

# MODELO HULL & WHITE DE DERIVADOS SOBRE TIPOS DE INTERÉS: SOLUCIÓN NUMÉRICA Y ANÁLISIS

**Jorge Peris Cano**

Trabajo de investigación 017/019  
Master en Banca y Finanzas Cuantitativas

Directores:

Dr. Lucas Jódar Sánchez  
Dr. Rafael Company Rossi

Universitat de València

Universidad de Castilla-La Mancha  
Universidad Complutense de Madrid  
Universidad del País Vasco  
Universitat de València

[www.finanzascuantitativas.com](http://www.finanzascuantitativas.com)



# Modelo Hull & White de derivados sobre tipos de interés: Solución Numérica y Análisis

MASTER EN BANCA Y FINANZAS CUANTITATIVAS



## **Autor**

Jorge Peris Cano\*

## **Directores**

Dr. Lucas Jódar Sánchez  
Dr. Rafael Company Rossi

Universitat de València

Universidad de Castilla-La Mancha  
Universidad Complutense de Madrid  
Universidad del País Vasco  
Universitat de València

Madrid, 2019

---

\*A mis tutores, Lucas Jódar y Rafael Company, por la magnífica ayuda y apoyo que me han brindado a la hora de realizar este trabajo. A mis padres y a mi hermano, por todo.



## Resumen

El objetivo de este trabajo es la comparación de técnicas numéricas y su posterior análisis frente al método robusto propuesto por Hull & White en 1994, basado en el árbol trinomial, para la valoración de opciones sobre bonos cupón cero. Se supone que la estructura temporal de los tipos de interés (*etti*) viene dada por el modelo de Hull & White (1990). Por un lado, se valora una opción put europea mediante el árbol trinomial y diferencias finitas, por otro lado, se valora una put americana utilizando el árbol trinomial y una técnica utilizada en otro campo de la ciencia como es la física, conocida como *front-fixing*. Este método permite transformar el problema de frontera libre que presenta la valoración numérica de opciones americanas, en otro de frontera fija, donde la frontera libre pasa a ser una nueva variable del problema transformado. Finalmente, se realizan experimentos numéricos para comparar los resultados de las diferentes técnicas y se realizan pruebas de estabilidad y convergencia, de la solución aproximada, de forma numérica.

**Palabras clave:** Tipos de interés, opciones sobre bonos cupón cero, derivados de renta fija, valoración, técnicas numéricas, Hull & White, árbol trinomial, diferencias finitas, *front-fixing*.



# Índice

1. Introducción	1
I Marco Teórico	3
2. Preliminares	5
2.1. Definiciones básicas	5
2.2. Tasas de interés	5
2.3. Curva fundamental de tipos de interés	7
2.4. Modelización de la <i>etti</i>	7
2.5. Derivados de tipos de interés	7
3. Modelo Hull & White	9
3.1. Ecuación analítica del precio del bono cupón cero	9
3.2. Ecuación analítica para opciones europeas sobre bono cupón cero	9
3.3. Ecuación en derivadas parciales	10
3.4. Calibración del modelo	10
4. Métodos Numéricos	11
4.1. Árbol trinomial	11
4.2. Método de diferencias finitas	13
4.3. Front-fixing	15
4.4. Convergencia y estabilidad	16
II Análisis Empírico	17
5. Datos	19
5.1. Descripción de datos	19
6. Metodología	21
6.1. Valoración de una put europea sobre bono cupón cero	21
6.1.1. Árbol trinomial	21
6.1.2. Método de diferencias finitas explícito	22
6.2. Valoración de una put americana sobre bono cupón cero	23
6.2.1. Árbol trinomial	23
6.2.2. Front-fixing	24
7. Resultados empíricos	29
7.1. Solución numérica	29
7.2. Análisis numérico	33
8. Conclusión	37
Bibliografía	39
A. Diferenciación numérica	43
B. Esquemas de mallado en diferencias finitas y árbol trinomial	45



# 1. Introducción

“Remember that all models are wrong; the practical question is how wrong do they have to be to not be useful.”

George E. P. Box (1919 – 2013)

El presente trabajo de investigación pretende comparar y analizar distintas técnicas numéricas para valorar opciones europeas y americanas sobre bonos bajo el modelo Hull & White. Como cualquier bono con cupón puede ser replicado por una cartera de bonos cupón cero, solo se considerará el caso de opciones sobre bonos cupón cero.

Existen algunas diferencias entre los bonos y las acciones que hacen que modelar el precio de un bono sea más difícil que una acción. Los precios de las acciones son funciones de una sola variable, el tiempo. Los precios de los bonos dependen del tiempo y de la fecha de vencimiento del bono. El modelo de precios debe coincidir con los datos iniciales. Para una acción, este es solo el precio actual. En el caso de los bonos, se da toda la estructura temporal de tipos de interés inicial, es decir, con la *etti* inicial, lo que impone más restricciones al modelo. Además, los bonos se vuelven no aleatorios al vencimiento, ya que un bono cupón cero a vencimiento paga el nominal, lo que claramente no es el caso de las acciones.

Hay muchas formas de modelar la *etti*, muchos modelos de tipos de interés y muchas clasificaciones de los mismos. Algunos modelos describen la evolución de un tipo de interés dado (generalmente el tipo a corto o *short-term rate*) y serán consistentes por construcción con el valor actual de ese tipo de interés. Sin embargo, estos modelos, en general, no serán consistentes con el resto de la curva de rendimiento (*yield curve*) y por tanto, no valorarán derivados de tipos de interés correctamente en relación con el mercado. Es por ello, que desde la perspectiva de la valoración de derivados de tipos de interés parece más conveniente el uso o desarrollo de modelos coherentes con la curva de rendimiento del mercado. En este sentido, entre los más comunes se encuentran Black-Derman-Toy, Hull & White, Libor Market Model o SABR. Como se ha mencionado anteriormente, esta investigación se centrará en el modelo Hull & White, marco que tiene gran popularidad principalmente por dos motivos:

- Dispone de fórmulas cerradas para instrumentos sencillos, algo de gran utilidad a la hora de la calibración del modelo y de la valoración de derivados.
- Permite tipos de interés negativos, lo que le otorga una gran ventaja frente a los otros modelos debido a la existencia desde 2013 de tipos de interés negativos para la divisa euro. Curiosamente, hasta ese momento esta característica del modelo suponía la mayor fuente de críticas para el Hull & White, ya que tradicionalmente se ha considerado a los tipos de interés como una variable necesariamente positiva.

Uno de los enfoques estándar para valorar derivados de tipos de interés es la resolución de la ecuación en derivadas parciales (EDP). Ya que para esta ecuación sólo es posible encontrar una solución exacta en casos particulares y para derivados sencillos o *vanilla*, como es el caso de opciones europeas bajo el modelo Hull & White. Sin embargo, para valorar derivados más complejos, como pueden ser las opciones americanas, no se conoce una solución exacta y se debe recurrir a métodos numéricos para encontrar una aproximación. Uno de los métodos numéricos que se utilizan habitualmente son los métodos en diferencias finitas. Estos, que son los que se utilizan en este trabajo,

se basan en la elección de un esquema de discretización para así resolver la EDP numéricamente. En la construcción del esquema de diferencias finitas, se aproximan los operadores diferenciales que gobiernan las ecuaciones diferenciales del modelo mediante operadores en diferencias finitas.

Sin embargo, la valoración de opciones americanas es un problema de frontera libre, ya que para cada instante de tiempo existe un valor de  $r$  (se denotará como  $r^*(t)$ ) que señala la frontera entre dos regiones, la de continuación y la de ejercicio anticipado. A esta frontera, que es desconocida a priori, se le denomina como *optimal exercise boundary*. De esta forma, mientras en las europeas se conoce cuales son y donde se localizan las condiciones de contorno, en las americanas no se tiene esa información en la frontera libre, pues es variable y desconocida. Es por ello, que esta problemática en la valoración de opciones americanas será tratada en esta investigación, proponiendo una técnica denominada *front-fixing*, que permite transformar el problema de frontera libre en otro de frontera fija, donde la frontera libre pasa a ser una variable del problema transformado. Esta técnica será comparada con el árbol trinomial propuesto por Hull & White para valorar derivados de tipos de interés.

Esta investigación se organiza en dos partes. La primera, llamada *Marco teórico*, esta dedicada a los temas teóricos cubiertos a través de la investigación. La Sección 2 proporciona, de forma breve y concisa, los marcos matemáticos y de tipos de interés necesarios para comprender los argumentos y desarrollos posteriores. La Sección 3 introduce el modelo de la *etti* propuesto en [19] así como las expresiones analíticas que se obtienen sobre derivados de tipos de interés y la ecuación en derivadas parciales que debe cumplir cualquier derivado de renta fija bajo dicho modelo. En la Sección 4 se presentan los métodos numéricos objeto de comparación y análisis.

La segunda, titulada *Análisis empírico*, incluye la aplicación práctica de los temas analizados en la primera parte. La Sección 5 caracteriza los datos de mercado utilizados en la investigación. La Sección 6 proporciona un esquema metodológico que describe gradualmente las técnicas numéricas utilizadas a lo largo del análisis empírico. Los resultados de los experimentos numéricos se presentan y comentan en la Sección 7. Finalmente, la Sección 8 incluye las conclusiones más importantes de la investigación y sugiere posibles líneas de investigación futuras que se podrían realizar.

## Parte I: Marco Teórico



## 2. Preliminares

Esta sección incluye algunos conceptos preliminares importantes, basados principalmente en [1] que serán necesarios para los argumentos y desarrollos a lo largo de este trabajo de investigación.<sup>1</sup>

### 2.1. Definiciones básicas

- **Bono cupón cero** ( $P(t, T)$ ). Un bono cupón cero con vencimiento en  $T$  garantiza el pago de una unidad monetaria en tiempo  $T$  sin pagos intermedios. Su valor en el momento  $t < T$  está definido por:

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^T r(u) du \right) \right] \quad (2.1)$$

Donde  $\mathbb{Q}$  es una medida martingala equivalente, *medida neutral al riesgo*, y  $r(u)$  es el tipo de interés libre de riesgo instantáneo. Evidentemente  $P(T, T) = 1$ . Además, téngase en cuenta que si los tipos de interés  $r$  son deterministas, entonces el factor de descuento  $D(t, T)$  también es determinista y  $P(t, T) = D(t, T)$ .

- **Day-count convection**( $\delta(t, T)$ ). El Day count convection  $\delta(t, T)$  se define como el intervalo de tiempo de longitud  $[t, T]$  a lo largo de un año. Refleja la elección particular que se hace para medir la cantidad de tiempo (en años) entre dos fechas, i.e. *tiempo a vencimiento* definido como  $\tau = T - t$ .
- **Tenor**. El tenor o plazo de un derivado de renta fija es el tiempo hasta vencimiento del activo subyacente. Por tanto, el “vencimiento” se entiende generalmente como el tiempo hasta vencimiento del derivado y el “plazo/tenor”, como el tiempo hasta el vencimiento del subyacente.

### 2.2. Tasas de interés

- **Tipo de interés al contado compuesto en tiempo continuo**. El tipo de interés al contado que prevalece en el instante  $t$  hasta el vencimiento  $T$ , se denota por  $R(t, T)$  y es la tasa constante a la cual se acumula continuamente una inversión de  $P(t, T)$  (2.1) unidades en el instante  $t$  para obtener una unidad monetaria en el vencimiento  $T$ .

$$R(t, T) = - \frac{\ln P(t, T)}{\delta(t, T)} \quad (2.2)$$

El tipo de interés compuesto continuo es, por lo tanto, un tipo constante que es consistente con los precios de los bonos cupón cero.

$$e^{R(t, T)\delta(t, T)} = 1 \quad (2.3)$$

A partir de (2.3) podemos expresar el precio del bono cupón cero (2.1) en términos del tipo continuo compuesto,  $R$ .

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)\delta(t, T)} \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Los lectores experimentados pueden ignorar esta sección si es inmediato para ellos.

- **Tipo de interés forward compuesto simple.** El tipo forward compuesto que prevalece hoy, en el instante  $t$ , para el periodo de inversión futura  $[T1, T2]$  viene definido por:

$$F(t; T1, T2) = \frac{1}{\delta(T1, T2)} \left( \frac{P(t, T1)}{P(t, T2)} - 1 \right) \quad (2.5)$$

- **Tipo de interés forward instantáneo.** El tipo forward instantáneo que prevalece hoy, en el instante  $t$ , se define como:

$$f(t, T1) = \lim_{T2 \rightarrow T1^+} F(t; T1, T2) = -\frac{\partial \ln P(t, T1)}{\partial T1} \quad (2.6)$$

Intuitivamente, el tipo de interés forward instantáneo  $f(t, T1)$  es un tipo de interés forward en el instante  $t$  cuyo vencimiento es muy cercano a  $T1$ , i.e.  $f(t, T1) \approx F(t; T1, T1 + \Delta T1)$  con  $\Delta T1$  pequeño.

Los tipos de interés interbancarios más importantes para los mercados financieros europeos son el LIBOR y el EURIBOR.

