

Electromagnetismo. Grupo C. Curso 2005-2006

Andrés Cantarero

El campo magnético y la materia

- El átomo como un dipolo magnético
- El vector imanación
- Diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo.
- Corrientes equivalentes a la imanación
- El vector H. Susceptibilidad magnética.
- Condiciones en la frontera de dos medios magnéticos
- Un cuerpo magnético en un campo exterior: el potencial escalar magnético
- Sistemas de unidades

Introducción

- Hemos estudiado el campo magnético de las corrientes estacionarias (B en el vacío)
- Los medios materiales, ¿cambian B? ¿Cómo? Existen corrientes a nivel microscópico
- La mayoría de los materiales interaccionan débilmente con B exterior (diamagnéticos, paramagnéticos)
- Algunos materiales interaccionan fuertemente (ferromagnéticos). Pueden generarse imanes permanentes
- Intentaremos resolver alguna de estas cuestiones en este tema

El átomo como un dipolo magnético

- En un medio dieléctrico, cuando hay un E aplicado, aparece una densidad de dipolos eléctricos por unidad de volumen, P (vector polarización)
- En un medio magnético, cuando hay un B aplicado, aparece una densidad de dipolos magnéticos por unidad de volumen, M (vector magnetización o imanación).
- El fenómeno asociado con M es más complicado, M puede apuntar en la dirección de B (paramagnetismo) o en la opuesta (diamagnetismo). En materiales ferromagnéticos, M es paralelo a B y muy grande.

Origen del magnetismo

- Los electrones son el origen de las propiedades magnéticas de la materia.
- Todo electrón es un pequeño imán debido a su momento angular intrínseco m_{spin} . Para electrones, la dirección del momento angular intrínseco es opuesta a la dirección del spin. Su magnitud es el magnetón de Bohr.

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$
- La suma de momentos angulares de spin en un entorno r es una de las contribuciones al momento angular.

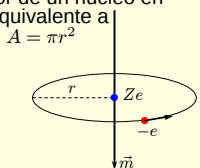
Momento angular orbital

- Otra contribución al momento angular total proviene del momento angular orbital.
- Para una descripción detallada de la estructura electrónica de la materia es necesaria la Mecánica Cuántica, pero un modelo semiclásico nos puede hacer entender la física.
- Un electrón moviéndose alrededor de un núcleo en una órbita circular de radio r es equivalente a una corriente $I = ev/2\pi r$, siendo $A = \pi r^2$ el área de la espira y por tanto su momento magnético orbital es

$$m_{\text{orbital}} = IA = evr/2$$

- Introduciendo $L = mvr$

$$m_{\text{orbital}} = \frac{eL}{2m_e}$$



órbita clásica del electrón

Momento angular y vector M

- Tanto el momento angular como el momento magnético están cuantizados

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

- Luego el momento angular orbital es del orden de

$$\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{m}_{\text{orbital}} = -\mu_B m_l$$

- Si tenemos N átomos en un elemento de volumen y cada átomo un momento magnético m_i , se define el vector M como

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i$$

- Si no hay campo magnético presente, $M=0$

Momento dipolar magnético

Sistema magnético	Símbolo	Magnitud ($\text{A} \cdot \text{m}^2$)
Spin del electrón	$\mu_e = -\mu_B$	$-9,27 \times 10^{-24}$
Spin del protón	μ_p	$1,41 \times 10^{-26}$
Spin del neutrón	μ_n	$-0,966 \times 10^{-26}$
Brújula típica		10^{-2}
Espira superconductora		20
Tierra		$7,79 \times 10^{22}$

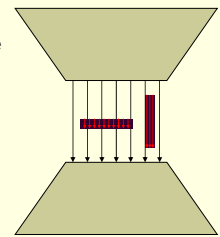
- El rango de valores abarca muchos órdenes de magnitud
- Hay objetos astronómicos con mayor momento magnético que la Tierra
- Los núcleos no contribuyen significativamente a las propiedades magnéticas de la materia ($m_e/m_p \approx 0,5 \times 10^{-3}$)
- Los neutrones están formados por quarks, partículas cargadas con spin 1/2

