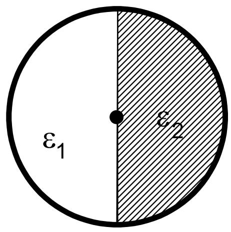
Lección 9. El campo eléctrico y la materia.

241. Un cilindro dieléctrico de radio a y altura l ($l >> a$) tiene una polarización $\vec{P}_0 \parallel \vec{u}_x$, perpendicular al eje del cilindro. Calcular el campo eléctrico en el centro del cilindro y a distancias grandes comparadas con las dimensiones del mismo.

242. La sección de un hilo coaxial es la que se muestra en la figura. El radio del hilo es $a = 0.5$ mm y el radio de la malla es $b = 5$ mm. Las permitividades dieléctricas relativas son $\varepsilon_1 = 100$ y $\varepsilon_2 = 200$. Demostrar que la capacidad del hilo es

$$C = \pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)l/\ln(b/a),$$

siendo l la longitud de hilo. ¿Cuál es la capacidad de un hilo de estas características, de 100 m de longitud?



243. Sea $\boldsymbol{P}$ el vector densidad de polarización de un medio lineal, homogéneo e isótropo. Contestar a las siguientes preguntas, razonando las respuestas y discutiendo los posibles casos. (a) ¿Cuánto vale el $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{P}$? (b) ¿Cuándo la $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}$ será nula?

244. Se tiene una esfera dieléctrica de radio a y permitividad dieléctrica

$$\varepsilon(r) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

y en su centro una carga puntual Q, siendo r la coordenada radial en esféricas. ¿Qué ecuación diferencial ha de satisfacer el potencial $\phi(r)$ para $r < a$ y $r > a$?

245. Un cilindro dieléctrico muy largo, de radio a y permitividad ε_1, tiene en su interior un agujero, también cilíndrico y coaxial, de radio b ($b < a$). En el eje de ambos cilindros hay una densidad lineal de carga λ uniforme. Hallar el campo eléctrico en todo el espacio, la polarización del dieléctrico y las cargas equivalentes de polarización.

246. El campo eléctrico límite a partir del cual el aire puede conducir es de 3×10^{-3} V/m. ¿Cuál es el máximo potencial posible de un conductor aislado de 5 cm de radio? ¿Cuál debería ser el radio de un conductor esférico en el que se quiere almacenar una carga de 3×10^{-3} C?

247. En un dieléctrico ($\varepsilon_r = 3$) el desplazamiento eléctrico D vale $3/\sqrt{2}$ ℧/m y forma un ángulo de 45° con la superficie de separación del dieléctrico con el aire. Obtener el valor del campo eléctrico en el aire y calcular la densidad de cargas de polarización en el dieléctrico.

248. (a) Hacer un dibujo esquemático representando la constante dieléctrica κ frente a la densidad atómica n. (b) De acuerdo con la fórmula de Langevin, la polarizabilidad de una molécula polar a una temperatura T, para $pE \ll kT$, es $\alpha = p^2/(3kT)$, donde p es el momento dipolar permanente. De una medida se deduce que $\kappa = 80$ para el agua. Calcular el momento dipolar de una molécula de agua. Expresar el resultado en unidades de ea_B.

249. Una carga puntual Q está situada en el interior de un medio dieléctrico de constante κ. (a) ¿Cuál es la carga libre encerrada por una esfera de radio R centrada en Q? (b) ¿Cuál es la carga de polarización encerrada en la esfera? ¿Cómo varía este resultado con R? (c) ¿Cuál es la carga total encerrada en la esfera? (d) Explicar el resultado de (b) microscópicamente, suponiendo que un átomo consiste en un par de minúsculas cargas de signo opuesto $\pm e$ con momento dipolar $\boldsymbol{p} = \alpha \boldsymbol{E}$ (Ayuda: para densidades atómicas n pequeñas, aproximar $\chi_e = n\alpha/\varepsilon_0$).

250. Sea una carga puntual q cerca de la superficie de un medio dieléctrico semiinfinito. Dibujar esquemáticamente las líneas de campo eléctrico en las distintas direcciones del espacio, a partir de la carga q. Utilizar las condiciones de frontera del campo eléctrico para dibujar cómo las líneas atraviesan la superficie (suponer que no hay cargas superficiales).

251. Un objeto dieléctrico que tiene una polarización cuasipermanente en ausencia de campo eléctrico se denomina “electrete”. Considerar un electrete polarizado uniformemente en forma de cilindro de altura h y radio $10h$. La polarización el el dieléctrico es $P\boldsymbol{u}_z$, siendo $\boldsymbol{u}_z$ el vector paralelo al eje del cilindro. (a) Dibujar esquemáticamente las líneas de campo eléctrico. (b) Calcular el campo eléctrico en el centro del cilindro. Dado que el radio es grande comparada con la altura, podemos despreciar los efectos de borde. (c) Calcular el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en el plano medio del cilindro, a una distancia $100h$ del centro. Dado que la distancia es grande comparada con el radio, el dipolo domina el desarrollo multipolar.

252. Muchos micrófonos manufacturados hoy en día están basados en el diseño de hojas de electrete. Obtener información sobre hojas de electrete (foil electret) en internet. ¿Qué es una hoja de electrete y cómo se usa en un micrófono?

