Lección 7. Ecuaciones de Maxwell. Ondas electromagnéticas.

201. Escribir las ecuaciones de Maxwell válidas en medios materiales. Definir los diferentes términos y su significado físico. Deducir las condiciones que deben de satisfacer los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ en la interfase de separación entre dos medios dieléctricos de constantes ε_1 y ε_2.

202. El campo eléctrico de una onda armónica plana viene dado por la expresión

$$\boldsymbol{e} = E_0 \boldsymbol{u}_x e^{-j(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \quad , \quad \boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_y - \boldsymbol{u}_z),$$

donde E_0 es una constante, ω la frecuencia angular, c la velocidad de la luz en el vacío y $\boldsymbol{r}$ el vector posición de un punto cualquiera. La onda incide sobre una superficie conductora situada en el plano $z = 0$. Escribir las ecuaciones de los campos eléctrico y magnético de la onda reflejada en un punto cualquiera del espacio y en un instante cualquiera. Suponer que se trata de un conductor perfecto.

203. Una onda electromagnética plana y monocromática de 300 MHz se propaga en el vacío a lo largo de eje z. El campo eléctrico es paralelo al eje x y alcanza su valor máximo de 350 V/m en el punto (0,0,1) y en el instante $t = 0$. Expresar el campo eléctrico y magnético en función de la posición y el tiempo.

204. Una onda electromagnética plana y monocromática de 300 Mhz se propaga en el vacío a lo largo del eje z. El campo eléctrico es paralelo al eje x y alcanza su valor máximo de 350 V/m en el punto (0,0,1) y en el instante $t = 0$. Expresar el campo eléctrico y magnético en función de la posición y el tiempo.

205. Escribir el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ de una onda plana circularmente polarizada que se propaga en la dirección x. Definir cada uno de los parámetros que aparecen. Hallar el vector $\boldsymbol{H}$ correspondiente a partir de $\boldsymbol{E}$.

206. En un sistema situado en el vacío se tiene que el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(z, t)$ es la parte real del campo complejo

$$\boldsymbol{E}(z, t) = \boldsymbol{E}_0 e^{j(\alpha z - \omega t)},$$

donde $\boldsymbol{E}_0$ es un vector constante. Se pide: (a) ¿qué relación existe entre α y ω?, (b) ¿qué dirección tiene el vector constante $\boldsymbol{E}_0$? y (c) ¿cuál será el valor máximo del campo $\boldsymbol{H}$ asociado?

207. (a) ¿Cómo demostrarías que, en el caso electrostático se cumple $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$? (b) ¿Cómo demostrarías que la ecuación $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ se cumple para cualquier valor de $\boldsymbol{B}$?

208. Proponer la expresión del campo eléctrico de una onda electromagnética plana, armónica, de frecuencia angular $\omega = 3 \times 10^6$ rad/s, que se propaga en el vacío en la dirección del vector $(1, 1, 1)$ y cuyo vector campo eléctrico es 10 V/m. Obtener la expresión del campo magnético asociado.

209. Una onda electromagnética plana, armónica y linealmente polarizada se propaga en el vacío en la dirección del vector $(1, 1, 1)$. La amplitud del campo eléctrico de dicha onda es de 10 V/m y su frecuencia de 200 MHz. En el instante $t = 5$ s el campo eléctrico de dicha onda vale $\sqrt{2}(1, -1, 0)$ en el origen de coordenadas. Encontrar una expresión para el campo eléctrico ya para el campo magnético de dicha onda en cualquier punto del espacio y cualquier instante de tiempo.

210. Escribe en coordenadas cartesianas el campo eléctrico y el campo magnético (en un punto P cualquiera del espacio) de una onda electromagnética plana y armónica, que se propaga en el vacío con la dirección y el sentido del vector $\boldsymbol{v} = (0, 1, 1)$. La onda está linealmente polarizada y el campo eléctrico vale en el origen de coordenadas y el instante $t = 0$ $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{u}_x$, siendo E_0 la amplitud del campo eléctrico.

211. Escribir los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, en un instante cualquiera t y en un punto cualquiera de coordenadas (x, y, z), de una onda plana y armónica, de frecuencia angular ω, que se propaga en el vacío con la dirección y el sentido del vector (0,1,0), cuyo campo eléctrico tiene la dirección del eje z y su amplitud es de 30 V/m.

212. En 1929, M. R. Van Cauwenberghe, de la Universidad Libre de Bruselas, midió de forma directa el campo magnético producido por la corriente de desplazamiento entre las placas de un condensador plano-paralelo. En el experimento real las placas tenían una forma especial, pero eran aproximadamente discos paralelos de 1,5 m de diámetro separados 0,4 m. Él aplicó a los discos una tensión alterna de 174 KV de amplitud y 50 Hz de frecuencia. Calcular el campo magnético entre las placas a una distancia de 0,4 m del centro de los discos suponiendo aire entre las placas.
Para medir un campo tan pequeño, Van Cauwenberghe diseñó un magnetómetro que consistía en un solenoide toroidal con núcleo de hierro, suspendido paralelo a los planos del condensador en el semiplano del mismo. Utilizando un núcleo de hierro aumentó la sensibilidad en un factor mayor que 10^3. Por otra parte el solenoide tenía 813 vueltas, lo cual aumentaba nuevamente la sensibilidad otro factor de 10^3. Finalmente, midió fuerzas electromotrices inducidas en el solenoide del orden de 0,1 mV. Sus medidas concuerdan con la teoría de Maxwell que proporciona el campo magnético inducido por la corriente de desplazamiento en el interior del condensador.

