

ELECTRÓNICA DE DISPOSITIVOS

I. Introducción.

I.1. Definiciones

Electrónica Física: Ciencia que se basa en el estudio y control de las propiedades electrónicas de determinados sólidos, con el fin de formar dispositivos complejos que transportan o almacenan electrones.

* Esta definición está dada desde un punto de vista físico, según el cual el último objetivo del físico que trabaja en electrónica física es el comportamiento último de los materiales en la naturaleza y en ese sentido es una definición que se refiere a los aspectos microscópicos de la electrónica.

* Ha de diferenciarse esta rama de la electrónica de la electrónica aplicada o la electrónica de circuitos, encaminada esta última a realizar labores de transmisión, manipulación o registro de la información física de los resultados que se logran en la electrónica física.

Microelectrónica: Es la capacidad de la física y de la técnica para producir interconectados, con las propiedades deseadas, componentes activos (uniones p-n, metal-semiconductor, transistores bipolares y unipolares), pasivos (resistencias y condensadores), aislantes y conductores sobre un mismo sustrato de Si o de otros semiconductores, mediante procesos en los que se controla el lugar y el espesor del material e impurezas que se incorporan sobre el sustrato.

* Cada realización de ésta constituye un circuito integrado (CI) el cual puede desarrollar funciones de amplificación, memoria, registro, etc.

Tecnología microelectrónica: Se entiende por tecnología microelectrónica, el conjunto de reglas, normas, requisitos, materiales y procesos de diseño y de realización que, aplicados en una secuencia determinada, llevan a la consecución de un producto final (dispositivos de CI).

* Desde ese punto de vista cabría situar la tecnología microelectrónica como el punto medio, entre el estudio de las propiedades microscópicas de los semiconductores y el circuito integrado una vez fabricado y dispuesto para su utilización. Más bien como una herramienta que permite obtener dispositivos semiconductores de aplicación o en la vida real.

I.2. Reseña histórica de la electrónica física.

GENESIS: Doble discusión.

Hay quien dice que la electrónica física se originó con:

(J.J. Thomson, 1894-97): Descubrimiento del electrón y el posterior establecimiento de la teoría de conducción en los sólidos.

Y quien prefiere decir que tuvo su origen en:

(T.A. Edison, 1883): Observación del efecto termoiónico y posteriores estudios de Richardson, Dushman, Sommerfield, Langmuir y Fleming los cuales determinaron el comportamiento del diodo de vacío (que es el primer dispositivo electrónico construido).

Dejando a un lado la discusión de la génesis, vamos a trazar ahora algunos rasgos en forma secuencial de su evolución histórica.

SEMICONDUCTORES Y DISPOSITIVOS ELECTRÓNICOS ANTES DEL TRANSISTOR

La historia de los semiconductores se remonta a los tiempos de Faraday (1833) y Becquerel (1839). Faraday descubre que el sulfato de plata tiene un coeficiente de temperatura negativo y Becquerel estudia las propiedades de algunos electrolitos.

Ambrose Fleming (1905), en la búsqueda de un detector de señales eléctricas, desarrolla el diodo de vacío, el primer dispositivo electrónico (válvula) conocido. Casi simultáneamente, Gertel y Elstel (1905) toman como base el efecto fotoeléctrico y producen la primera célula fotoeléctrica, la cual no será utilizada con fines comerciales hasta 1920, cuando da comienzo la investigación del cine sonoro y de la televisión. Poco después, Lee de Foret (1907) inventa el triodo. Este dispositivo, aparte de detectar señales eléctricas, es ya capaz de amplificar señales (surge añadiendo un tercer electrodo a la válvula). Hacia 1915 se comienza a usar el cristal de galena como detector de señales. A principios de los años 20 se empiezan a utilizar los rectificadores de selenio y de óxido de cobre y las válvulas de radio sustituyen el detector de cristal. Entre 1920 y 1940, por un lado se desarrolla el tetrodo y el pentodo, y de otro, los físicos elaboran teorías que explican algunos de los fenómenos descubiertos hasta entonces. En 1923 Schottky publica la teoría de los rectificadores secos; es la primera contribución al estudio teórico de los semiconductores. En esta teoría se aprecia que el empleo de la mecánica cuántica se revela indispensable.

Tal vez sea el televisor el invento más notable de nuestro tiempo, a juzgar por el impacto social que ha causado. En 1928 Zworykin desarrolla un dispositivo capaz de transformar una imagen óptica en una corriente eléctrica: el iconoscopio. Poco después este dispositivo o tubo sufre modificaciones y así se obtiene el tubo disector de imagen, en que la imagen se consigue a base de presentarla línea a línea en lugar de punto a punto. Una vez salvados todos los problemas técnicos en la experimentación, la televisión comercial irrumpe en los hogares norteamericanos en 1945.

Hacia 1940, durante la segunda guerra mundial, se busca un detector de cristal que satisfaga las necesidades del radar (instrumento que funciona en las ondas centimétricas). La industria electrónica se desarrolla vertiginosamente y surgen técnicas de miniaturización y empleo de materiales robustos y ligeros en los dispositivos electrónicos. Así el diodo semiconductor recibe un nuevo impulso, mientras que el diodo de vacío queda relegado. Pongamos en claro aquí las ventajas del diodo de cristal de silicio o diodo semiconductor (diodo de unión pn) frente al diodo de vacío:

dimensiones reducidas, capacidades en paralelo muy pequeñas, posibilidades de empleo para captar señales de muy alta frecuencia por el radar y su estudio teórico constituye una base indispensable en el estudio del transistor.

* Efecto termoiónico: Emisión de electrones por un cuerpo, generalmente metálico, a elevada temperatura.

* Electrolito: Sustancia que en estado fundido o disuelto conduce la corriente eléctrica debido a la existencia de iones; es susceptible de descomponerse por electrolisis.

* Diodo de vacío: válvula electrónica que consta de dos electrodos. El cátodo es un filamento que, al ser calentado mediante una pila, emite electrones que van a parar al otro electrodo o ánodo.

* Triodo: Válvula o tubo de vacío termoiónico de 3 elementos: ánodo, cátodo y una rejilla (electrodo de control) cuya potencia regula la corriente de electrones que va del cátodo al ánodo.

RESUMEN HISTÓRICO DESDE LA INVENCION DEL TRANSISTOR

A finales de la década de los 40 estaban claras las limitaciones de los dispositivos termoiónicos, que habían imperado en la electrónica aplicada desde que Fleming construyera el primer diodo de vacío de la historia. La única salida posible estaba en el desarrollo de nuevos dispositivos que utilizarasen materiales sólidos, a causa de que en estos se podía modular la conductividad.

El transistor bipolar

La invención y desarrollo del transistor bipolar de difusión se llevó a cabo en los Bell Telephone Laboratories, donde un grupo de ingenieros electrónicos y metalúrgicos (W. Shockley, J. Bardeen, W. Brattain) se propusieron la realización de un amplificador de estado sólido. La denominación transistor bipolar es debida a la existencia de dos tipos de portadores –electrones y huecos- y al hecho del cambio de impedancias entre el circuito de emisor (baja) y el de colector (alta), de donde se genera la palabra *transistor* (transfer-resistor). W. Shockley, J. Bardeen, W. Brattain reciben el premio Nobel de Física en 1956.

Transistor unipolar JFET

En los años sucesivos se perfecciona el transistor bipolar y se desarrollan nuevos dispositivos de estado sólido. Entre estos pueden citarse el transistor de base gradualmente impurificada, los transistores de potencia, el transistor unipolar de efecto de campo (JFET=Junction Field-Effect Transistor) construido por Shockley en 1952, el diodo de cuatro capas (también debido a Shockley), los elementos de control de potencia (tiristores y triacs) y el efecto del efecto túnel en uniones por Esaki (1958).

Transistor unipolar MOS

Ya J.E. Lilienfeld (1926) había imaginado un dispositivo similar al actual transistor metal-óxido-semiconductor de efecto de campo (MOSFET o simplemente transistor MOS). Pero por limitaciones tecnológicas obvias de la época no pudo construirse. En 1960 Atalla y Kalng proponen que sobre un semiconductor base o sustrato de silicio se produzca una fina capa de dióxido de silicio (SiO₂). Y en 1963 Holfstein y Heiman

construyen el primer dispositivo MOS que funciona en deplexión o vaciamiento y en acumulación.

Microelectrónica: los circuitos integrados

Hacia el año 1958 era evidente la necesidad de obtener dispositivos, a ser posible circuitos, de dimensiones más pequeñas que las alcanzadas hasta esa fecha. Esta situación conduce a que se produzca un circuito de componentes discretos hecho únicamente de silicio (prototipo experimental de un oscilador de deriva de fase construido por Kilby en 1959) El desarrollo de los nuevos circuitos comienza con los circuitos digitales discretos bipolares (1962). Pronto se pasa a los circuitos monolíticos bipolares (que ya eran circuitos integrados en un substrato común de Si), con la familia lógica TTL (Transistor-Transistor Logic), que no puede fabricarse con dispositivos discretos porque emplea un transistor multiemisor que no se consigue como dispositivo discreto. El paso siguiente fue aplicar la incipiente tecnología microelectrónica de los CI monolíticos bipolares a la de los dispositivos MOS. Así se produce un singular avance en los CI digitales, de forma particular en las memorias lógicas, que lleva en los años 70 a la caída de los precios de las calculadoras, caída que se continua produciendo año tras año.

