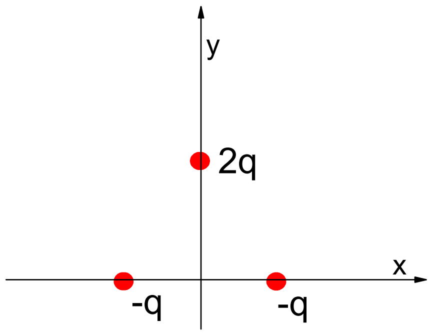
Lección 4. Desarrollo multipolar del potencial escalar. Las fuentes puntuales del campo electrostático.

121. Calcular el momento dipolar de una esfera de radio a uniformemente cargada con densidad ρ, (a) respecto a su centro y (b) respecto a un punto situado en la superficie.

122. Una distribución superficial de carga sobre el plano (x, y) de forma arbitraria, tiene un momento dipolar resultante $\boldsymbol{p} = 25\boldsymbol{k}$ C·m. Discutir y razonar sobre la validez de esta afirmación en los dos casos siguientes: (a) La carga total es nula; (b) la carga total no es nula.

123. Dos pequeños hilos no conductores de grosor despreciable y longitud 1 cm se cargan con cargas -1 μC y $+1$ μC. Se ponen los hilos formando una línea de 2 cm. Hallar el campo eléctrico a grandes distancias de los hilos. Si se ponen los dos hilos en paralelo, separados una distancia $d = 10$ μm, podríamos definir una densidad lineal de dipolos. Hallar dicha densidad lineal (despreciar los posibles efectos de borde) y el campo eléctrico a grandes distancias.

124. Sean tres cargas puntuales, de valor $q_1 = 2q$, $q_2 = q_3 = -q$ situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a, conforme indica la figura. Determinar los momentos monopolar, dipolar y cuadrupolar de esta distribución de carga.



125. Dos dipolos, $\boldsymbol{m}_1$ y $\boldsymbol{m}_2$ están sobre un plano. Uno de ellos se mantiene fijo mientras que el otro pude girar sobre sí mismo sobre el plano. Encontrar la relación entre los ángulos que forman ambos dipolos con el vector que los une para que el sistema esté en equilibrio.

126. Calcular el momento dipolar eléctrico de una barra de longitud $2l$ en la que la primera mitad de longitud l está cargada con una densidad lineal uniforme λ y la segunda mitad lo está con densidad uniforme $-\lambda$: (a) respecto al centro de la barra, (b) respecto a un extremo y (c) respecto de un punto que dista $2l$ del centro de la barra en la dirección perpendicular a la misma.

127. Una molécula de agua (H_2O) pude interpretarse como una carga $-2q$ en el origen de un sistema de coordenadas y dos cargas $+q$ a distancias $|\boldsymbol{d}_1| = |\boldsymbol{d}_2| = d = 10^{-11}$ m. El ángulo formado por $\boldsymbol{d}_1$ y $\boldsymbol{d}_2$ es de 120°. Si el momento dipolar (en módulo) de una molécula de agua es de 6×10^{-30} C·m, encontrar el valor de la carga efectiva q ($q > 0$).

Calcular la fuerza que una molécula de agua ejerce sobre otra molécula de agua con momentos dipolares paralelos y en el mismo sentido; la distancia entre ambas moléculas es $a = 10^{-8}$ m.

128. Tenemos una barra de sección despreciable y longitud L. Una mitad de la barra está cargada con carga $+q$ y la otra mitad con $-q$, siendo uniforme la distribución de carga en cada mitad. (a) Calcular los dos primeros momentos multipolares del potencial electrostático, tomando en origen del sistema de referencia en el centro de la barra. (b) Calcular el potencial electrostático que crea dicha barra a grandes distancias (comparadas con L) usando los dos términos del desarrollo multipolar calculado en el apartado anterior. (c) Repetir el primer apartado tomando como origen del sistema de referencia un extremo de la barra.

