

Lección 11. Ondas electromagnéticas en medios materiales.

281. Hallar las velocidades de fase y de grupo para: (a) un buen conductor y (b) un buen dieléctrico. Comentar la frase: un dieléctrico con pérdidas presenta dispersión anómala.
282. Un medio material presenta dispersión anómala. Discutir las implicaciones de lo anterior en la propagación de: (a) una onda monocromática y (b) un paquete o tren de ondas poco dispersivo.
283. Determinar la longitud de penetración piel de un buen conductor ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, $\sigma \gg \omega \epsilon$). El oro, ¿es un buen conductor? Su resistividad a temperatura ambiente es de $2.271 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ y su permitividad dieléctrica relativa $\epsilon = 6.9$. ¿Cuánto penetraría una onda electromagnética de frecuencia $\nu = 100$ kHz?
284. Una onda electromagnética plana, armónica y linealmente polarizada se propaga en el vacío en la dirección del vector (1,2,3). La amplitud del campo eléctrico de dicha onda es de 17 V/m y su frecuencia de 60 MHz. En el instante $t = 8$ ns el campo eléctrico de dicha onda vale (9, 0, -3) V/m en el origen de coordenadas. Encontrar una expresión para el campo eléctrico y el magnético en cualquier punto del espacio y en cualquier instante de tiempo.
285. Demostrar las condiciones de contorno para los campos electromagnéticos en la superficie de separación de dos medios materiales.
286. Demostrar la denominada *ley de Snell* a partir de las condiciones de contorno del campo electromagnético en la superficie de separación entre dos dieléctricos.
287. Un submarino está equipado con un receptor de OEM y se encuentra a 10 m de profundidad. El agua del mar tiene en esa región una conductividad de 4.3 S/m y la permeabilidad es la del vacío. ¿Qué frecuencia debemos de utilizar para que llegue al submarino una señal al menos del 1% de la señal emitida en la superficie?
288. Una onda plana armónica y linealmente polarizada en el eje y se propaga en la dirección x en un medio sin pérdidas de características ϵ , μ_0 . La frecuencia angular de dicha onda es ω . Se pide: (a) La expresión del campo eléctrico. (b) La expresión del campo magnético. (c) ¿Existe una diferencia de fase entre el campo eléctrico y el campo magnético de dicha onda? ¿En qué situación aparece un desfase?
289. Deducir, a partir de las ecuaciones de Maxwell en los medios materiales, las condiciones de contorno que han de cumplir los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ en la superficie de separación entre dos medios materiales.
290. Proponer la expresión del campo eléctrico de una onda electromagnética plana, armónica, de frecuencia angular $\omega = 3 \times 10^6$ rad/s, que se propaga en la dirección del vector (1, 1, 1) y su vector campo eléctrico tiene polarización lineal con dirección paralela al plano xy ; el módulo del campo eléctrico es 10 V/m. Obtener la expresión del campo $\mathbf{H}$ asociado.

291. El promediado espacial de las ecuaciones de Maxwell para los campos microscópicos en un medio material nos conduce al siguiente resultado:

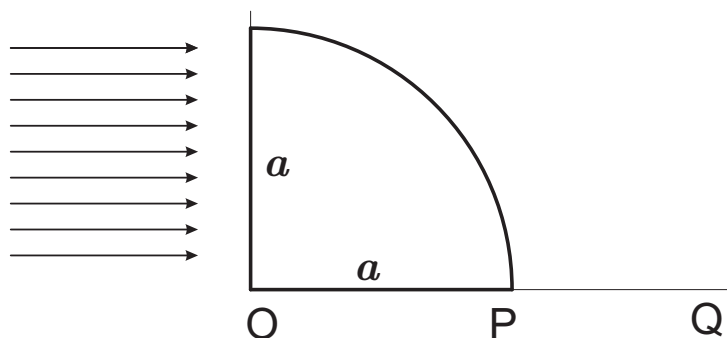
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad ,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad .$$

- (a) ¿Cuáles son los términos nuevos que aparecen respecto a las ecuaciones de Maxwell en el vacío? ¿Qué significado físico tienen? (b) Definir el vector desplazamiento $\mathbf{D}$ y el vector excitación magnética $\mathbf{H}$ transformando las anteriores ecuaciones en las ecuaciones de Maxwell en los medios materiales. (c) Las ecuaciones de Maxwell en los medios materiales deducidas en el apartado anterior, ¿se modifican si el medio es no lineal?
292. La ecuación de ondas del campo eléctrico fuera de las fuentes y en un medio material con conductividad σ es

