

Lección 12. La energía electrostática.

321. Sean dos esferas concéntricas de radios a y b ($b > a$). La primera tiene una densidad de carga $\rho_1(r)$ y la segunda sólo tiene carga entre c ($a < c < b$) y b con una densidad $\rho_2(r)$. Calcular la energía de interacción entre las dos esferas y la fuerza que existe entre ellas. Supongamos que la carga total de la esfera de radio a es Q_a y la de la corona esférica Q_b .
322. Sobre una superficie conductora de radio a y hasta un radio b hay una corona dieléctrica de permitividad ε . Hallar el trabajo necesario para cargar la superficie del conductor con una carga Q .
323. Calcular la energía de interacción entre dos dipolos alineados de momento dipolar $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ situados a una distancia d . ¿En qué posición relativa de los dos dipolos la energía de interacción es cero?
324. Calcular la energía electrostática necesaria para cargar una esfera con densidad de carga ρ uniforme. El radio de la esfera es a .
325. Dos superficies esféricas conductoras, de radios $a = 1$ m y $b = 2$ m, están cargadas, respectivamente, con cargas $Q_a = 1$ nC y $Q_b = 2$ nC. (a) Calcular el potencial electrostático de cada superficie. (b) ¿Cuánto varía la energía electrostática del sistema al conectar las dos esferas con un hilo conductor?
Tomar $1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \times 10^9$ V·m/C.
326. Calcular la energía que se necesita para cargar una esfera conductora de radio a con una carga Q en los siguientes casos: (a) La esfera está en el vacío. (b) La esfera está inmersa en un medio homogéneo e indefinido de permitividad ε .
327. Calcular la autoenergía de una superficie esférica de radio R cargada, con carga total Q , distribuida uniformemente sobre su superficie. ¿Cuál es el significado físico del resultado? ¿Cuál es el límite de la autoenergía cuando $R \rightarrow 0$?
328. (a) Demostrar que la energía electrostática de una esfera sólida de radio R cargada uniformemente con carga Q es $3Q^2/(20\pi\varepsilon_0 R)$. (b) Utilizar la información del apartado anterior para calcular la energía electrostática de un núcleo atómico [carga Ze , radio $(1,2 \times 10^{-15} \text{ m})A^{1/3}$] en unidades de $\text{MeV} \times A^2/a^{1/3}$. (c) Calcular el cambio en la energía electrostática cuando un núcleo de uranio ($Z = 92$, $A = 238$) se fusiona en dos fragmentos iguales.
329. Calcular la energía por unidad de longitud de dos capas cilíndricas coaxiales muy largas, despreciando los efectos de borde. Los radios de los cilindros interior y exterior son a y b y sus densidades de carga λ y $-\lambda$, respectivamente.

Lección 13. La energía magnética.

341. Calcular la energía de interacción entre una espira cuadrada de lado a y un hilo conductor indefinido, situado en el mismo plano que la espira y paralelo al lado más próximo, del que dista una distancia d , cuando los conductores están recorridos por una corriente I .
342. Por dos láminas conductoras paralelas, de anchura w y separadas una distancia d , circulan sendas corrientes I y $-I$. (a) Despreciando los efectos de borde, calcular el campo magnético entre las láminas. (b) Calcular la energía magnética por unidad de longitud. (c) Utilizar el resultado del apartado anterior para demostrar que la autoinductancia por unidad de longitud es $\mu_0 d/w$.
343. (a) El campo magnético medio en el espacio interestelar en nuestra galaxia es 10^{-10} T. Si suponemos que la galaxia tiene la forma aproximada de un disco, de diámetro 10^{21} m y espesor 10^{19} m, ¿cuál es la energía magnética total en la galaxia? La potencia total radiada por todas las estrellas de la galaxia es del orden de 10^{37} W. ¿Cuántos años se necesitan para que la energía radiada equivalga a la energía magnética de la galaxia? (b) El campo magnético en la superficie de una estrella de neutrones, o pulsar, es del orden de 10^8 T. ¿Cuál es la densidad de energía magnética para este campo? Utilizar la relación $E = mc^2$, encontrar la masa que corresponde a la densidad de energía. Comparar esto con la densidad de masa de una estrella de neutrones, suponiendo que tiene la masa del Sol en un radio de 10 km.
344. Suponer que el campo magnético terrestre, fuera de la Tierra, se corresponde con el de un dipolo de momento $m = 8 \times 10^{22}$ J/T (esto no es exactamente cierto porque el viento solar anula el campo magnético a una distancia de unas 10 veces el radio de la Tierra, pero la aproximación es buena para este ejercicio). Calcular la energía total magnética fuera de la Tierra. Comparar este resultado con el de la energía cinética de rotación de la Tierra.