- **LIBOR.** El *London Interbank Offered Rate* (LIBOR) es el promedio de los tipos de interés estimados por cada uno de los bancos líderes en el mercado interbancario de Londres, que se cobraría si fuesen a pedir préstamos a otros bancos.
- **EURIBOR.** El *Euro Interbank Offered Rate* (EURIBOR) es el tipo de referencia diario basado en el promedio de tipos a los que los bancos de la zona euro desean prestar fondos no garantizados a otros bancos en el mercado interbancario europeo.

Otro tipo de interés importante, que realmente se usará en esta investigación como un *proxy* del tipo libre de riesgo<sup>2</sup> para calcular los factores de descuento, es el tipo OIS.

- **OIS.** El *Overnight index Swap* (OIS) es un Swap de tipos de interés (o *Interest Rate Swap*, IRS), en el que se intercambia un tipo de interés fijo por un tipo de interés flotante, que es la media geométrica de un tipo de interés diario específico. Los tipos a un día para el mercado en EUR, USD y GBP son el *Euro Overnight Index Average* (EONIA), el *Federal Funds Rate* efectivo y el *Sterling Overnight Index Average* (SONIA), respectivamente.

La elección de un tipo de interés de mercado como *proxy* para el tipo libre de riesgo no es obvia. De hecho, este tema sigue siendo fuente de discusión, ya que la crisis financiera cambió progresivamente la tendencia de la práctica del mercado. Antes de la crisis crediticia, la elección estandar de descuento solía ser el LIBOR. Sin embargo, ha resultado ser una *proxy* deficiente para el tipo libre de riesgo en condiciones de mercado estresadas durante los últimos años y, por lo tanto, ha sido gradualmente sustituida por el tipo OIS. Hull & White en [16] examinan esta práctica y concluyen que la curva OIS es actualmente el *proxy* más adecuado para la curva de descuento libre de riesgo.

---

<sup>2</sup>El tipo de interés libre de riesgo es un tipo teórico de una inversión con riesgo cero y su estructura es un *input* clave para la valoración de productos financieros.

### 2.3. Curva fundamental de tipos de interés

- **Curva cupón cero.** La curva cupón cero (yield curve) se conoce también como la “estructura temporal de tipos de interés” en el instante  $t$ . La cual establece la relación entre los tipos de interés proporcionados por activos libres de riesgo y sus diferentes plazos. Se trata de un gráfico en el momento  $t$  de tipos de interés compuesto simple para todos los vencimientos  $T$  hasta un año y de tipos anuales compuestos para los vencimientos superiores a un año.<sup>3</sup>

### 2.4. Modelización de la *etti*

La modelización de la *etti* es fundamental para entender el funcionamiento de una economía, dado el importante papel que tienen los tipos de interés en la transmisión de los movimientos del sector monetario al sector real. En [23] se presentan y describen diferentes modelos en tiempo continuo para modelizar la *etti*, a su vez, los clasifica en endógenos y exógenos.

Por un lado, los modelos endógenos suponen que una o varias variables de estado explican la *etti*. Su ventaja es la tratabilidad analítica y simplicidad de su implementación numérica. En general, permiten obtener expresiones cerradas para el precio de bonos y opciones europeas sobre bonos. Sin embargo, al no tener en cuenta la información contenida en los tipos de interés observados, no consiguen un buen ajuste a toda la estructura temporal observada e incluyen parámetros no observables como el precio de mercado del riesgo.

Por otro lado, los modelos exógenos destacan por tomar la estructura temporal como dada, intentan conseguir un ajuste perfecto a los tipos de interés observados y no necesitan realizar supuestos sobre el precio de mercado del riesgo. En contra, podemos señalar que la valoración analítica de los activos derivados suele ser compleja y, en general, esta valoración debe realizarse mediante técnicas numéricas.<sup>4</sup>

### 2.5. Derivados de tipos de interés

- **Opciones sobre bonos cupón cero.** Las opciones sobre bonos cupón cero son instrumentos financieros que se establecen en un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar (call) o vender (put) un bono, que no paga cupones, a un precio predeterminado, strike, en una fecha concreta, vencimiento. Dado que el bono depende del tipo de interés  $r$ , la opción sobre bono también dependerá del tipo de interés. Al igual que ocurre en renta variable, por un lado, las opciones europeas, toman la decisión de ejercicio solo a vencimiento de la opción y para según que modelos existen fórmulas analíticas. Por otro lado, están las opciones americanas, donde la decisión de ejercicio es posible durante toda la vida de la opción y, por ello, no existen fórmulas analíticas. La opción americana, por el hecho de dar más derechos de ejercicio a su poseedor, tendrá un mayor precio o prima.

Destacar que la prima de una opción está compuesta por la suma de dos componentes. El valor intrínseco, que es la diferencia entre el precio del subyacente en el mercado y el

<sup>3</sup>En esta investigación se utilizará la curva OIS como *proxy* de la curva cupón cero.

<sup>4</sup>Como ya se ha comentado anteriormente, en este trabajo se va a tener en cuenta el modelo de Hull & White, que forma parte de los modelos exógenos.

*strike* (para una call y viceversa para una put), es decir, el *payoff* a vencimiento. Y el valor temporal, que tiene que ver con la capacidad de especulación de la opción, por tanto, a mayor tiempo hasta vencimiento, mayor será el valor temporal.

Por otro lado, dada la relación inversa que existe entre el subyacente de una opción sobre bono cupón cero y los tipos de interés, una put sobre un bono cupón cero es un caplet y por tanto, una call sobre tipos de interés.

### 3. Modelo Hull & White

El modelo originalmente propuesto por Hull & White en [19] para modelizar el proceso del short rate extiende el modelo de Vasicek<sup>5</sup> al permitir que sus parámetros dependan de manera determinista del tiempo. Como se ha hecho con frecuencia en la literatura financiera (ver, por ejemplo, [1]), aquí se analiza una versión restringida<sup>6</sup> del modelo HW, que solo permite que el valor a largo plazo  $\theta$  cambie con el tiempo. Por lo tanto, este modelo restringido establece que el *instantaneous short rate*  $r_t$  satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$dr_t = [\theta_t - ar_t]dt + \sigma dW_t \quad (3.1)$$

donde  $a$  y  $\sigma$  son constantes positivas,  $\theta_t$  es una función dependiente del tiempo elegida para ajustarse a la estructura de tipos de interés observada actualmente en el mercado y  $W_t$  es un movimiento browniano geométrico bajo la medida riesgo neutral  $\mathbb{Q}$ .

En [1] se encuentra una expresión explícita para  $\theta_t$  en términos de los tipos *forward* instantáneos  $f(0, t)$ , la cual se puede obtener desde la curva de descuento libre de riesgo observada en el instante  $t$ .

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (3.2)$$

Una de las ventajas del modelo HW, al igual que el de Vasicek, es su tratabilidad analítica para derivados sencillos (bonos cupón cero, opciones sobre bonos, swaps y swaptions, entre otros). Por ello, a continuación se exponen las ecuaciones analíticas del precio del bono cupón cero y de opciones europeas sobre bonos cupón cero que se usarán en la segunda parte de este trabajo.

#### 3.1. Ecuación analítica del precio del bono cupón cero

Bajo el modelo de Hull & White es posible obtener una expresión analítica del precio  $P(t, T)$  a fecha  $t$  de un bono cupón cero con vencimiento en  $T$ .

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r} \quad (3.3)$$

donde:

$$A(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left( B(t, T)f(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2 \right) \quad (3.4)$$

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a\delta(t, T)}) \quad (3.5)$$

#### 3.2. Ecuación analítica para opciones europeas sobre bono cupón cero

El precio de una opción europea, en el momento  $t$ , bajo el modelo HW viene dado por la siguiente expresión.

$$V(t, S, T, K, B) = \phi[P(t, T)BN(d) - P(t, S)KN(\phi(d - \nu))] \quad (3.6)$$

<sup>5</sup>Una de las principales críticas al modelo de Vasicek [28],  $dr = a[\theta - r]dt + \sigma dW_t$ , es que al contar únicamente con tres parámetros constantes, sólo era posible replicar de manera aproximada el comportamiento de la curva de tipos de interés observada en el mercado.

<sup>6</sup>Obviamente, al trabajar con una versión restringida, se tendrá un modelo que reproduce los precios de mercado pero no describe bien la manera en la que realmente evoluciona la estructura temporal de tipos de interés.

con:

$$d = \frac{1}{a} B(S, T) \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a\delta(t,S)})} \quad (3.7)$$

$$\nu = \frac{1}{d} \ln \left( \frac{P(t, T)B}{P(t, S)K} \right) + \frac{1}{2}d \quad (3.8)$$

Donde  $\phi$  es una unidad binaria, con  $\phi = 1$  para calls y  $\phi = -1$  para puts.  $K$  es el *strike* de la opción.  $B$  es el nocional del bono y  $N(x)$  es la función de distribución acumulada de una normal.

### 3.3. Ecuación en derivadas parciales

Teniendo en cuenta que  $r(t)$  satisface (3.1), bajo condiciones de no arbitraje el valor contingente de cualquier derivado de tipo de interés  $V(r, t)$  satisface la siguiente Ecuación en Derivadas Parciales (EDP).<sup>7</sup>

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} + (\theta(t) - ar(t))V_r - rV = 0, \quad (r, t) \in \mathbb{R} \times ]0, S[ \quad (3.9)$$

siendo la condición de contorno:

$$V(r, S) = g(r, S), \quad r \in \mathbb{R} \quad (3.10)$$

Para el precio del bono cupón cero  $g(r, S) = B$ . Las opciones europeas tienen un *payoff* igual a  $g(r, S) = [\phi(P(S, T)B - K)]^+$  en el momento de vencimiento de la opción  $S$ , con  $S < T$ .

### 3.4. Calibración del modelo

La calibración del modelo consiste en estimar los parámetros del modelo que se ajustan a una determinada información de mercado. Se realiza minimizando la suma de los cuadrados de las diferencias entre los precios de los derivados que ofrece el modelo y los precios de mercado.

$$\text{Min} \sum_i^n (\text{PrecioMercado}_i - \text{PrecioModelo}_i)^2 \quad (3.11)$$

Calibrar un modelo es una tarea bastante compleja, donde se requiere el uso de algoritmos de optimización, como por ejemplo, Quasi-Newton o Simulated Annealing, que producen la mejor estimación de los parámetros que minimizan la función objetivo (3.11).

Dado que el objeto del presente trabajo de investigación no es calibrar el modelo Hull & White,<sup>8</sup> se tomarán como valores para los parámetros del modelo ( $a$  y  $\sigma$ ), los observados recientemente en el mercado.

---

<sup>7</sup>El desarrollo de la EDP se puede consultar en [34].  $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$  es la derivada parcial de  $V$  respecto a  $x$ .

<sup>8</sup>En [26] y [21] se detallan distintos métodos para calibrar el modelo de Hull & White de forma eficiente.

## 4. Métodos Numéricos

En este capítulo se introducen los métodos numéricos, que se utilizarán en la segunda parte, para la valoración de opciones europeas y americanas sobre bono cupón cero.

Como la mayoría de problemas de valoración de derivados de tipo de interés se pueden formular como la esperanza del valor descontado de un pago final, se podría llegar a pensar que el método de Simulación de Montecarlo<sup>9</sup> es apropiado para esta investigación. No obstante, esto no es conveniente debido a la posibilidad de ejecución prematura permitida en la opción americana sobre bono cupón cero.

Este método numérico funciona mediante la propagación hacia adelante en el tiempo de las variables subyacentes, se puede decir que trabaja “desde atrás hacia adelante” en el tiempo. Es por ello que, no permite en un momento anterior a vencimiento determinar si el ejercicio prematuro del derivado es óptimo o no, ya que se desconoce cómo se comportan estas variables entre este instante y el vencimiento. Por tanto, el método de Montecarlo no sirve para valorar derivados que se pueden ejercer antes de vencimiento.<sup>10</sup> En cambio, es adecuado para valorar derivados que únicamente se pueden ejercer a vencimiento y cuyos *payoffs* son dependientes del camino seguido, como por ejemplo, las opciones asiáticas o cuando nos encontramos con una EDP con muchas dimensiones, que hacen inabordable la valoración de los derivados mediante otro tipo de métodos numéricos.

Los árboles trinomiales y los métodos de diferencias finitas, en cambio, son más adecuados para valorar productos financieros con ejecución prematura, como puede ser una opción americana, ya que trabajan “desde adelante hacia atrás” en el tiempo. Esta misma propiedad hace que no sean los métodos más apropiados para valorar derivados cuyos *payoffs* dependen de la evolución temporal del activo subyacente.

### 4.1. Árbol trinomial

Un árbol es un método numérico que nos permite observar la distribución discretizada de las variables subyacentes a través del tiempo, que también es discretizado. Mediante este método se pueden representar las diferentes posibles trayectorias seguidas por el subyacente durante la vida del derivado. Es frecuentemente usado para la valoración de opciones americanas y bermudas, siendo el más conocido el árbol binomial introducido por Cox, Ross y Rubinstein en 1979 (ver [7]). A diferencia del árbol binomial, en el trinomial el subyacente puede evolucionar en tres posibles estados desde cada nodo.

