros considerados ha sido el modelo general, y el menos sensible a los cambios, en tres de las cuatro Griegas, el modelo 6. Asimismo, los dos modelos con reversión a la media y homocedásticos han sido bastantes sensibles ante cambios en los cuatro parámetros, así como los modelos 2 y 7. Así como, en general, los modelos con reversión a la media han sido más sensibles que los modelos sin reversión a la media. Además, la mayor sensibilidad de la prima de las opciones *put* asiáticas aritmética y geométrica se ha dado ante variaciones en la fecha de vencimiento para el modelo general.

Por otra parte, en todos los modelos, el signo de las Griegas ha sido negativo, indicando que variaciones al alza en los cuatro parámetros  $(S, K, r, T)$  ha afectado negativamente en el valor de la prima de las opciones *put* asiáticas.

Con respecto a las Griegas de las opciones australianas notamos que:

- Hay valores de  $\Delta$  positivos y negativos dependiendo del modelo, es decir, se producen variaciones al alza o a la baja de la prima ante cambios en el precio del subyacente según el modelo considerado, esto es, la sensibilidad de los modelos es distinta al valorar las primas cuando cambia el precio del subyacente. Observamos que los signos de esta griega concuerdan para los diferentes modelos en las opciones geométricas y aritméticas sobre GV y AV, respectivamente, y sobre VG y VA, respectivamente, siendo todos los valores, en magnitud, muy parecidos y cercanos a 0. De esta manera, al ser los valores tan pequeños, esta griega no sería significativa en ningún modelo, es decir, el cambio en el precio del subyacente no afectaría a la prima de las cuatro opciones australianas (considerando dos decimales). También observamos sensibilidades invertidas en las opciones sobre GV y VG, y sobre AV y VA en los mismos modelos, es decir, cuando los valores son positivos en GV y AV para un cierto modelo, son negativos en VG y VA para el mismo modelo, y viceversa.

El modelo menos sensible a cambios en el precio del subyacente ha sido el modelo 6, y el más sensible, en magnitud, ha sido el modelo 5, ambos para las cuatro opciones australianas. Notemos que los modelos con reversión a la media y homocedásticos son los más sensibles para las cuatro opciones australianas.

- En el caso de Dual- $\Delta$ , los valores están alrededor de uno en todas las opciones, siendo estos resultados muy parecidos en las opciones geométricas y aritméticas sobre GV y AV, respectivamente, y sobre VG y VA, respectivamente. Por tanto, ante variaciones en el precio de ejercicio, la prima variará en una cantidad parecida a la efectuada por este parámetro, es decir, si el precio de ejercicio varía en un centavo, la prima disminuirá o aumentará en un valor cercano a esta cantidad. Observamos que hay sensibilidades invertidas en GV y VG, y en AV y VA, es decir, cuando la sensibilidad se sitúa por encima de uno en los modelos sobre GV y VG, se sitúa por debajo de uno en estos mismos modelos pero, ahora, sobre VG y VA.

En esta griega, el modelo menos sensible y, por tanto, que variará menos el valor de la prima ante cambios en el *strike* es el modelo 5 para las opciones sobre GV y AV, y el modelo 1 para las opciones sobre VG y VA. En caso que consideremos los modelos más sensibles, éstos serían los dos anteriores pero intercambiando los pagos, es decir, sobre GV y AV el modelo más sensible es el modelo 1 y, sobre VG y VA, el modelo 5, esto es, los modelos con reversión a la media son los más o menos sensibles según el *payoff* y el modelo considerado.

- En cuanto a  $\rho$ , observamos que obtenemos valores parecidos en tamaño y signo a los obtenidos por los modelos en la griega  $\Delta$ . Los valores son similares en las opciones sobre GV y AV, y sobre VG y VA. Al tratarse de valores muy cercanos a 0, estos modelos

tienen poca sensibilidad a cambios en el tipo de interés libre de riesgo, siendo el menos sensible el modelo 6 (cuyo valor es siempre negativo en las cuatro opciones), y el más sensible el modelo 5, ambos para los cuatro tipos de opciones australianas. En este caso, los modelos con reversión a la media y homocedásticos son los más sensibles.

- Por último, los valores de  $\Theta$  obtenidos son bajos para todas las opciones utilizando cualquier modelo, exceptuando el modelo general en el cual hemos obtenido una sensibilidad un poco mayor a los cambios infinitesimales en la fecha de vencimiento, seguido por los modelos con reversión a la media y homocedásticos. En particular, notemos que la prima de las opciones no variará ni un centavo en ningún de los diez modelos cuando la fecha de vencimiento varía infinitesimalmente, sino que haría falta añadir cerca de treinta y cinco días más a la fecha de vencimiento del contrato para que las primas variasen en un centavo, siempre que consideremos el modelo general (el más sensible). Además, el modelo 2 es el menos sensible sobre GV, VG y AV y el modelo 8, sobre VA.

Notemos que tenemos valores muy parecidos, en tamaño y en signo, sobre GV y AV (exceptuando el modelo 2), y sobre VG y VA. Además, volvemos a tener sensibilidades invertidas sobre GV y VG, y sobre AV y VA.

