

Electromagnetismo. Grupo C. Curso 2005-2006

Andrés Cantarero

Ondas electromagnéticas en medios materiales

- Ondas electromagnéticas en dieléctricos
- Reflexión y refracción en la interfase entre dieléctricos
- Ondas electromagnéticas en un medio conductor
- Modelo clásico de la dispersión de la luz

Introducción

- E y B en el vacío tienen soluciones ondulatorias que viajan a c
- Lo que estudiemos en este capítulo es válido para la luz, pero también para el resto del espectro em (siempre que el medio pueda considerarse como continuo)
- En el vacío las soluciones son independientes de la frecuencia, en un medio material no
- Nos sigue preocupando la propagación (no hay fuentes)

Ondas em en un dieléctrico

Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Ecuación de ondas

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Velocidad de propagación de la onda

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = c \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu \varepsilon}} \equiv \frac{c}{n}$$

Índice de refracción del medio

$$n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

Solución en ondas planas

De las ecuaciones de Maxwell

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad ; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\varepsilon j \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad ; \quad j \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

$$j \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = j \omega \mathbf{B}_0 \Rightarrow \mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0}{\omega}$$

$$j \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\mu \varepsilon \omega \mathbf{E}_0 \Rightarrow \mathbf{E}_0 = \frac{-\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0}{\mu \varepsilon \omega}$$

En el vacío

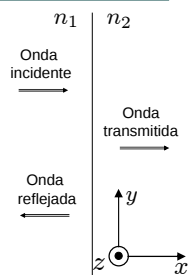
$$v_f = \frac{\omega}{k} = c; v_g = \frac{d\omega}{dk} = c$$

En un medio material

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}; v_g = \frac{c}{n + \omega dn/d\omega}$$

Reflexión y refracción de ondas planas

- El hecho de que la velocidad de la luz sea distinta en distintos medios produce el fenómeno de la reflexión y refracción en la superficie de separación de dos dieléctricos
- Las leyes que gobiernan dichos fenómenos vienen determinadas por las condiciones de contorno de los campos eléctrico y magnético en dicha superficie



Condiciones de contorno

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{E}_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \mathbf{E}_0'' e^{j(\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r} - \omega'' t)} & \text{para } x \leq 0 \\ \mathbf{E}_0' e^{j(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega' t)} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Continuidad de las componentes tangenciales y normales de los campos

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 E_{1\perp} &= \varepsilon_2 E_{2\perp} & \mathbf{E}_{1\parallel} &= \mathbf{E}_{2\parallel} \\ B_{1\perp} &= B_{2\perp} & \frac{B_{1\parallel}}{\mu_1} &= \frac{B_{2\parallel}}{\mu_2} \end{aligned}$$

Dado que la condición de contorno se ha de cumplir en cualquier instante de tiempo, $\omega = \omega' = \omega''$

Pero $\omega = \frac{c}{n} k$, luego $\frac{k}{n_1} = \frac{k'}{n_1} = \frac{k''}{n_2}$ $k' = \frac{n_2}{n_1} k$ $\left(\lambda' = \frac{n_1}{n_2} \lambda \right)$
 $k'' = k$

El número de ondas

- Si se trata de una onda plana, la condición de contorno ha de satisfacerse en todo el plano $x=0$
- La variación con y y z debe ser la misma para las tres ondas (incidente, reflejada y transmitida)

$$k_y = k'_y = k''_y$$

$$k_z = k'_z = k''_z$$
- En particular, si la onda incidente no tiene componente k_z , ni la transmitida ni la reflejada la tienen

$$k_z = 0 \Rightarrow k'_z = k''_z = 0$$
- El número de ondas de la onda incidente, reflejada y transmitida están en un mismo plano: plano de incidencia

Número de ondas (con $k_z=0$)

$$\mathbf{k} = n_1 \frac{\omega}{c} (\cos \theta \mathbf{u}_x + \sin \theta \mathbf{u}_y)$$

$$\mathbf{k}' = n_2 \frac{\omega}{c} (\cos \theta' \mathbf{u}_x + \sin \theta' \mathbf{u}_y)$$

$$\mathbf{k}'' = n_1 \frac{\omega}{c} (-\cos \theta'' \mathbf{u}_x + \sin \theta'' \mathbf{u}_y)$$

De la igualdad de la componente y ,

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin \theta'' \\ n_1 \sin \theta &= n_2 \sin \theta' \end{aligned}$$

Ángulo crítico y reflexión total $\theta_c = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$

Reflexión total

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0' \exp \left[j \left(n_2 \frac{\omega}{c} \cos \theta' x + n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta' y - \omega t \right) \right]$$