129. Calcular la fuerza de interacción entre dos dipolos de momento dipolar $\boldsymbol{p}$ situados a una distancia a uno del otro, tal como indica la figura.

130. Sobre un anillo de radio a situado en el plano $z = 0$ y centrado en el origen se sitúa una distribución lineal de dipolos con densidad $\boldsymbol{\tau}$ por unidad de longitud y sentido paralelo al eje z. (a) Obtener el campo eléctrico sobre el eje z. (b) Obtener el campo eléctrico a grandes distancias para cualquier punto del espacio.

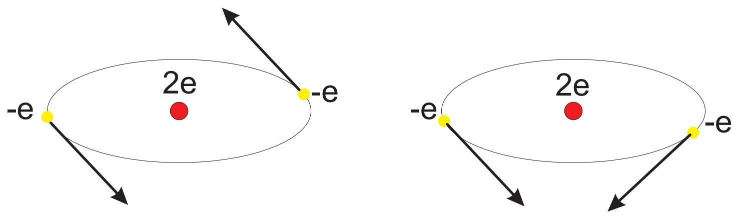
131. ¿En qué casos el momento dipolar eléctrico de una distribución de carga electrostática es independiente del punto P respecto al cual se calcula? Demuéstralo.

132. Tenemos un rectángulo de espesor despreciable y de lados a y b ($b = a/2$). Cada mitad de dicho rectángulo tiene una carga $+q$ y $-q$, distribuidas uniformemente. (a) Calcular los dos primeros momentos multipolares del potencial electrostático, tomando el origen del sistema de referencia en el centro del rectángulo. (b) Calcular el potencial electrostático que crea dicho rectángulo a grandes distancias (comparadas con a y b) usando los dos términos del desarrollo multipolar calculados en el apartado anterior. (c) Repetir el primer apartado tomando como origen del sistema de referencia la esquina inferior izquierda del rectángulo.

133. Un dipolo de momento dipolar $\boldsymbol{p}$ está situado a una distancia L de una carga puntual q, siendo paralelo a la dirección que une el dipolo con la carga (ver figura). Calcular el trabajo necesario para aproximar el dipolo a la carga hasta una distancia $L/2$.

134. Encontrar el momento cuadrupolar de una barra de longitud L con una densidad de carga $\rho = \eta(z^2 - L^2/12)$, con z medida a partir del centro de la barra.

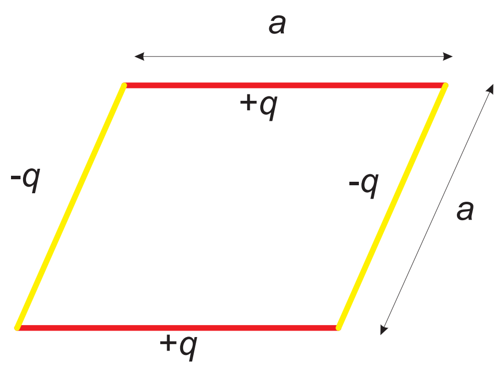
135. El modelo clásico de un átomo de He tiene dos electrones orbitando alrededor de su núcleo. Suponiendo que los electrones tienen órbitas circulares coplanares de radio a y giran con una frecuencia angular ω. Encontrar el momento dipolar y cuadrupolar en función del tiempo en cada uno de los siguientes casos: (a) los electrones rotan diametralmente opuestos como en la parte izquierda de la figura y (b) los electrones giran en sentidos opuestos como el esquema mostrado en la parte derecha de la figura.



136. Encontrar el potencial correspondiente a una distribución superficial de dipolos. Tomar $\boldsymbol{D} = n\langle\boldsymbol{p}\rangle$ como la densidad superficial de dipolos, siendo n el número de dipolos por unidad de área y $\langle\boldsymbol{p}\rangle$ el momento dipolar medio.