213. Un condensador de placas circulares paralelas, de radio a y separación d, tiene una ddp $V(t)$. (a) Hallar el campo magnético en el semiplano del condensador, a una distancia r del eje de simetría, para $r > a$. (b) Demostrar que el valor de B es el mismo que el de un hilo que transporte una corriente $I = dQ/dt$, siendo Q la carga del condensador.

214. Demostrar que la discontinuidad de $\boldsymbol{B}$ a través de las placas del condensador cuando éste se carga con una corriente I es igual a $\mu_0\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{n}$, donde $\boldsymbol{K}$ viene dado por

$$\boldsymbol{K} = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{a^2}\right)\boldsymbol{u}_r$$

215. (a) Hallar el potencial vector $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ y el potencial escalar $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ en el gauge de Lorentz para una onda plana polarizada descrita por los campos

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 e^{j(kz-\omega t)}\boldsymbol{u}_x \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = B_0 e^{j(kz-\omega t)}\boldsymbol{u}_y$$

con la condición de contorno de que los potenciales deben de ser cero en el infinito.
(b) Considerar el caso general de una onda plana polarizada con vector de ondas $\boldsymbol{k}$, polarización en la dirección $\boldsymbol{n}$ y frecuencia angular $\omega = c|\boldsymbol{k}|$. Determinar los potenciales vector y escalar en este caso.
(c) Si no ponemos la condición de contorno anterior, demostrar que los potenciales

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{r}, t) = -B_0 x e^{j(kz-\omega t)} \boldsymbol{u}_z \quad \text{y} \quad \phi(\boldsymbol{r}, t) = -cB_0 x e^{j(kz-\omega t)}$$

satisfacen la condición de Lorentz y proporciona los campos electromagnéticos dados en el apartado (a).

216. Un medidor de campo muestra que la amplitud de las oscilaciones del campo eléctrico de una onda de radio es de 5 milivoltios por metro. (a) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones del vector campo magnético, en T? (b) ¿Cuál es la intensidad en W/m^2?

Lección 8. Los potenciales electromagnéticos.

221. (a) A partir de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, deducir las ecuaciones diferenciales que satisfacen el potencial escalar eléctrico $\phi(\vec{r})$ y el potencial vector magnético $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$. (b) A partir de estas ecuaciones generales, imponer la condición de contraste (gauge) de Lorentz, obteniendo las ecuaciones diferenciales correspondientes. ¿Cuáles son las ventajas de imponer tal condición en los potenciales?

222. (a) A partir de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, deducir las ecuaciones diferenciales que satisfacen el potencial escalar eléctrico $\phi(\boldsymbol{r})$ y el potencial vector magnético $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$. (b) Partiendo de estas ecuaciones generales, obtener las ecuaciones diferenciales que se corresponden con la condición (*gauge*) de Lorentz. ¿Cuáles son las ventajas que satisfacen las ecuaciones en la condición de Lorentz?

223. Para un dipolo eléctrico armónico el campo eléctrico de radiación es

$$E_\theta = j \sin\theta \frac{30 I_0 \beta l}{r} e^{j(\omega t - \beta r)}.$$

(a) Explicar el significado de los símbolos que aparecen en la expresión anterior. (b) Calcular el campo magnético asociado. (c) Obtener la potencial total radiada.

224. Obtener, a partir de las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones diferenciales que cumple el potencial vector magnético $\boldsymbol{A}$ y el potencial escalar eléctrico ϕ para un campo electromagnético cuando se cumple la condición (el contraste o *gauge*) de Lorentz.

225. El campo eléctrico de radiación de un dipolo $\boldsymbol{p}$ es

$$\boldsymbol{E} = \frac{(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R^3} \quad .$$

Calcular la dirección de máxima radiación energética y la energía total radiada.

226. El campo eléctrico generado por un dipolo variable con el tiempo es:

$$\boldsymbol{E} = \frac{(\ddot{\boldsymbol{p}} \times \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R^3} + \frac{3(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{R})\boldsymbol{R} - R^2 \boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^5} + \frac{3(\dot{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{R})\boldsymbol{R} - R^2 \dot{\boldsymbol{p}}}{4\pi\varepsilon_0 c R^4} \quad ,$$

donde el dipolo y sus derivadas se calculan en el tiempo retardado. Dar los campos eléctrico y magnético de radiación. Razonar la respuesta.

227. Decir si el potencial vector

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{j\omega(r/c - t)}}{r} \boldsymbol{u}_z$$

corresponde a un campo electromagnético en el contraste de Lorentz. ¿Podrías dar un potencial escalar para este campo?

228. Obtener, a partir de las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones diferenciales que cumple el potencial vector $\boldsymbol{A}$ y el potencial escalar ϕ para un campo electromagnético cuando se aplica el gauge de Lorentz.

229. Se observa con un detector la radiación emitida por un dipolo eléctrico radiante a una distancia a del mismo en una dirección que forma un ángulo θ con la dirección del dipolo. El valor resultante de la medida es 10 mW. Se aumenta la distancia del detector al emisor 10 m y la potencia se reduce a la mitad manteniendo el mismo ángulo. Determinar la distancia a.

230. La Tierra recibe aproximadamente 1300 W/m^2 de potencia radiada procedente del Sol. Suponiendo la radiación de una onda plana de frecuencia ω en incidencia normal, escribir la expresión de los campos eléctrico y magnético.

231. El campo eléctrico de radiación de un dipolo puntual es

$$\boldsymbol{E} = \frac{(\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{R}) \times \boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R^3} \quad .$$

Se pide: (a) calcular la potencia total radiada y (b) deducir, suponiendo que el dipolo está orientado en la dirección del eje z, las direcciones de máxima y mínima radiación.