

COGNOMS: _____ NOM: _____

1. Considera el problema següent:

$$\begin{array}{ll} \text{Max.} & 3xy + yz - xz - 2x^2 - y^2 \\ \text{s.a} & 3x^2 + y^2 + 3z \leq 30 \\ & 5x - y^2 - z \geq 1 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

- (a) (*) **(0.5 punts.)** Raona si la solució $(1, 0, 0)$ és factible interior, factible de frontera o infactible, i posa exemples de solucions que siguin dels altres dos tipus.
- (b) (*) **(1.5 punts.)** Estudia si complix les hipòtesis del teorema de Weierstrass.
- (c) (*) **(1.5 punts.)** Estudia si el seu conjunt d'oportunitats és convex.
- (d) (*) **(1.5 punts.)** Estudia si complix les hipòtesis del teorema local-global.
- (e) **(0.5 punts.)** Raona si té màxim global.
- (f) **(0.5 punts.)** Raona si la resposta a les preguntes anteriors seria distinta si l'última restricció fora $z \geq 20$.
2. **(0.5 punts.)** En aquesta pregunta no has de fer res. Aquests punts els tindràs si les teues respostes a les preguntes amb (*) estan expressades i raonades amb precisió.
3. Considera els problemes següents:

$$\begin{array}{ll} A) \text{ Min.} & x + 2y + 3z \\ \text{s.a} & x - y + z \leq 5 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} B) \text{ Max.} & x^2 + 2y + 3z \\ \text{s.a} & x - y + z \geq 5 \\ & x, y, z \geq 0 \end{array}$$

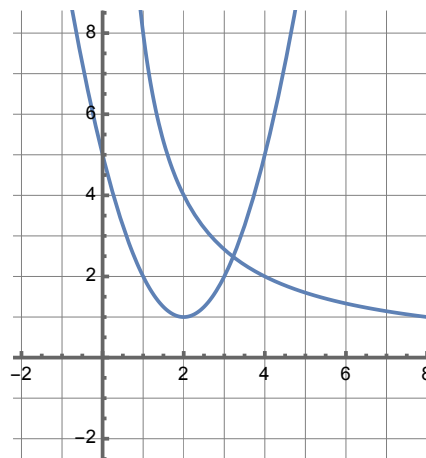
Raona per a quin o quins dels dos són certes les afirmacions següents i per a quin o quins són falses:

- (a) **(0.25 punts.)** És de programació lineal.
- (b) **(0.25 punts.)** És de programació no lineal.
- (c) **(0.5 punts.)** El conjunt d'oportunitats no està acotat.
- (d) **(0.5 punts.)** El problema és no acotat.
4. **(1.5 punts.)** Resol gràficament el problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Opt.} & x - 2y \\ \text{s.a} & y - 3x \leq 1 \\ & xy \leq 8 \\ & y + 4x - x^2 \leq 5 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

Indica clarament quina és la solució òptima del problema de maximitzar i quina la del problema de minimitzar. Representa en la figura tot el necessari per a arribar a la solució, incloent-hi les corbes de nivell òptimes.

5. **(0.5 punts.)** Posa un exemple de problema d'optimització que tinga un mínim local que no siga global.



COGNOMS: _____ NOM: _____

Resol el problema següent pel mètode de ramificació i acotació usant LINGO per resoldre els problemes intermedis. Escriu l'arbre corresponent i raona per què acaba cada branca. En cas que pugues ramificar diverses variables, tria la menor en orde alfabètic, i en cas que pugues ramificar diversos nodes tria el de millor valor de la funció objectiu. El valor òptim de la funció objectiu del primer problema ha de donar-te 3 323.2.

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & 130x + 40y + 81z \\ \text{s.a} & 7x + 3y + 3z \geq 182 \\ & 12x + 4y + 9z \geq 352 \\ & x, y, z \geq 0 \text{ enters} \end{array}$$

COGNOMS: _____ NOM: _____

El banc SANTANDREU disposa de 1 milió d'euros per a crear un fons d'inversió amb participació en accions d'empreses de tres països: Ruanda, Somàlia i Tanzània. Els governs d'estos països oferixen unes ajudes als bancs estrangers que invertisquen en empreses del seu país, i així, el banc vol distribuir la inversió de manera que el risc siga el menor possible, però de manera que es complisquen aquestes condicions:

1. La rendibilitat anual esperada de la inversió ha de ser almenys de 320 000€.
2. El capital disponible per a la inversió és de 1 milió d'euros.
3. La inversió ha de proporcionar almenys 15 000€ en concepte d'ajudes governamentals.