Dicho esto, el árbol de tipos de interés es una representación en tiempo discreto del proceso estocástico que sigue el tipo instantáneo,  $r(t)$ . Si denotamos por  $\Delta t$  el paso temporal en el árbol, los tipos de interés que van a aparecer en el árbol son los tipos vigentes en el intervalo  $[t, t + \Delta t]$  bajo capitalización continua,  $R(t, t + \Delta t)$ . La hipótesis habitual para poder acometer la construcción de estos árboles es que el tipo vigente en ese periodo de tiempo  $\Delta t$ ,  $R(t)$ , sigue el

<sup>9</sup>Consultar [12] si se quiere profundizar en el uso del método de Simulación Montecarlo en finanzas.

<sup>10</sup>Longtaff & Schwartz en 2001 adaptaron el método de Montecarlo para valorar derivados con ejecución prematura, denominado Least-Squares MonteCarlo (LSM). No entraremos en detalles sobre el método, pues no es objeto de la investigación. Si se desean más detalles de LSM consultar [22].

mismo proceso estocástico que el tipo instantáneo,  $r(t)$ .

La principal diferencia que hay entre los árboles para tipo de interés y árboles para el precio de las acciones radica en cómo se efectúa el descuento para obtener el precio de un activo derivado. Mientras que en los árboles para valorar derivados sobre acciones, como consecuencia de la discretización de la ecuación de Black-Scholes, la práctica habitual es mantener constante el factor de descuento en todos los nodos, en los árboles de tipos de interés, los tipos de descuento varían de nodo a nodo.

Hull & White desarrollaron en [17] un algoritmo robusto mediante el uso del árbol trinomial para valorar derivados de tipos de interés, como por ejemplo, bonos cupón cero y opciones sobre estos bonos.<sup>11</sup>

La construcción del árbol implica dos etapas. La primera, consiste en definir una nueva variable  $x^*(t)$ , estableciendo tanto  $\theta(t)$  como el valor inicial de  $x^*$  igual a cero. El proceso para  $x^*$  es el siguiente

$$dx^* = -ax^*dt + \sigma dW_t \quad (4.1)$$

Se construye un árbol trinomial para  $x^*$ . La distancia vertical entre los nodos en el árbol se establece igual a  $\Delta x^* = \sqrt{3V}$ , donde  $V$  es la varianza del cambio en  $x^*$  en el instante  $\Delta t$ . Las probabilidades se eligen para coincidir con la media y la desviación típica<sup>12</sup> del cambio en  $x^*$  para el proceso (4.1). Los nodos del árbol se van a identificar por  $(i, j)$  donde  $i \in [0, \dots, N]$  es el índice que hace referencia al instante de tiempo  $t_i$  en que se encuentra el nodo y  $j$  es el índice que identifica a los distintos nodos en el tiempo  $t_i$ . El valor de  $x^*$  en el nodo  $(i, j)$  se expresa mediante  $x_{i,j}^*$ .

La segunda etapa implica trabajar hacia delante (*forward induction*), desde el instante de tiempo cero hasta el final del árbol ajustando la ubicación de los nodos en cada paso de tiempo por  $\alpha(t)$  de tal manera que la estructura de tipos inicial coincida. El objeto de esta etapa es pasar del árbol de  $x^*$  al del *short rate*  $r$ .

Para obtener los valores de  $\alpha(i)$ , se define otro parámetro  $Q_{i,j}$ , conocido como precio *Arrow Debreu*, como los valores en el nodo  $(0, 0)$  de derivados que pagan una unidad monetaria si la trayectoria seguida por el *short rate* en el árbol alcanza el nodo  $(i, j)$  y cero en caso contrario. Como ya se ha indicado, los valores de  $\alpha(i)$  y  $Q_{i,j}$  se obtienen por inducción hacia delante. Por tanto, partiendo de  $Q_{0,0} = 1$  y  $\alpha(0) = \text{short rate}$  inicial para  $\Delta t$ , obtenemos el resto de forma recursiva mediante las siguientes expresiones.

$$P(0, i + 1) = \sum_j^n Q_{i,j} e^{-(\alpha(i) + kdx)\Delta t} \quad (4.2)$$

$$\alpha(i) = \frac{\log \sum_j^n Q_{i,j} e^{-jdx\Delta t} - \log P(0, i + 1)}{\Delta t} \quad (4.3)$$

$$Q_{i+1,j} = \sum_k Q_{i,j} \text{Prob}_{i,j} e^{-(\alpha(i) + kdx)\Delta t} \quad (4.4)$$

---

<sup>11</sup>Con el objetivo de no replicar la explicación al completo del procedimiento de la construcción del árbol trinomial de HW en este trabajo de investigación, se realizará un pequeño resumen del mismo, si se quisiera indagar en dicho método, consultar [17].

<sup>12</sup> $\mathbb{E}[dx^*] = Mx^* = (e^{-a\Delta t} - 1)x^*$ ;  $\mathbb{V}[dx^*] = \sigma^2(1 - e^{-2a\Delta t})/2a$

Con  $k$  siendo el entero más pequeño del cociente entre el valor esperado de  $x^*$  y  $dx^*$ .

En el anexo B se pueden apreciar dos figuras a modo de ejemplo de la representación de las dos etapas del árbol trinomial. En la primera etapa, donde se construye un árbol para  $x^*$  (Figura 9) y en la segunda etapa, que se pasa al árbol del tipo a corto o *short rate*  $r$  (Figura 10).

En la segunda parte de esta investigación, el árbol trinomial se utiliza para la valoración de opciones europeas y americanas sobre bono cupón cero.

## 4.2. Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas se utiliza para calcular de manera numérica las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales, usando cocientes incrementales finitos para aproximar derivadas. Existen tres tipos principalmente, atrasada, adelantada y central.<sup>13</sup> De forma habitual se utiliza la central para la variable espacial, que tiene precisión de segundo orden y backward o forward para la variable temporal.

Como resultado de la aproximación, la ecuación diferencial parcial que describe el problema es reemplazada por un número finito de ecuaciones algebraicas, en términos de los valores de la variable dependiente en los puntos seleccionados. Los valores de la variable en los puntos seleccionados se convierten en las incógnitas. La solución del sistema de ecuaciones algebraico permite obtener la solución aproximada en cada punto seleccionado de la malla.

Siguiendo [8], en primer lugar, se discretiza el problema, es decir, del dominio del problema continuo  $[(x, t) : -\infty < x < \infty]$  se construye su versión discretizada lo suficientemente grande  $[x_{min}, x_{max}] \times [0, T]$ .

Se comienza a construir esquemas en diferencias finitas definiendo una cuadrícula de puntos en el plano (mallado). Para enteros arbitrarios  $n$  y  $m$ , se denota con  $U(x_m, t_n)$  el valor de  $U$  (la solución aproximada) en el punto del mallado, que se puede escribir de forma reducida como  $U_m^n$ . El mallado se construye para considerar valores de  $U$  cuando el tiempo es igual a  $[t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots, t_N = t_{max} = T]$  y cuando la variable  $x$  es igual a  $[x_{min} = x_0, x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_M = x_{max}]$ .

Se denomina a  $k$  y a  $h$ , como el paso del tiempo y el ancho del paso. Se obtienen de la siguiente forma  $k = \frac{t_N - t_0}{N}$  y  $h = \frac{x_M - x_0}{M}$ . Los tamaños del paso temporal y espacial, también los podemos encontrar en la literatura como  $k$  y  $h$  respectivamente.

El esquema general de diferencias finitas viene dado por las siguientes aproximaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} \approx \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} \\ \frac{\partial U}{\partial x} \approx \Theta \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} + (1 - \Theta) \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \Theta \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \Theta) \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2} \end{cases} \quad (4.5)$$

<sup>13</sup>La expresión de estos tres tipos de aproximaciones a las derivadas parciales se pueden consultar en el Anexo A.

Al introducir este esquema en la EDP del problema se pasa de una ecuación diferencial a una ecuación algebraica. Donde  $\Theta$  es una constante que puede tomar cualquier valor en el intervalo  $[0, 1]$ . Los tres casos particulares más importantes de esquemas en diferencias finitas son:

- Explícito ( $\Theta = 0$ )
- Implícito ( $\Theta = 1$ )
- Crank-Nicolson ( $\Theta = 0,5$ )

Conociéndose la solución en el instante  $t = T^{14}$  (condición inicial o terminal) y en los puntos superior e inferior del mallado (condiciones de frontera), el esquema explícito permite conocer la solución en el punto  $(x_m, t^n)$  si se conoce la solución en los puntos vecinos,  $U_{m+1}^{n+1}$ ,  $U_m^{n+1}$  y  $U_{m-1}^{n+1}$  (despejamos de la ecuación algebraica en la que ha quedado la EDP el valor de  $U_m^n$ ). Repitiendo iterativamente este procedimiento hasta llegar a  $t = 0$ , se consigue la solución en todos los puntos del mallado.

Para la solución en los puntos no pertenecientes al mallado, se realizará una interpolación lineal de la solución de los puntos vecinos. El error cometido en esta aproximación es del mismo orden que el cometido en la discretización de la ecuación diferencial.

El método explícito tiene la desventaja que no necesariamente proporciona una solución numérica al problema de valoración que converja a la solución exacta de la EDP que lo caracteriza a medida que se haga tender a cero los pasos de discretización. Se requiere de una condición sobre estos pasos.

Para el esquema implícito y de Crank-Nicolson, la solución en un punto no depende exclusivamente de la solución obtenida en el instante inmediatamente anterior, sino que depende también de la solución en otros puntos en el mismo instante. Esto hace que el cálculo de la solución en un instante dado requiera de la resolución de un sistema lineal de ecuaciones. En estos casos, se utiliza un método de resolución específico para matrices tridiagonales, como por ejemplo el LU.<sup>15</sup>

De acuerdo con [5], los esquemas numéricos implícitos tienen ventajas e inconvenientes frente a los explícitos. Las condiciones de estabilidad suelen ser menos restrictivas que la estabilidad condicional requerida para los esquemas explícitos expresados en términos del tamaño del paso de las variables discretizadas. Sin embargo, los esquemas numéricos implícitos tienen importantes inconvenientes prácticos que deben verificarse antes de decidir el esquema más apropiado. Como por ejemplo, como inicializar el enfoque iterativo, como los métodos de Newton. Otras cuestiones importantes son como evaluar el coste computacional adicional que resulta de la aplicación del proceso iterativo en cada paso de tiempo y tener en cuenta las restricciones que aparecen para garantizar las condiciones de convergencia de los métodos iterativos utilizados. Por tanto, no está claro que todo esquema implícito sea mejor que uno explícito.

En definitiva, en la segunda parte de la investigación se va a utilizar el método numérico de diferencias finitas explícito para la valoración de opciones europeas sobre bonos cupón cero.

---

<sup>14</sup>En la literatura [32], se puede encontrar también con  $\tau = 0$  a raíz del cambio de variable  $\tau = T - t$ .

<sup>15</sup>Viene de *Lower-Upper* y se trata de una forma de factorización de una matriz como el producto de una matriz triangular inferior y una superior.

### 4.3. Front-fixing

Una opción americana tiene la característica de que puede ser ejercida en cualquier momento a lo largo de la vida de la opción hasta su vencimiento. Es por ello que, la valoración de opciones americanas es un problema de frontera libre. Para cada instante  $t$  existe un valor de  $r$  que señala la frontera entre dos regiones: en una de ellas conviene continuar la opción (región de continuación) y en la otra ejercer la opción (región de ejercicio anticipado). Denotaremos esta frontera (*optimal exercise boundary*) por  $r^*(t)$  pues esta frontera depende del tiempo  $t$  y es desconocida a priori. De esta forma, mientras en las opciones europeas se conoce cuales son y donde se localizan las condiciones de contorno, en las opciones americanas no se dispone de esta información en la frontera libre, porque esta frontera es variable y desconocida. El problema de frontera libre de las opciones americanas no tiene solución analítica conocida por lo que es necesario el uso de métodos numéricos.

Formalmente el problema de la valoración de las opciones americanas se puede escribir como un problema diferencial de complementariedad lineal (LCP) o un problema de límite libre. Estas dos formulaciones diferentes han conducido a diferentes métodos para resolver el problema de las opciones americanas. El enfoque más algebraico de LCP de americanas sobre subyacente de renta variable se puede encontrar en [10] y sus referencias. Por lo que respecta a renta fija, en concreto la valoración de opciones americanas sobre bono cupón cero bajo el modelo HW, en [9], utilizan una descomposición LU para resolver el LCP relacionado con la valoración de opciones americanas.

Una técnica alternativa utilizada en la literatura financiera para obtener el precio de las opciones americanas es el método del *penalty* (véase, [31] y [35]). La idea básica es sencilla, se trata de añadir a la ecuación en la que se ha quedado la EDP (se cumple con igualdad para opciones europeas) de valoración de la opción americana, un término  $f(V)$ , llamado término de *penalty*, que es una función no lineal de  $V$ . Una vez planteado el problema con la condición inicial y de contorno se plantean métodos de diferencias finitas explícitos, implícitos o semi-implícitos para la obtención de la solución numérica.