Observamos que el modelo 6 ha sido el modelo menos sensible a cambios en el precio del subyacente y en el tipo de interés libre de riesgo para las cuatro opciones australianas y, los modelos con reversión a la media y homocedásticos han sido los más sensibles a cambios en el precio del subyacente, el tipo de interés libre de riesgo y el precio de ejercicio (dependiendo el *payoff* considerado) y en  $\Theta$  han vuelto a ser bastantes sensibles con respecto a los valores que hemos obtenido para los otros modelos.

En términos generales, los modelos han sido muy poco sensibles a cambios en el precio del subyacente, el tipo de interés libre de riesgo y la fecha de vencimiento, es decir, las primas de las cuatro opciones australianas apenas sufrirán variaciones cuando estos parámetros varíen, utilizando cualquiera de los diez modelos en la simulación del VIX. Por contra, éstos han sido más sensibles a cambios en el *strike*, situándose más o menos cerca del tamaño del cambio en este parámetro dependiendo del modelo considerado.

Por otra parte, podemos comentar que las opciones asiáticas son más sensibles a cambios en los cuatro parámetros considerados que las opciones australianas, habiendo muy pocas diferencias entre los valores de los dos tipos de opciones asiáticas y entre los tipos de opciones australianas sobre GV y AV (en general) y sobre VG y VA, para cada modelo.

También observamos que los modelos sin reversión a la media y heterocedásticos han sido menos sensibles a variaciones en los cuatro parámetros considerados que los modelos con reversión a la media y homocedásticos. En el caso del modelo general y los modelos con reversión a la media y heterocedásticos, estas sensibilidades unas veces han sido mayores y

otras menores con respecto a los modelos comentados anteriormente, dependiendo de la griega y el modelo considerado.

Para acabar, pese a esperar valores positivos en  $\Theta$  por ser una opción americana y tener más fechas posibles de ejercicio, hemos obtenido valores negativos en todos los modelos para las opciones asiáticas y en seis modelos para las opciones australianas sobre GV y AV y en cuatro modelos para las de pago VG y VA, contradiciendo nuestra intuición. Podría deberse a que al añadir una nueva fecha de ejercicio en el instante final, se diese el caso que, en el vencimiento inicial al ser este flujo el *payoff* en el vencimiento (no se compara con el valor de continuación), al añadir una nueva fecha de ejercicio, el valor de ejercicio inmediato de estas trayectorias ITM sea menor que el valor de continuación, generando flujos de caja nulos en este instante y que en el nuevo vencimiento las opciones, en estas trayectorias, estén OTM o generen flujos de caja descontados más pequeños que en el caso anterior, produciendo un menor valor en la prima, es decir, que al añadir una nueva fecha de ejercicio, ésta cambiase los valores de continuación en cada una de las fecha de ejercicio de las trayectorias ITM de manera que al compararlos con los valores de ejercicio inmediato y, después de obtener los flujos de caja máximos en cada una de las trayectorias, al descontarlos y calcular el promedio (que sería la prima de la opción), ésta fuese menor que la prima original.

Con respecto al signo de Dual- $\Delta$ , podríamos decir que éste se debe a que al aumentar el *strike* aumentamos las posibles trayectorias ITM en cada fecha de ejercicio, generando más valores de continuación que se pueden comparar con los valores de ejercicio inmediato y, por tanto, aumentamos los posibles flujos de caja que pueden ser óptimos (así como podemos cambiar los valores de continuación). Igual que pasaba con el caso de  $\Theta$ , si aumentamos los posibles flujos de caja óptimos, podemos encontrar en algunas trayectorias que éstos son óptimos en alguna fecha de ejercicio anterior al instante inicial que tomaban, pero que al descontarlos al origen, los flujos de caja descontados sean menores que cuando teníamos el *strike* inicial, provocando una menor prima.

Tendríamos una explicación similar a los valores positivos de  $\Delta$  y  $\rho$  que obtenemos en las opciones australianas en algunos modelos. Cuando aumentamos el precio del activo subyacente, los valores de Y y X que se utilizan para el cálculo del valor de continuación cambiarán, así como el valor de ejercicio inmediato y, si cambiamos el tipo de interés libre de riesgo, el valor de Y cambiará en el cálculo del valor de continuación y, por tanto, éste también, pudiendo generar reglas de decisión distintas en las fechas de ejercicio y, por ende, flujos de caja máximos diferentes en las trayectorias. De esta manera, al utilizar LSM, el valor de la nueva prima puede ser mayor que la prima original.



## 8. Conclusiones

Debido que la valoración de opciones americanas mediante el método Monte Carlo no es una tarea sencilla ni fiable, el objetivo de este trabajo ha sido valorar opciones exóticas americanas, asiáticas y australianas, con promedio aritmético y geométrico sobre el VIX utilizando un método alternativo, concretamente el método *Least-Squares Monte Carlo*. Para llevar a cabo la simulación del índice VIX que nos sirva para la valoración de las opciones hemos utilizado diez modelos de volatilidad estocástica distintos que nos han generado una serie de trayectorias en las que hemos aplicado la técnica LSM (no hemos considerado el modelo particular 10 por ser un modelo de volatilidad determinista) para obtener el valor de continuación y así poder compararlo con el valor de ejercicio inmediato obteniendo los flujos de caja óptimos de la opción en cada fecha de ejercicio disponible y poder calcular el valor de la prima de las diferentes opciones.