El problema següent determina les quantitats que convé invertir en cada país, on les unitats monetàries són milers d'euros:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Mín.} & 0.05R + 0.01S + 0.08T \\
 \text{s.a} & 0.3R + 0.25S + 0.35T \geq 320 \\
 & R + S + T \leq 1000 \\
 & 0.01R + 0.02S + 0.02T \geq 15 \\
 & R, S, T \geq 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Risc} \\
 \text{Rendibilitat} \\
 \text{Inversió} \\
 \text{Ajudes}
 \end{array}$$

Variable	Value	Reduced Cost
R	0.000000	0.005000
S	300.0000	0.000000
T	700.0000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
RISC	59.00000	-1.000000
RENDIBILITAT	0.000000	-0.700000
INVERSIO	0.000000	0.165000
AJUDES	5.000000	0.000000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
R	0.050000	INFINITY	0.00500000
S	0.010000	0.010000	INFINITY
T	0.080000	0.010000	0.06600000

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
RENDIBILITAT	320.0000	30.00000	70.00000
INVERSIO	1000.000	280.0000	85.71429
AJUDES	15.00000	5.000000	INFINITY

Respon a les preguntes següents. Excepte en la 1 i la 2, indica clarament:

- A) Dada o dades que uses en la resposta i la seua interpretació general (sense tindre en compte la pregunta o el context del problema).
- B) Interpretació de la dada o dades en el context del problema (sense tecnicismes i sense tindre en compte la pregunta).
- C) (Si és procedent) resposta raonada a la pregunta.

En les preguntes en què procedix, marca amb una X les caselles que corresponen a la teua resposta.

Recorda que les unitats monetàries en el problema són milers d'euros.

1. **(0.1 punts.)** Indica breument què és (quina interpretació té) el membre esquerre i el membre dret de cada restricció.

Rendibilitat	_____	$\geq$	_____
Inversió	_____	$\leq$	_____
Ajudes	_____	$\geq$	_____
2. **(0.1 punts.)** Digues amb paraules quina és la solució òptima del problema (i no digues res més que la solució òptima del problema).
3. **(0.3 punts.)** Interpreta l'interval de sensibilitat de la restricció **INVERSIÓ**.
4. **(0.2 punts.)** Raona si l'afirmació següent és vertadera o falsa: *Com el cost reduït de la variable T és zero, el banc SANTANDREU podria augmentar la seua inversió a Tanzània sense que varie el risc de la inversió.* ☐ Vertadera ☐ Falsa
5. **(0.2 punts.)** Determina (sense cap càlcul que no siga immediat) l'import (en euros) de les ajudes governamentals que rebrà el banc SANTANDREU per les seues inversions.
6. **(0.3 punts.)** Un client del banc SANTANDREU ha contractat un depòsit a termini fix per un import de 200 000 € i el banc es proposa afegir este capital al fons que està dissenyant. Convindrà invertir tot este nou capital en el fons o només una part? Augmentaria amb això la rendibilitat obtinguda?
☐ Tot ☐ Part ☐ Sí augmentaria. ☐ No augmentaria.
7. **(0.4 punts.)** El banc SANTANDREU està planejant una inversió de 10 000 € a Ruanda que podria canalitzar de dues formes distintes: o bé exigint que s'invertisquen almenys 10 000 € a Ruanda dins del fons, o bé retirant 10 000 € del capital disponible per a realitzar la inversió al marge del fons. Quina de les dues opcions donaria lloc a un menor risc per al fons?
☐ Primera opció ☐ Segona opció
8. **(0.4 punts.)** Una crisi política a Somàlia fa que les previsions del risc de les inversions en este país es revisen a l'alça i passen a ser de 0.03 per unitat de capital invertit. Deuria el banc SANTANDREU reconsiderar el seu pla d'inversió en vista d'esta informació? ☐ Sí ☐ No

COGNOMS: _____ NOM: _____

El director executiu d'una empresa ha de triar dues localitats distintes per a instal·lar en elles dues noves fàbriques l'activitat de les quals seria coordinada des del centre de distribució que l'empresa té en Écija. Per a això, a més seria necessari contractar en Écija almenys 5 nous directius i almenys 10 nous operaris. Està considerant quatre possibles localitats, i la taula següent arreplega el cost que suposaria obrir en cada una d'elles una de les instal·lacions, així com una valoració de l'eficiència de l'elecció:

	Avilés	Badolatos	Ciudad Real	Daimiel
Cost	15 000	17 500	14 500	16 000
Eficiència	80	95	60	40

No obstant això, la proximitat geogràfica de Ciudad Real i Daimiel fa que, si les dues foren elegides, l'eficiència de l'elecció augmentaria en 30 unitats.