Hasta el año 1972 el predominio de los CI digitales fue de los MOS sobre los bipolares, salvo cuando se requería gran velocidad, que era satisfecha con CI bipolares T²L. A partir de ese año el dominio deja de ser absoluto, al irrumpir en el campo de la microelectrónica la familia bipolar IIL (Integrated-Injection-Logic); su configuración básica permite una mayor densidad de integración y rapidez de cálculo que con sus competidoras de tecnología MOS.

Desde 1962, en que se produjeron los primeros CI lógicos digitales de pequeña escala de integración (SSI =Small Scale Integration), hasta la actualidad, la microelectrónica ha experimentado un extraordinario desarrollo, como lo prueban los datos que se dan a continuación:

DESARROLLO EXPERIMENTADO POR LA MICROELECTRÓNICA

Nivel de integración	Fechas de introducción	Nºpuertas/chip	Aplicaciones (ejemplo)
SSI (Small Scale Integration)	Comienzos de los 60	3-30	Puertas lógicas básicas
MSI (Medium Scale Integration)	A mediados y finales de los 60	30-300	Memorias 256 bits Sumadores de alta velocidad
LSI (Large Scale Integration)	Comienzos de los 70	300-3000	RAM 1-16K Calculadoras
VLSI (Very Large Scale Integration)	Finales de los 70	>30.000	RAM 64k

A la vista de los datos anteriores, se puede afirmar, sin peligro de equivocarse, que es la historia del incremento de componentes por chip y de la reducción de las dimensiones mínimas de los componentes del CI.

Sin embargo la evolución de los circuitos integrados lineales o analógicos ha sido más lenta que la de los digitales encontrándose en la actualidad en un proceso menos avanzado. De todas formas, el CI amplificador operacional ha llegado a tal grado de

TEMA 1 : Modelos en Semiconductores y en Dispositivos Semiconductores.

versatilidad y precisión en configuraciones realimentadas, que se considera el componente básico de los CI más avanzado, sustituyendo al transistor salvo en los casos de aplicaciones de alta potencia y alta frecuencia.

- * Sistemas analógicos: La respuesta del sistema es lineal con la entrada del mismo. Respuesta continua a una entrada continua.(Por ejemplo: Rectificador)
- * Sistemas digitales: Ante una entrada continua su salida es un uno o un cero lógico.(Por ejemplo: Puertas lógicas, memorias).

TEMA 1: MODELOS EN SEMICONDUCTORES Y EN FÍSICA DE SEMICONDUCTORES

Definición de modelo:

- Modelo de enlace covalente.
- Modelo de bandas de energía.
- Modelo analítico o matemático.
- Modelo circuital o analógico.

1.1. MODELO DE ENLACE COVALENTE

1.1.1. Materiales Semiconductores.

1.1.2. Estructura cristalina

**Elementos semiconductores
Índices de Miller.**

1.2. MODELO DE BANDAS DE ENERGÍA

1.2.1. Modelo cualitativo de bandas de energía (Schrödinger).

1.2.2. Modelo cuantitativo de bandas de energía (Modelo de Kronig-Peney).

1.3. MODELOS ANALÍTICOS.

1.4. MODELOS ANALÓGICOS O CIRCUITOS EQUIVALENTES.

TEMA 1: MODELOS EN SEMICONDUCTORES Y EN FÍSICA DE SEMICONDUCTORES.

Definición de modelo: El término modelo se refiere a una representación matemática que permite comprender la naturaleza de determinados comportamientos físicos que se dan en el material, pero que además permite avanzar en el conocimiento mediante la realización de descubrimientos importantes.

Son cuatro los modelos que permiten analizar y comprender el comportamiento de los semiconductores y de los dispositivos semiconductores.

- Modelo de enlace covalente: Es el más simple. Permite hacerse una idea intuitiva de los procesos de conducción en semiconductores. Ofrece una representación cualitativa del comportamiento interno de los sólidos cristalinos.
- Modelo de bandas de energía: Es el más utilizado. Reúne las características de ser un modelo gráfico y matemático. Permite describir los fenómenos de transporte en semiconductores y dispositivos semiconductores de una forma cuantitativa.
- Modelo analítico o matemático: Describe mediante un conjunto de ecuaciones matemáticas los procesos físicos que tienen lugar en el semiconductor o dispositivo.
- Modelo circuital o analógico: Describe el comportamiento del dispositivo a nivel macroscópico en función de las magnitudes de tensión y de corriente. Adecuado para el análisis de circuitos en los que intervengan dispositivos semiconductores.

1.1. Modelo de enlace covalente.

1.1.1. Materiales Semiconductores.

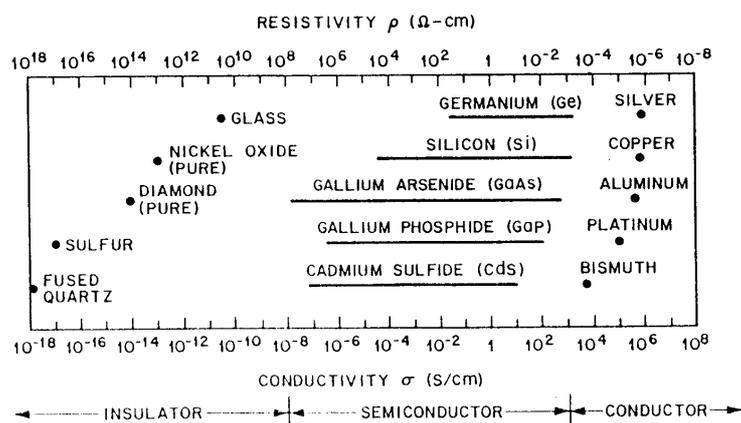


Fig. 1: Conductividades para aislantes, semiconductores y conductores.

Los materiales de estado sólido pueden agruparse en tres clases: aislantes, semiconductores y conductores. La anterior figura muestra la conductividad eléctrica σ (y la resistividad $\rho \equiv 1/\sigma$) asociada a varios sólidos importantes.

Aislantes: Conductividad entre 10^{-18} y 10^{-8} S/cm (cuarzo y vidrio)

Conductores: Conductividad entre 10^4 y 10^8 S/cm (aluminio, plata)

Semiconductores: Zona intermedia: Conductividad en función de: temperatura, iluminación, campo magnético y cantidad de impurezas (Ge, Si, GaAs)

1.1.2. Estructura cristalina

Los materiales semiconductores se encuentran en la naturaleza formando una llamada estructura cristalina. Según esta estructura, los átomos del material semiconductor se encuentran distribuidos espacialmente formando una estructura regular (celosía, enrejado o "lattice").

Sin embargo, los átomos no ocupan en el espacio posiciones fijas, sino que debido a las vibraciones térmicas están situados o localizados alrededor de esta posición.

Para un material semiconductor dado, hay una estructura básica llamada celda unidad, a partir de la cual es posible mediante repetición tridimensional construir la estructura propia del cristal.

En la siguiente figura se recogen tres tipos diferentes de celdas unidad en un cristal de tipo cúbico.

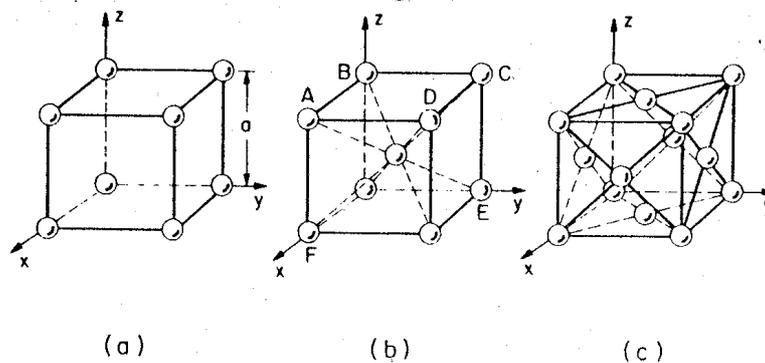


Fig. 2: Tres tipos diferentes de celdas unidad en un cristal cúbico. (a) Celda de cubo simple. (b) Celda cúbica centrada en el centro. (c) Celda cúbica centrada en las caras.

2.a) Celda de cubo simple: En ella cada átomo del material ocupa los ocho vértices (aristas) del cubo. La cantidad a es llamada constante de la estructura. El Polonio cristaliza en esta forma.

2.b) Celda cúbica centrada en el centro: En esta estructura, además de los ocho átomos de las aristas hay uno ocupando el centro de la celda. Es la celda tipo (bcc) (body-centered-cubic). Ejemplos son el sodio y tungsteno.

2.c) Celda cúbica centrada en las caras: En este tipo de celda, además de los ocho átomos de las aristas se encuentran seis átomos más, localizados en el centro de cada cara. Es la celda de tipo (fcc) (face-centered cubic). Cada átomo tiene 12 vecinos. Ejemplos son el aluminio, cobre, oro y platino.

Los elementos semiconductores tales como el germanio y el silicio presentan una estructura cristalina del tipo del diamante (ver figura (a)). Dicha estructura puede ser vista como dos estructuras (fcc) interpenetradas con un desplazamiento de una con respecto a la otra de $\frac{1}{4}$ de la distancia a lo largo de la diagonal del cubo ($\frac{\sqrt{3}}{4} a$). En este caso, cada átomo del semiconductor está rodeado de cuatro átomos equidistantes configurando los vértices de un tetraedro.

La estructura de la zincblenda (pechblenda) es idéntica a la del diamante salvo en que cada estructura (fcc) constituyente está formada por átomos de valencia diferente. A dicha estructura pertenecen materiales semiconductores del tipo del arseniuro de galio (AsGa) en que una de las estructuras (fcc) tiene átomos de Ga (III columna) y la otra de As (V columna).

