Lección 3. El campo de las corrientes estacionarias. El campo magnetostático.

81. Un campo vectorial está definido por

$$\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{u}_x \qquad (r < a)$$

$$B_r = \frac{A\cos\varphi}{r^2} \quad ; \quad B_\varphi = \frac{C\sin\varphi}{r^2} \qquad (r > a)$$

donde r y φ son coordenadas cilíndricas. Expresar A y C en función de B_0 para que dicho campo represente un campo magnético.

82. Un estudiante muy ambicioso ha conseguido obtener el potencial vector de un solenoide infinito. Éste es:

$$\boldsymbol{A} = \begin{cases} \boldsymbol{u}_\phi \mu_0 J_s \rho/2 & 0 \le \rho \le a \quad ; \\ \boldsymbol{u}_\phi \mu_0 J_s a^2/(2\rho) & a \le \rho < \infty \quad . \end{cases}$$

Comprobar que el estudiante ha hallado el resultado correcto (J_s es una densidad de corriente superficial y ρ es la coordenada radial cilíndrica, a es el radio del solenoide). ¿Es éste el único resultado posible?

83. Sea una distribución superficial de corriente que circula en la dirección $\boldsymbol{u}_\phi$ por las paredes de un cilindro muy largo de radio a. (a) Calcular el campo en el interior del cilindro. (b) ¿Cómo se altera, si lo hace, el campo en el centro del cilindro si la longitud es L?

84. Dos planos conductores paralelos transportan una densidad de corriente superficial $\boldsymbol{K}$ (a) en el mismo sentido y (b) en sentidos opuestos. Hallar el campo magnético $\boldsymbol{B}$ en todo el espacio.

85. Sea un condensador de placas paralelas circulares de radio a, separadas una distancia $d << a$, alimentado por una corriente $\mathcal{I}$ constante. Suponiendo que la corriente se distribuye instantáneamente sobre las placas del condensador, determinar el campo eléctrico existente entre las placas. Determinar asimismo, el campo magnético entre las placas del condensador.

86. Deducir un potencial vector magnético para el campo magnético creado por una corriente superficial homogénea, $\boldsymbol{K} = K\boldsymbol{u}_y$, que se propaga en el plano $z = 0$ (K es una constante).

87. Una esfera de radio a cargada con una densidad de carga superficial σ gira en torno a un diámetro con velocidad angular ω. El campo magnético en el eje de giro es $2/3\mu_0\sigma a\omega\boldsymbol{u}_z$. Demostrar que el campo magnético es uniforme en todos los puntos de la esfera.

88. Dos hilos conductores de radio a, rectilíneos y paralelos, cuyos ejes están separados una distancia $3a$, transportan una corriente $+I$ y $-I$ respectivamente. Las corrientes se encuentran distribuidas uniformemente en la sección de los hilos. Obtener el campo magnético en los siguientes puntos: (a) Sobre el eje del hilo que transporta la corriente $+I$. (b) En el punto que se encuentra a una distancia $a/2$ del eje del hilo con una corriente $+I$ y a una distancia $5a/2$ del eje del hilo con corriente $-I$ y contenido en el plano de ambos hilos.

89. Escribe las ecuaciones diferenciales que determinan el campo magnetostático en el vacío y explica su significado físico (no se pide la deducción). Da un ejemplo de un campo vectorial que no pueda ser un campo magnetostático y razónalo.

90. En el plano xy se tiene una corriente superficial $\boldsymbol{K} = K_x\boldsymbol{u}_x + K_y\boldsymbol{u}_y$. Determinar el campo magnético generado por dicha corriente en todos los puntos del espacio, expresado en los ejes coordenados xyz en los que la corriente está dada.

91. Una esfera hueca de radio a con densidad superficial de carga σ gira alrededor de su eje con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{u}_z$. Demostrar que el potencial vector es:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0\sigma a}{3}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} & \text{si}\, r<a \\ \dfrac{\mu_0\sigma a^4}{3r^3}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} & \text{si}\, r>a \end{cases}$$

¿Cuál es el campo magnético, dentro y fuera de la esfera?

92. Por medio de dibujos, mostrando las direcciones de las corrientes, campos y fuerzas, demostrar que corrientes paralelas y opuestas se repelen.

93. Considerar dos hilos largos paralelos separados una distancia $d = 1$ m, transportando una corriente I en la misma dirección. (a) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud $f = dF/dl$ si $I = 1$ A? (b) ¿Cuál debe ser la corriente I para que $f = 1$ N/m?

