Lección 2. El campo de las cargas en reposo: campo electrostático.

41. Sea el campo vectorial

$$\boldsymbol{E} = \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{u}_x + \frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{u}_y \quad .$$

¿Puede tratarse de un campo electrostático? ¿Cuánto vale el flujo de $\boldsymbol{E}$ a través de una superficie cúbica de lado 1 m si el centro del cubo está en el punto (3,3,3) m?

42. Dos esferas de radios a y b están cargadas con cargas Q y q respectivamente y separadas una distancia c. Analizar y responder en los supuestos siguientes: (a) Sean las esferas conductoras. ¿Cómo será la distribución de carga?: ¿uniforme?, ¿superficial? (b) Sean las esferas no conductoras con una distribución superficial de carga uniforme. Calcular el campo eléctrico en todo el espacio. (c) ¿Cuál es la dificultad, si la hay, de calcular el campo eléctrico en todo el espacio para el supuesto (a)?

43. Sea un conductor esférico macizo en equilibrio electrostático cargado con una carga Q y en su interior dos agujeros de forma arbitraria. (a) ¿Cómo será la distribución de la carga Q? (b) Si ponemos una carga adicional q en el interior de uno de los agujeros, ¿cómo se distribuirá ahora la carga? (c) Si manteniendo la configuración anterior se aproxima por el exterior una carga q_2 hasta una distancia d de la esfera, ¿cómo cambiarán, si lo hace, las distribuciones de carga?

44. Sea un conductor esférico macizo en equilibrio electrostático cargado con una carga Q, en cuyo interior hay dos agujeros de forma arbitraria. (a) ¿Cómo será la distribución de carga σ? (b) Si ponemos una carga puntual q dentro de uno de los agujeros, ¿cómo serán las distribuciones de carga? (c) Si se acerca una carga q_2 a una distancia d de la superficie de la esfera, ¿cómo se modifican, cualitativamente, las distribuciones de carga, si lo hacen?

45. Sea un conductor esférico macizo con dos agujeros de forma arbitraria en su interior. En los agujeros hay sendas cargas puntuales $+q$ y $-q$. En equilibrio electrostático, se pide: (a) El campo eléctrico en el conductor. (b) El campo eléctrico en el exterior del conductor.

46. Dos superficies conductoras concéntricas de radios a y b ($a < b$) se cargan a potenciales V_a y V_b, respectivamente. Se pide: (a) Representar el potencial electrostático $\phi(r)$ para $0 \le r < \infty$. Representar el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(r)$ para $0 \le r < \infty$.

47. En una esfera de radio a tenemos una carga Q distribuida de modo que crea un campo eléctrico radial de intensidad

$$E_r = \frac{k}{2\varepsilon_0} \quad , \quad 0 < r < a \quad ,$$

siendo k una constante. Suponer que tanto dentro como fuera de la esfera la constante dieléctrica es la del vacío. (a) ¿Cuál es la densidad de carga con que está distribuida la carga Q? (b) ¿Cuánto vale el campo eléctrico en la región externa a la esfera ($r > a$)?

48. A partir de la expresión del campo electrostático en el vacío de una distribución volumétrica de carga, encontrar la divergencia y el rotacional de dicho campo, explicando brevemente su significado físico.

49. Una esfera de radio a está cargada con una densidad constante $\rho > 0$. Supongamos que se realiza un agujero de anchura infinitesimal a lo largo del diámetro y se sitúa una carga negativa en el inicio de ese agujero, es decir en la superficie de la esfera. ¿Qué tipo de movimiento describiría la carga puntual?

50. El potencial Coulombiano de apantallamiento en un medio conductor se puede expresar por

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-r/\lambda}}{r} \quad .$$

Calcular el campo eléctrico y la densidad de carga correspondientes.

51. Tenemos un hilo rectilíneo e indefinido cargado uniformemente con una densidad lineal de carga λ constante. Coaxialmente con este hilo existe un tubo cilíndrico conductor indefinido de radios a y b ($a < b$). El conjunto está inmerso en el vacío. Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

52. (a) Calcular el campo electrostático en un punto $\boldsymbol{r}$ cualquiera interior de una distribución de carga con simetría esférica y densidad ρ constante. (b) Determinar los valores de $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$ en función de $\boldsymbol{r}$. Razonar la respuesta.