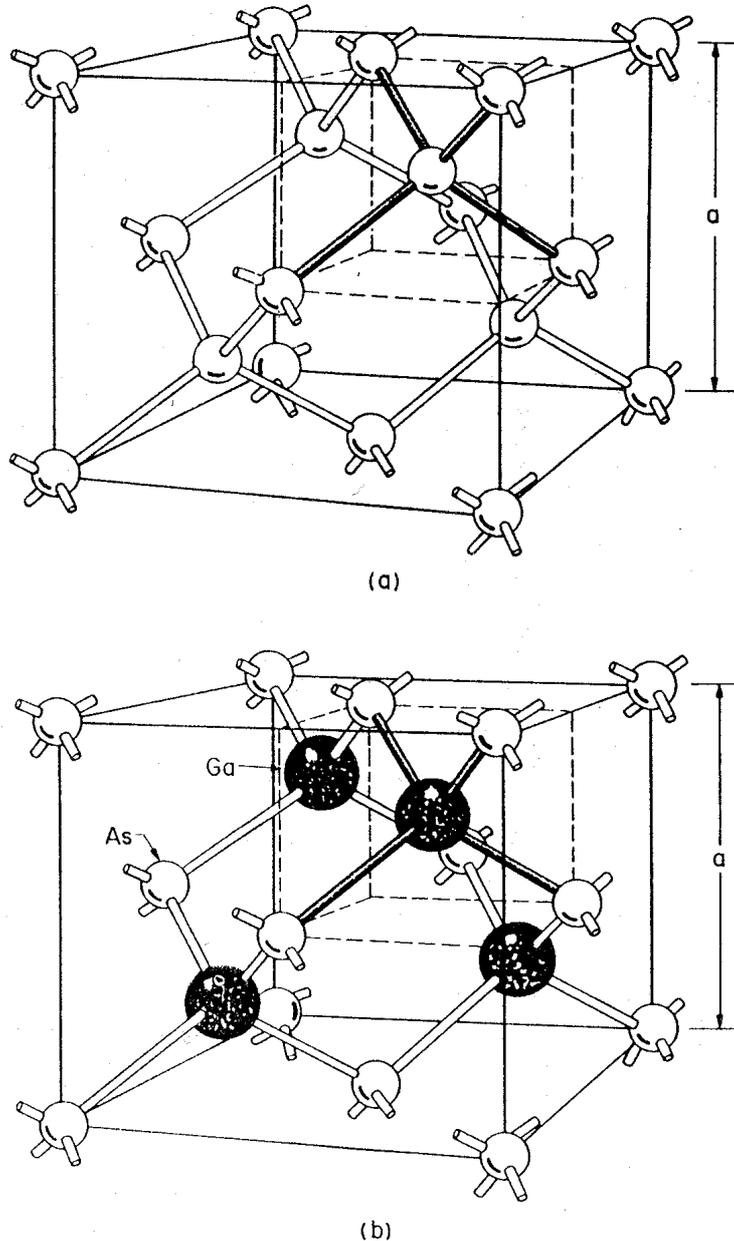


Fig. 3: (a) Estructura del diamante. (b) Estructura de la Pechblenda.

Índices de Miller: En la figura 2.b) se puede ver que hay cuatro átomos en el plano ABCD y cinco átomos en el plano ACEF (cuatro en las esquinas y uno en el centro). Además, las distancias interatómicas en cada uno de los planos son diferentes. Ello conlleva que las propiedades del cristal van a ser diferentes según el plano que se considere, siendo las propiedades eléctricas y otras características función de la orientación del cristal

Un método conveniente para definir los planos de un cristal es utilizar los llamados índices de Miller. Estos índices se obtienen con los siguientes pasos:

TEMA 1 : Modelos en Semiconductores y en Dispositivos Semiconductores.

- (1) Intersectar el plano en cuestión con los tres ejes cartesianos y obtener la distancia de la intersección en términos de la constante de la estructura.
- (2) Obtener los recíprocos (inversos) de estos tres números y reducirlos al entero mínimo común múltiplo (entero más próximo a los números multiplicándolos por el menor entero posible).
- (3) Englobar los tres números en un paréntesis (hkl) y este conformará los índices de Miller.

En Fig. 4 se muestran algunos ejemplos de obtención de los índices de Miller en diferentes planos de un cristal.

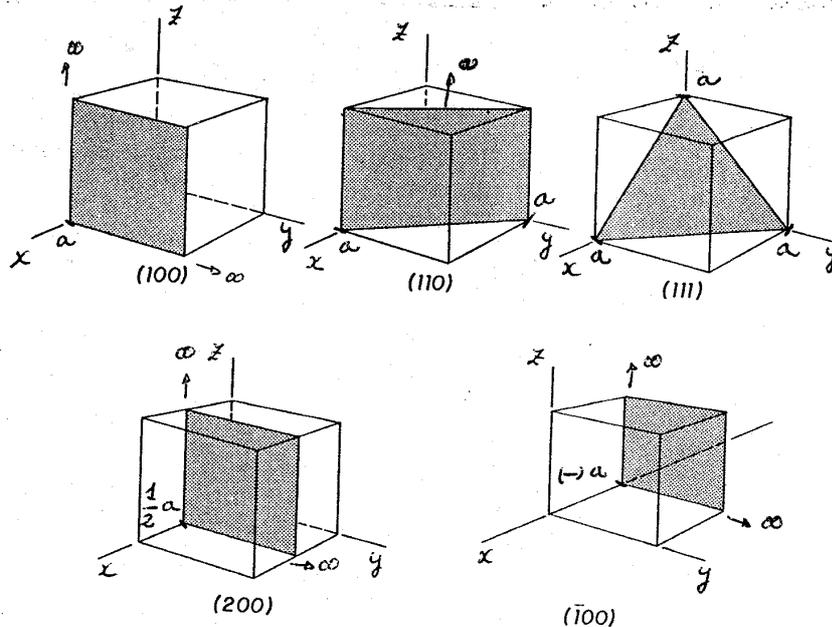


Fig. 4: Índices de Miller de algunos planos importantes de un cristal cúbico.

Enlaces de valencia: En la estructura cristalina del silicio, cada átomo está rodeado por otros cuatro átomos los cuales ocupan los vértices de un tetraedro regular (Fig. 5.a), cuya proyección plana se muestra en Fig. 5.b.

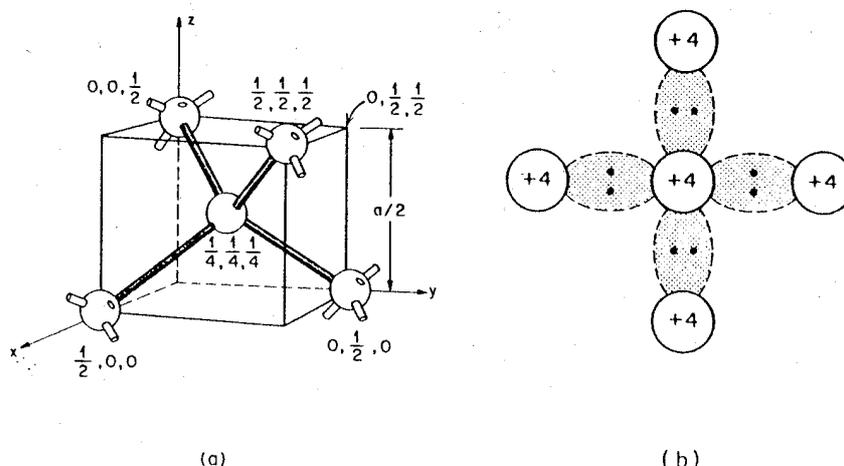


Fig. 5: (a) Tetraedro que constituyen los enlaces. (b) Proyección plana.

Cada átomo de silicio posee cuatro electrones de valencia, los cuales están siendo compartidos por los restantes cuatro átomos. El mecanismo de compartición de

los electrones recibe el nombre de enlace covalente. El enlace covalente puede ocurrir entre átomos idénticos o no. Cada electrón está el mismo tiempo alrededor de un núcleo que de otro y la atracción eléctrica que ejercen los núcleos hacia los electrones hace que permanezcan los átomos unidos entre sí. La estructura de la pchblenda es análoga sólo que cada átomo de As está rodeado de cuatro átomos de Ga y viceversa.

A bajas temperaturas, los electrones están constituyendo en su totalidad los enlaces covalentes que conforman la estructura cristalina del silicio, la cual en estas condiciones térmicas posee gran rigidez. A altas temperaturas, las vibraciones térmicas de las partículas de la red dan lugar a que algunos de los enlaces covalentes se rompan, formándose en consecuencia un electrón libre capaz de dar lugar a una corriente de conducción (fig. 6.a). Además se ha formado una deficiencia de electrón en uno de los enlaces covalentes, la cual puede ser llenada por otro electrón de los enlaces covalentes próximos. Ello supone un desplazamiento de la deficiencia de un enlace covalente (A) a otro (B) a lo largo de la estructura cristalina (Fig. 6.b).

El desplazamiento de esta deficiencia puede considerarse como el desplazamiento de una partícula similar al electrón. Esta partícula ficticia se denomina **huevo**, es portadora de carga positiva (h^+) y se desplaza en sentido opuesto al de los electrones, cuando se aplica a la red cristalina un campo eléctrico.