Diamagnetismo

- Muchas sustancias como el agua, la madera, el vidrio, y muchos elementos como el H_2 , N_2 , Ar, Cu, Ag, Pb, son diamagnéticas
- Cuando un material diamagnético se sitúa en un campo magnético se imana, pero M apunta en dirección opuesta a B (un material diamagnético es repelido por un imán)
- El diamagnetismo es independiente de T
- Fue descubierto por Brugmans en 1778 en Bi y Sb.
- Cuando una aguja de un material diamagnético se suspende en una región con B, se orienta perpendicular al campo, mientras que si el material es paramagnético se orienta paralela al campo.

Diamagnetismo

- Los nombres diamagnetismo (de diametral) y paramagnetismo (de paralelo) fueron propuestos por Faraday, quien estudió extensamente estos fenómenos desde 1845 (en tiempos de Faraday no se conocía el átomo ni la estructura de la materia)
- El diamagnetismo es anti-intuitivo (esperaríamos que el par de fuerzas de B sobre m oriente m a lo largo de B), es un fenómeno cuántico y se necesita la Mecánica Cuántica para su comprensión real



Explicación "clásica"

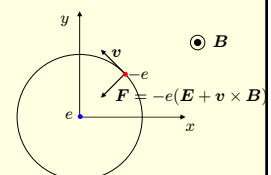
- J J Larmor dio una explicación cualitativa del diamagnetismo a principios del siglo XX basándose en la ley de inducción de Faraday
- La explicación se basa en el modelo planetario del átomo (previo al modelo de Bohr –no hay cuantización de las órbitas–)
- La razón es que el campo inducido se opone al campo existente siguiendo la ley de Lenz

Modelo planetario

- Sin campo: $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$
- Con campo: $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + e v' B = \frac{m_e v'^2}{r}$

- Combinando las dos ecuaciones,

$$\delta \mathbf{m} = -\frac{e r}{2} \delta v \mathbf{u}_z = -\frac{e^2 r^2}{4 m_e} \mathbf{B}$$



Diamagnetismo

- Cuánticamente, el movimiento del electrón viene descrito por el Hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V$$

- En presencia de un campo magnético,

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + V$$

- Es el pequeño término $e^2 A^2 / 2m$ el responsable del diamagnetismo

Paramagnetismo

- Cuando un material paramagnético se sitúa en un campo magnético se imana, con M proporcional a B
- La causa del paramagnetismo es la existencia de momentos dipolares permanentes
- El orden típico de los momentos magnéticos es el magnetón de Bohr
- La respuesta paramagnética domina sobre la diamagnética, que es muy pequeña
- Todos los átomos con un número impar de electrones tienen momento magnético
- Los metales de transición y las tierras raras tienen momentos magnéticos elevados
- A partir de la energía de un dipolo en un campo magnético se llega a la fórmula de Langevin

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{mB}{3kT} \quad M = nm_0 \langle \cos \theta \rangle = \frac{nm_0^2}{3kT} B$$

Imanación y corrientes de imanación

- Para incluir el efecto del medio hemos introducido M

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_i$$

- Se trata de introducir M en la ecuación del potencial vector en forma similar a como se introdujo P en el potencial escalar eléctrico

Potencial de un dipolo magnético

- Potencial de un dipolo magnético en el origen y en $\mathbf{r}_i$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

- Contribución al potencial de un conjunto de dipolos

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{m}_i \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}'$$

- Potencial de un medio imanado

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}'$$

Corrientes de imanación

- A partir de la relación vectorial

$$\nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{M}$$

- podemos escribir

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' - \int \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3\mathbf{r}' \right]$$

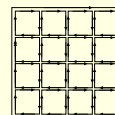
- En forma final,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{\mathbf{J}_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' + \oint \frac{\mathbf{K}_b}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right]$$

- con

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad \mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

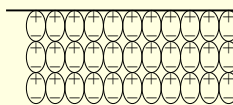
Corriente superficial de imanación



Si todos los dipolos tienen la misma intensidad y dirección, el resultado es una corriente superficial de imanación