137. Situar 8 cargas sobre los vértices de un cubo de lado $2a$ de manera que el momento cuadrupolar sea nulo. Utilizando el desarrollo multipolar, escribir una expresión para el momento octupolar. Tomar el origen de coordenadas en el centro del cubo por simplicidad.

138. Encontrar el momento cuadrupolar de un cuadrado de lado a con cargas $+q$ y $-q$ uniformemente distribuidas sobre los lados del cuadrado, como muestra la figura.



139. Demostrar que el potencial electrostático generado por un cuadrupolo con simetría cilíndrica en el origen es

$$V = \frac{Q_{zz}}{16\pi\varepsilon_0 r^3}(3cos^2\theta - 1).$$

140. A partir de la fuerza sobre un elemento de corriente en presencia de un campo magnético ($d\boldsymbol{F} = id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$, demostrar que la fuerza sobre un pequeño dipolo $\boldsymbol{m}$ en un campo magnético $\boldsymbol{B}$ es $\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B})$.

Lección 5. Desarrollo multipolar del potencial vector. Las fuentes puntuales del campo magnetostático.

141. Sea una distribución superficial de corriente $\boldsymbol{K}$ en una esfera de radio a. Calcular el campo magnético a grandes distancias de la esfera.

142. Sea una distribución de corriente superficial $K\vec{u}_\phi$ en una esfera de radio a. Calcular el campo magnético a grandes distancias de la esfera.

143. Un circuito filiforme plano de forma rectangular está recorrido por una corriente estacionaria de valor I. Las dimensiones del circuito son a y b ($a > b$). El centro geométrico del circuito se encuentra en el origen de un sistema de referencia; el lado a es paralelo al eje x y el lado b es paralelo al eje y. Se pide: (a) El momento dipolar magnético del circuito. (b) La expresión del potencial vector magnético a grandes distancias. (c) La expresión del campo magnético a grandes distancias.
Nota: Considerar válida la aproximación dipolar en los apartados (b) y (c).

144. Un dipolo magnético está situado en el vacío, en el origen de coordenadas, y su momento magnético es $\boldsymbol{m} = m_0\boldsymbol{u}_z$, con $m_0 = 10^{-2}$ A·m^2. Calcular el valor del potencial vector magnético y del campo magnético en el punto $(0, 2, 2)$.

145. Un dipolo magnético de momento $\boldsymbol{m}$ y dirección arbitraria está situado en una lente magnética cuyas componentes de campo son

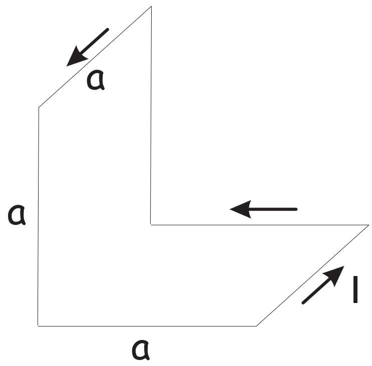
$$B_x = \alpha(x^2 - y^2) \quad , \quad B_y = -2\alpha xy \quad , \quad B_z = 0 \quad ,$$

siendo z el eje de la lente y α una constante. ¿Cuáles son las componentes de la fuerza sobre el dipolo?

146. Se tienen dos dipolos magnéticos $\boldsymbol{m}_1$ y $\boldsymbol{m}_2$ separados una distancia a (ver figura). (a) Por consideraciones físicas determinar el sentido de la fuerza en las dos configuraciones de la figura. (b) Calcular la fuerza magnética que ejerce uno sobre el otro en ambos casos.

147. Se tiene un disco cargado con una densidad superficial de carga uniforme σ. El disco gira con velocidad angular uniforme ω respecto a su eje de simetría de revolución. Determinar su momento dipolar magnético. Razonar la respuesta.

148. Sea una espira rectangular de lados a y $2a$. Dóblese 90° de modo que todos los lados sean de longitud a (ver figura). Una corriente I circula por tal espira alabeada. ¿Cuál es el momento magnético, $\boldsymbol{m}$, de dicha espira?


a
a
I
a