Es de subrayar que el enfoque de LCP así como el método del *penalty* evitan el cálculo de la frontera móvil  $r^*(t)$  y la complejidad matemática que ello conlleva. Esta complejidad se reduce transformando el problema de frontera libre en otro de frontera fija, donde la frontera libre pasa a ser una nueva variable del problema transformado. Esta estrategia, llamada *front-fixing*, ha sido usada antes en física e ingeniería, [20], [6], en problemas de cambio de fase, como solidificación de líquidos o fusión de sólidos.

El método de *front-fixing* tiene la ventaja de que proporciona no solo el valor de la opción americana, sino también el valor de la frontera móvil, dando pues el valor de  $r^*(t)$  que separa las dos regiones. Este método, combinado con el uso de un esquema de diferencias explícito evita los inconvenientes de los enfoques algebraicos, ya que evita el uso de métodos iterativos y las dificultades subyacentes, como la forma de iniciar el algoritmo, cuando detenerlo y cual es el error de parada. Por tanto, en este trabajo se propone un método *front-fixing* junto a un esquema en diferencias finitas explícito.

Realizándose una revisión bibliográfica, por lo que respecta a valoración de opciones americanas, sobre subyacente de renta variable, los problemas de frontera libre se trataron inicialmente alrededor de 1997 por Wu y Kwok en [33], posteriormente en [24] y más recientemente en [3]. En

[15] se plantea el problema de frontera libre para opciones americanas sobre bonos cupón cero, utilizando *front-fixing* junto a elementos finitos.

#### 4.4. Convergencia y estabilidad

Para el caso de diferencias finitas y front fixing, al tratarse de métodos numéricos que usan cocientes incrementales para aproximar derivadas parciales, la solución numéricamente obtenida se debe aproximar convenientemente a la solución del problema planteado. La conveniencia viene marcada por los siguientes aspectos:

- Consistencia: El problema aproximador es tan cercano al problema inicialmente planteado como se quiera.
- Convergencia: La solución del problema aproximador tiende a la solución del problema inicial.
- Estabilidad: Pequeñas variaciones en los datos de partida no provocan grandes variaciones en el resultado.
- Eficiencia: En términos de recursos necesarios: memoria, tiempo de ejecución (se suele medir en tiempo de CPU).

Estos aspectos, se estudiarán de forma numérica en la segunda parte del trabajo.

## Parte II: Análisis Empírico



## 5. Datos

Esta sección está dedicada a la descripción de los datos utilizados, en el ejemplo 1 en esta segunda parte del trabajo de investigación, donde se realizan experimentos numéricos para analizar los métodos numéricos propuestos en la primera parte del trabajo.

### 5.1. Descripción de datos

La curva cupón cero utilizada para la valoración de opciones sobre bono cupón cero es la curva OIS EUR (EONIA),<sup>16</sup> se han descargado los datos de cotización correspondientes al día 24-Mayo-2019, a través del terminal *Thomson Reuters Eikon*, con un conjunto de vencimientos de 1 día a 50 años. La curva se compone de manera continua y la convención del recuento de días (*day-count convention*) en la que cotiza la OIS EUR, es con la base Acual/Actual.<sup>17</sup>

A continuación, se presentan los datos correspondientes a la curva de descuento OIS.

<b>Tenor</b>	0.25Y	0.5Y	1Y	1.5Y	2Y	2.5Y	3Y	3.5Y	4Y
<b>Zero Rate (%)</b>	-0.374	-0.380	-0.395	-0.399	-0.390	-0.375	-0,351	-0.324	-0.293
<b>Tenor</b>	4.5Y	5Y	5.5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	12Y
<b>Zero Rate (%)</b>	-0.256	-0.216	-0.173	-0.129	-0.038	0,056	0.149	0.240	0.409
<b>Tenor</b>	15Y	20Y	25Y	30Y	40Y	50Y			
<b>Zero Rate (%)</b>	0.612	0.808	0.886	0.910	0.908	0.892			

Tabla 1: EUR OIS a 24-Mayo-2019 con tenors de 1 día a 50 años.

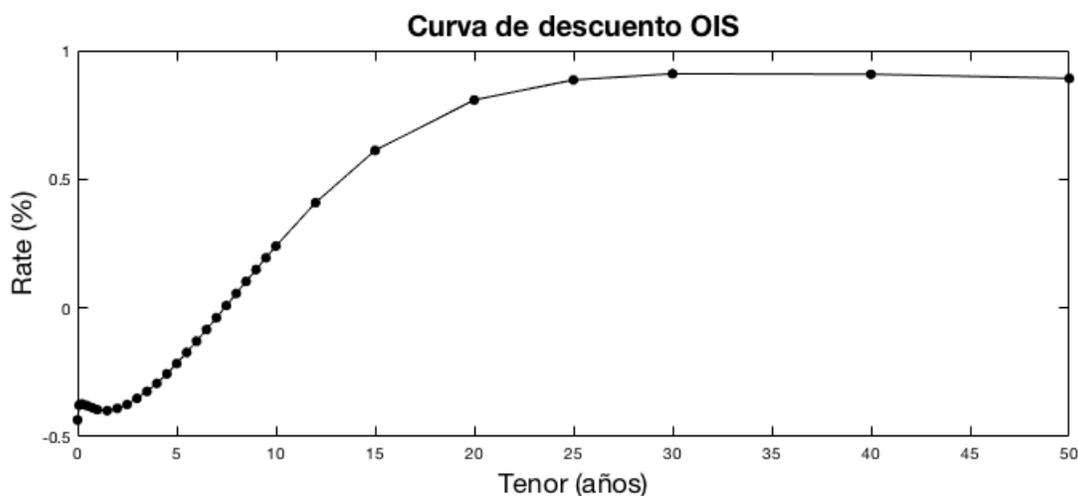


Figura 1: Curva de descuento EUR OIS a 24-Mayo-2019 con tenors de 1 día a 50 años.

<sup>16</sup>Euro Overnight Index Average.

<sup>17</sup>Esta convención define que los meses y años se computan por los días reales que tienen.



## 6. Metodología

Esta sección está dedicada a analizar empíricamente los temas ya tratados en la parte teórica, es decir, la comparación de métodos numéricos para valorar opciones europeas y americanas sobre bonos cupón cero.<sup>18</sup>

El árbol trinomial y las diferencias finitas serán los métodos que se analizarán en este trabajo para la valoración de opciones europeas, mientras que para la valoración de americanas se usará el árbol trinomial y se comparará con un método denominado *Front Fixing*.

### 6.1. Valoración de una put europea sobre bono cupón cero

Cuando se construye un árbol trinomial para el modelo HW o se utiliza el método de diferencias finitas, resultados analíticos, como (3.3) y (3.6), son de extraordinaria utilidad para valorar derivados de tipo europeo.

#### 6.1.1. Árbol trinomial

Se denota por  $V_{i,j}$  el valor de una opción put europea sobre bono cupón cero en cada nodo  $j$  del árbol en el instante de tiempo  $i$ .

Para valorar esta opción (con vencimiento en  $S$  y *strike*  $K$ ) mediante el árbol trinomial de HW, en primer lugar, se debe construir el árbol para  $r$  que irá desde el instante  $i = 0$  hasta  $i = S$ .<sup>19</sup>

Es importante no obviar el hecho de que los tipos de interés del árbol son a un plazo finito,  $R(t, t + \Delta t)$  y no se deben confundir con el tipo instantáneo  $r(t)$ . Además, los tipos cupón cero intermedios, necesarios para la construcción del árbol a medida que aumentamos el número de pasos, se han obtenido mediante interpolación basada en funciones splines cúbicas de la función de descuento asociada.

Sobre el árbol para  $r$  se construye el árbol para el valor de la opción put europea. Se parte del instante  $i = S$  (vencimiento de la opción) y para cada nodo del árbol  $j$ , se calcula el *payoff*<sup>20</sup>. Seguidamente, se calcula para el periodo anterior  $i = S - \Delta t$  el valor de la opción, teniendo en cuenta las probabilidades de cada rama (las expresiones de  $P_u$ ,  $P_m$  y  $P_d$  se pueden encontrar en [18]) y el factor de descuento.

$$V_{i,j} = e^{-r_{i,j}\Delta t} [P_u V_{i+1,j+1} + P_m V_{i+1,j} + P_d V_{i+1,j-1}]. \quad (6.1)$$

Se seguiría este proceso para calcular el valor de la opción en todos los nodos  $j$  del árbol y se pasaría a otro periodo anterior ( $i = S - 2\Delta t$ ) y así sucesivamente hasta el instante  $i = 0$ , obteniendo así el valor de la prima de la put.<sup>21</sup>

<sup>18</sup>El análisis empírico se realiza completamente con el software MATLAB, versión R2018a.

<sup>19</sup>El proceso de construcción del árbol trinomial de HW para  $r$  está detallado en la sección 4.1.

<sup>20</sup> $V_{i=S,j} = [(K - P_j(S, T)B)]^+$ , calculando  $P_j(S, T)$  con la expresión (3.3).

<sup>21</sup>En [18], Hull & White utilizan su algoritmo basado en el árbol trinomial para valorar una put europea. Es por ello, que para comprobar la efectividad del árbol trinomial de esta investigación se ha replicado dicho artículo, siendo los resultados de la prima de la opción prácticamente idénticos.

### 6.1.2. Método de diferencias finitas explícito

De acuerdo con [27], para implementar el modelo HW vía diferencias finitas, se necesita determinar analíticamente  $\theta(t)$ , cuya expresión es (3.2).

El *forward rate* puede ser aproximado por

$$f(0, t_k) \approx \frac{-(\log P(0, t_k + \Delta t) - \log P(0, \Delta t))}{\Delta t}. \quad (6.2)$$

Mientras que la derivada respecto al tiempo del *instantaneous forward rate* puede ser aproximada por

$$\left. \frac{\partial f(0, t_k)}{\partial t} \right|_{t=t_k} \approx \frac{f(0, t_k + \Delta t) - f(0, t_k - \Delta t)}{2\Delta t}. \quad (6.3)$$

$V(r, t)$  es el valor (prima) de una opción put europea, con vencimiento en  $S$  y strike  $K$ , sobre un bono cupón cero, con vencimiento en  $T$  (siendo  $S < T$ ), que satisface la siguiente EDP:

$$\begin{aligned} V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} + (\theta(t) - ar(t))V_r - rV &= 0, & (r, t) \in \mathbb{R} \times ]0, S[ \\ V(r, S) &= g(r, S), & r \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Sujeto a la condición terminal (*payoff*).

$$g(r, S) = [(K - P(S, T)B)]^+ \quad (6.5)$$

Para resolver (6.4) numéricamente, se construye una malla discreta para valores de  $r$  en el intervalo  $[r_{min}, r_{max}]$ .<sup>22</sup> Se supone que la malla tiene  $M$  puntos espaciados uniformemente  $r_1, r_2, \dots, r_M$  expresando la distancia entre los puntos sucesivos por  $h$ , siendo  $h = \frac{r_{max} - r_{min}}{M}$ . El valor de  $V$  en el punto espacial del mallado  $i$  en el paso del tiempo  $n$  es  $V_i^n$ .

Para determinar las condiciones frontera para la opción *vanilla* put europea sobre bono cupón cero, hay varias maneras de determinarlas (ver [30]). Una forma popular y simple es la siguiente [11]:

$$\begin{aligned} g(r = r_{min}, t) &= 0 \\ g(r = r_{max}, t) &= [KP(r_{max}, t, S) - P(r_{max}, t, T)]^+ \end{aligned} \quad (6.6)$$

Vale la pena señalar que se debe cumplir que  $S < T$  y  $K > P(0, S, T)$ , ya que de lo contrario, la opción nunca se ejercería y sería inútil.

En un esquema explícito, las derivadas parciales de (6.4) pueden ser aproximadas por:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &\approx \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{k} \\ \frac{\partial V}{\partial r} &\approx \frac{V_{i+1}^{n+1} - V_{i-1}^{n+1}}{2h} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} &\approx \frac{V_{i+1}^{n+1} - 2V_i^{n+1} + V_{i-1}^{n+1}}{h^2} \end{aligned} \right. \quad (6.7)$$

<sup>22</sup>De acuerdo con [9], la elección de  $[r_{min}, r_{max}]$  puede ser subjetiva, pero en la literatura se observa que en las implementaciones de esquemas en diferencias finitas, se corresponden con  $\pm 5 \frac{\sigma}{\sqrt{2a}}$ .