A més, cada directiu rebrà 6 000€ i aportarà una eficiència de 6 unitats, mentre que cada operari rebrà 3 000€ i aportarà una eficiència de 2 unitats.

D'altra banda, cal tindre en compte que no convindria situar cap fàbrica a Avilés si no se situa l'altra a Daimiel, perquè la primera quedaria massa allunyada de les altres instal·lacions que ja té l'empresa, així com que en cas d'instal·lar una fàbrica a Daimiel, seria per a fer-se càrrec d'una concessió del govern de Castilla-la Mancha que requeriria contractar almenys 10 directius i 15 operaris en el centre d'Écija.

Determina quines dues localitats convé triar per a les fàbriques i quants directius i operaris cal contractar en Écija per a minimitzar els gastos garantint una eficiència d'almenys 300 unitats.

Modelitza el problema indicant clarament el significat de cada variable, de la funció objectiu i de cada restricció, resol-ho amb LINGO, indica la solució òptima (amb paraules, és a dir, de manera que s'entenga el que convé fer sense saber programació matemàtica) i comprova que la solució que proposes complix tots els requisits del problema.

COGNOMS: _____ NOM: _____

Un empresari projecta reconvertir dues de les seues fàbriques per a l'elaboració d'un nou producte. Tenint en compte les condicions de les seues instal·lacions, estima que la producció mensual de cadascuna vindrà donada per les funcions de producció

$$Q_1(K, L) = 35KL, \quad Q_2(K, L) = 15KL,$$

on K és el capital invertit en màquines i L el nombre de treballadors destinats a la fàbrica corresponent. Cada unitat produïda es vendrà a un preu de 0.80€.

Cada treballador contractat cobrarà 2000€ mensuals a la fàbrica 1 i 1500€ mensuals a la fàbrica 2. A més, la despesa mensual per al manteniment de les instal·lacions s'estima en un 10% del capital invertit en cada fàbrica. En cada fàbrica es necessitarà almenys un treballador per cada 100€ invertits en maquinària.

Per a la posada en marxa de les fàbriques l'empresari compta amb un capital de 8000€, en el qual, a més del capital invertit en maquinària, cal comptar que cada treballador ha de rebre un curs de formació el cost del qual s'estima en 225€ a la fàbrica 1 i 200€ a la fàbrica 2. Les limitacions d'espai no farien rendible una inversió inicial superior als 5000€ a la fàbrica 1 o als 4000€ en la 2. A més, l'empresari no vol invertir en la maquinària de cap fàbrica més del doble del capital invertit en l'altra.

D'altra banda, l'empresari té la possibilitat de fer reformes a les seues fàbriques, amb un cost de 1000€ en la fàbrica 1 i de 900€ en la 2. Una fàbrica reformada tindria el doble de capacitat d'albergar treballadors i maquinària, per la qual cosa la inversió inicial corresponent podria duplicar-se, però de moment només es planteja reformar com a màxim una de les dues fàbriques.

Determina, per a cada fàbrica, quin capital convé invertir en maquinària i quants treballadors convé contractar, així com si convé realitzar la reforma d'ampliació en alguna d'elles per a maximitzar els beneficis mensuals (en els quals no s'han de comptar les despeses de posada en marxa).

Modeliza el problema indicando claramente el significado de cada variable, de la función objetivo y de cada restricción, resuélvelo con LINGO, indica la solución óptima (con palabras, es decir, de modo que se entienda lo que conviene hacer sin saber programación matemática) y comprueba que la solución que propones cumple todos los requisitos del problema.