Primeramente, hemos hablado de publicaciones previas tanto de los modelos como del método LSM para ilustrar como y en qué medida se han utilizado anteriormente, observando su amplia literatura. Luego, una vez hemos presentado y descrito el VIX para saber su funcionamiento, hemos utilizado un pequeño ejemplo disponible en el apéndice para entender mejor la teoría y hemos utilizado los once modelos en tiempo continuo (modelo general más diez modelos particulares) presentados y estimados mediante la técnica GMM por los autores Moreno & Pérez-Jiménez (2018) para simular el VIX. Posteriormente, hemos clasificado los modelos según sus características de reversión a la media y heterocedasticidad presentando una serie de gráficos para corroborar su comportamiento, así como su sensibilidad al nivel de la volatilidad, siendo éste mayor en los modelos 3/2-lineal y 3/2-cuadrático. Hemos obtenido que los modelos 2, 3, 4, 6, 7, 8 y 9 son heterocedásticos y los modelos 1 y 5, homocedásticos y los modelos 1, 2, 3, 5, 7, 8 y 9 presentan reversión a la media y los modelos 4 y 6, no.

Seguidamente, hemos simulado los diferentes modelos de volatilidad estocástica utilizando un total de 5000 trayectorias, de las que anteriormente hemos excluido los valores negativos que se han simulado al tratarse de un índice de volatilidad y no tener permitido el tener un valor negativo, así como todas las trayectorias que han dado problemas de definición, como han sido las del modelo general, el modelo 1 y el modelo 7 al tener presente la inversa o el logaritmo del valor del VIX en un cierto instante de tiempo. Con estas simulaciones hemos aplicado el método LSM para obtener la prima de las opciones, excluyendo el modelo 10 al tratarse de un modelo de volatilidad determinista.

Posteriormente, una vez calculadas las primas, hemos comparado y explicado las variaciones que se producen en sus valores para los diferentes tipos de opciones y los distintos modelos.

Para acabar con el estudio numérico, hemos calculado las Griegas de primer orden de las opciones *put* exóticas presentadas en la Sección 6, obteniendo que los dos tipos de opciones asiáticas han sido más sensible a los cambios de los parámetros  $S, K, r, T$  que las opciones australianas. También, que las primas de las opciones australianas no variarían su valor (con-

siderando dos decimales) cuando variase infinitesimalmente el precio del subyacente, el tipo de interés libre de riesgo y la fecha de vencimiento, cosa que si sucedería en las primas de las opciones asiáticas, exceptuando la griega  $\rho$  del modelo 6, llegando incluso a caer en cerca de 32 centavos por cada centavo que incrementásemos el precio de ejercicio suponiendo el modelo general.

Finalmente, la principal conclusión que llegamos es que las mayores diferencias entre primas se dan entre los modelos con reversión a la media y sin reversión a la media y no tanto en la característica de homocedasticidad o no. Además, esperaríamos obtener resultados más fiables con la realidad con los modelos con reversión a la media y heterocedásticos ya que el índice VIX presenta estas características, aunque tal como hemos comentado anteriormente, la característica de homocedasticidad o no, no sería tan importante en la valoración.

Como futuras líneas de investigación se podrían valorar las opciones exóticas estudiadas en el presente trabajo considerando que existe riesgo de crédito de la contraparte, así como añadir saltos en los modelos de volatilidad estocástica para captar los cambios frecuentes y elevados que se producen, sobretodo, cuando el precio del índice S&P500 cae con una cierta magnitud, como pueden ser algunos de los modelos propuestos por Dotsis *et al.* (2007) o distinguir los saltos hacia arriba y hacia abajo para adecuar los cambios asimétricos que se producen en el VIX como resultado de los cambios del índice S&P 500, como en los modelos propuestos por Lin, Li, Chern & Zhang (2018) o Baldeaux & Badran (2014) que, además, tienen en cuenta el precio del índice S&P 500, utilizando un modelo de dos factores para considerar esta influencia en el movimiento del VIX. Otra futura línea de investigación podría tratarse de valorar otros tipos de opciones exóticas sobre el VIX, como son las opciones barrera, digitales, *chooser*, *lookback*, entre otras, así como valorar opciones americanas sobre otro índice de volatilidad, como pueden ser los índices VDAX, VXO, VXD, VXN o VX6, entre otros, o considerar otra técnica de valoración de opciones americanas como es la propuesta por Broadie & Glasserman (2004) y posterior análisis de sensibilidades para comparar las diferencias que se cometen entre el método propuesto en este trabajo y el propuesto por los anteriores autores.

## Apéndice. Ejemplo numérico para el cálculo del VIX

En este apartado presentaremos un ejemplo numérico, disponible en la página web del CBOE, para calcular el VIX. Con tal fin, consideraremos dos vencimientos diferentes que estén dentro del rango de 24 a 37 días antes del vencimiento (el de menor vencimiento lo llamaremos “corto plazo” y el de mayor vencimiento, “largo plazo”) y opciones *calls* y *puts* sobre el subyacente S&P 500 que venzan dentro del anterior periodo dado y que pueden tener un vencimiento estándar (tercer viernes de cada mes) o un vencimiento semanal (cada viernes del mes, exceptuando el tercero).