Lección 10. El campo magnético y la materia.

261. En el plano de separación entre dos medios materiales de permeabilidades magnéticas μ_1 y μ_2 circula una corriente I por un hilo rectilíneo indefinido de sección despreciable. Calcular el campo magnético en todo el espacio.

262. Una lámina plana de material magnético, de espesor d, se sitúa sobre el plano $z = 0$. La lámina tiene una imanación uniforme $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{u}_z$. ¿Qué valor tendrán los campos $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$, tanto en el interior como en el exterior de la lámina? Razonar la respuesta.

263. Sea un paralelepípedo de material magnético con una densidad $M\boldsymbol{u}_z$ constante. La superficie de las caras límite es muy amplia de forma que los efectos de los extremos pueden ser despreciados. La distancia entre las superficies límite es de d. Calcular el campo magnético que crea esta distribución de dipolos.

264. El promediado espacial de las ecuaciones de Maxwell para los campos microscópicos en un medio material nos conduce al siguiente resultado:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}}{\varepsilon_0} \quad , \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M} + \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

(a) ¿Cuáles son los términos nuevos que aparecen respecto a las ecuaciones de Maxwell en el vacío? ¿Qué significado físico tienen? (b) Definir el vector desplazamiento $\boldsymbol{D}$ y el vector excitación magnética $\boldsymbol{H}$ transformando las ecuaciones anteriores en las ecuaciones de Maxwell en los medios materiales. (c) Las ecuaciones de Maxwell en los medios materiales deducidas en el apartado anterior, ¿se modifican si el medio es no lineal?

265. Considérese una esfera constituida por un material magnético, cuya imanación es $\boldsymbol{M} = M_0\boldsymbol{u}_z$. (a) Determinar las cargas y corrientes de imanación. (b) Dibujar, cualitativamente, las líneas de campo magnético $\boldsymbol{B}$. (c) Escribir el campo magnético producido por dicha esfera, a grandes distacias.

266. Analizar si pueden realizarse las siguientes afirmaciones para el campo $\boldsymbol{H}$ en el seno de un medio material. (a) El campo magnético $\boldsymbol{H}$ es solenoidal ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = 0$). (b) El rotacional del campo magnético $\boldsymbol{H}$ es nulo ($\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = 0$).

267. En el plano de separación entre dos medios materiales de permeabilidades magnéticas μ_1 y μ_2 existe una corriente filiforme rectilínea e indefinida de intensidad I. Calcular el campo magnético $\boldsymbol{B}$ y el vector excitación magnética $\boldsymbol{H}$ en todo el espacio.

268. Se tiene un imán cilíndrico de altura h y radio a, uniformemente imanado (o magnetizado), cuyo vector imanación (densidad de dipolos magnéticos por unidad de volumen) es $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{u}_z$, siendo a la dirección axial del imán. Deducir el valor de las cargas magnéticas equivalentes (M es una constante).

269. Un toroide de radio promedio R y sección S está formado por dos medios toroides con permeabilidades μ_1 y μ_2. Bobinado entorno a él se encuentra una bobina de N vueltas. Calcular el coeficiente de autoinducción de dicho toroide.

270. Se tiene un cilindro de radio a y altura h uniformemente imanado con densidad $\boldsymbol{M} = M_0\boldsymbol{u}_z$, siendo el eje z el eje de simetría de revolución del cilindro. Calcular las corrientes equivalentes a la imanación.

271. Justificar por qué son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
(a) Si $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{M} = 0$.
(b) En un medio magnético en el que no hay corrientes verdaderas, $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$ es proporcional a $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{M}$.
(c) En un medio magnético con μ constante, si no hay densidad de corriente verdadera, no hay densidad de corriente de imanación.
(d) En el vacío, si $\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = 0$.

272. Las susceptibilidades magnéticas de los tres primeros gases nobles son $\chi_m(\mathrm{He}) = -1,1\times 10^{-9}$, $\chi_m(\mathrm{Ne}) = -3,9\times 10^{-9}$ y $\chi_m(\mathrm{Ar}) = -1,1\times 10^{-8}$. Las susceptibilidades magnéticas de los tres primeras tierras raras son $\chi_m(\mathrm{La}) = 5,33\times 10^{-5}$, $\chi_m(\mathrm{Ce}) = 1,50\times 10^{-3}$ y $\chi_m(\mathrm{Pr}) = 3,34\times 10^{-3}$. Explicar estos resultados.

273. Estimar el máximo valor de $\boldsymbol{M}$ del Fe. Suponer que el momento dipolar atómico es debido al spin desapareado de dos electrones. La densidad másica del Fe es de $7,87\times 10^3$ kg/m^3 y la masa atómica es de 55,85 unidades.

274. En el modelo de Bohr de un átomo, un electrón da vueltas a velocidad v alrededor del núcleo describiendo un círculo de radio r, siendo su momento angular $L = mvr = h/2\pi$, siendo h la constante de Planck. Calcular el momento magnético en unidades del sistema internacional. Como modelo simple de dominios ferromagnéticos, suponer que los momentos atómicos (justo los que hemos calculado) están alineados y situados en los vértices de una red cúbica de espaciado 3 Å. Calcular la imanación.