Donde  $k$  es la duración del intervalo de tiempo entre  $n$  y  $n + 1$  y se obtiene como  $k = \frac{S}{N}$ . Es común en finanzas (ver [29]), aunque no es estandar en la literatura de PDE, usar  $r_i V_i^n$  para el término  $rV$  de (6.4). Sustituyendo (6.7) en (6.4) y reordenando términos, se tiene:

$$V_i^n(1 + rk) = p_{i-1}^{n+1}V_{i-1}^{n+1} + p_i V_i^{n+1} + p_{i+1}^{n+1}V_{i+1}^{n+1} \quad (6.8)$$

con:

$$\begin{cases} p_{i-1}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma^2 k}{h^2} - \frac{(\theta^{n+1} - ar_i)k}{h} \right] \\ p_i = 1 - \frac{\sigma^2 k}{h^2} \\ p_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma^2 k}{h^2} + \frac{(\theta^{n+1} - ar_i)k}{h} \right] \end{cases} \quad (6.9)$$

Una vez se tiene la solución  $V_i^n \forall i$  en el instante  $n$ , se iría al periodo anterior y se volvería a calcular la solución  $\forall i$  y así sucesivamente hasta  $t = 0$ , completándose así el mallado.

## 6.2. Valoración de una put americana sobre bono cupón cero

Para la valoración de la opción put americana, a diferencia de la europea, no es posible contar con fórmulas analíticas que agilicen la implementación de las técnicas numéricas.

### 6.2.1. Árbol trinomial

Se define  $V_{i,j}$  como el valor de una opción put americana sobre bono cupón cero en cada nodo  $j$  del árbol en el instante de tiempo  $i$ .

Para valorar esta opción (con vencimiento en  $S$  y *strike*  $K$ ) mediante el árbol trinomial de HW, al igual que para la europea, se debe construir primero el árbol para  $r$  que irá desde el instante  $i = 0$  hasta  $i = S$ .

Sobre el árbol para  $r$  se construye el árbol para el valor de la opción put americana. Se parte del instante  $i = S$  (vencimiento de la opción) y para cada nodo del árbol  $j$ , se calcula el *payoff*<sup>23</sup>. Seguidamente, se calcula para el periodo anterior  $i = S - \Delta t$  el valor de la opción, teniendo en cuenta las probabilidades de cada rama ( $P_u, P_m$  y  $P_d$ ) y el factor de descuento. La diferencia con la europea, es que ahora hay que considerar el hecho de que se puede ejercer de forma anticipada la opción. Con lo cual, el valor de la opción en el instante  $i$  en el nodo  $j$ , es decir,  $V_{i,j}$  se calcula utilizando la siguiente expresión.

$$V_{i,j} = \max \{ e^{-r_{i,j}\Delta t} [P_u V_{i+1,j+1} + P_m V_{i+1,j} + P_d V_{i+1,j-1}], K - P_j(i, T)B \} \quad (6.10)$$

Se seguiría este proceso para calcular el valor de la opción en todos los nodos del árbol y se

---

<sup>23</sup> $V_{i=S,j} = [(K - P_j(S, T)B)]^+$ .

pasaría a otro periodo y así sucesivamente hasta el instante  $i = 0$ , obteniendo así el valor de la prima de la put americana.

### 6.2.2. Front-fixing

Como se ha comentado, se utilizará la técnica de *front fixing* junto con un esquema explícito para obtener la frontera móvil  $r^*(t)$  y el valor de una opción americana. Previamente se determina analíticamente  $\theta(t)$ , de igual forma que en la sección 6.1.2.

Se denota  $V(r, t)$  al valor de una opción put americana, con vencimiento en  $S$  y strike  $K$ , sobre un bono cupón cero, con vencimiento en  $T$  (siendo  $S < T$ ), que satisface la siguiente EDP:

$$\begin{aligned} V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} + (\theta(t) - ar(t))V_r - rV &= 0, & (r, t) \in \mathbb{R} \times ]0, S[ \\ V(r, t) > g(r, t), & \text{ para } r < r^*(t), & r \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t < S \leq T \end{aligned} \quad (6.11)$$

$r^*$  verifica las condiciones:

$$\begin{aligned} V(r^*, t) &= g(r^*, t), & 0 \leq t < S \\ V_r(r^*, t) &= g_r(r^*, t), \end{aligned} \quad (6.12)$$

El *payoff*<sup>24</sup> y las condiciones frontera son:

$$g(r, t) = [(K - P(t, T)B)]^+ \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} V(r, t) &= g(r, t), & r \rightarrow +\infty \\ V(r, t) &= 0, & r \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (6.14)$$

En línea con [15], sea  $L > 0$ , tal que,  $g(r, t) = 0$ , para  $r < r^* - L$

Por tanto, se limita el dominio numérico a la región acotada:

$$-L + r^* \leq r \leq r^* \quad (6.15)$$

Entonces, si se hace el cambio de variable  $x = r + L - r^*$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} r = r^* &\equiv x = L \\ r = -L + r^* &\equiv x = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Siendo el dominio fijo de la nueva variable:  $0 \leq x \leq L$

Con lo que, si se pasa ahora a tiempo a vencimiento,  $\tau = S - t$ , la EDP queda:

$$V_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 V_{rr} + (\varphi(\tau) - ar(t))V_r - rV, \quad (r, \tau) \in [-L + r^*, r^*] \times ]0, S[ \quad (6.17)$$

Siendo  $\varphi(\tau) = \theta(S - \tau) = \theta(t)$ .

---

<sup>24</sup>Siendo  $P(t, T)$  el precio de un bono cupón 0 en el instante  $t$ , vencimiento en  $T$  y nocional de  $B$ .

Se define  $r_f(\tau) = r^*(t)$ .

La nueva función incógnita  $U(x, \tau)$  de la EDP y sus derivadas parciales quedan:

$$V(r, t) = U(x, \tau) \quad (6.18)$$

con:

$$\begin{aligned} V_r &= U_x \\ V_{rr} &= U_{xx} \\ V_t &= r'_f U_x - U_\tau \end{aligned} \quad (6.19)$$

Teniendo en cuenta todos los cambios, la EDP queda:

$$U_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 U_{xx} + (\varphi(\tau) - a(x - L + r_f) + r'_f)U_x - (x - L + r_f)U, \quad (x, \tau) \in [0, L] \times ]0, S[ \quad (6.20)$$

El *payoff* y las condiciones de contorno quedan:

$$G(x, \tau) = g(r, t) = [(K - P(t, T)B)]^+ \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} U(x, \tau) &= G(x, \tau), \quad x \rightarrow L \\ U(x, \tau) &= 0, \quad x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Para resolver (6.20) de forma numérica se discretiza el problema, construyendo una malla discreta (se puede observar la representación del mallado en el apéndice B), donde los tamaños del paso espacial y temporal son  $h$  y  $k$ , respectivamente.

$$\begin{aligned} h &= \frac{x_{max}}{M} \\ x_i &= ih, \quad i = 0, 1, \dots, M \\ k &= \frac{S}{N} \\ \tau^n &= kn, \quad n = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (6.23)$$

Se supone que la función  $U(x, \tau)$  es la solución exacta y la solución aproximada en el punto  $(x_i, \tau^n)$  se denota como:

$$\begin{aligned} U_i^n &\approx U(x_i, \tau^n) \\ r_f^n &\approx r_f(\tau^n) \end{aligned} \quad (6.24)$$

En un esquema explícito, las derivadas parciales de (6.20) pueden ser aproximadas por:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau}(x_i, \tau^n) &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} \\ \frac{\partial r_f}{\partial \tau}(\tau^n) &\approx \frac{r_f^{n+1} - r_f^n}{k} \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x_i, \tau^n) &\approx \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2h} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, \tau^n) &\approx \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} \end{aligned} \right. \quad (6.25)$$

Entonces, la discretización de la EDP es:

$$\frac{U_i^{n+1}-U_i^n}{k} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{U_{i+1}^n-2U_i^n+U_{i-1}^n}{h^2} + \left( \varphi^n - a(x_i - L + r_f^n) + \frac{r_f^{n+1}-r_f^n}{k} \right) \frac{U_{i+1}^n-U_{i-1}^n}{2h} - (x_i - L + r_f^n) U_i^n, \quad 1 \leq i \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (6.26)$$

Siendo la condición inicial y la de contorno a la izquierda del mallado:

$$\begin{aligned} U_i^0 &= G(x_i - L + r_f(0), S) \\ U_0^n &= 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Por un lado, si se despeja  $U_i^{n+1}$  de (6.26), se obtiene la solución numérica en todos los puntos interiores del mallado.

$$U_i^{n+1} = a_i^n U_{i+1}^n + b_i^n U_i^n + c_i^n U_{i-1}^n \quad (6.28)$$

Donde:

$$\begin{cases} a_i^n = \frac{1}{2} \left[ \frac{k\sigma^2}{h^2} + \frac{k\zeta^n}{h} \right] \\ b_i^n = \left[ 1 - \left( \frac{k\sigma^2}{h^2} + k(x_i - L + r_f^n) \right) \right] \\ c_i^n = \frac{1}{2} \left[ \frac{k\sigma^2}{h^2} - \frac{k\zeta^n}{h} \right] \end{cases} \quad (6.29)$$

$$\text{Siendo } \zeta^n = \left( \varphi^n - a(x_i - L + r_f^n) + \frac{r_f^{n+1}-r_f^n}{k} \right)$$

Por otro lado, para calcular la frontera móvil, se discretiza la EDP en el punto  $i = M$ , apareciendo con ello, un punto externo al dominio  $x_{M+1}$ . Para resolver esto, se utiliza la condición de contorno (6.22) de la derivada respecto de  $x$ . Si se discretiza la condición de contorno se encuentra una relación entre  $U_{M+1}^n$  y  $U_{M-1}^n$ :

$$\begin{aligned} \frac{U_{M+1}^n - U_{M-1}^n}{2h} &= \frac{G_{M+1}^n - G_{M-1}^n}{2h}, \\ U_{M+1}^n - U_{M-1}^n &= G_{M+1}^n - G_{M-1}^n = \Delta G_f^n, \\ U_{M+1}^n &= U_{M-1}^n + \Delta G_f^n \end{aligned} \quad (6.30)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} U_M^{n+1} &= k \left[ \frac{\sigma^2}{2h^2} + \left( \varphi^n - ar_f^n + \frac{r_f^{n+1}-r_f^n}{k} \right) \frac{1}{2h} \right] (U_{M-1}^n + \Delta G_f^n) \\ &+ k \left[ \frac{\sigma^2}{2h^2} - \left( \varphi^n - ar_f^n + \frac{r_f^{n+1}-r_f^n}{k} \right) \frac{1}{2h} \right] U_{M-1}^n \\ &+ \left( 1 - k \left[ \frac{\sigma^2}{h^2} + r_f^n \right] \right) U_M^n \end{aligned} \quad (6.31)$$

Donde:

$$\begin{aligned}\Delta G_f^n &= g(r_f^n + h, S - \tau^n) - g(r_f^n - h, S - \tau^n) \\ &= P(r^* - h, T - \tau^n) - P(r^* + h, T - \tau^n)\end{aligned}\quad (6.32)$$

Se observa en la expresión (6.31), que para obtener el valor de  $U_M^{n+1}$  se necesita el valor de  $r_f^{n+1}$ , que es desconocido. Por tanto, se debe encontrar también una expresión para  $r_f^{n+1}$  (también servirá para (6.28)). Además, esto permitirá obtener el *Optimal Exercise Boundary* en cada paso temporal.

Por otra parte,

$$U(L, \tau) = V(r^*(t), t) = g(r^*, t) \quad (6.33)$$

$$U_M^n = g(r^*, T - \tau^n) = K - P(r^*, t, T) \quad (6.34)$$

La derivada parcial de  $U(x, \tau)$  respecto de  $\tau$  es:

$$\left. \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial \tau} \right|_{x=L} = P_t(r^*, t, T) + P_{r^*}(r^*, t, T) r'_f(\tau) \quad (6.35)$$

Entonces, aproximando (6.35) por cocientes incrementales, se tiene:

$$\frac{U_M^{n+1} - U_M^n}{k} = \frac{P^n(r^*) - P^{n+1}(r^*)}{k} + \frac{P^n(r^* + h) - P^n(r^* - h)}{2h} \frac{r_f^{n+1} - r_f^n}{k} \quad (6.36)$$

Donde  $P^n(r^*)$  denota el valor aproximado del bono cupón cero en el instante  $t = S - \tau^n$ , es decir,  $P^n(r^*) \approx P(r^*, S - \tau^n, T)$ .