53. Dos esferas conductoras concéntricas, aisladas, de radios a y $2a$, se cargan con cargas Q y $2Q$ respectivamente. Obtener el potencial de las esferas conductoras y comentar el resultado. ¿Cuál sería el nuevo potencial de las esferas si se conectan con un hilo conductor?

54. Hallar el potencial de una línea de carga de longitud $2l$ y carga total q en el plano que corta el hilo por la mitad. Hallar el campo eléctrico. Obtener el potencial y el campo en el límite $l \to \infty$.

55. Un hilo semiinfinito está situado en la parte negativa del eje z, desde $z = 0$ a $z \to -\infty$, tiene densidad de carga λ constante. (a) Hallar $\boldsymbol{E}$ en un punto $(0, 0, z)$ del eje z positivo. (b) Hallar $\boldsymbol{e}$ en cualquier punto $(x, 0, 0)$ sobre el eje x positivo.

56. Hay una carga Q en el origen. (a) Calcular el flujo de $\boldsymbol{E}$ a través de un cubo centrado en el origen y alineado según los ejes cartesianos. Evaluar las integrales de superficie directamente y comprobar que el resultado concuerda con el teorema de Gauss. (b) Calcular el flujo de $\boldsymbol{E}$ a través de un cubo con un vértice en el origen y con el resto del cubo en el octante con $x, y, z > 0$. Evaluar la integral de superficie directamente. ¿Por qué no concuerda el resultado con el teorema de Gauss?

57. Una carga $+q$ está situada en el punto $(0, 0, z_0)$. (a) ¿Cuál es el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ generado? (b) Integrando explícitamente el campo sobre una esfera de radio $R > z_0$ demostrar que $\int\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$.

58. Sean dos placas grandes paralelas idénticas con densidades de carga $+\sigma$ y $-\sigma$, respectivamente, separadas una distancia d. (a) Determinar el campo entre las placas, lejos de los extremos. (b) Determinar la fuerza por unidad de longitud en cada placa, despreciando los efectos de borde (de los extremos).
Ayuda: una placa no ejerce fuerza sobre sí misma.

59. Sobre dos coronas esféricas de radios a y b ($b > a$) se han distribuido uniformemente cargas $+Q$ y $-Q$, respectivamente. Hallar el campo $\boldsymbol{E}$ en la región entre a y b, $a < r < b$. ¿Cómo cambia el campo si la placa exterior se descarga?

60. (a) Considerar la función potencial $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r}$, siendo $\boldsymbol{C}$ un vector constante. ¿Cuál es el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$? ¿Cuál es el potencial $V(\boldsymbol{r})$ correspondiente aun campo eléctrico uniforme de intensidad E_0 y dirección $\boldsymbol{u}_z$?

61. Consideremos el campo

$$\boldsymbol{E} = (2x^2 - 2xy - 2y^2)\boldsymbol{u}_x + (-x^2 - 4xy + y^2)\boldsymbol{u}_y \quad .$$

¿Es irrotacional? Si es así, calcular la función potencial. Calcular también la $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$.

62. Encontrar las restricciones sobre C_1 y C_2 para que la función

$$V(r,\theta) = \frac{C_1\cos^2\theta + C_2}{r^3}$$

sea el potencial en una región libre de carga.

63. Sean 3 esferas cargadas huecas, concéntricas, de radios R, $2R$ y $3R$ y cargas $+Q$, $-Q$ y $+Q$, respectivamente. (a) Determinar el campo eléctrico en los puntos a, b, c y d, situados a lo largo de la dirección radial en los puntos $0,5R$, $1,5R$, $2,5R$ y $3,5R$ con origen en el centro de las esferas. (b) Determinar la razón E_d/E_b.

64. Sea un hilo indefinido de radio R cargado con densidad uniforme ρ_0, con un agujero esférico en el centro. Hallar el campo y el potencial en todo el espacio.