COGNOMS: _____ NOM: _____

1. Una empresa està plantejant usar quatre possibles matèries primeres alternatives A, B, C i D amb les quals millorar la qualitat del seu producte. L'ús de les dues primeres augmentaria el cost de la producció, mentres que l'ús de les dues últimes el reduiria. El problema següent determina els kg diaris que convé emprar de cada una d'elles perquè el cost de producció es reduísca el més possible subjecte al fet que es complisquen unes certes condicions:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min.} & 20x + y - 4z - 6w & \text{Increment de cost} \\
 \text{s.a} & x + 3y + 2z + 2w \geq 5 & \text{Increment de la qualitat del producte} \\
 & 4y + 2z + 3w \leq 7 & \text{Temps de processament de les noves matèries primeres} \\
 & 4y + 8z + 2w \leq 11 & \text{Mà d'obra disponible per a processar-les} \\
 & x, y, z, w \geq 0 &
 \end{array}$$

- (a) **(2 punts.)** Calcula, sense iterar, la taula del símplex corresponent a la solució factible bàsica (0, 1, 0, 1).
- (b) **(0.2 punts.)** Raona si emprar 1 kg de les matèries primeres B i D permet obtindre les 5 unitats de qualitat requerida amb el millor cost possible o si, per contra, convé usar altres quantitats.
- (c) **(2 punts.)** Troba la solució òptima del problema mitjançant el mètode símplex. Explica amb paraules l'opció més convenient per a l'empresa.
- (d) **(0.6 punts.)** Raona si la solució és de vèrtex, d'aresta finita o d'aresta infinita.
- (e) **(0.6 punts.)** Un informe indica que, en realitat, cada kg emprat de la matèria primera C reduïx el cost en 2 u.m. i no en 4, com s'havia cregut. Determina per postoptimització la nova solució òptima en aquestes condicions. La solució òptima continua sent del mateix tipus?

Respon els apartats següents amb el problema corregit segons l'apartat anterior.

- (f) **(1 punt.)** Calcula les variables duals i interpreta la de la primera restricció.
- (g) **(0.6 punts.)** Calcula el cost reduït de la variable x . Per raons publicitàries, a l'empresa li interessa anunciar que el seu producte conté la matèria primera A (encara que siga en poca quantitat). Com afectaria el cost emprar almenys 100 grams?
- (h) **(1.5 punts.)** Calcula l'interval de sensibilitat de la qualitat mínima requerida.
- (i) **(1 punt.)** Estudia si (5, 0, 0, 0) és una solució factible bàsica del problema. És òptima?

2. **(0.5 punts.)** Completa la taula següent i resol el problema, tant amb objectiu de maximitzar com de minimitzar. Indica clarament la solució òptima en cada cas i si és de vèrtex, d'aresta finita o d'aresta infinita:

	4	2	0	0
	x	y	s	t
x	-2	0		1
t	-1	-1		3

COGNOMS: _____ NOM: _____

Modelitza el problema següent usant @SUM i @FOR sempre que siga possible:

L'empresa BUZZARD INC ha absorbit l'empresa SPARROW LTD. i està planejant tancar les seues fàbriques i reubicar a part dels seus treballadors en altres empreses de BUZZARD INC. La plantilla de SPARROW LTD. consta de 800 directius, 3 000 operaris i 5 000 auxiliars, i BUZZARD INC es planteja, o bé destinar-los a la secció de producció d'una de les seues fàbriques, o bé destinar-los a la secció de transport, o bé acomiadar-los. Estima que necessita entre 500 i 600 treballadors en producció i entre 3 000 i 5 000 en transport. El nombre d'acomiadaments pot ser qualsevol, però, per concretar, podem considerar que ha d'estar entre 0 i 10 000.

La taula següent indica el cost que BUZZARD INC estima que li suposarà destinar a cada treballador de SPARROW LTD. a cada una de les tres possibles destinacions (per cursos d'adaptació, indemnitzacions, etc.):

	Producció	Transport	Acomiadament
Directiu	500	300	900
Operari	50	100	500
Auxiliar	400	150	400

Però, per a evitar que els sindicats acusen a BUZZARD INC de tindre un tracte de favor amb els directius, esta vol que alguns d'ells siguin acomiadats, però de manera que la despesa en acomiadament de directius estiga entre el 1% i el 2% de la despesa total, així com que els directius destinats a la secció de producció siguin almenys el 15% dels destinats a la secció de transport.