Calculamos los diferentes tiempos al vencimiento,  $T_j$ , mediante la siguiente expresión:

$$T = \frac{M_{Current\ day} + M_{Settlement\ day} + M_{Other\ days}}{Minutos\ en\ un\ año} \quad (23)$$

donde  $M_{Current\ day}$  son los minutos restantes hasta medianoche del día actual,  $M_{Settlement\ day}$  son los minutos desde medianoche hasta i) las 8:30 a.m. para las opciones con vencimiento estándar o ii) las 3:00 p.m. para opciones con vencimiento semanal y  $M_{Other\ days}$  son los minutos totales entre el momento actual y el vencimiento.

Considerando que actualmente son las 9:46 a.m. y que las opciones vencen en 25 días (corto plazo) y 32 días (largo plazo), el tiempo al vencimiento,  $T_j$ ,  $j = 1, 2$ , calculado en años, es:

$$T_1 = \frac{854 + 510 + 34560}{525600} = 0,0683486$$
$$T_2 = \frac{854 + 900 + 44640}{525600} = 0,0882686$$

y considerando que los tipos de interés libre de riesgo,  $r_1$  (para opciones a corto plazo) y  $r_2$  (para opciones a largo plazo), basados en las tasas de la curva de rendimiento del Tesoro de Estados Unidos, es:  $r_1 = 0,0305\%$  y  $r_2 = 0,0286\%$ .

La Tabla 14 muestra la cotización de las opciones *call* y *put* sobre el S&P 500 que se utilizan para el cálculo del VIX.

Tabla 14: Cotizaciones de opciones, para los dos vencimientos, sobre el S&P 500 en función de diferentes *strikes*.

Primer vencimiento					Segundo vencimiento				
<i>Strike</i>	<i>Call</i>		<i>Put</i>		<i>Strike</i>	<i>Call</i>		<i>Put</i>	
	Bid	Ask	Bid	Ask		Bid	Ask	Bid	Ask
1890	63,40	67,20	0,00	0,60	1890	71,10	71,50	0,50	0,95
1895	59,00	62,70	0,00	0,60	1895	66,80	67,20	1,20	1,65
1900	54,60	58,20	0,09	0,80	1900	62,40	62,80	1,90	2,35
1905	51,00	53,50	0,00	1,50	1905	58,20	58,60	2,60	3,05
1910	41,60	45,10	1,10	2,20	1910	54,00	54,40	3,40	3,85
1915	39,59	44,80	1,90	3,30	1915	49,80	50,20	4,20	4,65
1920	35,30	40,60	2,70	4,10	1920	45,70	46,10	5,20	5,65
1925	31,30	36,20	3,60	4,60	1925	41,70	42,10	6,20	6,65
1930	27,20	32,30	4,50	6,00	1930	37,80	38,20	7,20	7,65
1935	26,20	28,40	5,60	6,70	1935	34,60	35,00	8,40	8,85
1940	24,40	26,50	6,70	7,80	1940	30,80	31,20	9,60	10,05
1945	20,70	22,70	7,90	9,20	1945	27,20	27,60	11,00	11,45
1950	17,10	19,10	9,70	10,80	1950	23,70	24,10	12,40	12,85
1955	13,70	15,50	10,00	20,50	1955	20,30	20,70	13,00	13,30
1960	13,40	15,10	11,60	22,00	1960	17,00	17,10	14,70	15,00
1965	10,30	11,80	13,30	24,00	1965	13,80	14,10	16,50	16,80
1970	9,40	9,70	15,30	25,80	1970	10,80	11,20	18,50	18,80
1975	8,60	8,90	17,50	28,10	1975	8,00	8,30	20,50	20,80
1980	6,20	6,50	19,90	30,60	1980	5,50	5,80	23,00	23,30
1985	3,90	4,20	22,40	33,20	1985	3,10	3,40	25,50	25,80
1990	1,90	2,20	25,30	36,50	1990	0,90	1,20	28,40	28,70
1995	1,00	1,30	28,40	39,70	1995	0,00	0,30	31,30	31,60
2000	0,20	0,50	31,70	43,20	2000	0,10	0,40	34,50	34,80
2005	0,00	0,30	35,00	47,70	2005	0,00	0,30	38,10	38,40
2010	0,05	0,35	39,00	51,40	2010	0,05	0,35	41,70	42,00
2015	0,00	0,30	43,20	56,00	2015	0,00	0,30	45,80	46,10
2020	0,00	0,30	47,60	60,40	2020	0,00	0,30	49,90	50,20
2025	0,10	0,40	52,20	65,00	2025	0,06	0,36	54,10	54,40
2030	0,05	0,35	56,90	69,70	2030	0,02	0,32	58,60	58,90
2035	0,00	0,30	61,70	74,40	2035	0,00	0,30	63,30	63,60

A partir de los datos anteriores, seguiremos los siguientes pasos para el cálculo del VIX (disponibles en la Sección 3 del presente trabajo):

1) **Seleccionar las opciones que se utilizarán en el cálculo del VIX.**

Las opciones *call* y *put* sobre el S&P 500 elegidas están OTM y centradas alrededor de un precio *strike*,  $K_f$  y, también, elegiremos la opción ATM considerando el anterior *strike*,  $K_f$ , como el valor más cercano, inferiormente, al valor *forward*. Con este propósito, determinaremos el valor *forward* del S&P 500,  $F_j$ , mediante la paridad *put-call* (estándar) utilizando como precio de ejercicio el asociado a una diferencia, en valor absoluto, mínima entre las primas de la *call* y la *put*. Este proceso se realizará para cada vencimiento.