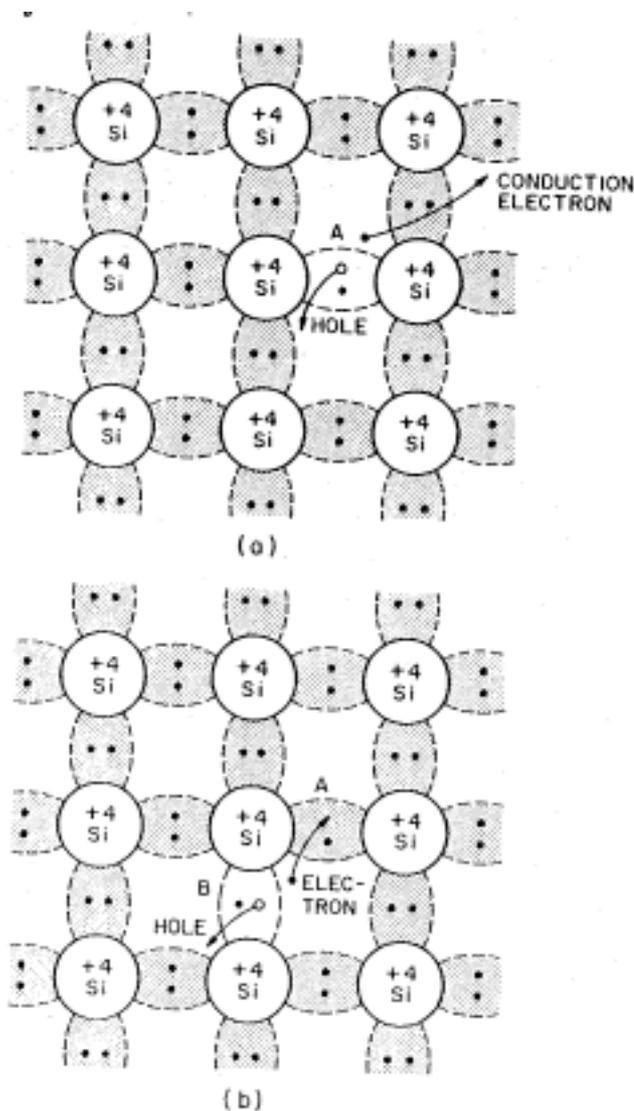


Fig. 6: Dibujo básico de los enlaces en el silicio intrínseco. (a) Un enlace roto en la posición A, da lugar a un electrón en la banda de conducción y un huevo. (b) Enlace roto en la posición B.

1.2. Modelo de Bandas de Energía

El modelo de bandas de energía es de gran utilidad para explicar la física electrónica en los materiales y dispositivos semiconductores. Se expondrá en primer lugar un modelo de tipo cualitativo muy conceptual y a continuación el modelo que da una descripción cuantitativa, el llamado modelo de Kronig-Penney.

1.2.1. Modelo cualitativo de bandas de energía.

La teoría de bandas de energía se basa en la mecánica cuántica, la cual describe el comportamiento físico de los electrones que forman parte de un átomo. Dicho comportamiento está determinado por la llamada función de onda $\Psi(x, y, z)$ la cual contiene toda la información medible sobre cada electrón y satisface la llamada ecuación de onda o de Schrödinger:

$$\nabla^2\Psi(x, y, z) + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - V(x, y, z)]\Psi(x, y, z) = 0$$

donde:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ (operador Laplaciano)}$$

$m \equiv$ masa de la partícula

$h \equiv$ constante de Planck

$E \equiv$ energía total de la partícula

$V(x, y, z) \equiv$ energía potencial de la partícula

Hay una función de onda Ψ para cada electrón del átomo. La ecuación de onda anterior sólo tiene solución para determinados valores discretos de la energía E del electrón. La mecánica cuántica asocia a cada valor discreto de E un conjunto de cantidades o números cuánticos n , l , m y m_s , de forma que cada electrón del átomo queda caracterizado por el nivel energético E o por sus números cuánticos. Esta es la situación que ocurre cuando se considera un átomo aislado. Sin embargo, la situación es bien diferente cuando se considera el sistema formado por muchos átomos tales como los que constituyen una red cristalina de material semiconductor.

Cuando se considera un sistema formado por dos o más átomos debe tenerse en cuenta el principio de exclusión de Pauli, según el cual dos electrones no podrán tener el mismo nivel energético o los mismos números cuánticos. De esta forma, dos electrones pertenecientes a dos átomos idénticos separados una distancia muy grande (infinita) poseen el mismo nivel energético, pero al aproximarse una distancia ya del orden de la distancia interatómica en un cristal esos dos niveles energéticos del mismo valor se desdoblán o desplazan ligeramente produciéndose dos nuevos niveles energéticos degenerados.

En el caso de una red cristalina formada por N -átomos, donde antes había N niveles energéticos idénticos (separación infinita) ahora hay N -niveles energéticos degenerados muy próximos entre sí, de forma que puede considerarse todo el conjunto como una banda de energía.

Fig. 7 representa la formación de las bandas de energía en un cristal del tipo del Si.

Cuando los átomos están separados por una distancia elevada, cada uno conserva definidos sus niveles energéticos susceptibles de ser ocupados por electrones (en Fig. 7 es la parte derecha, más alejada, se han representado dos niveles).

Si la distancia interatómica disminuye, los niveles energéticos idénticos se separan entre sí, dando lugar a una banda de niveles muy próximos entre ellos. Si ahora la distancia alcanza el valor de la distancia interatómica en el equilibrio (para el Si es de 5.43\AA) de la red cristalina, el conjunto de niveles que antes conformaba una banda de energía se divide en dos bandas. Estas dos bandas están separadas por una región o intervalo de energías que no poseerán ninguno de los electrones de la red cristalina. Este intervalo es llamado intervalo prohibido o banda prohibida, de anchura E_g . La banda superior es llamada banda de conducción y la inferior, banda de valencia.

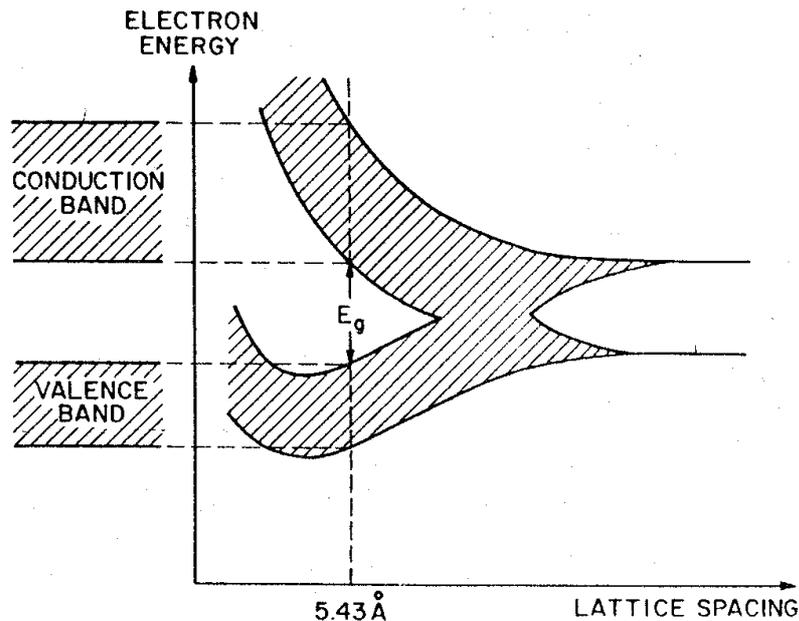


Fig. 7: Formación de bandas de energía cuando un cristal de estructura de diamante es formado al colocar juntos dos átomos de silicio aislados.

A la temperatura de 0K , la banda de conducción está vacía y la de valencia llena de electrones, por lo que no existe conducción. La única posibilidad de lograr conducción electrónica es comunicar a los electrones una energía mayor o igual que E_g para que los haga pasar de la banda de valencia a la banda de conducción (por ejemplo mediante excitación térmica o luminosa).

Para el silicio y germanio a la temperatura ambiente de 300K , E_g vale:

$$\text{Ge: } E_g = 0.72 \text{ eV}$$

$$\text{Si: } E_g = 1.12 \text{ eV}$$

Fig. 8 representa esquemáticamente la disposición de las bandas en diferentes tipos de sólidos: aislantes, semiconductores y conductores.

Metales, semiconductores y aislantes.

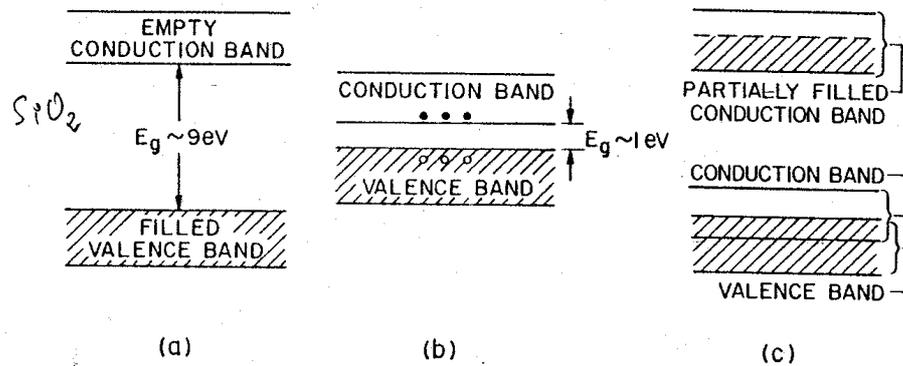


Fig. 8: Representación esquemática de las bandas de energía en (a) un aislante, (b) un semiconductor, y (c) un conductor.