Si se despeja  $U_M^{n+1}$ :

$$U_M^{n+1} = U_M^n + P^n(r^*) - P^{n+1}(r^*) + \frac{P^n(r^* + h) - P^n(r^* - h)}{2h} (r_f^{n+1} - r_f^n) \quad (6.37)$$

Ahora, igualando (6.31) y (6.37):

$$\begin{aligned}& k \left( \frac{\sigma^2}{2h^2} + H^n \frac{1}{2h} \right) (U_{M-1}^n + \Delta G_f^n) + k \left( \frac{\sigma^2}{2h^2} - H^n \frac{1}{2h} \right) U_{M-1}^n \\ & + \left( 1 - k \left( \frac{\sigma^2}{h^2} + r_f^n \right) \right) U_M^n + r_f^{n+1} \frac{1}{2h} (U_{M-1}^n + \Delta G_f^n) - \frac{r_f^{n+1}}{2h} U_{M-1}^n \\ & = U_M^n + P^n(r^*) - P^{n+1}(r^*) + \frac{P^n(r^*+h) - P^n(r^*-h)}{2h} (r_f^{n+1} - r_f^n)\end{aligned}\quad (6.38)$$

Donde  $H^n = \varphi^n - ar_f^n - \frac{r_f^n}{k}$

Se va despejando de (6.38)  $r_f^{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
 r_f^{n+1} & \left( \frac{\Delta G_f^n}{2h} - \frac{P^n(r^*+h) - P^n(r^*-h)}{2h} \right) \\
 & = -k \left( \frac{\sigma^2}{h^2} U_{M-1}^n + H^n \frac{1}{2h} \Delta G_f^n \right) + k \left( \frac{\sigma^2}{h^2} + r_f^n \right) U_M^n \\
 & + P^n(r^*) - P^{n+1}(r^*) - \left( \frac{P^n(r^*+h) - P^n(r^*-h)}{2h} \right) r_f^n
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

De aquí, la expresión explícita de  $r_f^{n+1}$  es:

$$r_f^{n+1} = \frac{k \left[ \left( \frac{\sigma^2}{h^2} + r_f^n \right) U_M^n - \left( \frac{\sigma^2}{h^2} U_{M-1}^n + H^n \frac{1}{2h} \Delta G_f^n \right) \right] + P^n(r^*) - P^{n+1}(r^*) + \frac{\Delta G_f^n}{2h} r_f^n}{\Delta G_f^n / h} \tag{6.40}$$

Notar que,  $P^n(r^*)$ ,  $P^{n+1}(r^*)$ ,  $P^n(r^*+h)$  y  $P^n(r^*-h)$  al no ser puntos pertenecientes al mallado, habrá que interpolar con los datos de la solución de  $r$  en el mallado.

## 7. Resultados empíricos

### 7.1. Solución numérica

En esta subsección se dan evidencias de lo expuesto en la parte teórica con experimentos numéricos que muestran las ventajas potenciales de las técnicas propuestas frente al árbol trinomial de HW, comparando los resultados entre los distintos métodos en cuanto a aproximación a la solución real y a eficiencia.<sup>25</sup> Como experimentos numéricos, en el ejemplo 1, se plantea la valoración de opciones sobre bonos cupón cero con los datos de la Sección 5. En el ejemplo 2, se compara la valoración de una put americana sobre bono cupón 0, con los datos de [27], para comprobar si el método propuesto de *front-fixing* es adecuado teniéndose en cuenta otra curva de descuento y otros parámetros para el modelo Hull & White.

#### ▪ Ejemplo 1

En este primer ejemplo numérico se valora por un lado, una opción put europea con vencimiento a 5 años y *strike* de 97 sobre un bono cupón cero con vencimiento a 8 años y nominal de 100. Por otro lado, una opción put americana con las mismas características que la europea. Se asumen los valores de  $a = 1\%$  y  $\sigma = 0,5\%$ , que son muy cercanos a los observados recientemente en el mercado. Para el método de diferencias finitas y de *front-fixing* se interpola la solución en el mallado al tipo de interés actual. Además, se incluye la solución analítica para la opción put europea bajo el modelo HW (expresión 3.6). Para los esquemas en diferencias finitas, se considera la malla discreta para  $r$  en el intervalo  $[-0.2, 0.2]$ .

Por lo que respecta a la valoración de la opción put europea sobre bono cupón cero, en la Tabla 2 se aprecia como al hacer cada vez más pequeño el paso temporal, la solución proporcionada por los dos métodos numéricos va convergiendo a la solución analítica, siendo la solución del método de diferencias finitas explícito algo más precisa que la proporcionada por el árbol trinomial de HW. Se puede comprobar en la Figura 2, como en línea con lo anterior, los errores relativos de ambos métodos disminuyen al tiempo que se hace más pequeño el tamaño del paso temporal, siendo los errores relativos menores en el método de diferencias finitas explícito.

Se sabe que si bien al hacer más pequeño  $k$  la solución numérica converge a la analítica, esto es a costa de incrementar el tiempo CPU, es decir, el tiempo (medido en segundos) que tarda el programa en darnos la solución aproximada. Por tanto, un método numérico no solo debe dar un precio lo más próximo a su valor real, sino que también debe ser eficiente en este cometido. Esto se puede ver claramente en la Tabla 3 y en la Figura 3, donde por un lado se aprecia como al disminuir  $k$  aumenta el tiempo CPU y por otro lado, como el error relativo es cada vez menor a costa de que el tiempo CPU sea mayor. A partir de esto, se puede decir que el método diferencias finitas explícito es más preciso y eficiente que el árbol trinomial.

En cuanto a la valoración de la put americana sobre bono cupón cero mediante el árbol trinomial y *front-fixing* junto a esquema explícito, en la Tabla 2 se aprecia como al hacer cada vez más pequeño el paso temporal  $k$ , el valor de la opción put americana se va estabilizando, es decir, va convergiendo a un determinado valor. Aunque ambos métodos convergen aproximadamente al

<sup>25</sup>Para los experimentos numéricos se ha utilizado un ordenador MacBook Pro con procesador 2,5 GHz Intel Core i5, con la versión de Matlab 2018a.

mismo valor, en la Tabla 3, se observa que el método *front-fixing* es más eficiente que el árbol trinomial propuesto por HW.

$k$	Put Europea		Put Americana	
	AHW	DFE	AHW	FF
0.5000	0.7240	0.7101	0.8814	0.9012
0.1000	0.7002	0.6994	0.8767	0.8990
0.0500	0.6892	0.6782	0.8459	0.8590
0.0250	0.6772	0.6692	0.8467	0.8489
0.0100	0.6609	0.6599	0.8464	0.8379
0.0050	0.6596	0.6596	0.8387	0.8339
0.0030	0.6594	0.6594	0.8381	0.8369
0.0025	0.6592	0.6591	0.8373	0.8371
0.0020	0.6593	0.6589	0.8371	0.8371
0.0010	0.6591	0.6590	0.8369	0.8371
Analítica	0.6589			

Tabla 2: Precios para opciones put sobre bono cupón cero en función de  $k$  con  $h = 0,01$ . Recordar que se trata de una opción put europea y americana con vencimiento a 5 años y *strike* de 97 sobre bono cupón cero con vencimiento a 8 años y nominal de 100.  $a = 1\%$  y  $\sigma = 0,5\%$ . Nota: AHW se refiere al Árbol Trinomial de HW, DFE al método de Diferencias Finitas Explícito y FF a la técnica *Front-Fixing*.

$k$	Put Europea		Put Americana	
	AHW	DFE	AHW	FF
0.5000	0.0609	0.0636	0.0433	0.0951
0.1000	0.0717	0.1661	0.0935	0.2286
0.0500	0.1337	0.3625	0.1865	0.7532
0.0250	0.1748	0.6325	0.2001	1.2825
0.0100	0.9870	1.4099	1.9470	2.5183
0.0050	5.8471	2.7960	5.9920	3.2447
0.0030	9.4146	4.1252	18.2159	6.7113
0.0025	27.9572	5.4957	39.7846	8.6183
0.0020	40.9829	6.7414	65.8110	12.9246
0.0010	80.4301	13.6610	93.7910	16.1918

Tabla 3: Tiempo CPU, medido en segundos. Opción put a 5 años sobre bono cupón cero con vencimiento a 8 años:  $a = 1\%$ ,  $\sigma = 0,5\%$ ,  $K = 97$ .

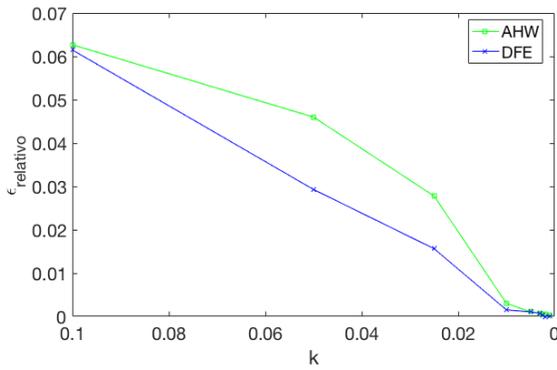


Figura 2: Errores de precios relativos para la put europea a 5 años sobre bono cupón cero con vencimiento a 8 años:  $a = 1\%$ ,  $\sigma = 0,5\%$ ,  $K = 97$ .

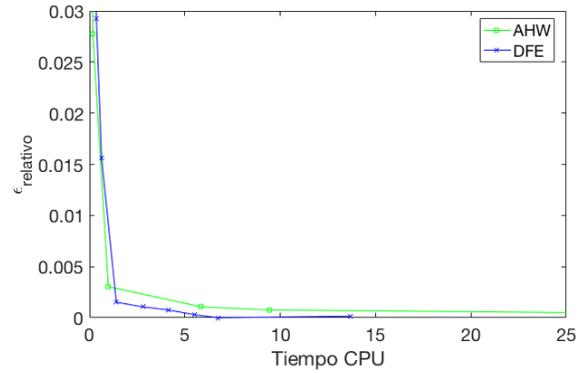


Figura 3: Errores relativos en la valoración *versus* tiempo CPU para la put europea a 5 años sobre bono cupón cero con vencimiento a 8 años:  $a = 1\%$ ,  $\sigma = 0,5\%$ ,  $K = 97$ .

Por lo que respecta a la Frontera libre, en línea con [15], en la Figura 4 podemos ver su evolución en función del tiempo hasta vencimiento.

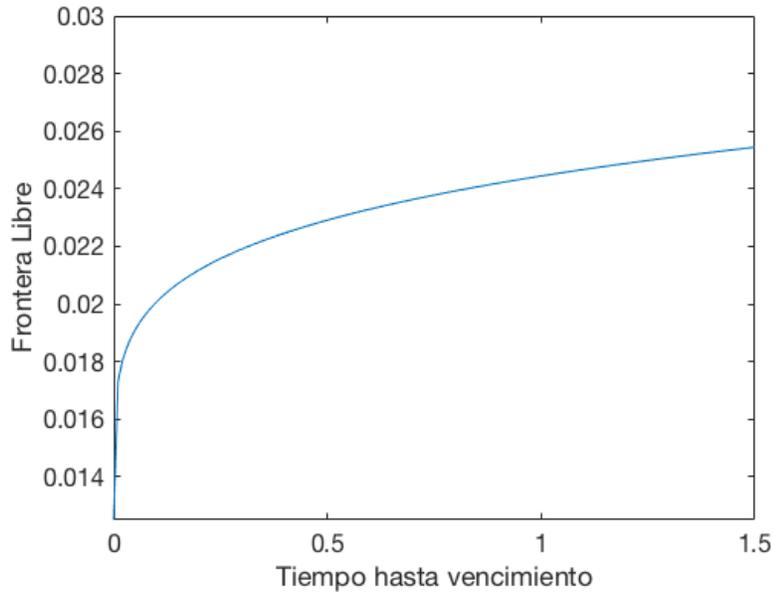


Figura 4: Frontera libre en función del tiempo hasta vencimiento cerca de la fecha de vencimiento de la opción.

▪ **Ejemplo 2**

Para asegurar que el esquema (6.28)-(6.40) propuesto en este trabajo funciona correctamente, se realiza otro experimento numérico con los datos de mercado que utiliza Sepp en [27]. Con lo cual, se valora una opción put americana a 5 años y *strike* de 70, sobre un bono cupón cero con vencimiento a 10 años y nominal de 100. Los parámetros del modelo HW son  $a = 35\%$  y  $\sigma = 35\%$ .

En la Tabla 4, se muestran los resultados de la valoración de la opción put americana. Se aprecia que los resultados de los métodos numéricos de esta investigación convergen a la misma solución que los métodos utilizados en la investigación de Sepp en [27]. Estos resultados muestran que el árbol trinomial y el método *front-fixing* junto a un esquema en diferencias explícito funcionan correctamente para la valoración de una opción put americana sobre bono cupón cero.

$k$	Sepp		Propio	
	AHW	DF	AHW	FF
0.1000	12.9613	11.9712	13.1081	12.8816
0.0500	12.0547	12.0093	12.4176	12.1029
0.0250	11.9372	11.9741	11.9921	12.0074
0.0125	11.9388	11.9569	11.9612	11.9688
0.0100	11.9439	11.9535	11.9588	11.9511
0.0050	11.9453	11.9467	11.9444	11.9477
0.0025	11.9468	11.9433	11.9429	11.9473

Tabla 4: Comparación de resultados en la valoración de una put americana a 5 años sobre bono cupón 0 con vencimiento a 10 años y nominal de 100:  $a = 35\%$ ,  $\sigma = 35\%$ ,  $K = 70$ .

## 7.2. Análisis numérico

En línea con [5], los cálculos numéricos descuidados pueden desperdiciar el mejor modelo matemático y una vez se utiliza un método numérico, es necesario garantizar su fiabilidad mediante el análisis numérico. Es por ello, que en esta subsección se estudia numéricamente la estabilidad y la convergencia de los esquemas en diferencias finitas y *front-fixing*.