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

- A partir de dicha ecuación, define la permitividad dieléctrica compleja. Deduce el valor de la parte real e imaginaria del número de ondas de una onda plana de frecuencia angular ω para el caso concreto de un medio poco conductor.
293. Una onda plana, armónica (de frecuencia angular ω) y linealmente polarizada, incide sobre un buen conductor de conductividad σ , con la dirección perpendicular a su superficie (eje z). En la superficie del conductor y en el lado interior del mismo, la amplitud del campo magnético es H_0 . Determinar el valor de la densidad de corriente generada en el conductor en función de z y t .
294. Sea el prisma de lucita que se muestra en la figura, con $n = 1,5$. Su sección es un cuarto de círculo de radio a . Uno de sus lados planos está situado horizontalmente sobre una mesa y la luz incide por la otra cara normalmente a la superficie. La región de la mesa entre P a Q no está iluminada. Demostrar que la posición de Q es $\overline{OQ} = 3a/\sqrt{5}$



295. Como ejemplo de velocidad de grupo, considerar un pulso ondulatorio Gaussiano de una cantidad que represente movimiento ondulatorio,

$$\phi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j(kx - \omega t)} f(k) \frac{dk}{2\pi} \quad ,$$

donde $f(k) = f_0 e^{-(k-k_0)^2 a^2}$. El rango de k está comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$ pero el integrando está "picado" en $k = k_0$, siendo la anchura del pico es del orden de $1/a$. Suponer que en el pico, $\omega(k)$ puede ser aproximado por

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\omega'(k_0) \quad .$$

(a) Evaluar la integral y obtener explícitamente la función $\phi(x, t)$ (Ayuda: Hacer $k = k_0 + q$, cambiar la variable de integración a q y utilizar tablas de integrales o *Mathematica* para resolverla). (b) Demostrar explícitamente que la velocidad de fase es $\omega(k_0)/k_0$ y la de grupo $\omega'(k_0)$.

296. La relación de dispersión de las ondas de gravitación (no confundir con las ondas gravitacionales) en aguas profundas es $\omega = \sqrt{gk}$. Demostrar que la velocidad de grupo es la mitad de la de fase. Buscar en la bibliografía alguna consecuencia de este hecho.
297. ¿Cuál es la reflectividad y transmisividad de ondas de radio AM (amplitud modulada), de frecuencia 1 MHz, que inciden normalmente sobre la superficie de un lago? (suponer que la permitividad dieléctrica del agua es $\varepsilon/\varepsilon_0 = 81$ a esa frecuencia).
298. El criterio para definir un buen conductor depende de la frecuencia y la conductividad del medio. Si la frecuencia es suficientemente baja, materia que intuitivamente consideramos aislante puede comportarse como conductora. Siguiendo esta idea, (a) ¿cuál es la longitud de penetración piel de una onda electromagnética de 10 KHz para: tierra seca ($\varepsilon = 3\varepsilon_0$, $\sigma = 10^{-4}$ S/m), tierra húmeda ($\varepsilon = 10\varepsilon_0$, $\sigma = 10^{-2}$ S/m) o agua del mar ($\varepsilon = 81\varepsilon_0$, $\sigma = 4$ S/m). Frecuencias en este rango son utilizadas para comunicaciones navales. (b) ¿Cuáles son las reflectividades de estos materiales a 10 KHz?
299. La impedancia característica de una onda se define como el cociente entre el campo $\mathbf{E}$ y el $\mathbf{H}$. Más concretamente, a partir de la relación $Z_0 \mathbf{H} = \mathbf{u} \times \mathbf{E}$, siendo $\mathbf{u}$ un vector unitario en la dirección de propagación de la onda. Hallar el módulo y la fase de la impedancia característica $Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$. Ayuda: trabajar con Z_0^2 .
300. Demostrar que, en un buen conductor, $\alpha = \beta = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$ y $Z_0 = \sqrt{\omega\mu/\sigma} e^{j\pi/4}$.
301. La siguiente tabla nos muestra la longitud de penetración piel del cobre en función de la frecuencia. Determinar, a partir de un ajuste lineal, la conductividad del cobre.
- | | | | | | | | |
|---------------|------|-----|-----|------|--------|----------------------|----------------------|
| f (Hz) | 10 | 60 | 100 | 500 | 10^4 | 10^8 | 10^{10} |
| δ (mm) | 20.8 | 8.6 | 6.6 | 2.99 | 0.66 | 6.6×10^{-3} | 6.6×10^{-4} |
302. El campo eléctrico de una onda que se propaga a través de un medio con $\varepsilon_r = 8$ y $\mu_r = 2$ es $\mathbf{E} = 0.5e^{-z/3} \sin(10^8 t - \beta z) \mathbf{u}_x$ V/m. Determinar: (a) β , (b) la tangente de pérdidas, (c) la impedancia de la onda y (d) la velocidad de la onda.
303. Calcular la relación entre las resistencias ac y dc para un hilo de aluminio (a) a 10 MHz y (b) a 2 GHz.