En un sólido aislante tal y como el óxido de silicio (SiO_2) los electrones de valencia que forman los enlaces covalentes forman fuertes uniones con los átomos de la red cristalina que les rodean. Estos enlaces son difíciles de romper y, en consecuencia, no hay electrones libres para originar una conducción. Considerando sus bandas de energía hay una banda prohibida de mucha anchura (Fig. 8a), la cual se encuentra entre la banda de conducción que está completamente vacía y la de valencia, completamente llena de electrones de valencia. La anchura de la banda no permitida es tal que incluso mediante un aporte energético externo (excitación térmica o campo eléctrico aplicado) no es suficiente como para romper los enlaces covalentes y crear electrones libres en la banda de conducción. Por lo tanto, el dióxido de silicio es un aislante, no puede conducir corriente.

El caso correspondiente a Fig. 8b representa la disposición de bandas de energía en un material semiconductor (tal como el Si). Tal y como se ha visto anteriormente, los enlaces covalentes que constituyen la red cristalina pueden ser rotos con relativa facilidad y poco aporte energético (para el Si, 1.12eV por electrón). En un semiconductor, la anchura de la banda prohibida es muy pequeña comparada con la del aislante, y en consecuencia un pequeño aporte energético exterior produce la ruptura de algunos enlaces covalentes creando pares de electrón-hueco, los cuales ocupan la banda de conducción y la de valencia respectivamente. Cuando un campo eléctrico es aplicado al cristal semiconductor, tanto los electrones como los huecos adquieren energía cinética dando lugar a conducción eléctrica.

Las bandas de energía de Fig. 8c representan el caso de un metal. Las bandas de conducción y de valencia están solapadas entre sí y no existe banda de energía prohibida. Con esta disposición los electrones de la banda de valencia pueden alcanzar fácilmente el nivel más alto de la de conducción sin más que aplicar un pequeño campo eléctrico. De esta forma, pueden dar lugar a una rápida conducción eléctrica.

Conviene indicar que la tendencia de los electrones al recibir energía es la de moverse hacia arriba en los niveles energéticos de la banda que ocupe, por el contrario cuando un hueco es excitado energéticamente tiende a moverse hacia niveles inferiores en la banda donde se localice.

Fig. 9 ilustra de forma esquemática la disposición típica de bandas de energía. La anchura de la banda prohibida se denomina gap de energía prohibido y se representa por la cantidad E_g . El nivel energético más bajo de la banda de conducción se designa por la cantidad E_c y corresponde a la mínima energía que posee un electrón libre, para este

caso es energía potencial en su totalidad (energía de un electrón en reposo) siendo este nivel el origen de energía cinética (energía cinética cero). La energía del electrón aumenta al movernos hacia arriba en la banda de conducción. Análogamente, para los huecos se define el nivel E_v como el máximo nivel en la banda de valencia, E_v corresponde a la energía potencial de un hueco (energía de un hueco en reposo) y su energía cinética se mide a partir del nivel E_v . En consecuencia, la energía del hueco aumenta al movernos hacia abajo en la banda de valencia.

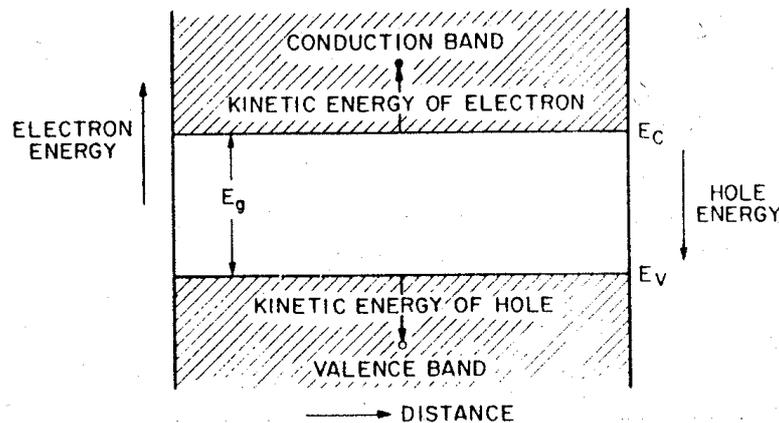


Fig. 9: Energía potencial y cinética en la representación de bandas de energía.

* Como puede verse a partir de la figura, para que un hueco salga de la banda de valencia, un electrón de la banda de conducción ha de ser desexcitado y volver a ella.

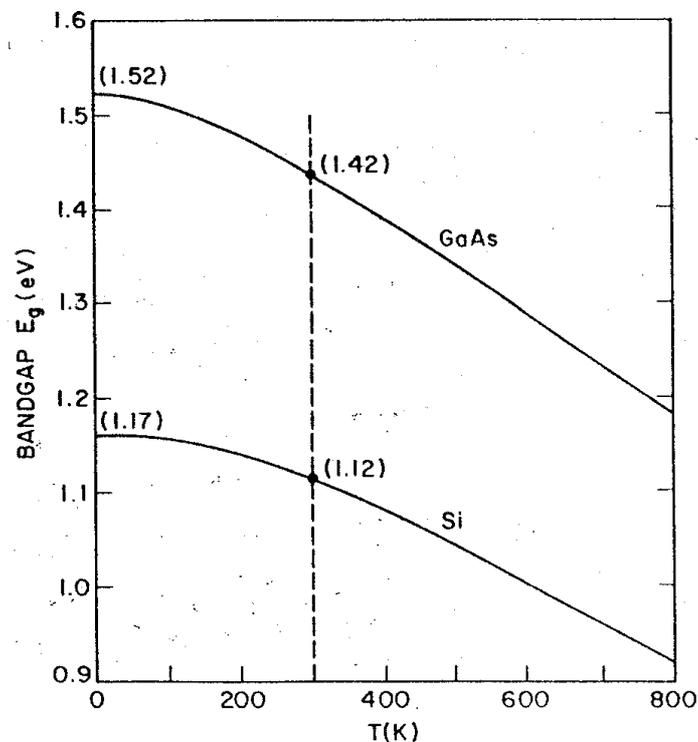


Fig. 10: Gap prohibido para el Si y el GaAs en función de la temperatura.

En Fig. 10 se representa la variación del gap prohibido E_g en términos de la temperatura del sólido semiconductor (para el Si y GaAs). Se observan como puntos representativos:

$$\begin{array}{ll} T=300\text{K (ambiente)} & \text{Si: } E_g=1.12\text{eV} \\ P=1\text{atm} & \text{GaAs: } E_g=1.42\text{eV} \\ T=0\text{K} & \text{Si: } E_g=1.17\text{eV} \\ & \text{GaAs: } E_g=1.52\text{eV} \end{array}$$

La variación del gap E_g con la temperatura sigue las expresiones:

$$E_g(T) = 1.17 - \frac{4.73 \cdot 10^{-4} \cdot T^2}{T + 636} \text{ para el Si}$$
$$E_g(T) = 1.52 - \frac{5.4 \cdot 10^{-4} \cdot T^2}{T + 204} \text{ para el GaAs}$$

El coeficiente de temperatura $\frac{dE_g}{dT}$ es negativo para cualquiera de los dos semiconductores.

Finalmente, debe decirse que el modelo de bandas de energía constituye una herramienta muy valiosa para hacerse una representación de cuales son los mecanismos que producen la conducción eléctrica en un material semiconductor. No obstante, debe eliminarse la imagen de que las bandas de energía son como canales por los cuales circulan los electrones o huecos. Únicamente se trata de niveles energéticos que llevan asociados, por el hecho de ocuparlos, el estado de conducción eléctrica o la ausencia de ella.

Este mecanismo de conducción eléctrica en semiconductores presenta cierta complejidad y deben aplicarse herramientas matemáticas avanzadas como la estadística de Fermi-Dirac. Concretamente, como se verá posteriormente, debe determinarse la estructura de bandas en el semiconductor, la densidad de estados cuánticos en cada banda y la concentración de portadores en cada banda, así como su comportamiento.

1.2.2. Modelo cuantitativo de bandas de energía (Modelo de Kronig-Peney).

El modelo de Kronig-Peney es un modelo de tipo cuantitativo y tiene como objetivo describir el comportamiento físico de una partícula cargada (electrón) en el cristal. La energía potencial del electrón en el átomo de hidrógeno viene dada por la ecuación:

$$W = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ (Fig. 11a)}$$

Para dos átomos sería como la mostrada en Fig. 11b. Suponiendo un cristal de hidrógeno unidimensional, la energía potencial representada en función de la distancia aparecería como la mostrada en Fig.11c con una constante L para la red. La distribución de energía potencial para un conjunto de átomos es muy compleja de manera que la resolución de la ecuación de Schrödinger para tal distribución es muy difícil.