Lección 14. La energía electromagnética.

351. A través de un solenoide infinito de n vueltas por unidad de longitud y radio a pasa una corriente que crece de 0 a I . Comprobar que se cumple el teorema de Poynting en un cilindro de altura unidad, coaxial con el solenoide y radio $b < a$.
352. Deducir el teorema de Poynting en un medio material explicando el significado físico de cada uno de los términos.
353. Sea una onda electromagnética plana, polarizada linealmente, viaja en un medio dieléctrico con pérdidas a lo largo del eje y . Se pide: (a) escribir la expresión del campo eléctrico de la onda. (b) Escribir la expresión del campo magnético. (c) Escribir el vector de Poynting. (d) Escribir la densidad de energía.
354. Escribir el teorema de Poynting para el volumen encerrado por una esfera de radio R .
355. El teorema de Poynting en forma integral, aplicado a un volumen V , puede escribirse en la siguiente forma:

$$-\int_V \frac{\partial u}{\partial t} dV = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV + \int_{S(V)} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} \quad ,$$

donde S es la superficie que exterior que limita dicho volumen. (a) Definir cada uno de los términos de dicha expresión. (b) Interpretar el significado físico del Teorema de Poynting, discutiendo cada uno de los términos.

356. Se tiene una onda electromagnética plana, cuyo campo eléctrico tiene una amplitud E_0 , que se propaga en el vacío en la dirección del eje z . Expresar en función de E_0 : (a) La densidad de energía almacenada por el campo electromagnético u_{em} ; (b) el vector de Poynting $\mathbf{P}$ y su relación con u_{em} y (c) la densidad de momento asociado a los campos.
357. Una onda plana que se propaga por un medio conductor tiene un campo eléctrico dado por

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha z} \cos(kz - \omega t) \mathbf{u}_x \quad .$$

Comprobar la conservación de la energía aplicando el Teorema de Poynting a un paralelepípedo de aristas paralelas a los ejes cartesianos.

Ayuda: utilizar el Teorema de Poynting complejo.

358. Considérese una onda electromagnética plana cuyo campo eléctrico es $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x$ propagándose en el vacío. Escribir el vector de Poynting complejo. Interpretar el valor y significado físico de la divergencia del vector de Poynting asociado a esta onda.
359. Se tiene una corriente continua I a lo largo de un cilindro indefinido de radio a , uniformemente distribuida sobre el mismo. Aplicar el teorema de Poynting a un cilindro de longitud h y radio $b < a$, coaxial con el cilindro indefinido, calculando cada uno de sus términos y comprobando que se cumple.

Lección 15. Las fuerzas y el momento del campo electromagnético.

361. Escribir el teorema de conservación del momento lineal en electrodinámica, describiendo y analizando el significado de los diferentes términos.
362. Escribir los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ de una onda electromagnética plana, armónica, linealmente polarizada según el eje x , que se propaga en el eje z , en el vacío. Deducir la relación existente entre la densidad de energía y la densidad de momento asociados al campo electromagnético de dicha onda.
363. Una burbuja esférica jabonosa tiene una carga Q distribuida uniformemente sobre su superficie. Si las presiones interior y exterior son iguales, encontrar el radio para el cual la fuerza de compresión debida a la tensión superficial compensa la fuerza eléctrica de repulsión. ¿Es este radio estable frente a perturbaciones?