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

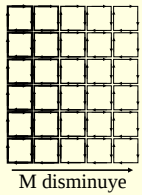
Carga superficial de polarización



Si todos los dipolos son idénticos y apuntan en la misma dirección, el resultado es una carga superficial de polarización

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

Corriente de imanación



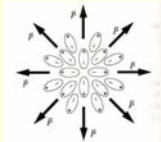
$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad J_x = \frac{\partial M_z(y)}{\partial y}$$

Una variación espacial (transversal) de $\mathbf{M}$ es equivalente a una corriente de imanación

Densidad de carga de polarización

Una variación espacial de $\mathbf{P}$ es equivalente a una densidad de carga de polarización

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$



El vector H

- Las ecuaciones de Maxwell para el campo magnético de las corrientes estacionarias son

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- Estas ecuaciones son correctas en el vacío y en un medio material
- Al analizar un medio material es conveniente separar $\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b$

$$\mathbf{J}_f = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right] = \nabla \times \mathbf{H}$$

- Introduciendo un nuevo vector $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}$

- se cumple el Teorema de Ampère para H, que depende sólo de las corrientes libres

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I_f)_{\text{encerrada}}$$

Susceptibilidad magnética

- En muchos materiales magnéticos, la imanación es proporcional al vector H:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

- decimos que se trata de un medio magnético lineal y a la constante de proporcionalidad se denomina susceptibilidad magnética
- Entonces B también es una función de H:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

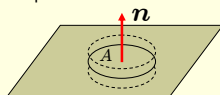
- siendo μ la permeabilidad magnética
- La relación entre ambas es: $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$

Susceptibilidades de algunos elementos y compuestos

Elemento	χ_m	Elemento	χ_m
H ₂	$-2,2 \times 10^{-9}$	O ₂	$+1,9 \times 10^{-6}$
He	$-1,1 \times 10^{-9}$	Na	$+8,5 \times 10^{-6}$
N ₂	$-6,7 \times 10^{-9}$	Al	$+2,1 \times 10^{-5}$
Si	$-3,3 \times 10^{-6}$	K	$+5,7 \times 10^{-6}$
Ar	$-1,1 \times 10^{-8}$	Cr	$+2,9 \times 10^{-4}$
Cu	$-9,6 \times 10^{-6}$	Rb	$+3,7 \times 10^{-6}$
Xe	$-2,6 \times 10^{-8}$	W	$+7,0 \times 10^{-5}$
Au	$-3,4 \times 10^{-5}$	Nd	$+2,8 \times 10^{-4}$
Pb	$-1,6 \times 10^{-5}$	Gd	$+8,7 \times 10^{-3}$
Compuesto		χ_m	
H ₂ O		$-9,0 \times 10^{-6}$	
CO		$-5,5 \times 10^{-9}$	
NO		$+8,2 \times 10^{-7}$	
CO ₂		$-1,2 \times 10^{-8}$	
SiO ₂		$-1,4 \times 10^{-5}$	

Condiciones de contorno

La componente normal de B se conserva



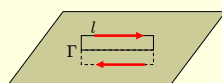
$$\int_A \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} dA = \int_A \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} dA$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

La componente tangencial de H se conserva si no hay corrientes superficiales

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} (\mathbf{K}_f \times \mathbf{n}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$H_{2t} - H_{1t} = |\mathbf{K}_f \times \mathbf{n}|$$



Relaciones constitutivas

Parámetro	símbolo	ecuación constitutiva
Susceptibilidad dieléctrica	χ_e	$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$
Permitividad dieléctrica	ϵ	$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0(1 + \chi_e) \mathbf{E}$
Susceptibilidad magnética	χ_m	$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$
Permeabilidad magnética	μ	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H}$

Potencial escalar magnético

- El potencial escalar magnético puede ser utilizado en regiones en las que no hay corrientes libres
- Se define a partir de
- Si no hay corrientes libres tendremos

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f = 0$$
- De donde, igual que en el caso electrostático,