La Tabla 15 muestra los diferentes *strikes*, las primas de las opciones calculadas como la media aritmética entre el valor *bid* y *ask* (el *mid*) y la diferencia, en valor absoluto, de las dos primas de las opciones anteriores.

Tabla 15: *Mid* de las opciones *call* y *put* sobre el S&P500 para los diferentes *strike* y diferencia, en valor absoluto, entre las primas de las dos opciones.

Primer vencimiento				Segundo vencimiento			
<i>Strike</i>	<i>Call</i>	<i>Put</i>	Diferencia	<i>Strike</i>	<i>Call</i>	<i>Put</i>	Diferencia
1890	65,30	0,30	65,00	1890	71,30	0,73	70,58
1895	60,85	0,30	60,55	1895	67,00	1,43	65,58
1900	56,40	0,45	55,96	1900	62,60	2,13	60,48
1905	52,25	0,75	51,50	1905	58,40	2,83	55,58
1910	43,35	1,65	41,70	1910	54,20	3,63	50,58
1915	42,10	2,60	39,50	1915	50,00	4,43	45,58
1920	37,95	3,40	34,55	1920	45,90	5,43	40,48
1925	33,65	4,10	29,55	1925	41,90	6,43	35,48
1930	29,75	5,25	24,50	1930	38,00	7,43	30,58
1935	27,30	6,15	21,15	1935	34,80	8,63	26,18
1940	25,45	7,25	18,20	1940	31,00	9,83	21,18
1945	21,70	8,55	13,15	1945	27,40	11,23	16,18
1950	18,10	10,25	7,85	1950	23,90	12,63	11,28
1955	14,60	15,25	0,65	1955	20,50	13,15	7,35
1960	14,25	16,80	2,55	1960	17,05	14,85	2,20
1965	11,05	18,65	7,60	1965	13,95	16,65	2,70
1970	9,55	20,55	11,00	1970	11,00	18,65	7,65
1975	8,75	22,80	14,05	1975	8,15	20,65	12,50
1980	6,35	25,25	18,90	1980	5,65	23,15	17,50
1985	4,05	27,80	23,75	1985	3,25	25,65	22,40
1990	2,05	30,90	28,85	1990	1,05	28,55	27,50
1995	1,15	34,05	32,90	1995	0,15	31,45	31,30
2000	0,35	37,45	37,10	2000	0,25	34,65	34,40
2005	0,15	41,35	41,20	2005	0,15	38,25	38,10
2010	0,20	45,20	45,00	2010	0,20	41,85	41,65
2015	0,15	49,60	49,45	2015	0,15	45,95	45,80
2020	0,15	54,00	53,85	2020	0,15	50,05	49,90
2025	0,25	58,60	58,35	2025	0,21	54,25	54,04
2030	0,20	63,30	63,10	2030	0,17	58,75	58,58
2035	0,15	68,05	67,90	2035	0,15	63,45	63,30

A partir de los datos obtenidos en la tabla anterior, observamos que los *strikes* que minimizan la distancia entre la prima de la *call* y *put* es 1955 y 1960 para los vencimientos a corto y largo plazo, respectivamente.

Así pues, utilizando la paridad *put-call*, el valor *forward* para cada vencimiento,  $F_j$ , es:

$$c_j + X_j e^{-r_j T_j} = p_j + S_j \cdot e^{r_j T_j} \implies c_j e^{r_j T_j} + X_j = p_j e^{r_j T_j} + \underbrace{S_j e^{r_j T_j}}_{=F_j} \implies$$

$$\boxed{F_j = X_j + (c_j - p_j) e^{r_j T_j}, j = 1, 2}$$

En nuestro caso, tenemos:

$$F_1 = 1955 + (14,60 - 15,25) e^{0,000305 \cdot 0,0683486} = 1954,350$$

$$F_2 = 1960 + (17,05 - 14,85) e^{0,000286 \cdot 0,0882686} = 1962,200$$

De esta manera, el valor del *strike*  $K_f$  (recordemos que es el *strike* inferior más próximo al valor de  $F_j$ ) para cada vencimiento es:  $K_{f,1} = 1950$  y  $K_{f,2} = 1960$ . En consecuencia, seleccionamos las opciones *call* y *put* OTM para cada vencimiento, es decir, las opciones *call* con *strike* mayor a  $K_{f,j}$   $j = 1, 2$  y las opciones *put* con *strike* menor que  $K_{f,j}$   $j = 1, 2$ , excluyendo las opciones cuya cotización *bid* sea 0 o aquellas situadas a partir de dos cotizaciones consecutivas del *bid* iguales a 0 ya que se consideran que las opciones con *bid* igual a 0 están mal valoradas y que están asociadas con *strikes* extremos y con una liquidez baja. La Tabla 16 ilustra un ejemplo para las opciones *call*, que estén OTM, del primer vencimiento que se incluyen en el cálculo del VIX.

