Electromagnetismo

Andrés Cantarero
Curso 2005-2006
Grupo C

Las cargas eléctricas y su interacción. Aspectos generales del campo electromagnético.

- Introducción
- Cargas y corrientes. La ecuación de continuidad.
- Las leyes fenomenológicas de Coulomb y Ampère.
- Teorías de acción a distancia y teorías de campo.
- Los campos eléctrico y magnético.
- Principio de superposición.
- La fuerza de Lorentz.
- Determinación unívoca de un campo vectorial. Teorema de Helmholtz.

Importancia de la interacción em en el mundo físico

- En el mundo actual la materia está constituida por partículas elementales que interaccionan entre sí para formarla.
- En las dimensiones espaciales que nos movemos la interacción electromagnética es la más importante (desde el mundo subatómico al de las grandes distancias)

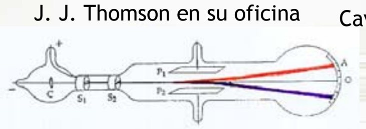
La carga eléctrica

- La carga eléctrica tiene dos “variedades”, positiva y negativa: +q y -q. La cantidad de carga + y – es idéntica y la materia es neutra.
- La carga se conserva: leyes de conservación, ecuación de continuidad.
- La carga está cuantizada. La unidad de carga eléctrica $e=1.602\ 10^{-19}$ C en el sistema MKS
- Invariancia relativista

Descubrimiento del electrón

J. J. Thomson en su oficina

Investigadores del Cavendish Laboratory (1897)

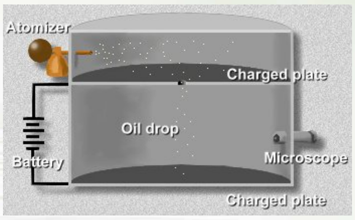


Tubo de rayos catódicos

Carga del electrón

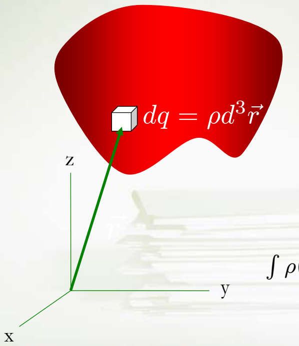
Millikan determinó el campo eléctrico necesario para suspender una gota de aceite cargada con un electrón, de donde obtuvo e=-1.6 10^{-19} C

Robert A. Millikan



Experimento de Millikan

Distribuciones de carga



Carga total

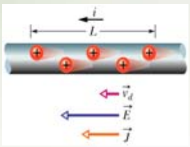
$$Q = \int \rho d^3\vec{r}$$

Carga puntual

$$\rho(\vec{r}') = q\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

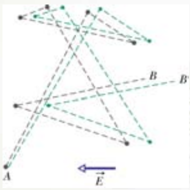
$$\int \rho(\vec{r}')d^3\vec{r}' = q \int \delta(\vec{r} - \vec{r}')d^3\vec{r}' = q$$

Corriente eléctrica y densidad de corriente

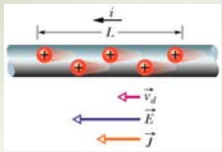


Hilo conductor por el que circulan cargas debido a la existencia de un campo eléctrico

Se define *i* como: $i = \dfrac{dq}{dt}$



Sin campo eléctrico las cargas se mueven aleatoriamente (líneas grises de la figura) con velocidades ≈10^6 m/s. Con campo eléctrico los electrones se mueven con una velocidad media denominada velocidad de arrastre -v_d, siendo $|v_d|$≈10^{-5}-10^{-4} m/s (líneas verdes de la figura).



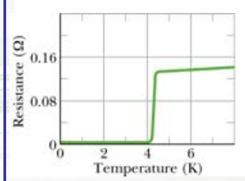
$$i = \frac{q}{t} = \frac{neAL}{L/v_d} = nev_dA$$

Densidad de corriente:

$$J = \frac{i}{A} = nev_d = \sigma E$$ (ley de Ohm)

Material	Resistividad (Ω·cm)
Cobre	1.69 × 10^{-8}
Silicio	2.5 × 10^{3}
Silicio, tipo n	8.7 × 10^{-4}
Vidrio	10^{10} - 10^{14}

Mercurio



Ecuación de continuidad

Corriente en términos de la densidad de corriente

$$i = JA = \int JdS = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Volumen cerrado V del que sale una corriente total

$$i_V = \oint_{S(V)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$i_V = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho d^3\vec{r} = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\vec{r}$$

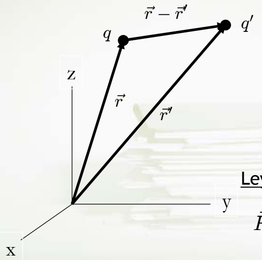
Por conservación de la carga, la carga total saliente debe ser igual a la disminución de carga dentro del volumen

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\vec{r} = \oint_{S(V)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d^3\vec{r}$$

Dado que el volumen es arbitrario, $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0}$ Ecuación de continuidad

Ley de Coulomb

$$\vec{F} = K\frac{qq'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}\vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}'} = K\frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



MKS

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{coul}^2$$

CGS

$$K = 1$$

Ley de Coulomb entre distribuciones de carga

$$\vec{F} = K \int\int \frac{\rho(\vec{r})\rho'(\vec{r}')d^3\vec{r}d^3\vec{r}'\vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

