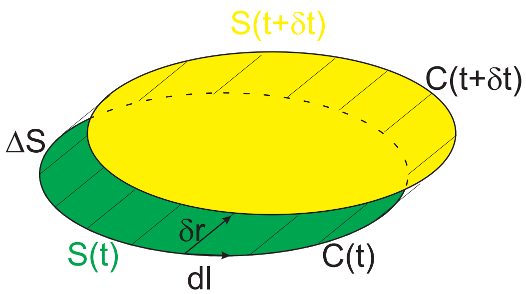
Obtención de la ley de Faraday

La ley de inducción de Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\int\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \quad , \tag{1}$$

nos dice que un campo magnético variable es capaz de producir una fem y por tanto un campo eléctrico. La fem generada es totalmente de origen magnético y puede obtenerse a partir de la expresión de la fuerza de Lorentz para una espira cargada que se mueve a una velocidad $\boldsymbol{v}$ en el seno de un campo magnético $\boldsymbol{B}$ (*motional electromotive force*).

Imaginemos una espira en movimiento en presencia de un campo magnético $\boldsymbol{B}$. En el instante t, la espira viene definida por un contorno $C(t)$ que limita la superficie $S(t)$, en verde en la figura. Recordemos que la dirección del pseudovector superficie viene definida por el Teorema de Stokes. Después de un instante de tiempo δt, el contorno se habrá desplazado a una nueva posición, que viene definida en la figura por $C(t+\delta t)$, contorno que encierra la superficie $S(t+\delta t)$ (en amarillo en la figura). Del teorema de Gauss aplicado al campo magnético



sabemos que

$$\oint\!\!\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \quad , \tag{2}$$

por tanto si consideramos la superficie cerrada como la formada por $S(t)$, $S(t+\delta t)$ y la superficie lateral δS, el flujo a través de la superficie total es cero, es decir

$$0 = \delta\Phi_L + \int\int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} - \int\int_{S(t)} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \quad . \tag{3}$$

El flujo de la segunda integral es negativo porque el vector superficie debe ir hacia fuera de la superficie cerrada (va en dirección contraria del $d\boldsymbol{S}$ definido por el

Teorema de Stokes). Como se trata de cantidades infinitesimales podemos escribir

$$\int\int_{S(t+\delta t)} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} - \int\int_{S(t)} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} \equiv \Phi(t+\delta t) - \Phi(t) = \frac{d\Phi}{dt}\delta t \quad , \tag{4}$$

luego la variación temporal del flujo sobre la superficie lateral es

$$\frac{\delta\Phi_L}{\delta t} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad , \tag{5}$$

es igual a la variación temporal de la diferencia de flujos entre las superficies de los contornos, cambiada de signo.

Nos falta relacionar el flujo lateral con la fuerza electromotriz. Esto puede hacerse utilizando la definición de fuerza electromotriz y el hecho de que la fuerza es de origen magnético:

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \frac{1}{q}\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l} = \oint \boldsymbol{B}\cdot(d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{v}) \tag{6}$$

Cuando la espira se desplaza, el elemento $d\boldsymbol{l}$ sobre la espira sigue siendo el mismo, puesto que se trata del mismo contorno. El significado de $\boldsymbol{v}$ por tanto hay que buscarlo en la figura anterior, es $\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{r}/\delta t$, siendo $\delta\boldsymbol{r}$ la cantidad diferencial que se ha desplazado la espira en el tiempo δt. Por lo tanto, podemos escribir

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{B}\cdot\left(d\boldsymbol{l}\times\frac{\delta\boldsymbol{r}}{\delta t}\right) \equiv \int\int \boldsymbol{B}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{S}}{\delta t} \quad , \tag{7}$$

siendo $\delta\boldsymbol{S}$ la superficie definida por el vector $\delta\boldsymbol{S} = \Sigma_{\text{contorno}} d\boldsymbol{l}\times d\boldsymbol{r}$, es decir la superficie lateral. Pero esto no es más que la variación del flujo a través de la superficie lateral, es decir

$$\mathcal{E} = \frac{\delta\Phi}{\delta t} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{8}$$