Tabla 16: Opciones *call* incluidas en el cálculo del VIX dependiendo de su cotización *bid*.

<i>Call Strike</i>	<i>Bid</i>	<i>Ask</i>	¿Se incluyen?
1955	13,70	15,50	Sí
1960	13,40	15,10	Sí
1965	10,30	11,80	Sí
1970	9,40	9,70	Sí
1975	8,60	8,90	Sí
1980	6,20	6,50	Sí
1985	3,90	4,20	Sí
1990	1,90	2,20	Sí
1995	1,00	1,30	Sí
2000	0,20	0,50	Sí
2005	0,00	0,30	No
2010	0,05	0,35	Sí
2015	0,00	0,30	No
2020	0,00	0,30	No
2025	0,10	0,40	No se consideran las opciones a partir de dos cotizaciones consecutivas del bid iguales a 0.
2030	0,05	0,35	
2035	0,00	0,30	

En otras palabras, solo consideraremos 11 de las 17 opciones *call* OTM del primer vencimiento para el cálculo del VIX.

Si efectuamos los mismos pasos anteriores para las opciones *put* del primer vencimiento y las opciones *call* y *put* del segundo vencimiento, obtendremos las opciones seleccionadas para el cálculo del VIX. Los resultados se presentan en la Tabla 17.



Tabla 17: Opciones *call* y *put* consideradas en el cálculo del VIX.

<i>Strike</i> primer vencimiento	Opción	Prima	<i>Strike</i> segundo vencimiento	Opción	Prima
1900	<i>Put</i>	0,45	1890	<i>Put</i>	0,73
1910	<i>Put</i>	1,65	1895	<i>Put</i>	1,43
1915	<i>Put</i>	2,60	1900	<i>Put</i>	2,13
1920	<i>Put</i>	3,40	1905	<i>Put</i>	2,83
1925	<i>Put</i>	4,10	1910	<i>Put</i>	3,63
1930	<i>Put</i>	5,25	1915	<i>Put</i>	4,43
1935	<i>Put</i>	6,15	1920	<i>Put</i>	5,43
1940	<i>Put</i>	7,25	1925	<i>Put</i>	6,43
1945	<i>Put</i>	8,55	1930	<i>Put</i>	7,43
1950	<i>Put/Call</i>	14,18	1935	<i>Put</i>	8,63
1955	<i>Call</i>	14,60	1940	<i>Put</i>	9,83
1960	<i>Call</i>	14,25	1945	<i>Put</i>	11,23
1965	<i>Call</i>	11,05	1950	<i>Put</i>	12,63
1970	<i>Call</i>	9,55	1955	<i>Put</i>	13,15
1975	<i>Call</i>	8,75	1960	<i>Put/Call</i>	15,95
1980	<i>Call</i>	6,35	1965	<i>Call</i>	13,95
1985	<i>Call</i>	4,05	1970	<i>Call</i>	11,00
1990	<i>Call</i>	2,05	1975	<i>Call</i>	8,15
1995	<i>Call</i>	1,15	1980	<i>Call</i>	5,65
2000	<i>Call</i>	0,35	1985	<i>Call</i>	3,25
2010	<i>Call</i>	0,20	1990	<i>Call</i>	1,05
			2000	<i>Call</i>	0,25
			2010	<i>Call</i>	0,20

Para el *strike*  $K_f$  se calcula la media aritmética de las primas de la *call* y *put* asociadas a este *strike*, esto es, para el *strike* correspondiente al primer vencimiento,  $K_{f,1}$ , el precio calculado es:  $\frac{18,10+10,25}{2} = 14,18$ .

2) **Calculamos la volatilidad para las opciones con vencimiento a corto y largo plazo mediante la ecuación (3).**

Calculamos paso a paso los términos de esta ecuación:

- 1) En primer lugar, notemos que  $\Delta K$  en el primer vencimiento para la opción *put* con *strike* 1910 es  $\Delta K_{1910;Put} = \frac{1915-1900}{2} = 7,5$ . Para la opción *call*, en el mismo vencimiento, con *strike* 1995 es:  $\Delta K_{1995;Call} = \frac{2000-1990}{2} = 5$ .