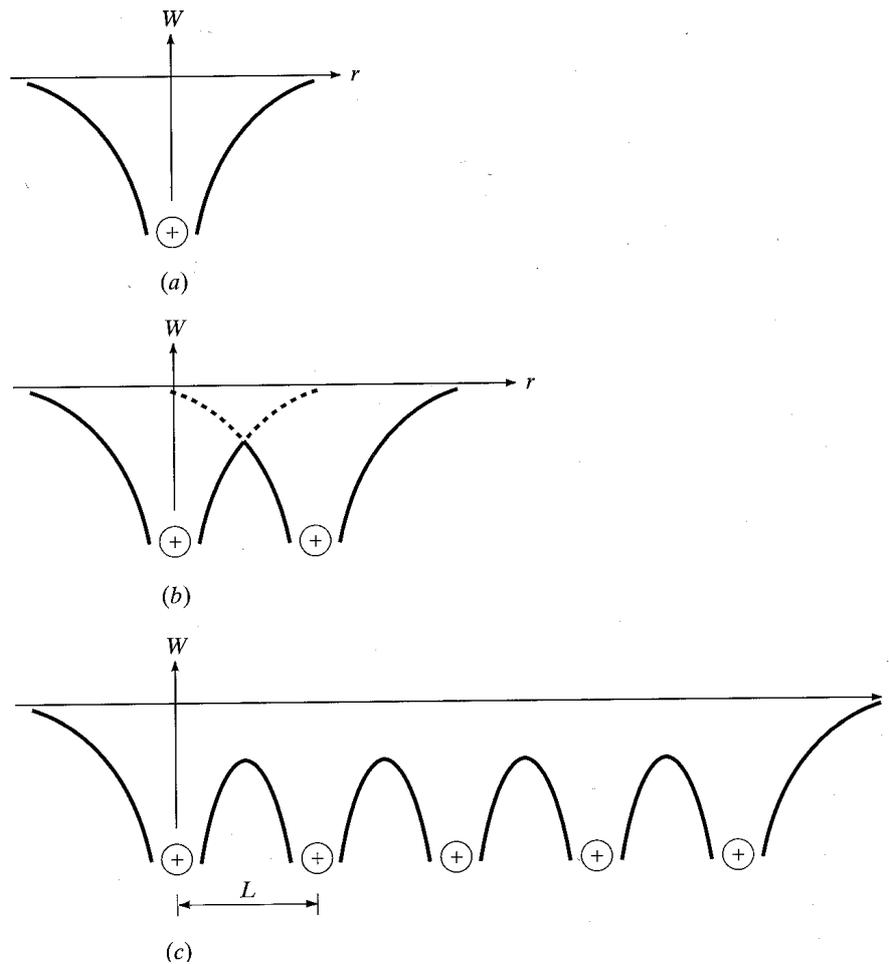


Fig. 11: (a) Energía potencial de un electrón en las proximidades de un átomo de hidrógeno; (b) Lo mismo que (a) pero cuando se tienen dos núcleos atómicos; (c) Lo mismo que (a) pero para un conjunto de átomos.

En un esfuerzo para obtener una solución matemática que confirmase la formación de bandas de energía, incluyendo las bandas prohibidas, Kronig y Penney utilizaron un modelo unidimensional para la distribución de energía potencial en un sólido. Se trata de un modelo de potencial periódico de forma cuadrada y unidimensional, es decir, para un cristal de dimensión infinita pero unidimensional. Dicho modelo, mostrado en Fig. 12, presenta alguna similitud con la distribución de energía potencial mostrada en Fig. 11c. A pesar de esta basta similitud, la solución de la ecuación de Schrödinger utilizando este modelo describe con bastante precisión los efectos que se observan en sólidos reales.

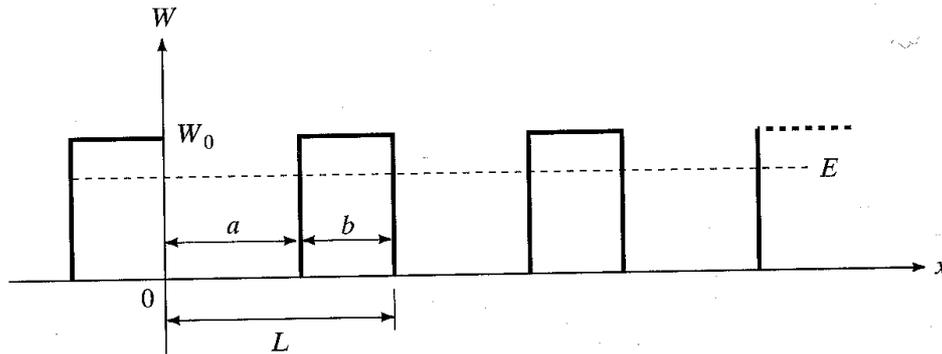


Fig. 12: Modelo de Kronig-Penney unidimensional de la distribución de energía potencial

Es importante tener en cuenta una serie de suposiciones en el modelo y en su solución:

1. La interacción entre el electrón y el núcleo es únicamente debida al campo eléctrico debido a sus cargas.
2. No se tiene en cuenta la interacción electrón-electrón.
3. Se desprecian los efectos no ideales tales como las colisiones con la estructura y la presencia de impurezas.
4. Átomos fijos aunque, de hecho, los átomos pueden estar vibrando.

En el modelo de Kronig-Penney, el nivel del cero de energía potencial está en las proximidades del núcleo y el pico de valor W_0 ocurre a medio camino entre los núcleos.

Se va a suponer que un electrón, con una cierta masa y energía, está presente en esta distribución de energía potencial generada por los núcleos del átomo. Cuando el electrón se acerca a uno de los átomos de la red cristalina se acelera y cuando se aleja se decelera hasta que se acerca al campo eléctrico del siguiente átomo de la red, repitiéndose de nuevo el proceso.

Las funciones de onda asociadas al electrón se obtienen resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - W(x)]\Psi(x) = 0 \quad \text{con} \quad \hbar^2 = \frac{h^2}{4\pi^2}$$

Las soluciones de esta ecuación con significado físico corresponden a funciones de onda asociadas a los electrones que son planas indicando la dirección de propagación mediante el vector de onda K y moduladas por una función $U(x)$ que posee la misma periodicidad que la de la red cristalina:

$$\Psi(x) = U(x) \cdot e^{iKx}$$

siendo $U(x) = U(x + L) = U(x + N \cdot L)$; $N \equiv n^\circ$ de átomos del cristal

a = anchura regiones con $W(x) = 0$

b = anchura regiones con $W(x) = W_0$

$a + b = L$ = periodo = constante de la estructura (distancia interatómica)

y, por tanto, $U(a) = U(-b)$

TEMA 1 : Modelos en Semiconductores y en Dispositivos Semiconductores.

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, la ecuación de Schrödinger tendrá solución si se cumplen las siguientes igualdades:, una para $0 < E < W_0$ y otra para $E > W_0$:

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2 \cdot \alpha \cdot \beta} \cdot \sinh(\beta \cdot b) \cdot \sin(\alpha \cdot a) + \cosh(\beta \cdot b) \cdot \cos(\alpha \cdot a) = \cos(K \cdot L) ; \text{ para } E < W_0$$

$$(-) \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{2 \cdot \alpha \cdot \gamma} \cdot \sin(\gamma \cdot b) \cdot \sin(\alpha \cdot a) + \cos(\gamma \cdot b) \cdot \cos(\alpha \cdot a) = \cos(K \cdot L) ; \text{ para } E > W_0$$

con $\alpha^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$, $\beta^2 = \frac{2 \cdot m \cdot (W_0 - E)}{\hbar^2}$ y $\beta \equiv j \cdot \gamma$ (en región II en que β es imaginario)

Estas son ecuaciones trigonométricas implícitas que permiten obtener los valores de la energía asociados a las distintas funciones de onda del electrón. Su solución es de tipo numérico o gráfico.

Un hecho importante es que la función periódica $\cos(KL)$ sólo puede tomar valores comprendidos entre -1 y $+1$. Desde un punto de vista numérico para un potencial W_0 dado, habrá unos valores de la energía que cumplan la igualdad anterior, sin embargo también existirán otros valores para los cuales el primer miembro de la igualdad será mayor o menor que el segundo miembro. Los primeros de ellos son los valores de energía permitidos para el estado del electrón en el cristal unidimensional, los segundos constituyen los valores no permitidos para la energía del electrón. Esta es la explicación de que aparezcan bandas de energía prohibida.

Las dos expresiones anteriores constituyen el modelo matemático de Kronig-Penney. Su representación matemática queda recogida en Fig. 13.

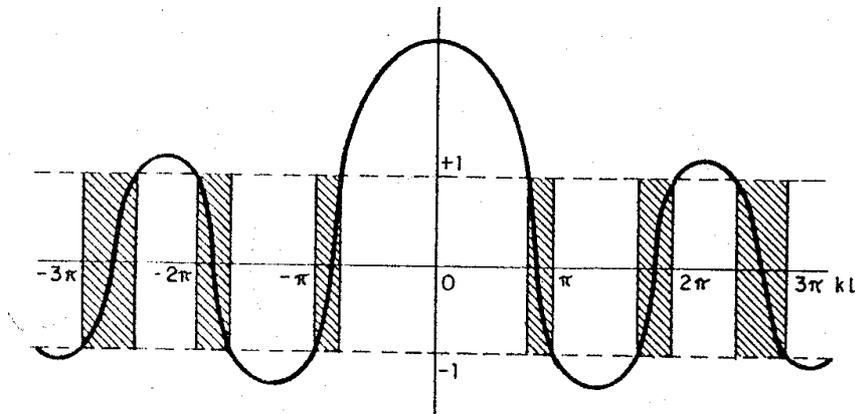


Fig. 13: Bandas permitidas y prohibidas, según el modelo de Kronig-Penney. Las regiones en blanco son las bandas prohibidas y las rayadas las permitidas.

En la gráfica se ha representado el primer miembro de las anteriores expresiones y se han delimitado los niveles de -1 y $+1$ como los valores extremos del segundo miembro. Las zonas sombreadas corresponden a aquellas en las cuales la variable E hace que se produzca la igualdad de los dos miembros y las zonas en blanco corresponden a los valores de E que ocasionan la desigualdad (mayor o menor) entre el primer miembro y el segundo, son los valores no permitidos de la energía.