### ■ Estabilidad numérica

Dado que en la literatura se utilizan varios conceptos diferentes de estabilidad, se comienza con la siguiente definición.

*Definición 1.* Se dice que un esquema numérico es  $\|\cdot\|_\infty$ -estable en el dominio  $[r_{min}, r_{max}] \times [0, S]$  si para cada partición con  $k = \Delta t$ ,  $h = \Delta r$ ,  $Nk = S$  y  $(M + 1)h = r_\infty$ ,

$$\|V^n\|_\infty \leq D, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (7.1)$$

Donde  $D$  es independiente de  $h$  y  $k$  y  $n = 0, \dots, N$  ([4]).

Para estudiar de forma numérica la estabilidad de los esquemas en diferencias explícitos propuestos en este trabajo, se considera la condición de estabilidad,  $k < C h^2$ . Entonces, se fijará  $h$  y se irá aumentando  $k$ . La idea es obtener el mayor  $C = \frac{k}{h^2}$  posible para el que la solución es estable.

Dicho esto, para el esquema (6.8) utilizado para la valoración de opciones put europeas sobre bonos cupón cero, se fija  $h = 0,01$  y se parte de  $k = 0,0001$ , donde la constante es  $C = 1$ , con estos valores la solución es estable. Si se sigue incrementando el valor de  $k$  en la Figura 5 se puede ver como para  $k = 0,1599$  la solución es estable. Seguidamente, se sigue incrementando el valor de  $k$ , llegando hasta  $k = 0,16$ , valor a partir del cual, la solución deja de ser estable (ver Figura 6, donde la solución ya no es estable). Por tanto, la constante  $C = \frac{0,160}{0,01^2} = 1600$  y la solución es condicionalmente estable hasta ese valor.

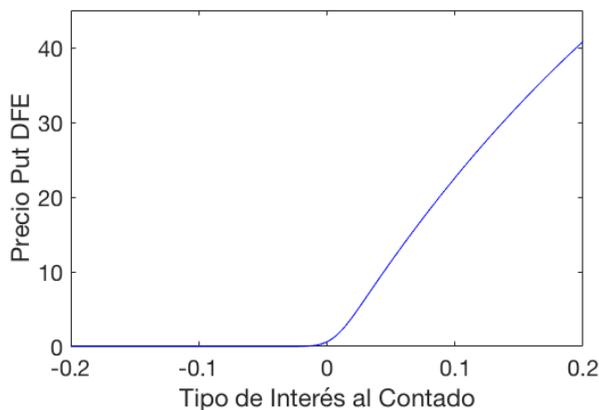


Figura 5: Estudio estabilidad numérica del esquema en diferencias finitas explícito (6.8) con  $a = 1\%$ ,  $\sigma = 0,5\%$ ,  $h = 0,01$ ,  $k = 0,1597$  y  $C = 1597$ .

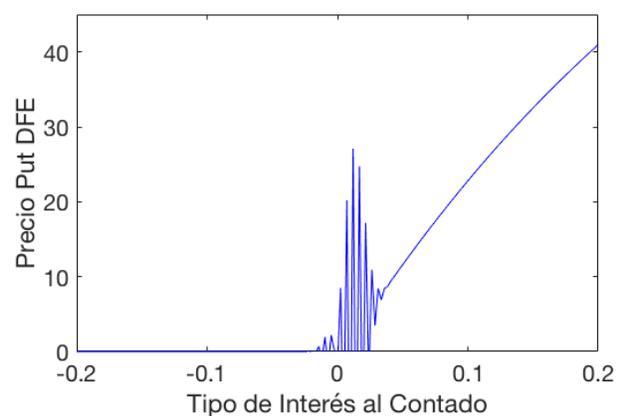


Figura 6: Estudio estabilidad numérica del esquema en diferencias finitas explícito (6.8) con  $a = 1\%$ ,  $\sigma = 0,5\%$ ,  $h = 0,01$ ,  $k = 0,16$  y  $C = 1600$ .

En el estudio de la estabilidad numérica para el método de *front-fixing* junto a un esquema explícito para valorar opciones americanas sobre bonos cupón cero, se va a realizar sobre la frontera libre (expresión 6.40). Entonces, se fija  $h = 0,01$  y se parte de  $k = 0,0001$ , donde la constante es  $C = 1$ . En la Figura 7 se aprecia que la solución es estable para  $k = 0,048$ . Si se sigue incrementando el valor de  $k$ , se llega hasta  $k = 0,05$ , valor a partir del cual, como se puede apreciar en la Figura 8, la solución deja de ser estable. Por tanto, la constante  $C = \frac{0,05}{0,01^2} = 500$  y la solución es condicionalmente estable hasta ese valor.

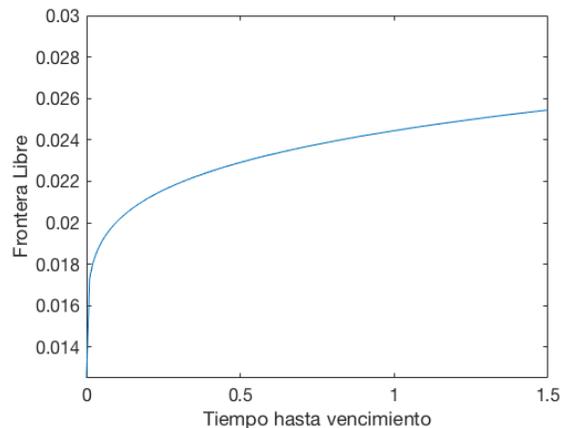


Figura 7: Estudio estabilidad numérica de la frontera libre con  $a = 1\%$ ,  $\sigma = 0,5\%$ ,  $h = 0,01$ ,  $k = 0,0495$  y  $C = 495$ .

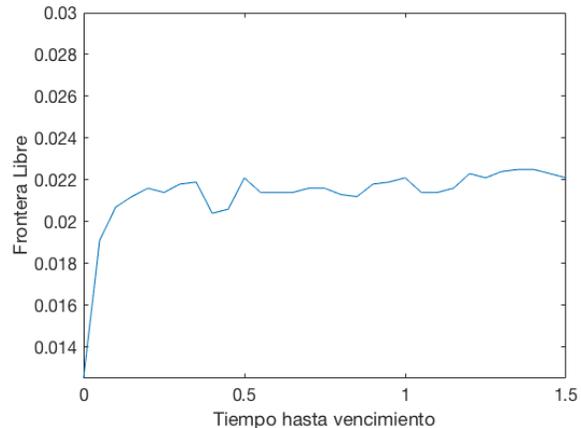


Figura 8: Estudio estabilidad numérica de la frontera libre con  $a = 1\%$ ,  $\sigma = 0,5\%$ ,  $h = 0,01$ ,  $k = 0,05$  y  $C = 500$ .

### ▪ Convergencia numérica

Para determinar el orden de convergencia de los esquemas numéricos, se elige una secuencia de mallas generadas al dividir sucesivamente el tamaño de la malla de la anterior a partir de un valor dado. Se denota  $V_{exacta}$  como la solución exacta del precio de la prima de la opción. Para la put europea,  $V_{exacta}$  es la expresión analítica del modelo HW (3.6) y para la put americana, como no existe solución analítica, se considera como  $V_{exacta}$  la solución en la malla más fina posible.

Usando la solución exacta, se calcula las siguientes proporciones de las soluciones numéricas de las mallas consecutivas [35]. Para medir la exactitud del esquema se utiliza el *root-mean-square error* (RMSE) y para ver su evolución, se utiliza el Ratio.

$$\epsilon = \|V_k^h - V_{exacta}\|_{h,\infty} \quad (7.2)$$

$$\text{Ratio}(\|\cdot\|_{h,\infty}) = \frac{\|V_k^h - V_{exacta}\|}{\|V_{k/2}^h - V_{exacta}\|} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (7.3)$$

De la expresión anterior, se fijará primero  $h$  y se irá haciendo cada vez más pequeño  $k$ , de la forma  $k/2$ . Luego, se repetirá el procedimiento pero fijando  $k$  y variando  $h$ .

El orden numérico de convergencia ( $\alpha$ ) se define entonces por

$$\alpha = \log_2 \text{Ratio} \quad (7.4)$$

En la Tabla 5 se muestran los resultados del estudio de la convergencia numérica para el esquema (6.8). Para ello se ha fijado  $h = 0,01$  y se ha ido haciendo  $k$  cada vez más pequeño, luego se ha fijado  $k = 0,00125$  y se ha ido disminuyendo el valor de  $h$ .

$k$	$\epsilon$	Ratio	$\alpha$	Tiempo-CPU	$h$	$\epsilon$	Ratio	$\alpha$	Tiempo-CPU
0.005000	0.0352	-	-	2.60	0.01000	0.0099	-	-	9.65
0.002500	0.0191	1.84	0.87	4.98	0.00500	0.0032	3.06	1.61	9.81
0.001250	0.0099	1.91	0.93	9.80	0.00250	0.0010	3.34	1.74	9.91
0.000625	0.0051	1.97	0.98	23.73	0.00125	0.0003	3.88	1.96	10.28

Tabla 5: Estudio convergencia numérica del esquema en diferencias finitas explícito (6.8) para la valoración de una opción put europea sobre bono cupón 0 con  $a = 1\%$ ,  $\sigma = 0,5\%$ .

De los resultados de la Tabla 5, se pueden sacar algunas conclusiones deseables. En primer lugar, como el error es cada vez más pequeño, la solución aproximada del esquema (6.8) converge a la exacta. En segundo lugar, el orden de convergencia del método de diferencias finitas explícito es aproximadamente 1, en la norma máxima discreta de  $k$  y aproximadamente 2, en la norma máxima discreta de  $h$ . Este hecho concuerda con las aproximaciones de las derivadas parciales que se han elegido en este trabajo, adelantadas en el tiempo y centradas en el espacio. Finalmente, se observa como al hacer el mallado cada vez más fino, si bien se reducen los errores, el tiempo CPU cada vez es mayor, restando con ello eficiencia. Se tendría que encontrar un equilibrio entre el mínimo error de aproximación deseado y máximo tiempo CPU aceptado.

En la Tabla 6 se pueden observar los resultados del estudio de la convergencia numérica para el esquema (6.28). Para ello se ha fijado  $h = 0,01$  y se ha ido haciendo  $k$  cada vez más pequeño, luego se ha fijado  $k = 0,00125$  y se ha ido disminuyendo el valor de  $h$ . Dado que no existe expresión cerrada para el valor de la opción americana en el modelo HW, se ha tomado como  $V_{exacta}$  la solución en un mallado muy fino ( $h = 0,00125$  y  $k = 0,0003125$ ).

$k$	$\epsilon$	Ratio	$\alpha$	Tiempo-CPU	$h$	$\epsilon$	Ratio	$\alpha$	Tiempo-CPU
0.005000	0.0181	-	-	3.28	0.01000	0.0063	-	-	13.51
0.002500	0.0100	1.81	0.85	8.62	0.00500	0.0019	3.26	1.71	14.96
0.001250	0.0053	1.88	0.91	13.48	0.00250	0.0005	3.78	1.92	16.71
0.000625	0.0027	1.95	0.96	28.71	0.00125	0.0001	3.92	1.98	17.55

Tabla 6: Estudio convergencia numérica para el método *front-fixing* junto al esquema explícito (6.28) para la valoración de una opción americana sobre bono cupón 0 con  $a = 1\%$ ,  $\sigma = 0,5\%$ .

De la Tabla 6, también se pueden sacar algunas conclusiones deseables. Por un lado, como el error es cada vez más pequeño, la solución aproximada del esquema (6) converge a solución que se ha considerado como exacta. Por otro lado, el orden de convergencia del método *front-fixing* junto al esquema explícito es aproximadamente 1, en la norma máxima discreta de  $k$  y aproximadamente 2, en la norma máxima discreta de  $h$ . Finalmente, al igual que en la Tabla 5 se observa como al hacer el mallado cada vez más fino, si bien se reducen los errores, el tiempo CPU cada vez es mayor, restando con ello eficiencia.

## 8. Conclusión

Para valorar derivados sobre tipos de interés es necesario resolver una PDE. Para esta ecuación solo es posible encontrar una solución exacta en casos particulares, como el modelo Hull & White, que permite obtener una solución analítica para el precio del bono cupón cero y opciones europeas sobre dicho bono. Sin embargo, para derivados más sofisticados, como puede ser una opción americana, no se conoce una solución exacta y se debe recurrir a métodos numéricos para encontrar una aproximación. Hull & White propusieron un método robusto basado en el árbol trinomial para valorar derivados de tipos de interés.

En esta investigación se propone, por un lado, para valorar una opción put europea, un método numérico en diferencias finitas como alternativa al árbol trinomial. Se comparan ambos métodos y se observa que la solución calculada con la aproximación en diferencias finitas es más precisa. También se obtienen gráficas de eficiencia para la valoración de la opción europea donde sí se conoce la solución exacta. De este modo, se verifica que el método en diferencias finitas, en este caso, es más eficiente que el árbol trinomial.