Finalment, els sindicats han aconseguit que els directius de BUZZARD INC consideren la possibilitat de mantindre oberta una de les fàbriques de SPARROW LTD., la qual cosa tindria un cost de 100 000 u.m., però permetria augmentar en un 10% les necessitats màximes de treballadors en cada destinació.

Determina quants treballadors de cada categoria han de destinar-se a producció, transport o ésser acomiadats, així com si convé acceptar la proposta sindical de mantindre una fàbrica, perquè el cost total de la reconversió siga el mínim possible.

Escriu la solució òptima en termes que puga entendre algú no familiaritzat amb la programació matemàtica.

COGNOMS: _____ NOM: _____

Una empresa química té previst tancar en breu una de les seues fàbriques, per la qual cosa vol organitzar l'última remesa de producte que servirà de manera que la producció requereisca el menor temps possible, garantint un benefici d'almenys 50 000 € sense que el cost de la producció excedisca els 70 000 €. Els productes que podria sintetitzar són Acetat d'etil, Hipoclorit de sodi, Potassa càustica i Sulfuric. El problema següent determina quants kg convé elaborar de cadascun en les condicions indicades:

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & 15A + 2H + 5P + 3S \\ \text{s.a} & 5A + 6H + 2P + 4S \geq 50\,000 \quad \text{Benefici} \\ & 10A + 3H + 6P + 12S \leq 70\,000 \quad \text{Cost} \\ & A, H, P, S \geq 0 \end{array}$$

Variable	Value	Reduced Cost
A	0.000000	8.750000
H	5333.333	0.000000
P	0.000000	3.500000
S	4500.000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
TIEMPS	77500.00	-1.000000
BENEFICI	0.000000	-2.250000
COST	0.000000	0.500000

Objective Coefficient Ranges:

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
A	15.00000	INFINITY	8.750000
H	12.00000	26.25000	7.500000
P	5.000000	INFINITY	3.500000
S	3.000000	5.000000	INFINITY

Righthand Side Ranges:

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
BENEFICI	50000.00	90000.00	26666.67
COST	70000.00	80000.00	45000.00

Respon a les preguntes següents. Excepte en la 1 i la 2, indica clarament:

- A)** Dada o dades que uses en la resposta i la seua interpretació general (sense tindre en compte la pregunta o el context del problema).
- B)** Interpretació de la dada o dades en el context del problema (sense tecnicismes i sense tindre en compte la pregunta).
- C)** (Si és procedent) resposta raonada a la pregunta.

1. **(0.1 punts.)** Indica breument què és (quina interpretació té) el membre esquerre i el membre dret de cada restricció.

Benefici	_____	$\geq$	_____
Cost	_____	$\leq$	_____

2. **(0.1 punts.)** Expressa amb paraules la solució òptima del problema (i no digues res més que la solució òptima).
3. **(0.2 punts.)** Interpreta l'interval de sensibilitat del terme independent de la primera restricció.
4. **(0.4 punts.)** El gerent de la fàbrica considera que caldria diversificar un poc més la producció, elaborant, almenys, 10 paquets de 1 kg d'acetat d'etil o bé 10 paquets de 10 kg de potassa càustica. Quina opció seria preferible? ☐ Acetat d'etil ☐ Potassa càustica.
5. **(0.4 punts.)** Podria l'empresa invertir únicament 60 000€ en la producció sense que el temps requerit sobrepassés els 80 000 minuts? ☐ Sí ☐ No. En quant podria reduir-se el capital aportat si l'empresa estiguera disposada a acabar la producció en un màxim de 80 000 minuts? _____ €
6. **(0.2 punts.)** Si l'empresa es conformara amb un benefici de 40 000€, en quant es reduiria el cost de la producció? _____ €
7. **(0.4 punts.)** Una màquina s'ha avariat i, donat el tancament imminent, l'empresa no pensa reparar-la. Això fa que la producció de cada kg d'Hipoclorit de sodi requerisca ara 22 minuts (més que l'elaboració de qualsevol dels altres productes). Llavors el gerent considera que convindria substituir-lo per un altre producte. Convindria substituir-lo per potassa càustica? ☐ Sí ☐ No. Convindria produir més sulfamat? ☐ Sí ☐ No.
8. **(0.2 punts.)** Suposem que la solució òptima complira

Row	Slack or Surplus	Dual Price
BENEFICI	60000.00	0.000000

Quin benefici proporcionaria la producció? _____ €