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m$$
- Si el medio es lineal, del carácter solenoidal de B se deduce el carácter solenoidal de H. Derivando la expresión de H en términos del potencial, llegamos a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi_m = 0$$

Ferromagnetismo

- Un material ferromagnético puede presentar M permanente, es fácil de imantar
- Sólo hay 3 elementos ferromagnéticos (FM) a temperatura ambiente: Fe, Co y Ni
- Hay muchos elementos y compuestos FM a baja temperatura
- Existe T_C (temperatura de Curie) por encima de la cual todo material transita de FM a paramagnético (PM)
- $T_C(\text{Fe})=1043 \text{ K}$, $T_C(\text{Co})=1388 \text{ K}$, $T_C(\text{Ni})=627 \text{ K}$
- Un trozo de Fe está compuesto por dominios (10^{17} - 10^{21} átomos). En cada dominio, los spines son paralelos

Dominios y curvas de imanación

- Para caracterizar un material FM se mide su curva de imanación (M frente a H o más comunmente B frente a $\mu_0 H$)

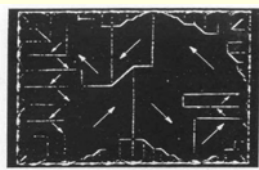
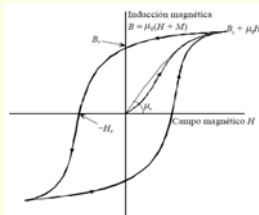
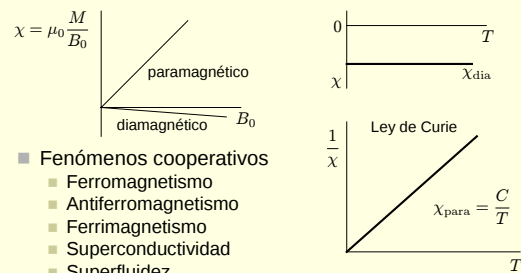


Figura 4.2. Dominios ferromagnéticos en un monocristal de Ni



Magnetismo en la materia

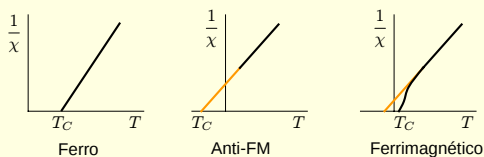
- Diamagnetismo y paramagnetismo



- Fenómenos cooperativos
 - Ferromagnetismo
 - Antiferromagnetismo
 - Ferrimagnetismo
 - Superconductividad
 - Superfluidez

Susceptibilidad frente a T

$$\chi = \frac{C}{T - T_C} \quad \text{Ley de Weiss-Curie}$$



Origen del ferromagnetismo

- Weiss sugirió que los momentos magnéticos atómicos se alinean debido a la existencia de un campo B_{loc}
- Para que ese alineamiento exista a 1000 K es necesario $B_{loc} \sim 1000 \text{ T}$
- El alineamiento de los spines no tiene origen magnético. Se debe a la existencia de la interacción de intercambio ("origen eléctrico")
- Coulomb directo – Mecánica Clásica
- Coulomb intercambio – Partículas idénticas y Principio de exclusión de Pauli

Partículas idénticas

- Función de onda de dos partículas idénticas

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) \pm \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)$$

- Energía de intercambio

$$\langle E_{\text{int}} \rangle \propto \int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \psi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{H}_{\text{int}} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

- Integral directa

$$\mathcal{I}_1 = \int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \frac{\psi_a^*(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_1)e^2\psi_b^*(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

- Integral de intercambio

$$\mathcal{I}_2 = \int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \frac{\psi_a^*(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_1)e^2\psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b^*(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

- "Densidad de carga"

$$e|\psi_a|^2 = \rho \quad e\psi_a^*\psi_b = \rho_{\text{int}} \text{ (solapamiento)}$$

Interacción de intercambio

$$E_{\text{int}} = - \sum_{i,j}' \mathcal{I}_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad \longleftrightarrow \quad E_{\text{int}} = - \sum_i \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{B}_i$$

$$\mathbf{m}_i = g_s \hbar \mathbf{S}_i \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{B}_i = \frac{1}{g_s \hbar} \sum_{i,j}' \mathcal{I}_{ij} \mathbf{S}_j$$

Ésta es la justificación de la existencia de un campo magnético interno. Weiss no lo justificó (no existía la Mecánica Cuántica), sólo supuso que debía existir, de esa manera se interpretaban las curvas experimentales.