II) De esta manera, la contribución de la opción *put* con *strike* 1910 y la opción *call* con *strike* 1995, al cálculo de  $V_j$  es, respectivamente:

$$\frac{\Delta K_{1910;Put}}{K_{1910;Put}^2} e^{r_1 T_1} M(K_{1910;Put}) = \frac{7,5}{1910^2} e^{0,000305 \cdot 0,0683486} 1,65 = 0,00000339224$$

$$\frac{\Delta K_{1995;Call}}{K_{1995;Call}^2} e^{r_1 T_1} M(K_{1995;Call}) = \frac{5}{1995^2} e^{0,000305 \cdot 0,0683486} 1,15 = 0,00000144474$$

III) Realizando este cálculo para todas las opciones OTM y ATM implicadas en el cálculo del VIX, para los dos distintos vencimientos, obtenemos:

$$\frac{2}{T_1} \sum_{i=1}^{N_1=21} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{r_1 T_1} M(K_i) = 0,00488806$$

$$\frac{2}{T_2} \sum_{i=1}^{N_2=23} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{r_2 T_2} M(K_i) = 0,004484645$$

IV) Calculamos el segundo término de la ecuación (3):

$$\frac{1}{T_1} \left[ \frac{F_1}{K_{f,1}} - 1 \right]^2 = \frac{1}{0,0683486} \left[ \frac{1954,350}{1950} - 1 \right]^2 = 0,00007281$$

$$\frac{1}{T_2} \left[ \frac{F_2}{K_{f,2}} - 1 \right]^2 = \frac{1}{0,0882686} \left[ \frac{1962,200}{1960} - 1 \right]^2 = 0,00001427$$

v) Por último, calculamos  $V_1$  y  $V_2$  a partir de los resultados obtenidos en los dos subapartados anteriores:

$$V_1 = \frac{2}{T_1} \sum_{i=1}^{N_1=21} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{r_1 T_1} M(K_i) - \frac{1}{T_1} \left[ \frac{F_1}{K_{f,1}} - 1 \right]^2 = 0,00488806 - 0,00007281 = 0,00481525$$

$$V_2 = \frac{2}{T_2} \sum_{i=1}^{N_2=23} \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{r_2 T_2} M(K_i) - \frac{1}{T_2} \left[ \frac{F_2}{K_{f,2}} - 1 \right]^2 = 0,004484645 - 0,00001427 = 0,00447038$$

3) **Aplicamos la ecuación (4):**

$$VIX = 100 \sqrt{\left( T_1 V_1 \frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} + T_2 V_2 \frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \frac{N_{365}}{N_{30}}} = 6,7512$$

donde  $N_{T_j}$ ,  $j = 1, 2$ , indica el número de minutos hasta vencimiento de las opciones con vencimiento a corto y largo plazo, respectivamente. Por otra parte, los parámetros  $N_{30}$  y  $N_{365}$  indican el número de minutos en 30 y 365 días, respectivamente.

$$\text{En nuestro caso: } \begin{cases} N_{T_1} = 35924 \\ N_{T_2} = 46394 \\ N_{30} = 43200 \\ N_{365} = 525600 \end{cases} .$$

## Referencias

- [1] ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I.A. (1970): Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Abramowitz, M., EEUU.
- [2] AMEMIYA, T. (1985): Advanced econometrics. Basil Blackwell, London, UK.
- [3] ANDERSEN, L.B.G. & PITERBERG, V.V. (2006): Moment explosions in stochastic volatility models. *Springer*, 11, 1, 29-50.
- [4] BAKSHI, G. & CAO, C. (2004): Disentangling the contribution of return-jumps and volatility-jumps: Insights from individual equity options, *working paper, Smith Business School, University of Maryland*.
- [5] BALDEAUX, J. (2012): Exact simulation of the 3/2 model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 15, 5, 1-13.
- [6] BALDEAUX, J. & BADRAN, A. (2014): Consistent modelling of VIX and equity derivatives using a 3/2 plus jumps model. *Applied Mathematical Finance*, 21, 4, 299-312.
- [7] BALI, T.G. (2000): Testing the empirical performance of stochastic volatility models of the short-term interest rate. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35, 2, 191-215.
- [8] BATES, D.S. (1996): Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche mark options. *The Review of Financial Studies*, 9, 1, 69-107.
- [9] BOYLE P.P. (1977): Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4, 3, 323-338.
- [10] BROADIE, M. & GLASSERMAN, P. (1996): Estimating Security Price Derivatives Using Simulation. *Management Science*, 42, 2, 269-285.
- [11] BROADIE, M. & GLASSERMAN, P. (2004): A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options. *Journal of Computational Finance*, 7, 4, 35-72.
- [12] CARR, P., GEMAN, H., MADAN, D.B. & YOR, M. (2005): Pricing options on realized variance. *Springer*, 9, 4, 453-475.
- [13] DAS, S.R. (2002): The surprise element: jumps in interest rates. *Journal of Econometrics*, 106, 1, 27-65.
- [14] DEMETERFI, K., DERMAN, E., KAMAL, M. & ZOU, J. (1999a): A Guide to Volatility and Variance Swaps. *Journal of derivatives*, 6, 4, 9-32.