65. El hilo vertical de la figura tiene una densidad lineal de carga $\lambda_1 = -30$ μC/m, mientras que la densidad del hilo horizontal semiinfinito es $\lambda_2 = 0,2$ mC/m. Calcular el campo en los puntos P_1 y P_2 de la figura, a 50 cm del extremo del hilo semiinfinito.

66. Hallar el campo eléctrico a una altura z sobre el centro de una placa cuadrada de lado a con una densidad uniforme de carga σ. Comprobar el resultado a partir de los casos límites $a \to \infty$ y $a \to 0$.

67. Si el campo eléctrico en una región del espacio viene dado por

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{A\boldsymbol{u}_r + B\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{u}_\phi}{r} \quad ,$$

donde A y B son constantes, ¿cuál es la densidad de carga?

68. Supongamos el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(x,y,z)$ dado por

$$E_x = ax \quad , \quad E_y = 0 \quad , \quad E_z = 0 \quad ,$$

donde a es una constante. ¿Cuál es la densidad de carga? ¿Cómo se tiene en cuenta que el campo apunta en una dirección determinada cuando la densidad de carga es uniforme?

69. Encontrar la carga total y el campo eléctrico en cualquier punto del espacio, correspondiente a una línea cargada de densidad

$$\rho(x,y,z) = \begin{cases} bz\delta(x)\delta(y) & z \in (a,-a) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

situada en el eje z entre $-a$ y a. Hallar el potencial electrostático.

70. Encontrar el campo eléctrico a lo largo del eje de un anillo cargado de radio a situado sobre el plano xy, cuando la densidad de carga del anillo varía sinusoidalmente como

$$\rho = \lambda_0(1+\sin\phi)\delta(r-a)\delta(z) \quad .$$

Hallar el potencial electrostático.

71. Hallar el campo eléctrico a lo largo del eje de un disco circular de radio a con una distribución de carga $\rho = br^2\delta(z)$ cuando $r \leq a$ y 0 en el resto del espacio. Hallar el potencial electrostático.

72. Hallar el campo eléctrico producido por una distribución esférica de carga de valor $\rho_0 e^{-kr}$. Hallar el potencial electrostático.

73. Dada la distribución esférica de carga

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2$$

para $r < a$ y 0 para $r \geq a$, hallar el campo eléctrico y el potencial que produce.

74. Aplicamos una carga Q a un disco de ebonita de radio a frotándolo mientras gira. De esta manera la densidad de carga es proporcional a la distancia radial desde el centro del disco. Hallar el campo eléctrico sobre el eje del disco.

75. Hallar el campo eléctrico debido a cada uno de los potenciales:
(a) $V = e^{-x}\sinh y \sin z$
(b) $V = \dfrac{1}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}$
(c) $V = \rho e^{-z}\cos\phi$
(d) $V = \dfrac{\sin\theta\cos\phi}{r^2}$

76. Hallar el potencial a que da lugar cada uno de los siguientes campos eléctricos:
(a) $\boldsymbol{E} = 2xy\boldsymbol{u}_x + x^2\boldsymbol{u}_y - \boldsymbol{u}_z$
(b) $\boldsymbol{E} = e^{-z}(\sin\phi\boldsymbol{u}_\rho + \cos\phi\boldsymbol{u}_\phi - \rho\sin\phi\boldsymbol{u}_z)$
(c) $\boldsymbol{E} = \dfrac{\sin\theta}{r}\boldsymbol{u}_r + \dfrac{\ln r}{r}\cos\theta\boldsymbol{u}_\theta$

77. En un dispositivo de unión pn, ésta está situada $x = 0$ como muestra la figura. El potencial en el dispositivo viene dado por

$$\phi(x) = \left[1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right]\frac{V_0}{2} \quad ,$$

donde a es la anchura de la región de la unión y V_0 es la diferencia de potencial total. (a) Hallar el campo eléctrico y la densidad de carga de volumen ρ_V. (b) Dibujar la variación de ϕ, E y ρ_V en función de x. (c) ¿Cuál es la carga neta del dispositivo?