Superconductividad

- Descubrimiento de la superconductividad
- Superconductores de alta T_C
- El largo camino a su explicación
- ¿Dónde están los físicos del campo y qué hacen?

Descubrimiento de la superconductividad

- Hasta finales del siglo XIX se creía que el O_2 , H_2 y N_2 eran gases permanentes
- Onnes trabajaba con He. En 1908 consiguió licuarlo a 4,2 K. En 1911 descubrió que el Hg tenía $\rho=0$ a 4,2 K. Recibió el premio Nobel en 1913
- Desde entonces se comprobó que la mayoría de los metales son superconductores a baja temperatura. Compuestos no metálicos, como el Ge, es superconductor a alta P
- Imanes superconductores (altos campos magnéticos sin disipación de energía), utilizados en Física, y sobretudo en Medicina

Nuevos superconductores

- Desde 1911 hasta 1986, $T_C < 20$ K
- En 1986 se descubre que óxidos mixtos de tierras raras son superconductores a 40 K
- El material con más alta T_C conocido es superconductor por debajo de 125 K
- Los descubridores (Bernardz y Müller) recibieron el Nobel en 1987
- Está más cerca la posibilidad de conducir la electricidad sin pérdidas

El largo camino a su explicación

- En 1933, Meissner y Ochsenfeld demostraron que los superconductores expulsan el campo magnético de su interior (diamagnetismo perfecto, pero no un conductor perfecto)
- Importantes científicos trabajaron en el tema: Einstein, Heisenberg (gas de electrones libres, 1947), Born, Loudon (explicó el diamagnetismo perfecto mediante un modelo, 1947)
- En 1950 se descubre el efecto isotópico ($T_C M^{1/2} = \text{cte}$)
- En 1957, Bardeen, Cooper, Schrieffer explican la superconductividad (pares de Cooper), otro premio Nobel

Físicos del campo

- A principio de los 90 se descubrió la magnetorresistencia gigante y posteriormente la magnetorresistencia colosal, en el mismo tipo de materiales (óxidos mixtos de tierras raras)
- Se produjo un gran avance en la miniaturización de cabezas lectoras en discos magnéticos
- Hoy en día hay un gran movimiento en un campo denominado spintrónica, en el que se pretende controlar la carga y el spin de los portadores a nivel individual

Unidades de carga y corriente

Ley de Coulomb

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Ley de Biot-Savart

$$F_m = k_m \frac{I_1 I_2 l}{r}$$

Empíricamente se observa que $k_m = \frac{2k_e}{c^2}$

En el sistema internacional (SI) de unidades,

$$k_m = \frac{\mu_0}{2\pi} \quad k_e = \frac{c^2 k_m}{2} = \frac{c^2 \mu_0}{4\pi} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}$$

La constante k_e se suele poner en términos de la constante dieléctrica.

Sistema CGS

■ Unidades electrostáticas

$$k_e = 1 \quad k_m = \frac{2}{c^2} \quad \epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi} \quad \mu_0 \rightarrow \frac{4\pi}{c^2}$$

■ Unidades electromagnéticas

$$k_m = 2 \quad k_e = c^2 \quad \epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi c^2} \quad \mu_0 \rightarrow 4\pi$$

■ Unidades gaussianas

$$\mathbf{F} = q(\alpha \mathbf{E} + \beta \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi} \quad \mu_0 \rightarrow \frac{4\pi}{c^2}$$

De la libertad de elegir α y β ,

$$\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = 1/c \quad \mathbf{B} \rightarrow \frac{\mathbf{B}}{c}$$

Sistema Gaussiano

En el vacío

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En medios materiales

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \frac{1}{c} \mathbf{J}_b$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$