- [15] DETEMPLE, J. & OSAKWE, C. (2000): The valuation of volatility options. *European Finance Review*, 4, 1, 21-50.
- [16] DOTSIS, G., PSYCHOYIOS, D. & SKIADOPOULOS, G. (2007): An empirical comparison of continuous-time models of implied volatility indices. *Journal of Banking & Finance*, 31, 12, 3584-3603.
- [17] ERAKER, B., JOHANNES, M. & POLSON, N. (2003): The Impact of jumps in volatility and returns. *The Journal of Finance*, 58, 3, 1269-1300.
- [18] GOARD, J. & MAZUR, M. (2013): Stochastic volatility models and the pricing of VIX options. *Mathematical Finance*, 23, 3, 439-458.
- [19] GÜNBICHLER, A. & LONGSTAFF, F.A. (1996): Valuing futures and options on volatility. *Journal of Banking & Finance*, 20, 6, 985-1001.
- [20] HANSEN, L.P. (1982): Large sample properties of Generalized method of moments estimators. *Econometrica*, 50, 4, 1029-1054.
- [21] HESTON, S.I. (1993): A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6, 2, 327-343.
- [22] HOWISON, S., RAFAILIDIS, A. & RASMUSSEN, H. (2004): On the pricing and hedging of volatility derivatives. *Applied Mathematical Finance*, 11, 4, 317-346.
- [23] HULL, J. & WHITE, A. (1987): The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 42, 2, 281-300.
- [24] JIANG, G.J. & TIAN, Y.S (2005): The model-free implied volatility and its information content. *Review of Financial Studies*, 18, 4, 1305-1342.
- [25] JIANG, G.J. & TIAN, Y.S (2007): Extracting model-free volatility from option prices: An examination of the VIX index. *Journal of Derivatives*, 14, 3, 35-60.
- [26] JOHNSON, H. & SHANNO, D. (1987): Option pricing when the variance is changing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 2, 143-151.
- [27] KEMNA, A.G.Z. & VORST, A.C.F. (1990): A pricing method for options based on average asset values, *Journal of Banking & Finance*, 14, 1, 113-129.
- [28] KRUSE, S. & NÖGEL, U. (2005): On the pricing of forward starting options in Heston's model on stochastic volatility. *Springer*, 9, 2, 233-250.

- [29] LIN, W., LI, S., CHERN, S. & ZHANG, J.E.: Pricing VIX derivatives with free stochastic volatility model. *Review of Derivatives Research*, 22, 1, 41-75.
- [30] LITTLE, T. & PANT, V. (2001): A finite-difference method for the valuation of variance swaps. *Journal of Computational Finance*, 5, 1, 81-103.
- [31] LONGSTAFF, F.A. & SCHWARTZ, E.S. (2001): Valuing American options by simulation: A simple Least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14, 1, 113-147.
- [32] MELINO, A. & TURNBULL, S.M. (1990): Pricing foreign currency options with stochastic volatility. *Journal of Econometrics*, 45, 1-2, 239-265.
- [33] MERTON, R.C. (1976): Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Econometrics*, 3, 1-2, 125-144.
- [34] MORENO, M. & NAVAS, J.F. (2003): On the robustness of *Least-squares Monte Carlo* (LSM) for pricing American derivatives. *Review of Derivatives Research*, 6, 107-128.
- [35] MORENO, M. & NAVAS, J.F. (2008): Australian options. *Australian Journal of Management*, 33, 1, 69-93.
- [36] MORENO, M. & PÉREZ-JIMÉNEZ, J. (2018): Implied volatility indices: an empirical analysis based on stochastic volatility continuous-time models. Presentado en el *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance (MAF 2018)*, Universidad Carlos III de Madrid, 4-6, Abril, 2018.
- [37] RODRIGUES, A. & ROCHA, M.J. (2006): The Valuation of Real Options with the *Least-Squares Monte Carlo* Simulation Method. *Management Research Unit*, University of Minho, Portugal.
- [38] SCOTT, L.O. (1987): Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 4, 419-438.
- [39] SEPP, A. (2008): Pricing options on realized variance in the Heston model with jumps in returns and volatility. *Journal of Computational Finance*, 11, 4, 33-70.
- [40] STEIN, E.M. & STEIN, J.C. (1991): Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *Review of Financial Studies*, 4, 4, 727-752.
- [41] STENTOFT, L. (2004): Assessing the Least-squares Monte-Carlo approach to American option valuation. *Review of Derivatives Research*, 7, 2, 129-168.
- [42] TILLEY, J.A. (1993): Valuing American options in a path simulation model. *Transactions of the Society of Actuaries*, 45, 83-104.

- [43] TSEKREKOS, A.E., SHACKLETON, M.B. & WOJAKOWSKI, R. (2003): Evaluating natural resource investments using the Least-squares Monte Carlo simulation approach, mimeo.
- [44] WAGNER, N. & SZIMAYER, A. (2004): Local and spillover shocks in implied market volatility: evidence for the U.S. and Germany. *Research in International Business and Finance*, 18, 3, 237-251.
- [45] WHALEY, R.E. (1993): Derivatives on market volatility. *Journal of Derivatives*, 1, 1, 71-84.
- [46] WHITE, H. (1984): Asymptotic theory for econometricians. *Academic Press, New York*.
- [47] WIGGINS, J.B. (1987): Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates. *Journal of Financial Economics*, 19, 2, 351-372.
- [48] WILLIGERS, B.J.A & BRATVOLD, R.B. (2009): Valuing oil and gas options by *Least-squares Monte Carlo* simulation. *SPE Projects Facilities & Construction*, 4, 4, 146-155.
- [49] YUEN, C.H., ZHENG, W. & KWOK, Y.K. (2015): Pricing exotic discrete variance swaps under the 3/2-stochastic volatility models. *Applied Mathematical Finance*, 22, 5, 1-29.