Resolviendo las ecuaciones anteriores puede representarse la relación entre E y K . Esto es lo que indica Fig. 14:

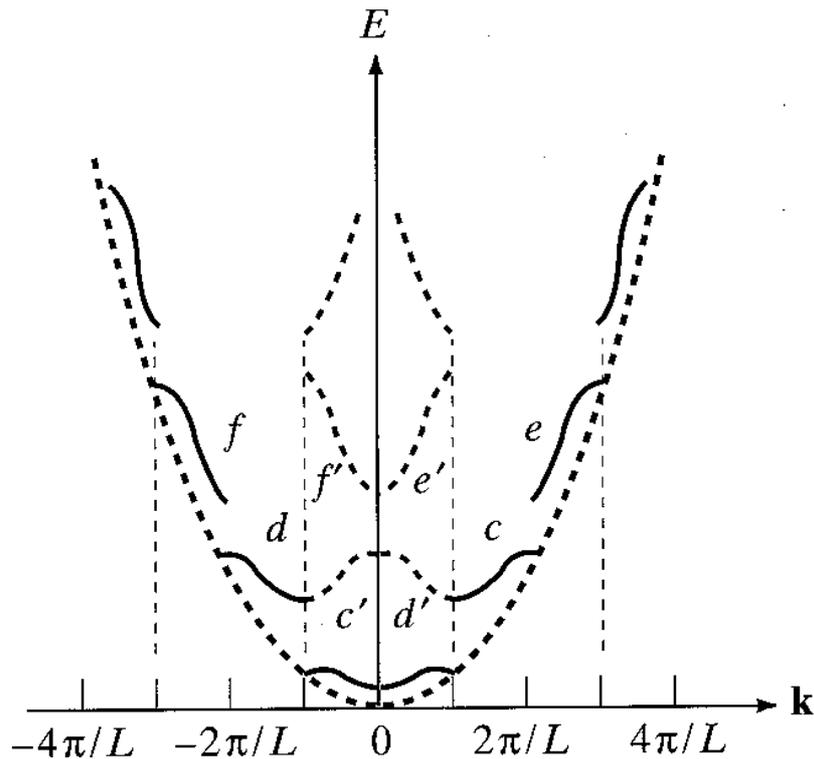


Fig. 14: Representación normal o extendida de la función $E(K)$ para una estructura cristalina simple unidimensional, según el modelo de Kronig-Penney. La parábola con trazo discontinuo corresponde a la solución para la partícula libre.

Esta figura muestra los valores permitidos de la energía del electrón en términos del vector de onda K . Se pueden hacer las siguientes observaciones:

- La representación del modelo de Kronig-Penney muestra discontinuidades y perturbaciones cuando se compara con la forma parabólica que presenta la solución para una partícula libre. Estas modificaciones son mayores para valores bajos de energía. Para valores más grandes de energía la solución para este modelo se asemeja más al de una partícula libre. En conclusión, cuanto mayor es la energía del electrón menor importancia tiene el potencial periódico del cristal.
- El modelo presenta discontinuidades para $KL = \pm n\pi$. Para los valores de energía correspondientes a tales discontinuidades, las ondas del electrón no pueden propagarse en el sólido. Estos valores de K marcan los límites de las zonas de energía que constituyen las bandas prohibidas.
A las zonas marcadas por los puntos de discontinuidad se las denomina **zonas de Brillouin**. De esta forma, la primera zona de Brillouin sería la correspondiente al intervalo $]-\pi/L, \pi/L[$. La segunda zona de Brillouin sería la correspondiente a los intervalos $]-2\pi/L, -\pi/L[$ y $]\pi/L, 2\pi/L[$. Y así sucesivamente.
- Al incrementarse el valor de E , la anchura de las bandas permitidas se incrementa mientras que la anchura de las bandas prohibidas se reduce.
- La parte izquierda de las ecuaciones no sufre modificación alguna si KL cambia en $\pm 2\pi$. Por razones relacionadas con la masa de las partículas y que resultarán más claras más adelante, es conveniente desplazar las curvas correspondientes a

la segunda y tercera banda permitida a lo largo del eje x en $\pm 2\pi/L$. Los valores correspondientes a la segunda y tercera banda permitida para K positiva se desplazan $-2\pi/L$ y los correspondientes a K negativa son desplazados en $2\pi/L$. De esta forma nos limitamos a la región comprendida entre $-\pi/L$ y π/L (primera zona de Brillouin), como se muestra en las curvas con trazo discontinuo c', d', e' y f' que reemplazan a las curvas c, d, e y f. Las nuevas curvas se muestran en Fig. 15 y representan el perfil energético de las bandas de valencia y de conducción correspondientes a $n=1, 2$ y 3 .

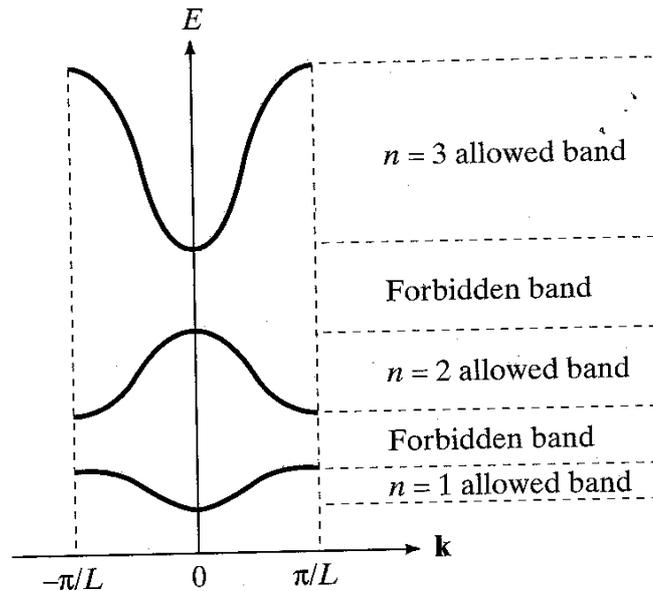


Fig. 15: Reducción a la primera zona de Brillouin de la función $E(K)$ en que se representan las bandas permitidas y, entre ellas, las prohibidas.

Se han mostrado las curvas de energía para tres valores de n . Es posible obtener estas curvas para mayores valores de n . Sin embargo, las que se han mostrado son suficientes para ilustrar la relevancia y beneficios del modelo de Kronig-Penney. Es importante remarcar que el modelo unidimensional de Kronig-Penney presenta una gran semejanza con las condiciones reales existentes en un cristal. En un cristal real tridimensional, las relaciones $E-K$ son mucho más complicadas que las obtenidas con anterioridad. Sin embargo, los resultados obtenidos a partir de dicho modelo nos ha permitido explicar la existencia de bandas permitidas y de bandas prohibidas de una manera analítica.

Para un sólido semiconductor el gap de energía entre una zona de Brillouin y su contigua tiene una anchura suficientemente pequeña comparada con la anchura respectiva para un sólido aislante. Finalmente, el sólido metal posee un gap pequeño y de menor energía que los anteriores.

1.3. Modelos analíticos.

Un modelo matemático o analítico es, en general, una formulación matemática de una situación o de un fenómeno físico y que permite hacer predicciones en cuanto a los acontecimientos que pueden aparecer y obtener consecuencias. Son aplicables tanto a un semiconductor (modelo de Kronig-Penney) como a dispositivos semiconductores (se tratará con posterioridad).

TEMA 1 : Modelos en Semiconductores y en Dispositivos Semiconductores.

Por ejemplo, para el dispositivo diodo, se tiene el modelo del diodo de unión reflejado mediante la ecuación del diodo o de Shockley.

$$I = I_s \cdot (e^{\frac{V}{V_T}} - 1)$$

$I \equiv$ corriente del diodo

$I_s \equiv$ corriente de saturación del diodo

$V \equiv$ tensión aplicada

$$V_T \equiv \frac{K \cdot T}{q} = 26\text{mV a } 300\text{K}$$

Con $K \equiv$ constante de Boltzman = $1.381 \cdot 10^{-23} \text{J/K} = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{c} \cdot \text{V/K}$

Y $q \equiv$ carga del electrón = $1.602 \cdot 10^{-19} \text{c}$

De igual manera se tiene el modelo de Ebers-Moll para el transistor bipolar pnp en continua, formado por dos ecuaciones:

$$I_E = a_{11}(e^{\frac{V_{EB}}{V_T}} - 1) + a_{12}(e^{\frac{V_{CB}}{V_T}} - 1)$$

$$I_C = a_{21}(e^{\frac{V_{EB}}{V_T}} - 1) + a_{22}(e^{\frac{V_{CB}}{V_T}} - 1)$$

$I_E, I_C \equiv$ corrientes de emisor y colector

$V_{EB}, V_{CB} \equiv$ tensiones emisor-base y colector-base

$a_{ij} \equiv$ parámetros físicos del dispositivo

1.4. Circuitos equivalentes o modelos analógicos.

Los modelos analógicos o de circuitos equivalentes constituyen una representación a nivel circuital del comportamiento eléctrico del dispositivo. Dicha representación se realiza mediante conexionado de elementos pasivos y activos propios de la teoría de circuitos. Dichos modelos no constituyen una representación del comportamiento físico interno del dispositivo sino que son útiles desde el punto de vista de su aplicación práctica.

Por ejemplo, un transistor bipolar funcionando en configuración de emisor común. Cuando el transistor bipolar funciona con señal de pequeña amplitud (condición dinámica de funcionamiento), las ecuaciones que definen sus parámetros relacionan magnitudes eléctricas de una forma lineal. Estas ecuaciones son susceptibles de ser representadas por circuitos equivalentes que contengan impedancias (o admitancias) y generadores dependientes (de corriente o tensión). Así, un transistor bipolar que funciona en condiciones dinámicas puede ser representado por un cuadripolo (Fig. 16) pudiéndose obtener dos relaciones entre las cuatro magnitudes mostradas.