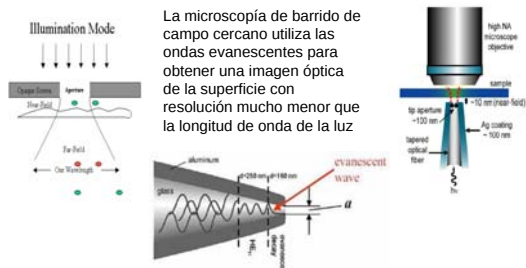
Si $\theta > \theta_c$ $\cos \theta' = \sqrt{1 - \sin^2 \theta'} = j\xi$

siendo $\xi = \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta - 1} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_c} - 1}$

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0' \exp \left(-n_2 \frac{\omega}{c} \xi x \right) \exp \left[j \left(n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta y - \omega t \right) \right]$$

$$v_f = \frac{c}{n_1 \sin \theta} \quad \delta = \frac{c}{n_2 \omega \xi}$$

Microscopía de campo cercano



Reflectividad a incidencia normal

Campos eléctricos incidente, transmitido y reflejado

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{u}_y \quad \mathbf{E}_0' = E_0' \mathbf{u}_y \quad \mathbf{E}_0'' = E_0'' \mathbf{u}_y$$

Campos magnéticos incidente, transmitido y reflejado

$$\mathbf{H}_0 = \frac{E_0}{\mu_1 v_1} \mathbf{u}_z \quad \mathbf{H}_0' = \frac{E_0'}{\mu_2 v_2} \mathbf{u}_z \quad \mathbf{H}_0'' = \frac{-E_0''}{\mu_1 v_1} \mathbf{u}_z$$

De las condiciones de contorno en la superficie de separación

$$E_0 + E_0'' = E_0' \quad \frac{E_0 - E_0''}{\mu_1 n_1} = \frac{E_0'}{\mu_2 n_2}$$

Campos eléctricos transmitido y reflejado en función del incidente

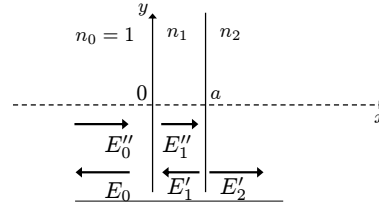
$$E_0' = \frac{2\mu_2 n_1}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2} E_0 \quad E_0'' = \frac{\mu_2 n_1 - \mu_1 n_2}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2} E_0$$

Reflectividad y transmisividad

$$R = \frac{I''}{I} = \frac{E_0''^2}{E_0^2} = \left(\frac{\mu_2 n_1 - \mu_1 n_2}{\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2} \right)^2$$

$$T = \frac{I'}{I} = \frac{\varepsilon_2 v_2 E_0'^2}{\varepsilon_1 v_1 E_0^2} = \frac{4\mu_1 \mu_2 n_1 n_2}{(\mu_2 n_1 + \mu_1 n_2)^2}$$

Lámina delgada



Campos en la lámina delgada

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{E}_0 e^{j(k_0 x - \omega t)} + \mathbf{E}_0'' e^{j(-k_0 x - \omega t)} & ; \quad x \leq 0 \\ \mathbf{E}_1' e^{j(n_1 k_0 x - \omega t)} + \mathbf{E}_1'' e^{j(-n_1 k_0 x - \omega t)} & ; \quad 0 \leq x \leq a \\ \mathbf{E}_2' e^{j(n_2 k_0 x - \omega t)} & ; \quad x \geq a \end{cases}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathbf{H}_0 e^{j(k_0 x - \omega t)} - \mathbf{H}_0'' e^{j(-k_0 x - \omega t)} & ; \quad x \leq 0 \\ \mathbf{H}_1' e^{j(n_1 k_0 x - \omega t)} - \mathbf{H}_1'' e^{j(-n_1 k_0 x - \omega t)} & ; \quad 0 \leq x \leq a \\ \mathbf{H}_2' e^{j(n_2 k_0 x - \omega t)} & ; \quad x \geq a \end{cases}$$

Condiciones de contorno

$$E_0 + E_0'' = E_1' + E_1''$$

En función de los campos

$$E_0 - E_0'' = n_1 (E_1' - E_1'')$$

$$E_1' e^{jn_1 k_0 a} + E_1'' e^{-jn_1 k_0 a} = E_2' e^{jn_2 k_0 a}$$

$$n_1 (E_1' e^{jn_1 k_0 a} - E_1'' e^{-jn_1 k_0 a}) = n_2 E_2' e^{jn_2 k_0 a} \quad 1 + r_0 = t_1 + r_1$$

$$1 - r_0 = n_1 (t_1 - r_1)$$

En términos de los coeficientes de reflexión y transmisión

$$t_1 e^{jn_1 k_0 a} + r_1 e^{-jn_1 k_0 a} = t_2 e^{jn_2 k_0 a}$$

$$n_1 (t_1 e^{jn_1 k_0 a} - r_1 e^{-jn_1 k_0 a}) = n_2 t_2 e^{jn_2 k_0 a}$$

Capa antirreflectante

Veamos qué condiciones han de cumplir los índices y el espesor de la capa para que la reflexión sea nula