304. En un dieléctrico con pérdidas conviene definir un índice de refracción complejo $\tilde{n}$, de forma que la fase de la onda sea $e^{j\omega(t - \tilde{n}z/c)}$. Suponiendo que $\sigma \ll \omega\epsilon$, determinar la parte imaginaria (coeficiente de extinción k) de $\tilde{n}$ y relacionarlo con el coeficiente de atenuación α .
305. Demostrar que, cuando una onda electromagnética plana incide normalmente sobre la superficie de un conductor perfecto, $r = -1$. ¿Es esto compatible con la continuidad de las componentes tangenciales de los campos? Razonar la respuesta.
306. El ángulo de Brewster θ_B se define como el ángulo de incidencia para el cual $r_p = 0$. Demostrar que a $\theta = \theta_B$ los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí.
307. Una onda plana con $\mathbf{H}$ paralelo a una interfase en $z = 0$ incide con el ángulo de Brewster sobre un material plástico de $\epsilon_r = 4$. Hallar el campo eléctrico incidente, el transmitido y el reflejado.
308. Considérese una lámina conductora limitada por los planos $z = \pm d/2$. Si el vector $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{u}_x$ en la superficie de la lámina, hallar $\mathbf{H}$ y $\mathbf{J}$ en su interior.
309. El campo eléctrico de una onda polarizada circularmente a derechas (sentido contrario a las agujas del reloj mirando hacia la dirección de propagación) es $\mathbf{E} = \mathbf{u}_x \cos(\omega t - kz) + \mathbf{u}_y \sin(\omega t - kz)$. Hallar $\mathbf{H}$ y el producto $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ que, como veremos, representa el flujo de energía.
310. La constante dieléctrica de un vidrio no es realmente una constante, sino que depende ligeramente de la frecuencia. Suponer que la dependencia puede expresarse en la forma $\epsilon_r = (2 + 2 \times 10^{-15}/\lambda^2)^2$ (ecuación de Cauchy). Luz blanca, conteniendo el espectro visible, incide sobre una lámina gruesa de dicho vidrio con un ángulo $\theta_i = 65^\circ$. Calcular el ángulo al que se transmite la onda para los colores rojo ($f = 428.6 \times 10^{12}$ Hz) y violeta ($f = 750 \times 10^{12}$ Hz). Esta dispersión es el efecto prisma.
311. Hallar las velocidades de fase y de grupo para: (a) un buen conductor y (b) un buen dieléctrico. Comentar la frase: un dieléctrico con pérdidas presenta dispersión anómala.
312. (a) Utilizando $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$ y $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$, demostrar que

$$\mathbf{J} = -j \frac{Nq^2}{\omega m} \mathbf{E}$$

en una región que contiene N electrones por metro cúbico (con carga q y masa m) si la excitación es sinusoidal en el tiempo y la dispersión de los electrones es despreciable. (b) Reemplazando la corriente de conducción por la dada en la parte (a), demostrar que una solución en ondas planas para esa región es

$$E_x(z, \omega) = E_0(\omega) e^{-\gamma(\omega)z}$$

$$H_y(z, \omega) = \frac{E_0(\omega)}{Z_0(\omega)} e^{-\gamma(\omega)z}$$

donde

$$\gamma(\omega) = \sqrt{\mu\varepsilon} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$$
$$Z_0(\omega) = \sqrt{\mu/\varepsilon} [1 - (\omega_p/\omega)^2]^{-1/2}$$

y

$$\omega_p^2 \equiv \frac{Nq^2}{m\varepsilon}$$

es la frecuencia de plasma al cuadrado.

313. Hallar los coeficientes de reflexión y transmisión para una lámina delgada de espesor d . Suponer, por simplicidad, incidencia normal.