Charles Augustin de Coulomb
(1736-1806)

- Ingeniero de educación
- Ganó un premio por su trabajo en el estudio de la fricción
- Obtuvo un premio por la utilización del cálculo de variaciones en problemas de ingeniería

Charles Augustin de Coulomb

- Publicó 7 importantes artículos sobre electricidad & magnetismo (entre 1785-1791), incluyendo:
  - *La ley de atracción y repulsión*
  - *Las cargas eléctricas puntuales*
  - *Polos magnéticos*
  - *La distribución de la electricidad sobre la superficie de cuerpos cargados*

Rango de validez

La dependencia $1/r^2$ de la fuerza electrostática fue hallada experimentalmente por Cavendish y Coulomb. Si escribimos

$$\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$$

Se trata de hallar ε

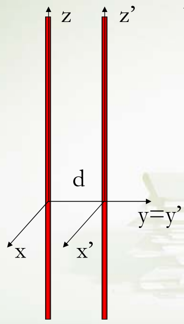
$|\varepsilon| \leq 0.02$ Cavendish, 1772

$|\varepsilon| \leq 5 \times 10^{-5}$ Maxwell

Funcionamiento de la Balanza de Cavendish

Balanza original utilizada por Coulomb

Ejemplo: hallar la fuerza por unidad de longitud entre dos hilos largos cargados, separados una distancia d<<L.



$$\vec{F} = K\lambda\lambda' \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{-L/2}^{L/2} dz' \frac{d\vec{u}_y + (z'-z)\vec{u}_z}{[d^2 + (z'-z)^2]^{3/2}}$$

Aproximaciones:
▪hilo largo
▪despreciamos efectos de bordes

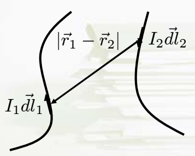
$$F \approx K\lambda\lambda' L d \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz'}{[d^2 + z'^2]^{3/2}}$$

$$\frac{F}{L} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\lambda'}{d}$$

Ley de Biot-Savart o de Ampère

$$\vec{F} = K_m \oint \oint \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times I_2 d\vec{l}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

$$K_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$$



$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \mathrm{H/m}$$

$$1/\mu_0\varepsilon_0 = c^2$$

Acción a distancia

- Concepto de campo y acción a distancia
  - La ley de Coulomb expresa la fuerza entre dos cargas.
  - Reinterpretación: una carga produce una perturbación en el espacio (campo).
  - Esta perturbación (campo) existe independientemente de que exista o no una segunda carga.
  - Al situar una segunda carga en el campo de la primera, ésta siente una fuerza: la fuerza de Coulomb.

Campos eléctrico y magnético

- Fuerzas eléctrica y magnética en términos de los campos:
  $$\vec{F}_e = q\vec{E} \qquad d\vec{F}_m = I d\vec{l} \times \vec{B}$$
- Principio de superposición
  - El campo producido por un conjunto de cargas es la suma de los campos producidos por cada una de ellas.
  - El campo producido por un conjunto de corrientes es la superposición de los campos debidos a cada corriente

Principio de superposición

- A escala macroscópica se cumple (líneas de transmisión, difracción por una rendija, etc)
- A escala atómica (difracción de rayos X) sigue cumpliéndose
- A escala subatómica los campos son del orden de 10^9 a 10^{15} Volts/cm y en las proximidades de los núcleos, 10^{19} Volts/cm. Es posible la aparición de efectos no lineales.
- En el dominio de tamaños de la Física Clásica, el principio de superposición se cumple

Fuerza de Lorentz

La densidad de corriente podíamos escribirla en términos de la velocidad de arrastre:

$$\frac{i}{A} = nev_d$$

Multiplicando por un diferencial de volumen,

$$idl = (nAedl)v_d = dqv_d$$

La fuerza magnética puede ponerse en términos de la velocidad del dq:

$$d\vec{F}_m = id\vec{l} \times \vec{B} = dq\vec{v} \times \vec{B}$$

La fuerza total sobre una carga puntual en presencia de campos eléctricos y magnéticos es:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Campos eléctrico y magnético

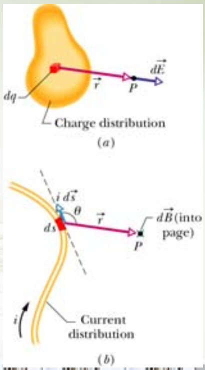
Campo eléctrico

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} \qquad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq\vec{r}}{r^3}$$

Campo magnético

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids\sin\theta}{r^2} \qquad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$$



Teorema de Helmholtz

Definamos un campo auxiliar F y partamos de la relación vectorial

$$\nabla \times \nabla \times F = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$$

Definamos

$$V = -\nabla^2 F \quad , \quad U = \nabla \cdot F \quad , \quad W = \nabla \times F \longrightarrow V = -\nabla U + \nabla \times W$$

Hallemos la divergencia y el rotacional de V

$$\nabla \cdot V = -\nabla^2 U \qquad U(r) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\nabla' \cdot V(r')}{|r - r'|}$$

$$\nabla \times V = -\nabla^2 W \qquad W(r) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\nabla' \times V(r')}{|r - r'|}$$