De las dos primeras condiciones de contorno,

$$t_1 + r_1 = n_1 (t_1 - r_1) \quad \longrightarrow \quad t_1 = \frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} r_1$$

De la tercera y cuarta,

$$\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} r_1 e^{jn_1 k_0 a} + r_1 e^{-jn_1 k_0 a} = \frac{n_1}{n_2} \left[\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1} r_1 e^{jn_1 k_0 a} - r_1 e^{-jn_1 k_0 a} \right]$$

$$\text{luego} \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_1 j \sin(2\pi n_1 a / \lambda) + \cos(2\pi n_1 a / \lambda)}{n_1 \cos(2\pi n_1 a / \lambda) + j \sin(2\pi n_1 a / \lambda)}$$

$$a = \frac{\lambda}{4n_1} = \frac{\lambda_1}{4} \quad n_2 = \sqrt{n_1} \quad n_{\text{MgF}_2} = 1,38 \approx \sqrt{1,5}$$

Solución general

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & n_1 & -n_1 & 0 \\ 0 & e^{jn_1 k_0 a} & e^{-jn_1 k_0 a} & e^{jn_2 k_0 a} \\ 0 & n_1 e^{jn_1 k_0 a} & -n_1 e^{-jn_1 k_0 a} & n_2 e^{jn_2 k_0 a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ t_1 \\ r_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para conocer la transmisión o reflexión en el caso de una lámina delgada es necesario invertir la ecuación anterior. En el caso general de ángulo de incidencia arbitrario, de dicha resolución se obtienen las ecuaciones de Fresnel, que habéis visto con detalle en Óptica.

Ondas en conductores

- En dieléctricos, las ondas interactúan con los electrones ligados a los átomos (electrones de valencia)
- En los conductores, las ondas interactúan con los electrones libres
- Consecuencias:
 - Los metales son brillantes (reflejan la luz)
 - Al propagarse la luz en los metales, se atenúa rápidamente (los metales son opacos)
 - La velocidad de propagación de la luz en un metal es mucho menor que en el vacío o un dieléctrico
 - El campo magnético de la onda en un metal está retrasada respecto del campo eléctrico

Ondas en medios conductores

Ecuaciones de Maxwell en medios conductores

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

siendo $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$

Utilizando el mismo procedimiento que antes,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Buscamos la solución en ondas planas, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{j(\kappa x - \omega t)}$

Solución en ondas planas

Sustituyendo en la ecuación de ondas,

$$\kappa^2 = j\omega\mu\sigma + \mu\epsilon\omega^2$$

$$\kappa = \kappa_1 + j\kappa_2 \quad 2\kappa_1\kappa_2 = \mu\sigma\omega \quad \kappa_1^2 - \kappa_2^2 = \mu\epsilon\omega^2$$

$$\kappa_1 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1 \right]^{1/2} \quad \kappa_2 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

Hay un término ondulatorio, en forma de onda plana, y la amplitud se atenúa al penetrar en el medio

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\kappa_2 x} e^{j(\kappa_1 x - \omega t)}$$

Buen conductor

En el caso de un buen conductor ($\sigma \gg \epsilon\omega$)

$$\kappa_1 \approx \kappa_2 \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}$$

La longitud de penetración, $\delta = \frac{1}{\kappa_2} = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$ (efecto piel)

Para un metal típico, en el infrarrojo, $\delta \approx 10^{-8}$ m

En un buen conductor la velocidad de fase es muy pequeña:

$$v_f = \frac{\omega}{\kappa_1} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\sigma}} = \sqrt{\frac{2\omega c^2 \epsilon_0}{\sigma}} = \frac{c}{\sqrt{\sigma/2\epsilon_0\omega}} \ll c$$

Reflectividad de un metal

Es conveniente reescribir $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j(\kappa x - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{j[\tilde{n}(\omega/c)x - \omega t]}$

con $\tilde{n} = \frac{c\kappa}{\omega} = \frac{c}{\omega}(\kappa_1 + j\kappa_2) = n_1 + jn_2$

$$R = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \frac{(1 - n_1)^2 + n_2^2}{(1 + n_1)^2 + n_2^2} = \frac{(\omega - c\kappa_1)^2 + c^2\kappa_2^2}{(\omega + c\kappa_1)^2 + c^2\kappa_2^2}$$

$$R = \frac{\omega^2 + 2c^2\kappa_1^2 - 2\omega c\kappa_1}{\omega^2 + 2c^2\kappa_1^2 + 2\omega c\kappa_1} = 1 - \frac{4\omega c\kappa_1}{\omega^2 + 2c^2\kappa_1^2 + 2\omega c\kappa_1} \approx 1 - \sqrt{\frac{8\omega\epsilon_0}{\sigma}}$$

La reflectividad de un metal es prácticamente 1