94. *Bobinas de Helmholtz.* Dos bobinas circulares de radio a, cada una con corriente I, circulando en la misma dirección, están situadas en el plano xy con sus centros en $(0,0,\pm s/2)$. Sobre el eje z el campo magnético es $\boldsymbol{B} = B(z)\boldsymbol{u}_z$, en la dirección z y en el punto $z=0$, es decir el punto medio entre las bobinas, $\partial B/\partial z = 0$. (a) Determinar s de manera que $\partial^2 B/\partial z^2 = 0$ en $z = 0$ sobre el eje z. La configuración se denomina *Bobinas de Helmholtz* y produce un campo muy homogéneo cerca del origen. Demostrar que para esta configuración la tercera derivada del campo respecto de z es también cero en el origen. (b) Utilizar un programa de dibujo para dibujar la función $B(z)$ en la región de las bobinas.
Las bobinas de Helmholtz se utilizan en el laboratorio para cancelar el campo magnético terrestre. También es una de las configuraciones utilizadas en los grandes imanes superconductores.

95. Hallar el campo magnético en el centro de un cuadrado de lado $2a\times 2a$ por el que circula una corriente I. Repetir el cálculo para un polígono de n lados, siendo la distancia de cualquier lado al centro a. Demostrar que el resultado se aproxima al campo en el centro de una esperia de radio a en el límite $n\to\infty$.

96. Una espira cuadrada de lado $2a\times 2a$ está situada en el plano xy con el centro en el origen y lados paralelos a los ejes coordenados. Una corriente I circula por la espira en sentido anti-horario. (a) Demostrar que el campo magnético sobre el eje z es

$$B_z(z) = \frac{2\mu_0 I a^2}{\pi(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}$$

97. Comparar el resultado del ejercicio anterior con el de una espira circular de radio a.

98. Consideremos el campo magnético $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = axy\boldsymbol{u}_x + by^2\boldsymbol{u}_y$. (a) ¿Cuál es la relación que deben cumplir las constantes a y b? (b) ¿Cuál es la distribución de corrientes $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ que produce este campo? Describir la densidad de corriente con palabras y dibujos.

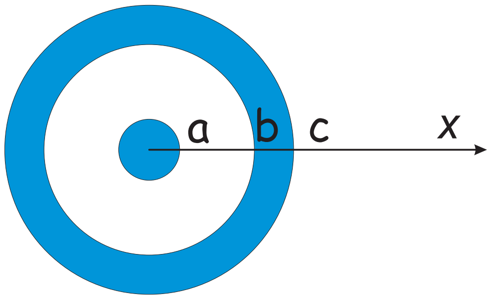
99. Consideremos una espira circular de radio a sobre el plano xy con centro en el origen de coordenadas, por la que circula una corriente I. Sobre el eje z, el campo tiene la forma $B_z(z)\boldsymbol{u}_z$. Determinar $B_z(z)$ y evaluar la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} B_z dz$. Por el teorema de Ampère, el resultado de la integral ha de ser $\mu_0 I$. ¿Por qué?

100. Determinar, utilizando el teorema de Ampère, el campo magnético en un solenoide toroidal de N espiras, de radio interior a y radio exterior b. La sección transversal del toroide es rectangular, de anchura $b - a$ y altura h. Demostrar que tomando el límite $a \to \infty$, $b \to \infty$, con $b - a$ constante y densidad lineal de espiras constante, el campo magnético tiende al campo de un solenoide rectilíneo.

101. A partir del resultado del campo magnético de una lámina de espesor despreciable, hallar el campo magnético de una lámina de espesor $2a$, dentro y fuera de la lámina. Suponer para ello que la densidad de corriente en la lámina es $\boldsymbol{J} = J_0\boldsymbol{u}_x$ y la lámina se extiende entre $-a \leq z \leq a$ y es infinita en las direcciones x e y.

102. Sea la distribución de corrientes del ejercicio anterior, pero con la dependencia $\boldsymbol{J}(z) = j_0|z|/a\boldsymbol{u}_x$, donde j_0 es una constante con dimensiones de A/m^2. (a) ¿Cuál es el campo magnético en el interior de la lámina, arriba y abajo de ella? (b) Dibujar esquemáticamente $B_y(z)$.