Por otro lado, como alternativa al árbol trinomial de HW para valorar una opción put americana, en esta investigación se propone el método *front-fixing* junto a un esquema explícito. En la comparación de ambos métodos, se puede observar que la aproximación numérica del método *front-fixing* necesita menos tiempo-CPU para ser precisa. Es decir, el método propuesto es más eficiente. Finalmente, el utilizar el método *front-fixing* tiene la ventaja de que además de proporcionar la solución aproximada al valor de la opción, permite obtener el valor del *optimal exercise boundary*.

Destacar que, a la realización de este trabajo de investigación no se tiene constancia del uso de la técnica *front-fixing* junto a un esquema en diferencias explícito en la literatura financiera. Tal como se ha visto en los ejemplos numéricos, se trata de un método competitivo para la valoración de opciones americanas sobre bono cupón cero.

Como ya se ha comentado, el esquema en diferencias explícito, es condicionalmente estable, pero en el análisis de estabilidad numérica que se ha realizado se observa que las condiciones de estabilidad son apenas restrictivas, pues se alcanza un valor del paso temporal  $k$  elevado donde la solución del esquema es estable. Dicho esto, en el método que se ha desarrollado en este trabajo permite realizar un análisis numérico mediante simulaciones, el cual, alcanza las mismas conclusiones, en cuanto a estabilidad y convergencia de los esquemas, que un análisis más analítico, donde se requiere unos conocimientos matemáticos más avanzados.

Como posibles líneas de investigación futuras se pueden sugerir, por un lado, la técnica *front-fixing* propuesta inicialmente por [33] para valorar opciones americanas sobre otro tipo de subyacente de renta fija, como por ejemplo, un swaption. Por otro lado, una comparación y análisis más extenso de técnicas numéricas para la valoración de las opciones americanas sobre bono cupón cero, como por ejemplo, comparar la técnica de *front-fixing*, no solo con el árbol trinomial, si no, con el método de *penalty* (utilizado en [31] y [35]) o el uso de la descomposición LU para resolver el problema de complementariedad lineal (LCP) relacionado con la valoración de opciones americanas [9].



## Referencias

- [1] BRIGO D., MERCURIO F., *Interest rate models - theory and practice with smile, inflation and credit.*, Springer Finance, 2006.
- [2] BURDEN R., FAIRES J., *Numerical analysis.* Brooks/Cole, 2011.
- [3] COMPANY, R., EGOROVA, V.N., JÓDAR, L., *Solving American Option Pricing models by the front fixing method: numerical analysis and computing.* Abstract and Applied Analysis, 2014.
- [4] COMPANY, R., JÓDAR, L., PINTOS, J.-R., "A consistent stable numerical scheme for a non-linear option pricing model in illiquid markets. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 82, no. 10, pp. 1972–1985, 2012.
- [5] COMPANY, R., JÓDAR, L., PONSODA, E., BALLESTER, C., *Numerical analysis and simulation of option pricing problems modelling illiquid markets.* Journal of Computers Mathematics with Applications, 59, 2964–2975, 2010.
- [6] CRANK, J., *Free and Moving Boundary problems.* Oxford University Press, Oxford, 1984.
- [7] COX C. J., ROSS, A. S., RUBINSTEIN M., *Option pricing: A simplified approach.* Journal of Financial Economics 7, 1979.
- [8] DUFFY, D., *Finite Difference Methods in Financial Engineering.* Wiley Finance, 2006.
- [9] FALCÓ, A., NAVARRO, LL., VÁZQUEZ, C., *A direct LU solver for pricing American bond options under Hull-White model.* Journal of Computational and Applied Mathematics, v.309 n.C, 442-455, 2017.
- [10] FENG, L., LINETSKY, V., MORALES, J. L., NOCEDAL, J., *On the solution of complementarity problems arising in American options pricing.* Optimization Methods & Software, vol. 26, no. 4-5, 813–825, 2011.
- [11] FUSAI, G., RONCORONI, A., *Implementing models in quantitative finance: methods and cases.* Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2008.
- [12] GLASSERMAN, P. *Monte-Carlo Methods in Financial Engineering. Computational Finance.* Springer Finance. 2004.
- [13] HEATH, D., JARROW, R., MORTON, A., *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation.* Econometrica: 60, 1, 77-105, 1992.
- [14] HO, T.S.Y., LEE,S.B., *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims.* Journal of Finance, 41, 5, 1011-1029, 1986.
- [15] HOLMES, A.D., YANG, H., *A Front-Fixing Finite Element Method for the valuation of American Put Option on Zero-Coupon Bonds.* International Journal of Numerical Analysis and Modeling Computing and Information, Volume 9, Number 4, 777-792, 2012.
- [16] HULL J., WHITE A., *LIBOR vs. OIS: the derivatives discounting dilemma.* Journal of Investment Management 11(3), pp. 14–27, 2012.

- [17] HULL, J., WHITE A., *Numerical procedures for implementing term structure models I: Single-Factor Models*. Journal of Derivatives, 716. 1994a.
- [18] HULL, J., WHITE, A., *Using Hull-White interest rate trees*. The Journal of Derivatives, 3, 26-36, 1996.
- [19] HULL, J.C., WHITE, A.D., *Pricing Interest-Rate-Derivative Securities*. The Review of Financial Studies, 3(4), 573-592, 1990.
- [20] LANDAU, H.G., *Heat Conduction in a Melting Solid*. Quarterly Applied Mathematics 8, 81–95, 1950.
- [21] LEIPPOLD, M *Efficient Calibration of Trinomial Trees for One-Factor Short Rate Models*. Review of Derivatives Research 7(3): 213-239. 2004.
- [22] LONGTAFF, F.A., SCHWARTZ, E.S. *Valuing american options by simulation: A simple Least-Squares approach*. Review of Financial Studies, 14, 1, 113-147. 2001.
- [23] MORENO M., *Modelización de la estructura temporal de los tipos de interés: Valoración de activos derivados y comportamiento empírico*. Revista Española de Financiación y Contabilidad, XXIX, 345-376, 2000.
- [24] NIELSEN, B. F., SKAVHAUG, O., TVEITO, A. *Penalty and front-fixing methods for the numerical solution of American option problems*. Journal of Computational Finance, vol. 5, pp. 69–97, 2002.
- [25] RENDLEMAN, R.J., BARTTER, B.J., *The pricing of options on debt securities*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 11-24. 1980.
- [26] SÉBASTIEN, G, NAKABAYASHI, M, WONG, T., *Calibration Methods of Hull-White Model*. Working Paper, 2009.
- [27] SEPP, A., *Numerical implementation of Hull-White interest rate model: Hull-white tree vs finite differences*. Technical report, Working Paper, Faculty of Mathematics and Computer Science, Institute of Mathematical Statistics, University of Tartu. 2002.
- [28] VASICEK, O., *Equilibrium and term structure*. Journal of Financial Economics 5, pp. 177–188, 1977.
- [29] VETZAL, K. R., *An improved finite difference approach to fitting the initial term structure*. The Journal of Fixed Income, 7:62–81, 1998.
- [30] VETZAL, K. R., *Stochastic volatility, movements in short term interest rates, and bond option values*. Journal of Banking Finance, 21, 69-196, 1997.
- [31] WANG, S., YANG, X.Q., TEO, K.L., *Power penalty method for a linear complementarity problem arising from American option valuation*. Journal of Optimization Theory and Applications, 129, 227–254, 2006.
- [32] WILMOTT, P., *Derivatives*. John Wiley Sons, Chichester, UK, 1998.

- [33] WU, L., KWOK, Y.-K., *A front-fixing method for the valuation of American option*. Journal of Financial Engineering, vol. 6, pp. 83–97, 1997.
- [34] WU, X., CHERN, I., LAN, Y., *Derivative Securities and Difference Methods*. Springer Finance. 2004.
- [35] ZHANG, K., WANG, S., *Pricing American bond options using a penalty method*. Automatica, 48, 472–479, 2012.
- [36] ZHOU, H. J., YIU, K.F., LI, L. K., *Evaluating American Put Options on Zero-Coupon Bonds by a Penalty Method*. Journal of Computational and Applied Mathematics 235, 3921–3931. 2011.



## A. Diferenciación numérica

Este apéndice resume los métodos de diferencias finitas más comúnmente usados cuando se programan derivadas parciales de primer y segundo orden.<sup>26</sup>

Dada la función  $f(x, y) \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , la **derivada parcial de primer orden** de esta función con respecto a la variable  $x$  (sin pérdida de generalidad) se puede aproximar por las siguientes expresiones.

- Método de Diferencias Adelantadas (*Forward Difference Method*)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x_0, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x_0} + O(\Delta x_0) \quad (\text{A.1})$$

- Método de Diferencias Atrasadas (*Backward Difference Method*)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0 - \Delta x_0, y_0)}{\Delta x_0} + O(\Delta x_0) \quad (\text{A.2})$$

- Método de Diferencias Centradas (*Central Difference Method*)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x_0, y_0) - f(x_0 - \Delta x_0, y_0)}{2\Delta x_0} + O(\Delta x_0^2) \quad (\text{A.3})$$

La **derivada parcial de segundo orden** de la función con respecto a la variable  $x$  (sin pérdida de generalidad) puede ser aproximada por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x_0, y_0) - 2f(x_0, y_0) + f(x_0 - \Delta x_0, y_0)}{\Delta x_0^2} + O(\Delta x_0^2) \quad (\text{A.4})$$

---

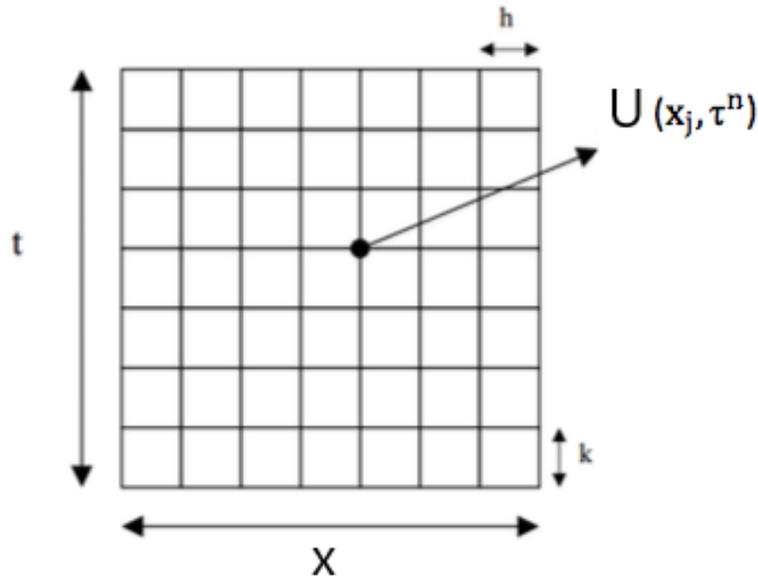
<sup>26</sup>Para más detalles sobre el tema vease [2].



## B. Esquemas de mallado en diferencias finitas y árbol trinomial

En éste apéndice se muestran de forma gráfica el esquema del mallado en diferencias finitas (se utiliza en 6.1.2 y 6.2.2) y el esquema del árbol trinomial del apartado 4.1 (posteriormente se usa en 6.1.1 y 6.2.1).

- Esquema de mallado en diferencias finitas.



- Esquema de árbol trinomial.

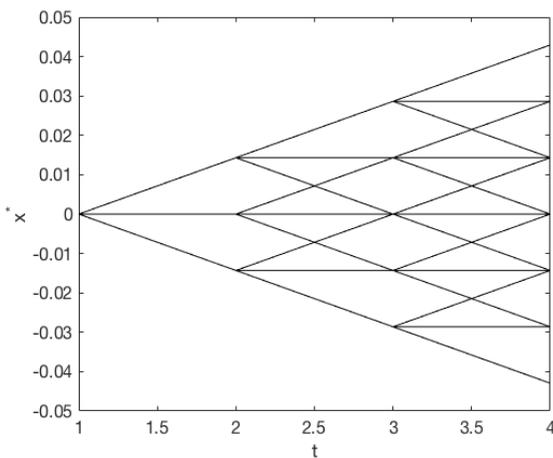


Figura 9: 1ª etapa: Árbol trinomial para la variable  $x^*$ .

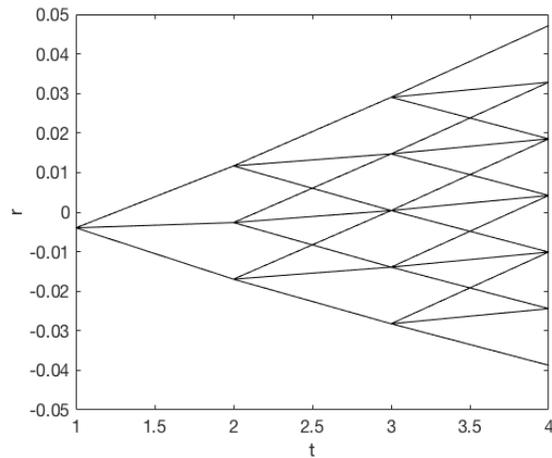


Figura 10: 2ª etapa: Árbol trinomial para el tipo de interés a corto  $r$ .