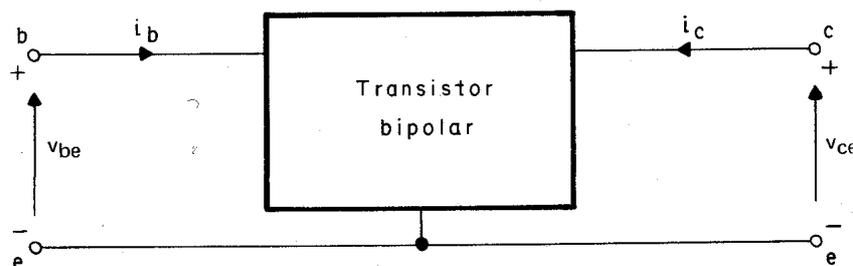


Fig. 16: Cuadripolo con la indicación de las variables de entrada (i_b, v_{be}) y de salida (i_c, v_{ce})

TEMA 1 : Modelos en Semiconductores y en Dispositivos Semiconductores.

Se trata del caso de configuración en emisor común, con entrada por la base y salida por colector, referida a emisor. Las corrientes i_b e i_c pueden escribirse de la forma:

$$i_b = y_{ie} \cdot v_{be} + y_{re} \cdot v_{ce}$$

$$i_c = y_{fe} \cdot v_{be} + y_{oe} \cdot v_{ce}$$

$$y_{ie} = \left(\frac{i_b}{v_{be}} \right)_{v_{ce}=0} = \text{admitancia de entrada}$$

$$y_{oe} = \left(\frac{i_c}{v_{ce}} \right)_{v_{be}=0} = \text{admitancia de salida}$$

$$y_{fe} = \left(\frac{i_c}{v_{be}} \right)_{v_{ce}=0} = \text{admitancia de transferencia directa}$$

$$y_{re} = \left(\frac{i_b}{v_{ce}} \right)_{v_{be}=0} = \text{admitancia de transferencia inversa}$$

El correspondiente modelo analógico o circuito equivalente asociado a estas ecuaciones es el de Fig. 17. Este circuito representa el modelo del circuito equivalente a la configuración en emisor común, no explica el funcionamiento interno del dispositivo pero es muy útil en la aplicación práctica.

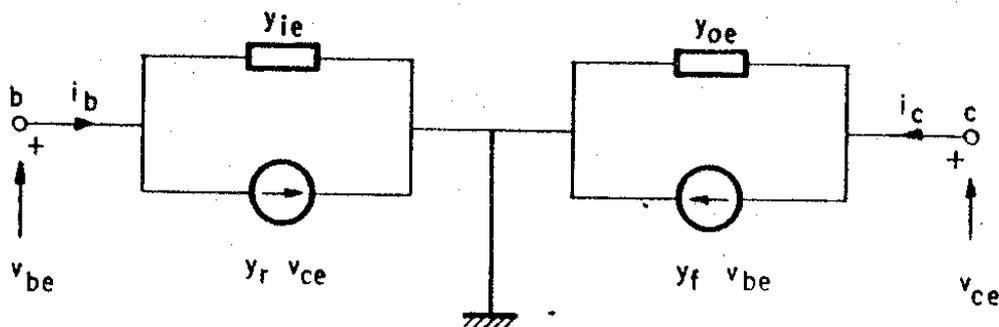


Fig. 17: Modelo analógico o circuito equivalente en T del transistor bipolar de pequeña señal con los parámetros admitancia.

Para cada propósito práctico aparece un modelo de circuito equivalente que responde al comportamiento circuital del dispositivo. Así aparecen modelos para la descripción del comportamiento en régimen de pequeña o gran señal, en corriente continua, etc.

ANEXO: Obtención de las expresiones matemáticas del modelo de Kronig-Peney

Las funciones de onda asociadas al electrón se obtienen resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - W(x)]\Psi(x) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación con significado físico corresponden a funciones de onda asociadas a los electrones que son planas indicando la dirección de propagación mediante el vector de onda K y moduladas por una función $U(x)$ que posee la misma periodicidad que la de la red cristalina. Son las llamadas funciones de Bloch (basadas en el Teorema de Floquet):

$$\Psi(x) = U(x) \cdot e^{iKx}$$

siendo $U(x) = U(x + L) = U(x + N \cdot L)$; $N \equiv n^\circ$ de átomos del cristal
y, por tanto, $U(a) = U(-b)$

En las regiones I en que $W(x)=0$:

$$\begin{aligned} \Psi_I(x) &= U_I(x) \cdot e^{iKx} \\ \frac{d\Psi_I(x)}{dx} &= i \cdot K \cdot U_I(x) \cdot e^{iKx} + \frac{dU_I}{dx} \cdot e^{iKx} \\ \frac{d^2\Psi_I(x)}{dx^2} &= (-) \cdot K^2 \cdot U_I(x) \cdot e^{iKx} + 2 \cdot i \cdot K \cdot \frac{dU_I(x)}{dx} \cdot e^{iKx} + \frac{d^2U_I}{dx^2} \cdot e^{iKx} \end{aligned}$$

definiendo $\alpha^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$; se obtiene a partir de la ecuación de Schrödinger:

$$\frac{d^2U_I(x)}{dx^2} + 2 \cdot i \cdot K \cdot \frac{dU_I(x)}{dx} + (\alpha^2 - K^2) \cdot U_I = 0$$

En las regiones II, $W(x)=W_0$ y con la substitución:

$$\beta^2 \equiv \frac{2 \cdot m \cdot (W_0 - E)}{\hbar^2}$$

análogamente se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^2U_{II}(x)}{dx^2} + 2 \cdot i \cdot K \cdot \frac{dU_{II}(x)}{dx} - (\beta^2 + K^2) \cdot U_{II} = 0$$

La solución de las dos ecuaciones diferenciales resultantes es de la forma:

TEMA 1 : Modelos en Semiconductores y en Dispositivos Semiconductores.

$$U_I = A \cdot e^{i(\alpha-K)x} + B \cdot e^{-i(\alpha+K)x}$$

$$U_{II} = C \cdot e^{i(\beta-iK)x} + D \cdot e^{-(\beta+iK)x}$$

donde A, B, C y D son constantes.

Las funciones U y $\frac{dU}{dx}$ han de ser continuas en los límites y se cumple la relación $U(a)=U(-b)$ por ser U una función periódica. Estas condiciones de contorno se satisfacen si:

$$\left. \begin{array}{l} U_I(0) = U_{II}(0) \\ \frac{dU_I}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{dU_{II}}{dx} \Big|_{x=0} \end{array} \right\} \text{Continuidad en los límites de U y } \frac{dU}{dx}$$

$$\left. \begin{array}{l} U_I(a) = U_{II}(-b) \\ \frac{dU_I}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{dU_{II}}{dx} \Big|_{x=-b} \end{array} \right\} \text{Periodicidad de U y } \frac{dU}{dx}$$

Es decir:

$$A + B = C + D$$

$$i \cdot (\alpha - K) \cdot A - i \cdot (\alpha + K) \cdot B = (\beta - iK) \cdot C - (\beta + iK) \cdot D$$

$$A \cdot e^{i(\alpha-K)a} + B \cdot e^{-i(\alpha+K)a} = C \cdot e^{-(\beta-iK)b} + D \cdot e^{(\beta+iK)b}$$

$$i \cdot (\alpha - K) \cdot A \cdot e^{i(\alpha-K)a} - i \cdot (\alpha + K) \cdot B \cdot e^{-i(\alpha+K)a} = (\beta - iK) \cdot C \cdot e^{-(\beta-iK)b} - (\beta + iK) \cdot D \cdot e^{(\beta+iK)b}$$

Si se pasan todos los términos del segundo miembro de cada una de las igualdades al primer miembro se tendrá un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones en A, B, C y D. Empleando la regla de Cramer para los sistemas homogéneos se llega a la conclusión de que el sistema tiene solución distinta de cero si el determinante formado por los coeficientes de A, B, C y D es distinto de cero.

Después de unos laboriosos cálculos algebraicos, se puede comprobar que esta última condición se satisface si:

$$\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2 \cdot \alpha \cdot \beta} \cdot \sinh(\beta \cdot b) \cdot \sin(\alpha \cdot a) + \cosh(\beta \cdot b) \cdot \cos(\alpha \cdot a) = \cos(K \cdot L); \text{ para } E < W_0$$

$$\text{donde se ha tenido en cuenta que } L = a + b$$

Esta es una ecuación trigonométrica implícita que permite obtener los valores de la energía asociados a las distintas funciones de onda del electrón. Su solución es de tipo numérico o gráfico.

Finalmente, para ver representadas completamente de forma gráfica las bandas permitidas y prohibidas es necesario resolver además el caso $E > W_0$. En este caso el parámetro β es imaginario y para explicitar este hecho y resolver en términos reales la ecuación se realizan pequeñas operaciones algebraicas:

$$\beta \equiv j \cdot \gamma; \sinh(\beta \cdot b) = \sinh(j \cdot \gamma \cdot b) = j \cdot \sin(\gamma \cdot b)$$

$$\cosh(\beta \cdot b) = \cosh(j \cdot \gamma \cdot b) = \cos(\gamma \cdot b)$$

TEMA 1 : Modelos en Semiconductores y en Dispositivos Semiconductores.

y, de esta manera, la ecuación anterior se transforma en:

$$\left(-\right) \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{2 \cdot \alpha \cdot \gamma} \cdot \sin(\gamma \cdot b) \cdot \sin(\alpha \cdot a) + \cos(\gamma \cdot b) \cdot \cos(\alpha \cdot a) = \cos(K \cdot L); \text{ para } E > W_0$$

Las dos expresiones anteriores constituyen el modelo matemático de Kronig-Penney.