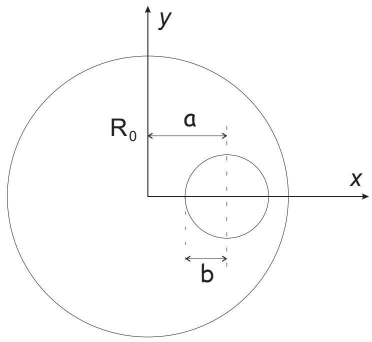
103. En la figura se muestra la sección transversal de un cable coaxial. Por el hilo interior, de radio a, pasa una corriente I hacia fuera del papel, mientras que por el hilo exterior, de radio interior b y exterior c, la corriente, de igual magnitud, circula hacia dentro del papel. En el hueco entre los dos hilos hay vacío (ε_0, μ_0). (a) Utilizando el teorema de Ampère, hallar el campo magnético en todo el espacio. (b) Dibujar el campo en función de la distancia al hilo.



104. Sea un hilo largo por el que circula una corriente I, paralelo al eje z y que pasa por el punto $(x, y) = (a, 0)$. Escribir explícitamente la integral correspondiente a la circulación del campo magnético del hilo a través de un círculo de radio $R > a$, centrado en el origen. El resultado de la integral es, obviamente, $\mu_0 I$.

105. Consideremos el potencial vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}$. ¿Cuál es el campo magnético correspondiente?

106. Un hilo largo, cilíndrico, de radio R_0, transporta una corriente I_0. El hilo tiene un agujero de radio b a lo largo del cilindro, separado una distancia a de su centro (ver figura). Utilizando el teorema de Ampère y el principio de superposición, determinar el campo magnético en todo el espacio.



107. Un disco delgado de radio R y densidad superficial de carga σ gira con frecuencia angular ω constante alrededor de su eje. ¿Cuál es el campo magnético generado sobre el eje del disco?

108. Un disco anular de radios interior a y exterior b, con densidad superficial de carga σ, gira alrededor de su eje a una velocidad angular ω constante. Hallar el campo magnético sobre el eje del anillo.

109. Dada la función vectorial

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, z) = \frac{V_0 a}{r} e^{-r^2/a^2} \boldsymbol{u}_\phi,$$

comprobar que se trata del potencial vector correspondiente a cierto campo magnético $\boldsymbol{B}$.

110. Dada la función vectorial

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}, z) = V_0 e^{-r^2/a^2} \boldsymbol{u}_z,$$

comprobar que se trata del potencial vector correspondiente a cierto campo magnético $\boldsymbol{B}$.

111. El campo magnético de un solenoide de radio a y longitud l (el eje del solenoide se encuentra a lo largo del eje z y éste está centrado en el origen) es, sobre el eje z,

$$\boldsymbol{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{l/2 - z}{\sqrt{a^2 + (l/2 - z)^2}} + \frac{l/2 + z}{\sqrt{a^2 + (l/2 + z)^2}} \right] \boldsymbol{u}_z.$$

Comprobar la homogeneidad del campo en el origen y decir qué factor l/a es el adecuado para que el solenoide tenga una homogeneidad mejor que un 1% en comparación con dos bobinas de Helmholtz (cuestión 94). En las bobinas de Helmholtz, la distancia entre las dos bobinas es igual a su radio.

112. Sean dos corrientes filiformes paralelas. Elegir adecuadamente un contorno que contenga ambas corrientes y comprobar que se cumple el teorema de Ampère.

113. Hallar el potencial escalar de un hilo y comprobar que es una función multivaluada.

114. Hallar el potencial vector de un solenoide. El potencial vector de un toroide no puede expresarse de forma sencilla en ninguno de los sistemas de coordenadas que manejáis a menudo. Pero sí podemos dibujar las líneas de campo del potencial vectorial de un toroide, a partir del potencial vector de un solenoide y la ley de Biot-Savart.

115. Consideremos los semiplanos correspondientes a los cuadrantes xz e yz ($x > 0$, $y > 0$). Supongamos una densidad superficial de corriente $\boldsymbol{K} = -K_0 \boldsymbol{u}_x$ que incide desde $x \to \infty$ a $x = 0$ y luego se desplaza por el plano yz en la dirección positiva del eje y. Hallar el campo magnético por integración directa.

116. A partir de la expresión del campo de una espira en su eje y los razonamientos oportunos, determinar el campo en puntos próximos al eje de la espira.

117. Hallar el campo de una superficie cilíndrica cargada con densidad σ uniforme que gira respecto a su eje a una velocidad angular ω constante.